Matematika

Jakub Dokulil

11. listopadu 2018

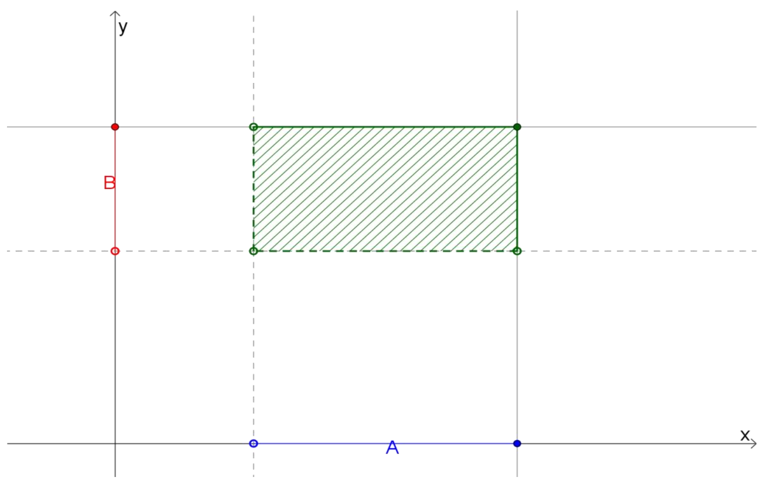
Tato příručka byla zpracována v souladu s tématy k školní části maturitní zkoušky na Gymnáziu Křenová.

Vysázeno pomocí systému LaTeX.

1 Množiny

Kartézský součin množin A a B, je množina **všech** uspořádaných dvojic $[x; y]$, ve kterých $x \in A$ a zároveň $y \in B$.

$$A \times B = \{\text{vech}\,[x; y]\,; x \in A \wedge y \in B\}$$



Obrázek 1.1: Jak ukazuje graf na obrázku, přímka zobrazující body se souřadnicí která nepatří množině je čárkovaná, každý bod na čárkované přímce nenáleží kartézskému součinu

1F. Zobrazení

Zobrazení je základním pojmem v matematice. Po formální stránce je to relace $\mathcal{F}$, ve které pro každé $a \in A$ existuje nejvýše jedno $b \in B$, že $[a, b] \in \mathcal{F}$. Jazykem matematiky to zapisujeme následovně:

Definice 1.41. **Zobrazením** z množiny A do množiny B nazveme relaci $\mathcal{F}$, která splňuje

$$\forall a \in A\ \forall b \in B\ :\ ([a, b_1] \in \mathcal{F}\ \wedge\ [a, b_2] \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad b_1 = b_2).$$

Místo $\mathcal{F} \subset A \times B$ užíváme zápisu $f \colon A \to B$ a místo $[a, b] \in \mathcal{F}$ píšeme $b = f(a)$, nebo $a \mapsto f(a)$.

Prvek a se přitom nazývá **vzor** prvku b v zobrazení f a b říkáme **obraz** prvku a v zobrazení f.
Funkcí obvykle rozumíme zobrazení, kde množina B je číselná.

Pojem definiční obor a obor hodnot relace přeneseme na zobrazení:

Definice 1.42. Všechna $a \in A$, pro které existuje $b \in B$ takové, že $f(a) = b$, tj. $[a, b] \in \mathcal{F}$, tvoří množinu, které říkáme **definiční obor** zobrazení f a značíme $\mathcal{D}(f)$.

Všechna $b \in B$, pro které existuje $a \in A$ takové, že $f(a) = b$, tj. $[a, b] \in \mathcal{F}$, tvoří množinu, které říkáme **obor hodnot** zobrazení f a značíme ji $\mathcal{H}(f)$.

Definice 1.43. (**Skládání zobrazení**) Buďte A, B, C množiny a $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zobrazení. Pokud $\mathcal{H}(f) \subset \mathcal{D}(g)$ existuje složené zobrazení $g \circ f : A \to C$ definované vztahem $(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$.

Důležitými vlastnostmi zobrazení jsou následující pojmy:

Definice 1.44. Zobrazení $f : A \to B$ (definované na celém A, tj. $\mathcal{D}(f) = A$) nazveme

(a) **prosté** neboli **injektivní** nebo **injekce** jestliže každý obraz má jenom jeden vzor, tj.

$$\forall a_1, a_2 \in A \text{ a } \forall b \in B \quad \text{platí} \quad b = f(a_1),\ b = f(a_2)\ \Rightarrow\ a_1 = a_2.$$

(b) **na** neboli **surjektivní** nebo **surjekce** jestliže obor hodnot funkce je celá množina B, tj. $\mathcal{H}(f) = B$.

(c) **vzájemně jednoznačné** neboli **bijektivní** nebo **bijekce** jestliže je injektivní i surjektivní.
Říkáme, že f je **bijekce** množin A a B.

Skládání zobrazení (pokud je definované) je asociativní: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
Každá binární relace $\mathcal{R} \subset A \times B$ má svoji inverzní relaci $\mathcal{R}^{-1} \subset B \times A$. Pro bijektivní zobrazení $f : A \to B$ stejným způsobem definujeme inverzní zobrazení $f^{-1} : B \to A$.

Definice 1.45. Buď $f : A \to B$ vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami A a B Potom zobrazení f^{-1} nazveme **zobrazením inverzním** k zobrazení f jestliže příslušná relace $\mathcal{F}^{-1}$ je inverzní k relaci $\mathcal{F}$, tj.

$$\forall a \in A\ \ \forall b \in B\ :\ f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b\,.$$

Pokud zobrazení f definované na $\mathcal{D}f \subset B$ je prosté, lze definovat inverzní zobrazení f^{-1} na $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$ s oborem hodnot $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$.

Poznámky:

(a) Skládání zobrazení (pokud je definované) je asociativní: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, není však komutativní, $g \circ f$ nemusí být vůbec definované.

(b) Zvláštním případem zobrazení je identické zobrazení I_M na množině M. Je to zobrazení z M do M, které „nic nedělá“, tj. $\mathcal{D}(\mathrm{I}_M) = \mathcal{H}(\mathrm{I}_M) = M$ a $\mathrm{I}_M(x) = x\,,\ \forall x \in M$.

(c) Identické zobrazení je bijektivní z M na M, má inverzní zobrazení, které je stejné, tj. $(\mathrm{I}_M)^{-1} = \mathrm{I}_M$. Působí jako neutrální prvek: pro $f : A \to B$ platí $f = \mathrm{I}_A \circ f = f \circ \mathrm{I}_B$.

(d) Inverzní zobrazení můžeme definovat vztahem $f^{-1} \circ f = \mathrm{I}_B$ a $f \circ f_{-1} = \mathrm{I}_B$.

Další úvahy budeme provádět pro následující **číselné množiny**: množinu **přirozených čísel** $\mathbb{N}$, množinu **celých čísel** $\mathbb{Z}$, množinu **racionálních čísel** $\mathbb{Q}$ a množinu **reálných čísel** $\mathbb{R}$.

2 Výroková logika

Výroková logika je část matematiky zabývající se studiem výroků (jak jednoduchých tak složených) a posuzováním jejich pravdivosti, dokazatelnosti a vyvratitelnosti.

2.1 Výroky

Výrok je základní objekt zkoumání výrokové logiky.

> **Výrok** *je srozumitelná oznamovací věta, u níž lze jednoznačně rozhodnout zda-li je či není pravdivá.*

Pravdivému výroku je přisuzována *pravdivostní hodnota* 1.

Nepravdivému výroku je přisuzována *pravdivostní hodnota* 0.

Negace výroku V je výrok V' nebo $\neg V$ který popírá jeho pravdivostní hodnotu. (Např slovy „Není pravda že..“)

Příklad $V \ldots$ Matematika je věda. $\neg V \ldots$ Matematika není věda.

2.1.1 Kvantifikované výroky

Kvantifikovaný výrok je právě takový výrok, který obsahuje kvantifikátor. Kvantifikátor je slovo či slovní spojení udávající informaci o počtu.

1. **Existenční kvantifikátor**, jinak $\exists$ ... *existuje alespoň jendno*
   Např.: *existuje alespoň jedno sudé číslo ...*

   $$\exists x \in \mathbb{N}; 2|x$$

2. **Obecný kvantifikátor**, jinak $\forall$ ... *pro všechna*
   Např.: *pro všechna reálná x ...*

   $$\forall x \in \mathbb{R}$$

3. **Upřesňující kvantifikátor**

Výrok (popř jeho pravdivostní hodnota)		Věty, jež nejsou výroky.
3 je liché číslo	1	Otevřte si sešity!
$4 \mid 15$	0	Je dnes čtvrtek?
Des je 11. listopadu 2018	1	„Newtonův gravitační zákon“

Tabulka 2.1: tabulka s příklady výroků

- *Více (nebo rovno) než n prvků*
- *právě n prvků*
- *méně (nebo rovno) než n prvků*

lze použít i jiné spojení jako např *více ...*,*méně ...*, atd.

negace výroků s kvantifikátory Řídí se pravidly:

Výrok V		Negace výroku $\urcorner V$	
Existuje x z množiny M s vlastností V	$\exists x \in M; V(x)$	Všechna x z množiny M nemají vlastnost V	$\forall x \in M; \urcorner V(x)$
Všechna x z množiny M mají vlastnost V	$\forall x \in M; V(x)$	Existuje x z množiny M které nemá vlastnost V	$\exists x \in M; \urcorner V(x)$

Tabulka 2.2: Negace výroků s kvantifikátory

Pravidla užitá na příkladech:

Výrok (V)		Negace výroku ($\urcorner V$)	
Existuje x větší než 3.	$\exists x; x > 3$	Všechna x jsou menší nebo rovny než tři.	$\forall x; x \leq 3$
Všichni lidé jsou dokonalí.		Existuje dokonalý člověk.	
Máš nejvýš dvě možnosti.		Máš více jak dvě možnosti	
Dal aspoň 3 góly.		Dal nejvýš dva góly.	
Máme alespoň 4, ale nejvýš 9 korun.		Mám méňe než čtyři nebo více jak 9 korun.	

$$A \veebar B \Leftrightarrow (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

výrok	negace výroku
A	$\neg A$
$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
$A \veebar B$	$A \Leftrightarrow B$
$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
$A \Leftrightarrow B$	$A \veebar B$

Tabulka 2.3: Negace složených výroků

3 Algebraické výrazy a jejich úpravy

Definice 3.1. Algebraický výraz je zápis skládající se z čísel a z písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací, popř. obsahují závorky.

Definice 3.2. Definiční obor proměnných je množina hodnot proměnných, pro něž má algebraický výraz smysl

Úprava algebraického výrazu spočívá v nahrazení daného algebraického výrazu jednodušším algebraickým výrazem (ve tvaru např. součinu, bez odmocnin ve jmenovateli, ...), který se mu rovná ve společném definičním oboru proměnných

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
další vzorce jdou odvodit pomocí bin. věty	$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

$$a^n + b^n = (a+b)\big(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1}\big) \text{ pro lichá } n.$$
$$a^n - b^n = (a-b)\big(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}\big) \text{ pro } n \in \mathbb{N}$$
$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0}a^n \cdot b^0 \pm \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 \pm \cdots + \binom{n}{n}a^0 \cdot b^n \text{ pro sudá } n$$
$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0}a^n \cdot b^0 \pm \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 \pm \cdots \pm \binom{n}{n}a^0 \cdot b^n \text{ pro lichá } n$$

Tabulka 3.1: Základní algebraické vzorce

4 Linearní rovnice a jejich soustavy

Definice 4.1. Lineární rovnicí s n neznámými, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, nazýváme rovnici tvaru:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ddots + a_nx_n = b, \text{ kde } a_i,\ b \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

5 Kvadratická rovnice a vztahy v ní

6 Kvadratické nerovnice

7 Iracionální rovnice a nerovnice

8 Rovnice a nerovnice s abs hodnotou

9 Další typy rovnic a nerovnic

10 Rovnice s parametrem

Odvození vzorce pro výpočet kořenů kv. rce. Nechť je dána kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, tedy lze jím vynásobit rovnici.

$$a^2x^2 + abx + ac = 0$$

Převede se $abx = 2ax\frac{b}{2}$ a doplní se na druhou mocninu dvoučlenu výrazem $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ten je zapotřebí také odečíst.

$$\underbrace{(ax)^2 + 2ax\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\text{vzorec } (a+b)^2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac = 0$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + ac = 0 \;/ \cdot 4$$

$$4\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - b^2 + 4ac = 0$$

První člen se roznásobí a vytkne se (-1).

$$(2ax + b)^2 - \left(b^2 - 4ac\right) = 0$$

$$(2ax + b)^2 = \left(b^2 - 4ac\right)$$

1) $b^2 - 4ac > 0$, úpravami vzniká vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{10.1}$$

2) $b^2 - 4ac = 0$, pak

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \tag{10.2}$$

11 Pravoúhlý trojúhelník

12 Shodná zobrazení

Zobrazení je aková binární relace, která přiřazuje každému prvku z množiny A (prvkem může být také například bod, přímka, úsečka) nejvýše jeden prvek z množiny B. Zobrazení Z prvku X, $X \in A$ na prvek X', $X' \in B$ je možné zapsat dvěma způsoby.

$$\mathsf{Z} : X \to X' \qquad X' = \mathsf{Z}(X)$$

X je vzor a X' obraz.

Definice 12.1. Shodné zobrazení je takové zobrazení, které každým dvěma vzorům X, Y přiřazuje obrazy X', Y', tak, že $|XY| \cong |X'Y'|$

Shodnost rovinných útvarů Dva rovinné útvary jsou shodné pokud je můžeme přemístit tak, aby se kryly. Shodnosti jsou dvojího typu.

Přímá shodnost Tato shodnost nastává pokud stačí útvary posunout, aby se překrývaly.

Nepřímá shodnost Útvary jsou nepřímo shodné pokud je nestačí posue posunou ale je zapotřebí je také „otočit v prostoru“.[1]

Věty o shodnosti trojúhelníků:

sss – dva trojúhelníky jsou shodné, shodují–li se ve všech třech stranách.

sus – dva trojúhelníky jsou shodné, shodují–li se ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném

usu – dva trojúhelníky jsou shodné, shodují–li se v jedné straně a úhlech k ní přilehlých

Ssu – dva trojúhelníky jsou shodné, shodují–li se ve dvou stranách a úhlu naproti větší z nich

Definice 12.2. Samodružný útvar ja tekový útvar, který je sám sobě vzorem i obrazem současně. (Zobrazí se sám na sebe.)

12.1 Druhy shodných zobrazení

12.1.1 Středová souměrnost

Definice 12.3. Středová souměrnost je zobrazení které přiřazuje

[1]Podle tabulek je nepřímá shodnost definována následujícně.

> *Každá útvar U lze ztotožnit s jeho obrazem U' překreslením na průsvitku, obrácením průsvitky a přemístěním.*

1. pro bod $X \neq S$, $\mathsf{S}_S(X) = X'$, $S \doteq XX'$,
2. bodu $X = S$, $\mathsf{S}_S(X) = X'$, $X = X' = S$

Útvary takto zobrazené jsou **přímo shodné**. Přímky procházející středem souměrnosti jsou samodružné přímky. Příklad lze vidět na obr. 12.1a.

12.1.2 Osová souměrnost

Definice 12.4. Osová souměrnost, O_o, je zobrazení které přiřazuje

1. pro bod bodu $X \neq S$, $\mathsf{O}_o(X) = X'$, O je osou XX',
2. bodu $X \in o$, $\mathsf{O}_o(X) = X'$, $X = X'$

Útvary takto zobrazené jsou **nepřímo shodné**. Přímky kolmé na osu souměrnosti jsou samodružné. Příklad lze vidět na obr. 12.1b.

12.1.3 Posunutí

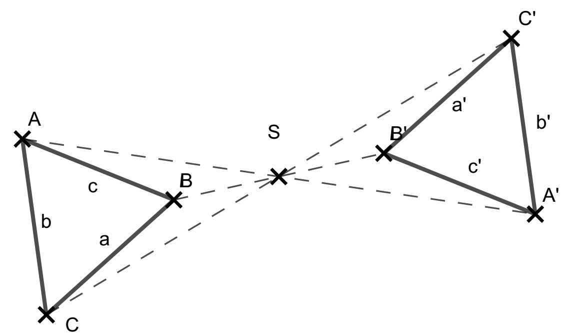
Definice 12.5. Posunutí o orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ $\mathsf{T}_{\overrightarrow{AB}}$ je zobrazení které Každému bodu X přiřazuje bod X' tak že $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{XX'}$ jsou umístěním vektoru $\vec{u}$.

Cizím slovem *translace*. Takto zobrazené útvary jsou **přímo shodné**. Samodružné jsou přímky rovnoběžné s orientovanou úsečkou. Posunutí lze vidět na obr 12.1c.

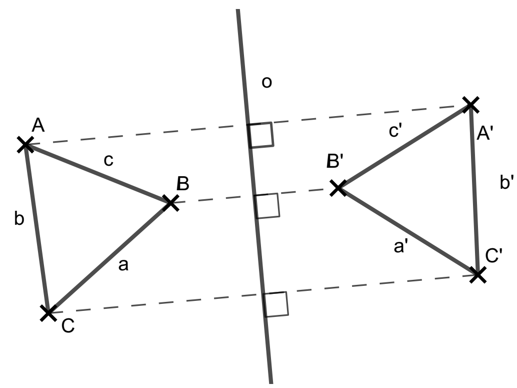
12.1.4 Otočení

Definice 12.6. Otočení o orientovasný úhel *varphi* $\neq k \cdot 2\pi$ okolo středu S $\mathsf{R}_{S,\varphi}$ je zobrazení které každému bodu X přiřazuje bod X' tak že $|\measuredangle XSX'| = \varphi$.

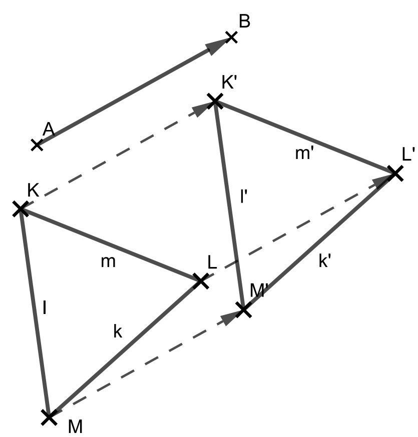
Jinak *rotace*. Takto zobrazené útvary jsou **přímo shodné**. Samodružný je střed ostáčení. Viz obr 12.1d.



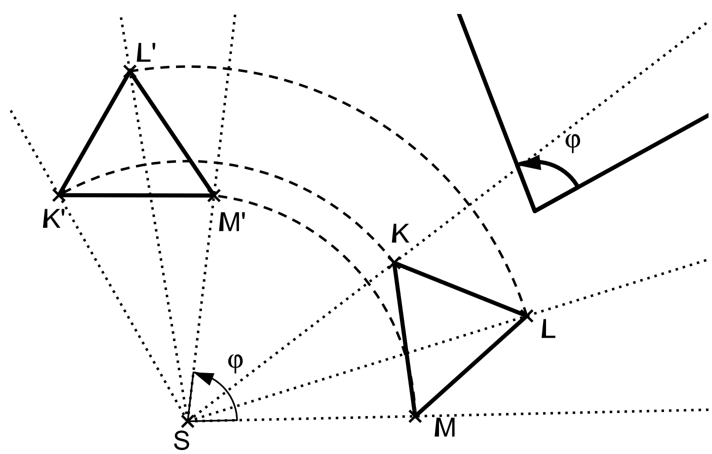
(a) $\triangle A'B'C' = \mathsf{S}_S(\triangle ABC)$



(b) $\triangle A'B'C' = \mathsf{O}_o(\triangle ABC)$



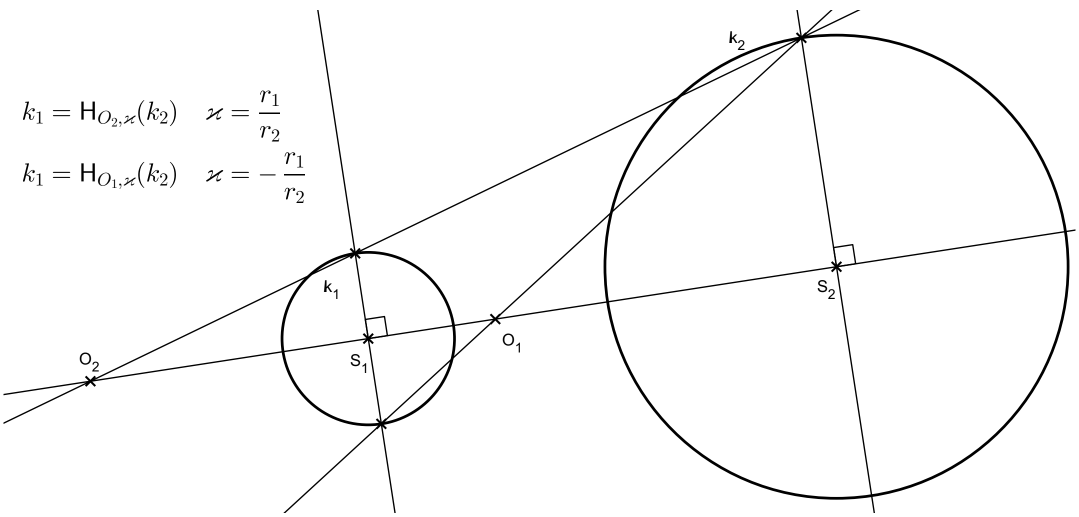
(c) $\triangle K'L'M' = \mathsf{T}_{\overrightarrow{AB}}(\triangle KLM)$



(d) $\triangle K'L'M' = \mathsf{R}_{S,\varphi}(\triangle KLM)$

Obrázek 12.1: Obrázky k shodným zobrazením

13 Stejnolehlost



Obrázek 13.1: Stejnolehlost kružnic.

14 Konstrukční úlohy

15 Úhly v Kružnici

16 Funkce

16.1 Úvod a pojmy

Uspořádaná dvojce

Definice 16.1. Uspořádaná dvojce je taková dvojce, ve které záleží na pořadí proměnných. Platí: $x \neq y \Rightarrow [x;y] \neq [y;x]$

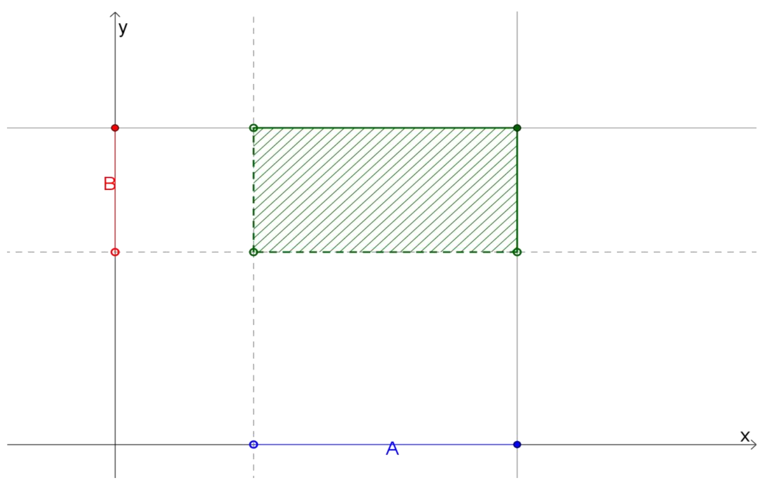
Kartézský součin

Definice 16.2. Kartézský součin je množinová operace.

Kartézský součin množin A a B, je množina **všech** uspořádaných dvojic $[x;y]$, ve kterých $x \in A$ a zároveň $y \in B$.

$$A \times B = \{[x;y]\,; x \in A \wedge y \in B\}$$

Pozor! při kreslení grafů je zapotřebí dobře rozhodnout, který bod je a který není kartézským součinem. Viz 16.1.



Obrázek 16.1: Jak ukazuje graf na obrázku, přímka zobrazující body se souřadnicí která nepatří množině je čárkovaná, každý bod na čárkované přímce nenáleží kartézskému součinu

Binární relace

Definice 16.3. Binární relace je libovolná podmnožina kartézského součinu.

$$U \subseteq A \times B$$

Zobrazení

Definice 16.4. Zobrazení je taková binární relace, která každému prvku $x \in A$ přiřazuje **nejvýš jedno** $y \in B$.

Funkce

Definice 16.5. Funkce je zobrazení v $\mathbb{R}$.
nebo
Funkce je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

Definiční obor

Definice 16.6.
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ \exists y \in \mathbb{R};\ [x;y] \in f\}$$

Obor hodnot

Definice 16.7.
$$H(f) = \{y \in \mathbb{R};\ \exists x \in \mathbb{R};\ [x;y] \in f\}$$

Graf funkce f je zobrazení všech bodů $X\left[x; f(x)\right]$, $x \in D(f)$ do roviny.

Funkce může být zadána

Výčtem prvků například: $f = \{[1,2],[5,7]\}$

Rovnicí zápis $f : y = f(x)$

Graficky fce je vyjádřena grafem

Slovním popisem např: *Funkce f každému nezápornému číslu přiřadí počet prvočísel, menších nebo rovných tomuto číslu.*

Definice 16.8. Prostá funkce je taková funkce f. pro kterou platí:

$$\forall x_1,\ x_2 \in D(f);\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

16.2 Vlastnosti funkcí

16.2.1 Monotónost

Nech't $M \subseteq D(f)$.

Monotónost označuje zdali je funkce f na daném intervalu rostoucí, klesající, nerostoucí, či neklesající. Monotónost lze zjistit pomocí derivace.

Rostoucí na $M \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Klesající na $M \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Neklesající na $M \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Nerostoucí na $M \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Ryze monotónní funkce jsou funkce klesající a rostoucí.
Každá ryze monotónní funkce je zároveň prostá.

16.2.2 Sudost a lichost

Sudost a lichost jsou druhy symetrie funkcí.

Sudá je funkce $\Leftrightarrow \forall x \in D(x);\ \exists -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x)$.
Graf takové funkce je pak osově souměrná podle osy y.

Lichá je funkce $\Leftrightarrow \forall x \in D(x);\ \exists -x \in D(f) \wedge f(-x) = -f(x)$.
Graf funkce je pak středově souměrná podle počátku soustavy souřadnic.

16.2.3 Omezenost

Nechť $M \subseteq D(f)$.

Omezená zdola je funkce $\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{R};\ \forall x \in M;\ f(x) > d$

Omezená shora je funkce $\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R};\ \forall x \in M;\ f(x) < h$

Funkce je omezená na M pokud je na M omezená zároveň shora i zdola.

17 Kombinatorika

Kombinatorika je součást *finitní* matematiky zabývající se konečnými množninami a uspořádanými k-ticemi (pro $k \in \mathbb{N}$)

17.1 Kombinatorická pravidla

Pravidlo 17.1 (kombinatorické pravidlo součinu)**.** Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby…, k-tý člen n_k způsoby, je roven číslu p pro které platí:

$$p = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k \tag{17.1}$$

Pravidlo 17.2 (Kombinatorické pravidlo součtu)**.** Jsou-li $A_1, A_2 \ldots A_n$ konečné množiny, které mají po řaddě $p_1, p_2 \ldots p_n$ prvků, přičemž každé dvěz těchto množin jsou disjunktní, pak platí:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \sum_{k=1}^{n} p_k \tag{17.2}$$

17.2 Variace

Variace k-té třídy bez opakování k-člená variace z n prvků $(k, n \in \mathbb{N}; k \leqslant n)$ je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvíš jednou. Počet takových variací pak je:

$$V_{(k,n)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{17.3}$$

Kde $V_{(k,n)}$ je **variace k-té třídy pro n prvků bez opakování**, pokud není známo jestli s nebo bez opakování, pak se tím automaticky rozumí, že variace je bez opakování.

Variace k-té třídy s opakováním k-člená variace s opakováním z n prvků $(k, n \in \mathbb{N}; k \leqslant n)$ je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvíše k-krát.

$$V'_{(k,n)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{17.4}$$

Kde $V_{(k,n)}$ je **variace k-té třídy pro n prvků s opakováním**.

17.3 Permutace

Permutace z n prvků bez opakování Je vlastně Variace n-té třídy z n prvků bez opakování.

Taková permutace je uspořádaná n-tice sestavená z n prvků tak že se v ní každý vyskytuje právě jednou. Počet takových permutací pak je:

$$P_n = V'_{(n,n)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!\,. \tag{17.5}$$

Permutace s opakováním Taková permutace je uspořádaná n-tice sestavená z n prvků, přičemž každý je v ní obsažen nejméně jednou.

Přesněji: První prvek se vyskytuje k_1-krát, druhý k_2-krát,. . . , n-tý k_n-krát. Pak počet takových permutací je:

$$P'_{k_1,k_2\ldots,k_n}(n) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}\,. \tag{17.6}$$

Kde n je počet prvků pro něž platí $n = \sum_{i=1}^{n} k_i$.

Seznam obrázků

Seznam tabulek