

П. Петков Г. Лехов А. Марковски

Ръководство по робастни системи за управление

Анализ и синтез с MATLAB®

ПРЕДГОВОР

В настоящето ръководство са дадени теоретични и методични указания за провеждането на лабораторни упражнения по робастни системи за управление с използване на инструменталния пакет Robust Control Toolbox, ver. 3, предназначен за анализ и синтез на робастни системи с версия 7 на MATLAB®[1].

Материалът, обхванат от ръководството, включва изграждането на модели на системи с неструктуррирана и структурирана неопределеност, анализ на робастната устойчивост и робастното качество, синтез на робастни системи с желани честотни характеристики, \mathcal{H}_∞ синтез и μ -синтез на робастни системи за управление. В последните две упражнения е разгледан цялостният анализ и синтез на две реалистични системи.

Теоретичният материал, разгледан в ръководството, е заимстван основно от [2], като желанието на авторите е било неговият обем и ниво да се поддържат на необходимия минимум.

Ръководството се състои от 12 упражнения, разгледани в 12 глави. Във всяка глава най-напред се дават кратки теоретични сведения, след което се описват задачите за анализ или синтез на робастни системи, които трябва да се решат в съответното упражнение. Всяка решавана задача се илюстрира с числен пример, в който се дават командните редове, необходими за получаване на решението. Главата завършва със задачи, които трябва да се решат от студентите по време на лабораторното упражнение или самостоятелно. Към ръководството е приложен компакт-диск, който съдържа всички M-файлове, необходими за решаване на разгледаните примери. Преподавателите могат да получат M-файлове с решените задачи от авторите.

Ръководството е предназначено за лабораторните упражнения по курсовете “Робастни системи за управление” и може да се използва като учебно пособие от студентите по специалността “Автоматика, информационна и управляваща техника” на техническите университети. То може да бъде полезно и за докторанти и специалисти, интересуващи се от синтеза на робастни системи за управление. Предполага се, че читателят е запознат с основите на теорията на линейните системи за управление в честотната област и в областта на пространство на със-

тояннията.

Авторите ще бъдат благодарни за всички въпроси и бележки към ръководството, които може да се изпращат на техните електронни адреси – php@tu-sofia.bg (Петко Петков), glehov@ru.acad.bg (Георги Лехов) и agm@tu-sofia.bg (Аспарух Марковски).

Съдържание

ПРЕДГОВОР	iii
1 МНОГОМЕРНИ ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ	1
1.1 Теоретични сведения	1
1.2 Въвеждане и преобразуване на модели	6
1.3 Многомерни системи с обратна връзка	15
1.4 Задачи	25
2 МОДЕЛИ СЪС СТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ	27
2.1 Теоретични сведения	27
2.2 Модел с неопределеност при предварително разделени G_{nom} и Δ	33
2.3 Пряко конструиране на модел с неопределеност	39
2.4 Символно конструиране на модел с неопределеност	40
2.5 Конструиране на модел с неопределеност с използване на iconnect	41
2.6 Конструиране на модел с неопределеност с използване на sysic	42
2.7 Други функции за конструиране на модел с неопределеност	44
2.8 Задачи	45
3 МОДЕЛИ С НЕСТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ	47
3.1 Теоретични сведения	47
3.2 Модел с адитивна неопределеност	50
3.3 Модел с мултиплективна неопределеност	53
3.4 Немоделирана динамика	56
3.5 Многомерни модели с неструктуррирана неопределеност	59
3.6 Задачи	59
4 РОБАСТНА УСТОЙЧИВОСТ ПРИ НЕСТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ	61
4.1 Теоретични сведения	61

4.2	Условия за робастна устойчивост при адитивна и мултипликативна неопределеност	64
4.3	Робастна устойчивост при неопределеност в простите множители .	66
4.4	Определяне на запаса по устойчивост	67
4.5	Пример за анализ на робастната устойчивост	70
4.6	Задачи	80
5	РОБАСТНА УСТОЙЧИВОСТ ПРИ СТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ	81
5.1	Теоретични сведения	81
5.2	Команди за анализ на робастната устойчивост	84
5.3	Примери за анализ на робастната устойчивост	88
5.4	Задачи	103
6	РОБАСТНО КАЧЕСТВО	105
6.1	Определяне на най-лошото качество	105
6.2	Използване на структурираната сингулярна стойност	113
6.3	Задачи	125
7	СИНТЕЗ ПРИ ЖЕЛАНИ ЧЕСТОТНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ	129
7.1	Компромиси при синтеза на многомерните системи	129
7.2	\mathcal{H}_∞ синтез при желани честотни характеристики	133
7.3	\mathcal{H}_∞ синтез при смесена чувствителност	141
7.4	Задачи	148
8	\mathcal{H}_∞ СИНТЕЗ	149
8.1	\mathcal{H}_∞ качество	149
8.2	Връзка с типични изисквания към качеството	150
8.3	Пример за \mathcal{H}_∞ синтез	154
8.4	Задачи	166
9	μ СИНТЕЗ И DK ИТЕРАЦИИ	169
9.1	Теоретични сведения. Решаване на задачата за μ синтез	169
9.2	Теоретични сведения – изчисляване на D стъпката	173
9.3	Програмни средства в MATLAB [®] за μ синтез чрез DK итерации .	174
9.4	Пример за μ синтез с използване на <code>dksyn</code>	175
9.5	Честотни характеристики и симулиране на затворената система .	185
9.6	Задачи	188

10 ОПРОСТЯВАНЕ НА УПРАВЛЯВАЩОТО УСТРОЙСТВО	191
10.1 Теоретични сведения	191
10.2 Функции за опростяване на управляващото устройство	192
10.3 Пример за опростяване на модела с <code>hankelmr</code>	198
10.4 Пример за опростяване на модела с <code>ncfmr</code>	202
10.5 Задачи	204
11 РОБАСТНО УПРАВЛЕНИЕ НА ТВЪРД ДИСК	205
11.1 Следяща система на твърд диск	205
11.2 Получаване на модела на неопределеността	212
11.3 Изисквания към качеството на затворената система	216
11.4 Системни съединения	218
11.5 Синтез на непрекъснато управляващо устройство	220
11.6 Сравнение на синтезираните управляващи устройства	229
11.7 Понижаване реда на управляващото устройство	239
11.8 Синтез на дискретно управляващо устройство	241
11.9 Симулиране на нелинейната система	247
11.10 Изводи	250
11.11 Задачи	251
12 РОБАСТНО УПРАВЛЕНИЕ НА МАНИПУЛАТОР С ЕЛАСТИЧНО ЗВЕНО	253
12.1 Динамичен модел на манипулятор с еластично звено	254
12.2 Получаване на модел с неопределени параметри	259
12.3 Синтез на съсредоточено управляващо устройство	266
12.4 Сравнение на μ - и ПД управляващи устройства	274
12.5 Синтез на разсредоточено управляващо устройство	285
12.6 Задачи	292
ПРИЛОЖЕНИЕ. ФУНКЦИИ В ROBUST CONTROL TOOLBOX	295
БИБЛИОГРАФИЯ	299
АЗБУЧЕН УКАЗАТЕЛ	300

Глава 1

МНОГОМЕРНИ ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ

1.1 Теоретични сведения

Нека една линейна стационарна система за управление е описана със следните линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

$$y = Cx + Du, \quad (1.2)$$

където $x(t) \in \mathbb{R}^n$ се нарича *състояние* на системата, $x(t_0)$ се нарича *начално състояние* на системата, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ се нарича *вход* на системата и $y(t) \in \mathbb{R}^r$ е *изход* на системата. A, B, C, D са реални матрици с постоянни елементи, които имат съответните размерности. Система за управление с един вход ($m = 1$) и един изход ($r = 1$) се нарича SISO система (от английското Single Input Single Output System – система с един вход и един изход), в противен случай тя се нарича MIMO система (от английското Multi Input Multi Output System – система с много входове и много изходи, т.e., *многомерна система*). Съответната предавателна матрица от u към y се определя от

$$Y(s) = G(s)U(s),$$

където $U(s)$ и $Y(s)$ са Лапласовите преобразования на $u(t)$ и $y(t)$ при нулево начално условие $x(0) = 0$. Следователно,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

За улесняване на изчисленията, включващи предавателни матрици, се използва означението

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \stackrel{\text{def}}{=} C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Предавателната матрица описва само тази част на системата, която е едновременно напълно управляема и напълно наблюдаема.

Предавателната матрица е *правилна*, ако редът на полинома в числителя на всеки елемент на предавателната матрица е по-малък или равен на реда на полинома в знаменателя на този елемент. Предавателната матрица се нарича *строго правилна*, ако редът на полинома в числителя на всеки елемент на предавателната матрица е по-малък от реда на полинома в знаменателя на този елемент.

Нека предположим, че $G(s)$ е реална рационална предавателна матрица, която е правилна. Тогава моделът в пространство на състоянията (A, B, C, D) наричаме *реализация* на $G(s)$, ако

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right].$$

Предавателната матрица е строго правилна, ако реализацията в пространство на състоянията удовлетворява условието

$$D = 0.$$

Реализацията в пространство на състоянията (A, B, C, D) на предавателната матрица $G(s)$ се нарича *минимална реализация* на $G(s)$, ако A има възможно най-малката размерност.

Реализацията в пространство на състоянията е минимална, ако и само ако двойката (A, B) е управляема, а двойката (C, A) е наблюдаваема. Минималната реализация е неединствена.

За дадена устойчива матрица A двойката (C, A) е наблюдаваема, ако и само ако решението на уравнението на Ляпунов

$$A^H L_o + L_o A + C^H C = 0$$

е положително определено (C^H е Ермитово спрегнатото на C).

Решението L_o се нарича *грамиан на наблюдаемостта*. По подобен начин, двойката (A, B) е управляема, ако и само ако решението на уравнението

$$A L_c + L_c A^H + B B^H = 0$$

е положително определено. Матрицата L_c се нарича *грамиан на управляемостта*.

Нека (A, B, C, D) е реализация в пространство на състоянията на $G(s)$. Собствените стойности на A се наричат полюси на $G(s)$.

Дадена матрица се нарича *полиномиална матрица*, ако всеки елемент на матрицата е полином с реални коефициенти.

Нека $Q(s)$ е $r \times m$ полиномиална матрица. Тогава *нормалният ранг* на $Q(s)$, означаван с $\text{normalrank}(Q(s))$, е максимално възможният ранг на $Q(s)$ при $s \in \mathbb{C}$. Нека например

$$Q(s) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ s^2 & 1 \\ s & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогава $\text{normalrank}(Q(s)) = 2$, тъй като $\text{rank}(Q(3)) = 2$. Обаче $\text{rank}(Q(0)) = 1$.

За да дефинираме нулите, нека разгледаме следната системна матрица

$$Q(s) = \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Комплексното число $z_0 \in C$ се нарича *инвариантна нула* на реализация на системата, ако то удовлетворява

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - z_0 I & B \\ C & D \end{bmatrix} < \text{normalrank} \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Инвариантните нули не се променят от постоянна обратна връзка по състоянието, а също така при неособени преобразувания на състоянието, входа и изхода.

Нека $G(s)$ е реална рационална предавателна матрица и нека (A, B, C, D) е съответната минимална реализация. Тогава комплексното число z_0 се нарича *предавателна нула* на $G(s)$, ако и само ако то е инвариантна нула на минималната реализация.

Един друг начин за представяне на системи е факторизацията на взаимно прости множители, която може да се използва както в пространство на състоянията, така и при предавателни матрици. В последния случай *дясната взаимно приста факторизация* на G е

$$G(s) = N_r(s)M_r^{-1}(s),$$

където $N_r(s)$ и $M_r(s)$ са устойчиви взаимно прости предавателни матрици. Устойчивостта означава, че $N_r(s)$ трябва да съдържа всички нули на $G(s)$, които се намират в дясната комплексна полуравнина, а $M_r(s)$ трябва да съдържа като нули в дясната комплексна полуравнина всички полюси на $G(s)$, които се намират в дясната комплексна полуравнина. Това, че множителите са взаимно прости означава, че не трябва да има общи неустойчиви нули в $N_r(s)$ и $M_r(s)$, което да доведе до съкращаване на полюси и нули при формирането на $N_r M_r^{-1}$.

По подобен начин, лява взаимно проста факторизация на G е

$$G(s) = M_l^{-1}(s)N_l(s).$$

Тук N_l и M_l са устойчиви и взаимно прости.

За скаларна (SISO) система лявата и дясната факторизации на взаимно прости множители съвпадат, $G = N M^{-1} = M^{-1}N$.

Да разгледаме скаларната система

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s-3)(s+4)}. \quad (1.3)$$

За да получим факторизация на взаимно прости множители, най-напред правим всички неустойчиви полюси на G нули на M , и всички неустойчиви нули на G – нули на N . След това разполагаме полюсите на N и M така, че N и M да са правилни и да е в сила тъждеството $G = N M^{-1}$. По такъв начин

$$N(s) = \frac{s-1}{s+4}, \quad M(s) = \frac{s-3}{s+2}$$

е факторизация на взаимно прости множители. Обикновено N и M се избират да имат еднакви полюси и същият ред, както $G(s)$. Това дава най-голяма свобода по отношение на получаването на реализация на $[M(s) \ N(s)]^T$ от най-нисък ред. Следователно, имаме че

$$N(s) = k \frac{(s-1)(s+2)}{s^2 + k_1 s + k_2}, \quad M(s) = k \frac{(s-3)(s+4)}{s^2 + k_1 s + k_2} \quad (1.4)$$

е факторизация на прости множители на (1.3) за всяко k и за всички $k_1, k_2 > 0$.

Честотните характеристики на многомерна система $G(s)$ с m входа и r изхода е удобно да се получат с помощта на *декомпозицията по сингуларни стойности*. Нека разгледаме фиксирана честота ω , когато $G(j\omega)$ е постоянна $r \times m$ комплексна матрица и да означим за простота $G(j\omega)$ с G . Всяка матрица G може да се факторизира с помощта на декомпозицията по сингуларни стойности във вида

$$G = U\Sigma V^H, \quad (1.5)$$

където

Σ е $r \times m$ матрица с $k = \min\{r, m\}$ неотрицателни сингуларни стойности σ_i , подредени в намаляващ ред по нейния главен диагонал; останалите елементи са равни на нула. Сингуларните стойности са положителните квадратни корени на собствените стойности на $G^H G$, където G^H е Ермитово спрегнатата на G .

U е $r \times r$ унитарна матрица от изходните сингуларни вектори u_i ;

V е $m \times m$ унитарна матрица от входните сингуларни вектори v_i .

Най-голямото усилване на системата за всеки входен сигнал е равно на максималната сингулярна стойност

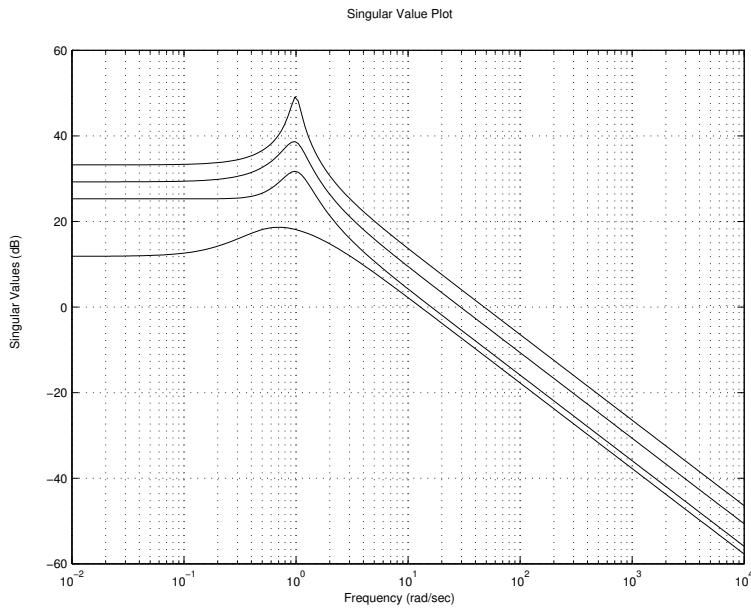
$$\bar{\sigma}(G) \equiv \sigma_1(G) = \max_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2},$$

а най-малкото усилване за всеки входен сигнал е равно на минималната сингулярна стойност

$$\underline{\sigma}(G) \equiv \sigma_k(G) = \min_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2},$$

където $k = \min\{r, m\}$. По такъв начин за всеки вектор d имаме, че

$$\underline{\sigma}(G) \leq \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} \leq \bar{\sigma}(G). \quad (1.6)$$



Фигура 1.1: Сингулярни стойности на многомерна система

За динамични системи сингулярните стойности и съответните им сингулярни вектори се изменят с честотата. Поради това обикновено се използват логаритмичните амплитудно-честотни характеристики на сингулярните стойности (фиг.

1.1). Това дава възможност да се постигне аналогия с изследването на едномерните системи в честотната област и да се използва интуицията, създадена при прилагане на класическите методи за анализ и синтез на системи за управление.

Оценяването на “големината” на една предавателна матрица се извършва с помощта на някоя от системните норми. В робастното управление най-голямо приложение намира \mathcal{H}_∞ нормата. За да въведем \mathcal{H}_∞ нормата на $G(s)$, използваме максималната сингулярна стойност на честотната характеристика $G(j\omega)$ и вземаме максимума ѝ по честотата

$$\|G\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)).$$

Вижда се, че \mathcal{H}_∞ нормата е пикът на “амплитудата” на предавателната функция (пикът на максималното сингулярно число на фиг. 1.1).

Дискретните многомерни системи се описват в пространство на състоянията с уравненията

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad x(0) = x_0, \quad (1.7)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k. \quad (1.8)$$

1.2 Въвеждане и преобразуване на модели

Въвеждането на модели на линейни стационарни системи (LTI models) в MATLAB® се извършва с помощта на следните команди:

- **ss** – Модели в пространство на състоянията (обекти от типа SS)
- **tf** – Предавателни функции (обекти от типа TF)
- **zpk** – Модели нула-полюс-коefficient на усиливане (обекти от типа ZPK)
- **frd** – Модели с данни за честотни характеристики (обекти от типа FRD)

По-долу ще бъде показано как се въвеждат модели на многомерни системи с помощта на командите **ss** и **tf**.

Получаването на модел в пространство на състоянията се илюстрира със следния пример.

Пример 1.1 Нека е дадена система с два входа и два изхода, описана в пространство на състоянията с уравненията

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned}$$

където

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \\ -6 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Разглежданата система е напълно управляема и напълно наблюдаема, поради което моделът в пространство на състоянията представлява минимална реализация.

След въвеждането на матриците A , B , C и D в MATLAB[®], получаването на модела в пространство на състоянията се извършва с командата

```
Gss = ss(A,B,C,D)
```

Въвеждането на командата

```
Gss
```

дава следния резултат

```
a =
x1 x2 x3
x1 -1 0 5
x2 2 1 -4
x3 -6 -3 -2
```

```
b =
u1 u2
x1 5 0
x2 -4 1
x3 0 6
```

```
c =
x1 x2 x3
y1 -1 0 -4
y2 2 3 6
```

```
d =
    u1  u2
y1   3  -2
y2  -4   1
```

Continuous-time model.

Получаването на предавателната матрица на разглежданата система от модела в пространство на състоянията се извършва с командата

```
Gtf = tf(Gss)
```

В резултат се получава

```
Transfer function from input 1 to output...
  3 s^3 + s^2 + 118 s - 80
#1: -----
  s^3 + 2 s^2 + 17 s - 14

  -4 s^3 - 10 s^2 - 172 s + 144
#2: -----
  s^3 + 2 s^2 + 17 s - 14

Transfer function from input 2 to output...
  -2 s^3 - 28 s^2 - 52 s + 109
#1: -----
  s^3 + 2 s^2 + 17 s - 14

  s^3 + 41 s^2 - 4 s + 46
#2: -----
  s^3 + 2 s^2 + 17 s - 14
```

От този резултат следва, че предавателната матрица на системата е

$$G = \begin{bmatrix} \frac{3s^3 + s^2 + 118s - 80}{s^3 + 2s^2 + 17s - 14} & \frac{-2s^3 - 28s^2 - 52s + 109}{s^3 + 2s^2 + 17s - 14} \\ \frac{-4s^3 - 10s^2 - 172s + 144}{s^3 + 2s^2 + 17s - 14} & \frac{s^3 + 41s^2 - 4s + 46}{s^3 + 2s^2 + 17s - 14} \end{bmatrix}.$$

Системата не е строго правилна, тъй като редът на полиномите в числителя е равен на реда на полинома в знаменателя.

Определянето на полюсите и предавателните нули на системата може да се извърши от модела в пространство на състоянията, използвайки командите `pole` и `zero`. В резултат се получава

```
p = pole(Gss)  
  
p =  
  
-1.3681 + 4.1404i  
-1.3681 - 4.1404i  
0.7363
```

```
z = zero(Gss)  
  
z =  
  
-0.9087 +11.1357i  
-0.9087 -11.1357i  
2.2174
```

Обърнете внимание, че предавателните нули не са непременно нулите на полиномите в числителите на елементите на предавателната матрица.

Командите `pole` и `zero` могат да се използват и за определяне на полюсите и нулите от предавателната матрица. Тогава обаче се получава

```
p = pole(Gtf)  
  
p =  
  
-1.3681 + 4.1404i  
-1.3681 - 4.1404i  
0.7363  
-1.3681 + 4.1404i  
-1.3681 - 4.1404i  
0.7363
```

```
z = zero(Gtf)  
  
z =  
  
-0.9087 +11.1357i  
-0.9087 -11.1357i  
-1.3681 + 4.1404i  
-1.3681 - 4.1404i  
2.2174
```

0.7363

т.е., полюсите и нулите на първоначалната система се повтарят два пъти. В този случай вместо полюсите и нулите на системата от 3-ти ред се намират полюсите и нулите на реализация от 6-ти ред, която се получава като междинен резултат при изчисляването на полюсите и нулите. (Изчисляването на тези величини става в пространство на състоянията.) Този факт се потвърждава при изпълнението на команда

$G = ss(Gtf)$

която получава реализация в пространство на състоянията от изчислената преди това предавателна матрица на системата. Резултатът от изпълнението на тази команда е

a =

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x1	-2	-2.125	1.75	0	0	0
x2	8	0	0	0	0	0
x3	0	1	0	0	0	0
x4	0	0	0	-2	-4.25	3.5
x5	0	0	0	4	0	0
x6	0	0	0	0	1	0

b =

	u1	u2
x1	4	0
x2	0	0
x3	0	0
x4	0	8
x5	0	0
x6	0	0

c =

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
y1	-1.25	2.094	-1.188	-3	-0.5625	2.531
y2	-0.5	-3.25	2.75	4.875	-0.6562	1.875

```
d =
    u1   u2
y1   3   -2
y2  -4    1
```

Continuous-time model.

Вижда се, че при обратното преобразуване от предавателна матрица към модел в пространство на състоянията, се получава реализация от 6-ти ред. Очевидно е, че тази реализация не е минимална.

Получаването на минимална реализация в пространство на състоянията в случая може да стане с команда

```
G = ss(Gtf, 'min')
```

Резултатът е

```
a =
      x1          x2          x3
x1  -1.784      -5.23      2.632
x2   3.298     -0.3631   -0.01393
x3   0.2271      1.286      0.147
```

```
b =
      u1          u2
x1   0.6277      6.158
x2   2.925     -0.03289
x3  -0.1801      0.2784
```

```
c =
      x1          x2          x3
y1  -4.016    -0.691    2.544
y2   6.238    -1.907    1.88
```

```
d =
    u1   u2
y1   3   -2
y2  -4    1
```

Получаването на матрицата на състоянието A от модела G може да стане с командния ред

```
A = Gss.A
```

По аналогичен начин могат да се получат и останалите матрици на модела в пространство на състоянията.

Задаването на модели на дискретни системи в пространство на състоянията отново се извършва с команда `ss`, като се задава допълнително периодът на дискретизацията Ts :

```
Gd = ss(A,B,C,D,Ts)
```

Ако е необходимо да се дискретизира непрекъснат модел G в пространство на състоянията при зададен период на дискретизацията Ts , това може да стане с команда `c2d`.

```
Gd = c2d(G,Ts)
```

Нека сега разгледаме получаването на модел на многомерна система, зададена с предавателна матрица.

Пример 1.2 Дадена е система от 5-ти ред с два входа и два изхода, описана с предавателната матрица

$$G = \begin{bmatrix} \frac{6}{(0.9s+1)(0.1s+1)} & \frac{-0.05}{0.1s+1} \\ \frac{0.07}{0.3s+1} & \frac{5}{(1.8s-1)(0.06s+1)} \end{bmatrix}.$$

Въвеждането на предавателната матрица се извършва с командните редове

```
s = tf('s');
g11 = 6/((0.9*s + 1)*(0.1*s + 1));
g12 = -0.05/(0.1*s + 1);
g21 = 0.07/(0.3*s + 1);
g22 = 5/((1.8*s - 1)*(0.06*s+1));
G = [g11 g12; g21 g22]
```

В резултат се получава

Transfer function from input 1 to output...

$$\#1: \frac{6}{0.09 s^2 + s + 1}$$

$$\#2: \frac{0.07}{0.3 s + 1}$$

Transfer function from input 2 to output...

$$\#1: \frac{-0.05}{0.1 s + 1}$$

$$\#2: \frac{5}{0.108 s^2 + 1.74 s - 1}$$

Получаването на реализация в пространство на състоянията, използвайки въведената предавателна матрица, може да стане, както бе описано в Пример 1.1, като винаги трябва да се прави опит да се получи минимална реализация.

Честотните характеристики на сингулярните стойности на предавателната матрица се получават с команда `sigma`. (Същата команда може да се използва и с модел в пространство на състоянията.) Получаването на сингулярните стойности в диапазона 10^{-2} rad/s – 10^3 rad/s се извършва с командния ред

```
sigma(G,{10^(-2) 10^3})
```

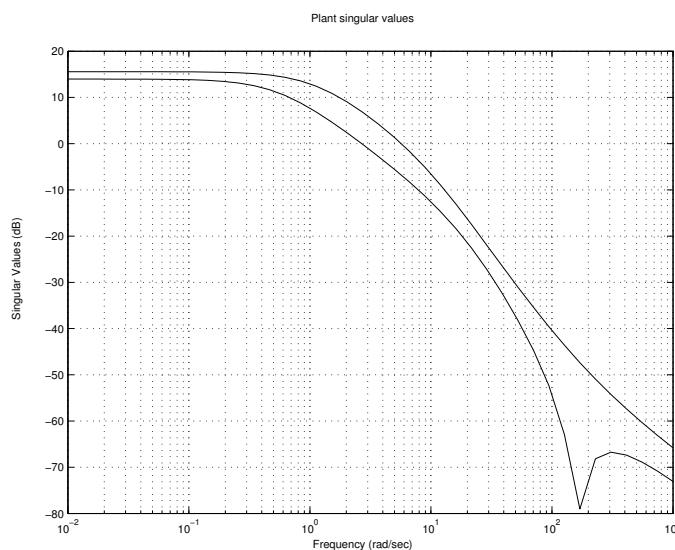
Сингулярните стойности на системата са показани на фиг. 1.2. Вижда се, че под честота 1 rad/s усилването на системата остава постоянно.

За дадени системи с предавателни матрици G_1 и G_2 , предавателната матрица на тяхното последователно съединение (при условие, че броят на изходите на първата система е равен на броя на входовете на втората), се намира с командния ред

```
G = G2*G1
```

Паралелното съединение на две системи G_1 и G_2 с еднакъв брой входове и изходи се намира с командния ред

```
G = G1 + G2
```



Фигура 1.2: Сингуларни стойности на системата

Факторизацията на взаимно прости множители на предавателна матрица може да се извърши с командата `ncfmr`.

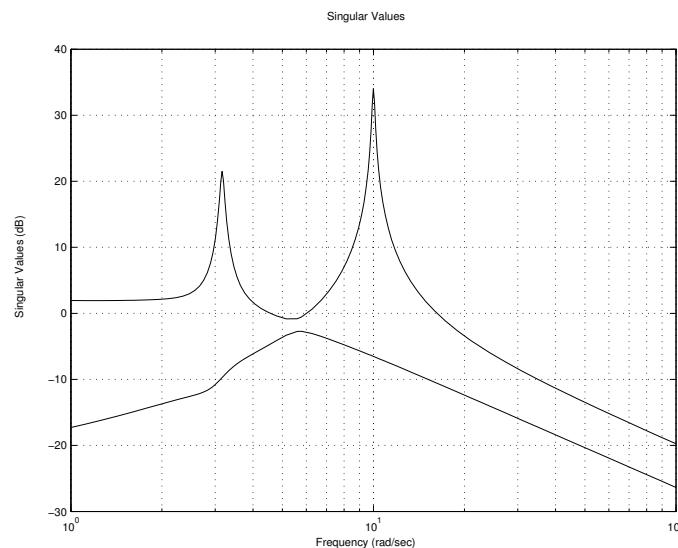
Получаването на \mathcal{H}_∞ нормата на система, съгласно определението, дадено в т. 1.1, може да стане по графичен път, използвайки честотните характеристики на сингуларните стойности. Това обаче може да доведе до грешки в случаите на слабо демпфирана система, ако честотната решетка не е достатъчно плътна. Поради това е по-добре да се използва команда `norm(G, 'inf')`, където G е системата, на която трябва да се изчисли \mathcal{H}_∞ нормата.

Пример 1.3 Нека разгледаме 2×2 предавателната матрица

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{10(s+1)}{s^2 + 0.2s + 100} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{s+2}{s^2 + 0.1s + 10} & \frac{5(s+1)}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}.$$

Сингуларните стойности на $G(j\omega)$ са показани на фиг. 1.3. От най-голямата сингуларна стойност се получава, че нейната максимална стойност е около 34 dB, което отговаря на стойност на \mathcal{H}_∞ нормата, равна на 50.12. По-точното изчисляване на нормата може да се извърши с командния ред

`norm(G, 'inf')`



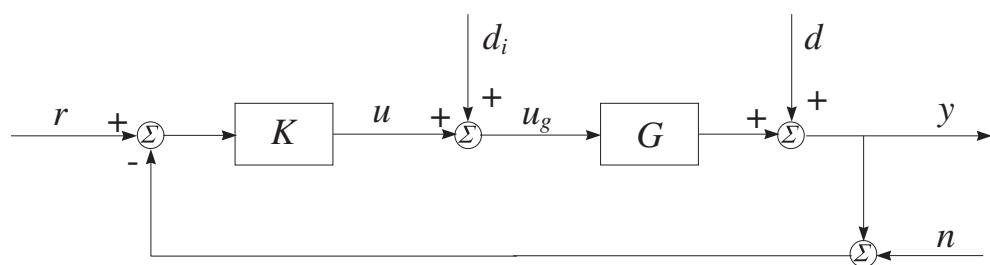
Фигура 1.3: Най-голяма и най-малка сингуларни стойности на $G(j\omega)$

което дава

`ans =`

50.2471

1.3 Многомерни системи с обратна връзка



Фигура 1.4: Многомерна система с обратна връзка

Структурната схема на многомерна система за управление с обратна връзка е

показана на фиг. 1.4. Системата се състои от многомерен обект G и управляващо устройство K , върху които действат задание r , шум в чувствителния елемент n , входно смущение на обекта d_i и изходно смущение d . В общия случай се предполага, че всички сигнали са векторни и предавателните матрици имат подходящи размерности.

Системата, показана на фиг. 1.4, се нарича *вътрешно устойчива*, ако предавателната матрица

$$\begin{bmatrix} (I + KG)^{-1} & -K(I + GK)^{-1} \\ G(I + KG)^{-1} & (I + GK)^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

е устойчива. За да се провери вътрешната устойчивост е необходимо да се проверят дали са устойчиви четирите предавателни матрици в уравнението (1.9). В специалния случай, когато G и K са устойчиви, системата е вътрешно устойчива ако и само ако $(I + GK)^{-1}$ е устойчива, или еквивалентно, $\det(I + G(s)K(s))$ няма нули в дясната комплексна равнина.

С оглед на по-нататъшните разглеждания е удобно да се дефинират *входната предавателна матрица на отворената система* L_i и *изходната предавателна матрица на отворената система* L_o съответно като

$$L_i = KG, \quad L_o = GK,$$

където L_i се получава при разкъсване на контура на входа (u) на обекта, а L_o се получава при разкъсване на контура на изхода (y) на обекта. *Матрицата на входната чувствителност* се дефинира като предавателната матрица от d_i към u_g :

$$S_i = (I + L_i)^{-1}, \quad u_g = S_i d_i.$$

Матрицата на изходната чувствителност се дефинира като предавателната матрица от d към y :

$$S_o = (I + L_o)^{-1}, \quad y = S_o d.$$

Матрицата на входната и матрицата на изходната допълнителна чувствителност се дефинират съответно като

$$T_i = I - S_i = L_i(I + L_i)^{-1},$$

$$T_o = I - S_o = L_o(I + L_o)^{-1}.$$

(Думата *допълнителна* се използва, за да се изтъкне, че T е допълнителна на S , $T = I - S$.) Матрицата $I + L_i$ се нарича *матрица на входната възвратна разлика*, а $I + L_o$ се нарича *матрица на изходната възвратна разлика*.

Може да се покаже, че затворената система, при условие, че е вътрешно устойчива, удовлетворява следните уравнения:

$$y = T_o(r - n) + S_oGd_i + S_o d \quad (1.10)$$

$$r - y = S_o(r - d) + T_o n - S_o Gd_i \quad (1.11)$$

$$u = KS_o(r - n) - KS_o d - T_i d_i \quad (1.12)$$

$$u_g = KS_o(r - n) - KS_o d + S_i d_i \quad (1.13)$$

Тези четири уравнения показват фундаменталните ползи и цели на синтеза, присъщи на контурите с обратна връзка. Например, уравнението (1.11) показва, че ефектът на смущението d върху изхода на обекта може да се направи "малък", правейки функцията на изходната чувствителност S_o "малка". По подобен начин, уравнение (1.13) показва, че ефектът на смущението d_i върху входа на обекта може да се направи малък, правейки функцията на входната чувствителност S_i малка. Големината на предавателна матрица в даден честотен диапазон може да се характеризира използвайки честотно-зависими сингуларни стойности, например $\bar{\sigma}(S_o) < 1$ в някакъв честотен диапазон означава, че ефектът на смущението d върху изхода на обекта е относително малък в този диапазон.

Следователно, добро потискане на смущението на изхода (y) на обекта изисква сингуларните стойности

$$\bar{\sigma}(S_o) = \bar{\sigma}((I + GK)^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + GK)} \quad (\text{за смущения на изхода на обекта, } d),$$

$$\bar{\sigma}(S_o G) = \bar{\sigma}((I + GK)^{-1} G) = \bar{\sigma}(GS_i) \quad (\text{за смущения на входа на обекта, } d_i),$$

да бъдат направени колкото е възможно по-малки, особено в нискочестотния диапазон, където d и d_i са значителни. Доброто потискане на смущението на входа (u_g) изисква сингуларните стойности

$$\bar{\sigma}(S_i) = \bar{\sigma}((I + KG)^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + KG)} \quad (\text{за смущения на входа на обекта, } d_i),$$

$$\bar{\sigma}(S_i K) = \bar{\sigma}(K(I + GK)^{-1}) = \bar{\sigma}(KS_o) \quad (\text{за смущения на изхода на обекта, } d)$$

да са малки, особено в нискочестотния диапазон.

Въз основа на тези уравнения може да се покаже, че

$$\bar{\sigma}(S_o) \ll 1 \iff \underline{\sigma}(GK) \gg 1,$$

$$\bar{\sigma}(S_i) \ll 1 \iff \underline{\sigma}(KG) \gg 1.$$

Също така, ако матриците G и K са обратими, имаме че

$$\underline{\sigma}(GK) \gg 1 \text{ или } \underline{\sigma}(GK) \gg 1 \iff \bar{\sigma}(S_o G) \approx \bar{\sigma}(K^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(K)},$$

$$\underline{\sigma}(GK) \gg 1 \text{ или } \underline{\sigma}(GK) \gg 1 \iff \bar{\sigma}(KS_o) \approx \bar{\sigma}(G^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(G)}.$$

Следователно, добро потискане на изхода (y) на обекта изиска в общия случай голямо усилване на изходния контур $\underline{\sigma}(L_o) = \underline{\sigma}(GK) \gg 1$ в честотния диапазон, където d е значително (за потискане на d) и достатъчно голямо усилване на управляващото устройство $\underline{\sigma}(K) \gg 1$ в честотния диапазон където d_i е значително (за добро потискане на d_i). По подобен начин, добро потискане на смущенията на входа на обекта (u_g) изиска в общия случай голямо усилване на входния контур $\underline{\sigma}(L_i) = \underline{\sigma}(KG) \gg 1$ в честотния диапазон където d_i е значително (за добро потискане на d_i) и достатъчно голямо усилване на обекта $\underline{\sigma}(G) \gg 1$ в честотния диапазон, където d е значително (за добро потискане на d). (Отбележете, че последното условие не може да се промени при синтеза.)

По такъв начин добрият синтез на контура с обратна връзка се свежда до постигането на високо усилване на контура (и евентуално на управляващото устройство) в необходимия честотен диапазон.

Пример 1.4 Разглеждаме двуканална система (т.е., система с два входа и два изхода) със структура, показан на фиг. 1.4. Обектът е от 5-ти ред с два входа и два изхода и предавателна матрица

$$G = \begin{bmatrix} \frac{6}{(0.9s+1)(0.1s+1)} & \frac{-0.05}{0.1s+1} \\ \frac{0.07}{0.3s+1} & \frac{5}{(1.8s-1)(0.06s+1)} \end{bmatrix}.$$

(Въвеждането на предавателната матрица на обекта бе разгледано в Пример 1.2).

Управляващото устройство на системата има предавателна матрица

$$K = \begin{bmatrix} \frac{7(s+1)}{0.3s+1} & 0 \\ 0 & \frac{18(s+2)}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Функциите на входната и изходната чувствителност на затворената система и входната и изходната предавателни функции на отворената система се намират с командните редове

```

looptransfer = loopsens(G,K);
Si = looptransfer.Si;
Ti = looptransfer.Ti;
So = looptransfer.So;
To = looptransfer.To;
Li = looptransfer.Li;
Lo = looptransfer.Lo;

```

Трябва да се има предвид, че с команда `loopsens` се получават не самите предавателни функции, а техни реализации в пространство на състоянията. При необходимост, съответните предавателни функции могат да се получат от тези реализации с команда `tf`.

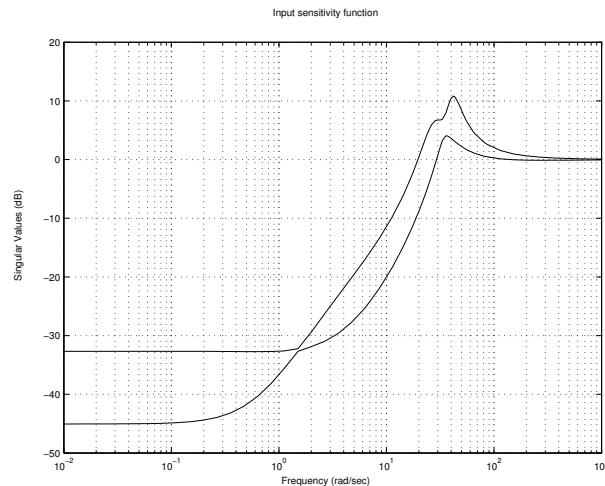
С командния ред

```
poles = looptransfer.Poles
```

се намират полюсите на затворената система, а с командния ред

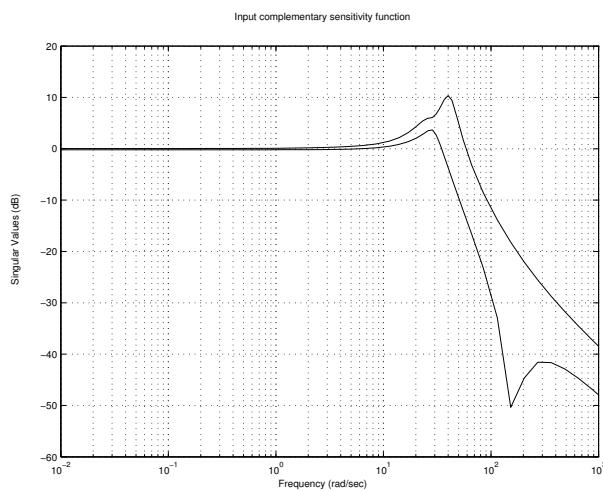
```
stab = looptransfer.Stable
```

се проверява устойчивостта на затворената система (`stab = 1` означава, че системата е устойчива, а `stab = 0` означава, че системата е неустойчива).



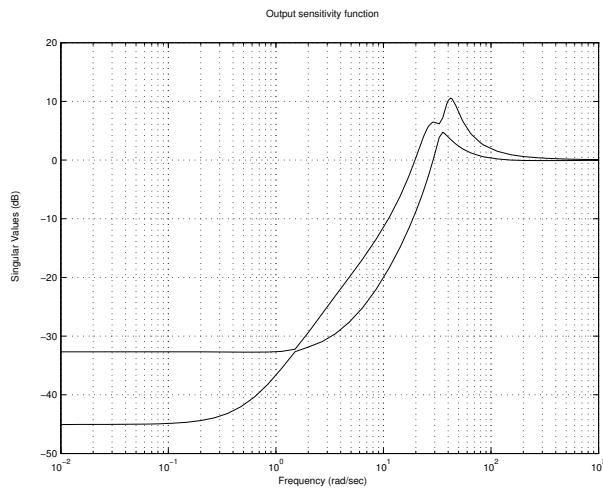
Фигура 1.5: Входна чувствителност

Честотните характеристики на сингуларните стойности на матриците на входната чувствителност и входната допълнителна чувствителност са показани на



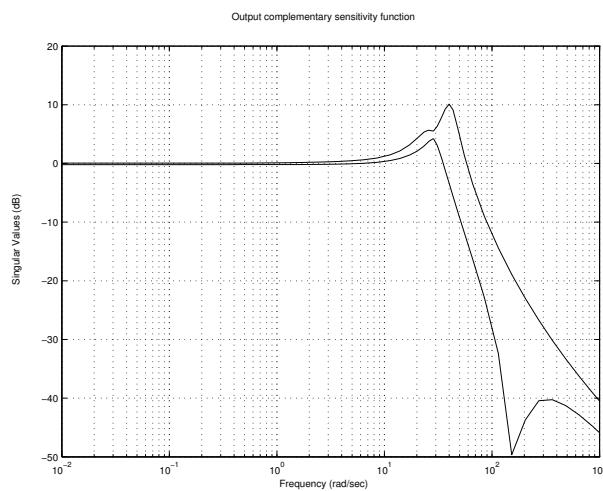
Фигура 1.6: Входна допълнителна чувствителност

фигури 1.5 и 1.6. В нискочестотната област сингуларните стойности на матрицата S_i са под -30 dB, което означава, че входното смущение d_i се потиска над 30 пъти на входа на обекта.



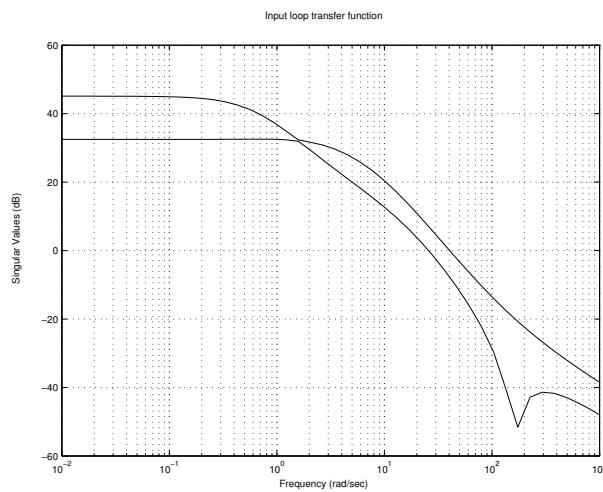
Фигура 1.7: Изходна чувствителност

Честотните характеристики на сингуларните стойности на матриците на из-

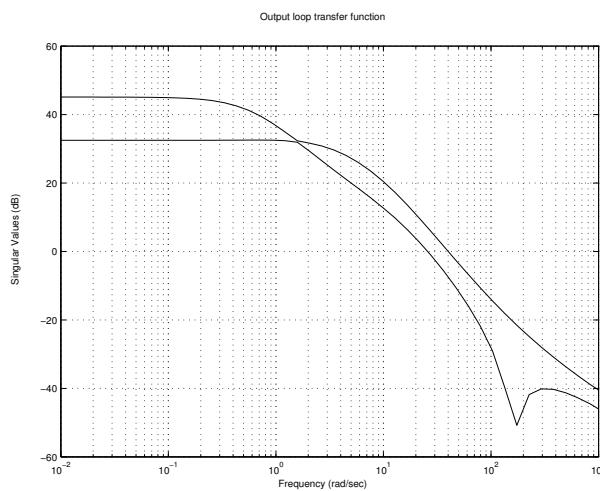


Фигура 1.8: Изходна допълнителна чувствителност

ходната чувствителност и изходната допълнителна чувствителност са показвани на фигури 1.7 и 1.8. Вижда се, че за честоти над 1000 rad/s сингуларните стойности на матрицата To са под -40 dB , т.е., шумът n се потиска над 100 пъти на изхода на обекта.



Фигура 1.9: Входна матрица на отворената система



Фигура 1.10: Изходна матрица на отворената система

Честотните характеристики на входната и изходната матрици на отворената система са показани на фигури 1.9 и 1.10.

Трябва да се отбележи, че в общия случай функциите на чувствителността и предавателните функции по отношение на входа и изхода са различни ($S_o \neq S_i$, $L_o \neq L_i$).

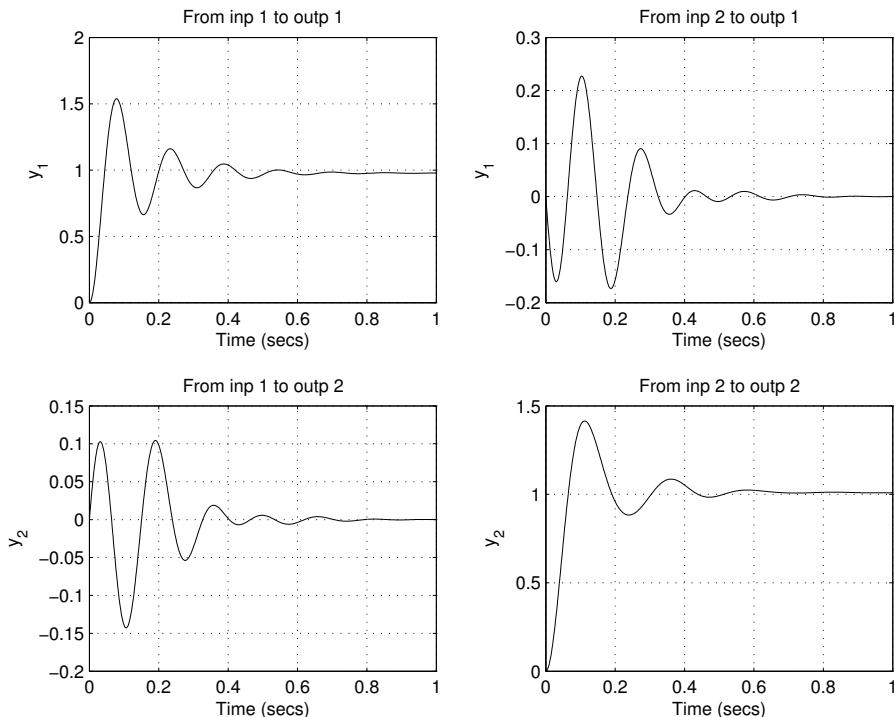
Нека разгледаме преходните процеси на затворената система.

Преходният процес на първия изход y_1 , дължащ се на стъпаловидно въздействие по първия задаващ вход r_1 , се получава съгласно на уравнение (1.11) с командите

```
tfin = 1;
time = 0:tfin/500:tfin;
nstep = size(time,2);
ref1(1:nstep) = 1.0;
ref2(1:nstep) = 0.0;
ref = [ref1' ref2'];
[y,t] = lsim(To(1:2,1:2),ref,time);
plot(t,y(:,1),'r-') grid
title('From inp 1 to outp 1')
xlabel('Time (secs)')
ylabel('y_1')
```

Съответно в $y(:,2)$ се получава преходният процес на втория изход y_2 по първото

задание. Полагайки $\text{ref1}(1:\text{nstep}) = 0.0$; $\text{ref2}(1:\text{nstep}) = 1.0$; се получават преходните процеси по второто задание.



Фигура 1.11: Преходни процеси по задание

Преходните процеси на затворената система по задание са показани на фиг. 1.11. От процесите се вижда, че между каналите има известно влияние (т.e., те не са напълно декуплирани), което се обяснява с наличието на извъндиагонални елементи в предвателната матрица на обекта и диагоналната структура на предавателната матрица на управляващото устройство. Пререгулирането в първия канал надхвърля 50 %.

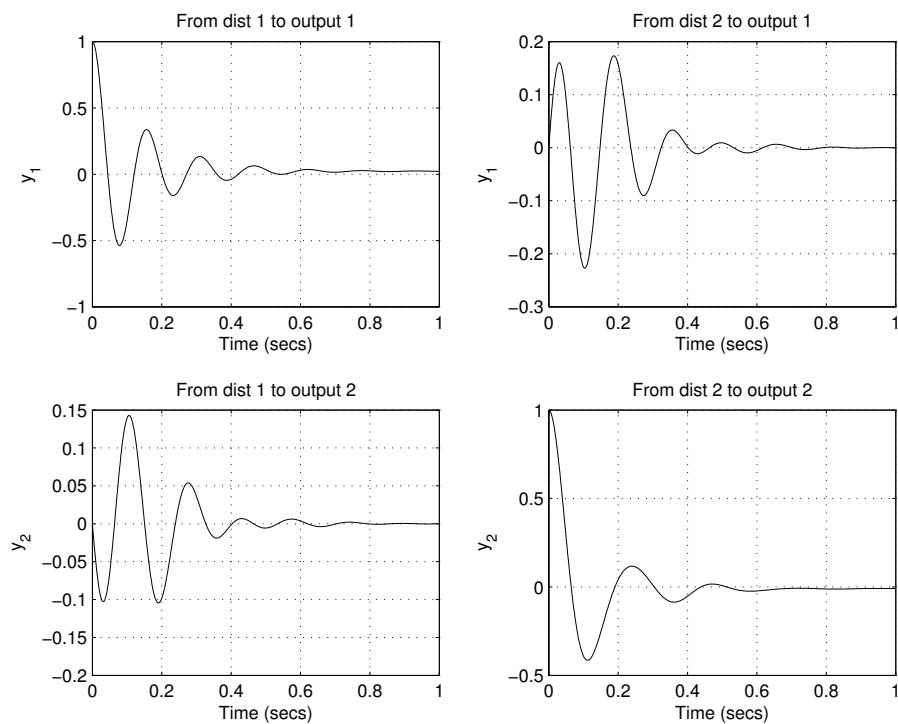
Преходният процес на първия изход, дължащ се на стъпаловидно изходно смущаващо въздействие d_1 , се получава с командите

```
time = 0:tf1/500:tf1;
nstep = size(time,2);
dist1(1:nstep) = 1.0;
dist2(1:nstep) = 0.0;
dist = [dist1' dist2'];
```

```
[y,t] = lsim(So(1:2,1:2),dist,time);
plot(t,y(:,1),'r-') grid
title('From dist 1 to output 1')
xlabel('Time (secs)')
ylabel('y_1')
```

В $y(:,2)$ се получава преходният процес на втория изход по смущението d_1 .

Аналогично се получават преходните процеси по второто изходно смущение d_2 .



Фигура 1.12: Преходни процеси по смущение

Преходните процеси на системата по смущение са показани на фиг. 1.12.

1.4 Задачи

1. За двумерна система с предавателни матрици на обекта и управляващото устройство

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

извършете проверка на вътрешната устойчивост на затворената система, като проверите устойчивостта на четирите матрици в (1.9). Коментирайте получения резултат.

2. За двумерна система с предавателни матрици на обекта и управляващото устройство

$$G = \begin{bmatrix} \frac{2}{0.015s^2 + 0.8s + 1} & \frac{0.02}{0.3s + 1} & \frac{-0.08}{0.4s + 1} \\ \frac{0.04}{0.1s + 1} & \frac{1}{0.04s^2 + 1.2s + 1} & \frac{-0.03}{s + 1} \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{20(0.3s + 1)}{0.1s + 1} & 0 \\ 0 & \frac{30(0.5s + 1)}{0.2s + 1} \\ \frac{s + 1}{0.2s + 1} & \frac{-0.4}{0.5s + 1} \end{bmatrix}$$

извършете следните изследвания:

- a) Проверете вътрешната устойчивост на затворената система;
 - б) Получете матриците на чувствителността S_i , S_o , матриците на допълнителната чувствителност T_i , T_o и матриците на отворената система L_i , L_o и постройте честотните характеристики на техните сингулярни стойности;
 - в) Получете преходните процеси на затворената система по задание r и по съмущаващи въздействия d_i , d .
3. За системата от предишния пример анализирайте влиянието на коефициентите на усиливане в елементите K_{11} и K_{22} на управляващото устройство върху честотните характеристики и преходните процеси на затворената система. Какво е влиянието на тези коефициенти върху грешките в установен режим в двета канала?

Глава 2

МОДЕЛИ СЪС СТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

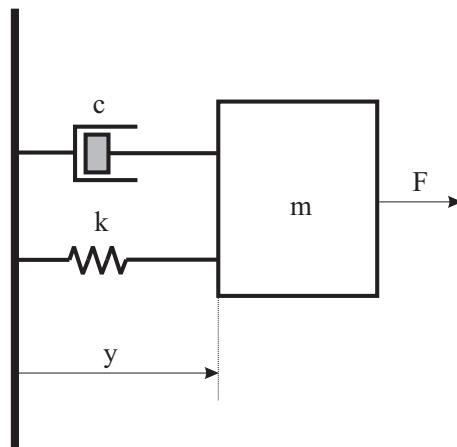
2.1 Теоретични сведения

Математическото описание на системите за управление (диференциално уравнение, предавателна функция, в това число и предавателна матрица, описание в пространство на състоянията, интеграл на Диоамел, ред на Волтера и т. н.) се получава основно по два начина: с използване на знанията ни за физическите закони, на които се подчинява обектът, или чрез идентификация на свойствата му въз основа на някакви експерименти. Полученият модел може да има *структуррирана (параметрична) неопределеност* – напр. неточно известни кофициент на усилване, времеконстанти, полюси и нули, кофициенти на диференциалното уравнение, елементи на матриците от описаните в пространство на състоянията, или *неструктурирана неопределеност* - напр. в случая на немоделирана динамика.

В тази глава ще бъде разгледано получаването на модел с параметрична неопределеност, като ще бъдат разяснени различни начини за описането му в MATLAB®7. За разглеждането ще бъде използван широко разпространеният (учебен) пример “маса-демпфер-пружина” поради неговата нагледност. Не трябва да ни смущава фактът, че той е единомерен - така се избягва претрупването на примера с излишна информация, която не способства за по-лесното усвояване на метода.

И така, примерният модел е представен на фиг. 2.1.

Тялото с маса m се отклонява от равновесното си състояние от силата F , която



Фигура 2.1: Система маса-демпфер-пружина

е приета за вход (ще пишем $u = F$), съответно изходна величина е разстоянието y . Моделът се съставя при следните опростявящи предположения:

- Отклонението от равновесното състояние не е прекалено голямо, така че не се излиза извън границите на пропорционалността на пружината и можем да приемем, че тя реагира със сила, пропорционална на преместването с коефициент k ;
- Скоростта на движение на тялото не е прекалено голяма, тогава демпферът реагира със сила, пропорционална на скоростта \dot{x} с коефициент на пропорционалност c .

Тогава балансът на силите ще изглежда така:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u$$

Това диференциално уравнение се представя чрез блок-схемата на фиг. 2.2, като полагаме $y = x$.

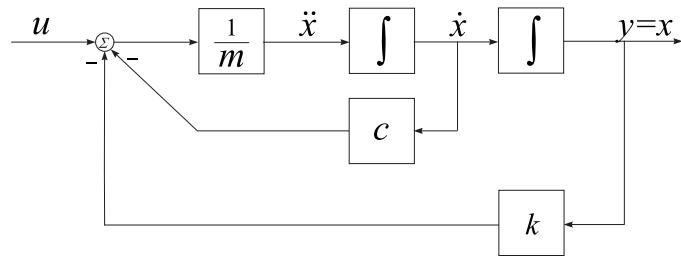
Нека трите физически параметъра не са известни точно, но знаем интервалите, на които принадлежат:

$$m = \bar{m}(1 + p_m \delta_m),$$

$$c = \bar{c}(1 + p_c \delta_c),$$

$$k = \bar{k}(1 + p_k \delta_k).$$

Нека номиналните стойности на неопределенните параметри да бъдат



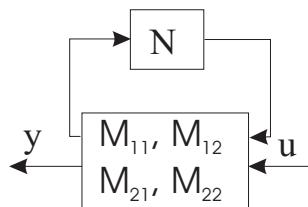
Фигура 2.2: Блок-схема на системата маса-демпфер-пружина

$$\bar{m} = 3 \text{ kg}, \bar{c} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}}, \bar{k} = 2 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

Максималните стойности на отклоненията от тях са $p_m = 0.4$, $p_c = 0.2$ и $p_k = 0.3$. Това означава, че неопределеността в масата е 40%, неопределеността в коефициента на демпфирание е 20% и неопределеността в коефициента на пружината е 30%. Величините δ_m , δ_c и δ_k са “носителите на неопределеността” – за тях е известно само, че е изпълнено условието $|\delta_m| \leq 1$, $|\delta_c| \leq 1$ и $|\delta_k| \leq 1$.

Така, трите неточно известни параметъра m , c и k се представят чрез шест известни (\bar{m} , \bar{c} , \bar{k} , p_m , p_c , p_k) и три неизвестни (δ_m , δ_c и δ_k) величини. Следващата стъпка е да се раздели системата на фиг. 2.2 на две подсистеми: едната съставена само от известни, а другата - само от неизвестни параметри.

Това може да се направи по различни начини, но най-прост резултат се получава с използване на *Линейно дробно преобразуване (ЛДП)*. То дава резултантната предавателна матрица на система, представляваща свързване на две подсистеми с обратна връзка.



Фигура 2.3: Линейно дробно преобразуване

Например, за системата на фиг. 2.3 предавателната функция от u към y се

представя с използване на горно ЛДП така:

$$F_U(M, N) = M_{22} + M_{21}(I - M_{11}N)^{-1}NM_{12}.$$

Ако системата с по-малко входове и изходи е отдолу, се стига до долното ЛДП:

$$F_L(M, N) = M_{11} + M_{12}(I - M_{22}N)^{-1}NM_{21}.$$

Лесно се проверява, че величината $\frac{1}{m}$ може да се представи като горно ЛДП с δ_m на матрицата

$$M_m = \begin{pmatrix} -p_m & \frac{1}{\bar{m}} \\ -p_m & \frac{1}{\bar{m}} \end{pmatrix},$$

а именно:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\bar{m}} - p_m(1 + p_m\delta_m)^{-1}\delta_m\frac{1}{\bar{m}} = \frac{1}{\bar{m}(1 + p_m\delta_m)} = F_U(M_m, \delta_m).$$

Параметърът c може да е представи като горно ЛДП с δ_c на матрицата

$$M_c = \begin{pmatrix} 0 & \bar{c} \\ p_c & \bar{c} \end{pmatrix},$$

а именно:

$$c = \bar{c} + p_c(1 - 0 * \delta_c)^{-1}\delta_c\bar{c} = \bar{c}(1 + p_c\delta_c) = F_U(M_c, \delta_c).$$

И накрая параметърът k е представя като горно ЛДП с δ_k на матрицата

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & \bar{k} \\ p_k & \bar{k} \end{pmatrix}.$$

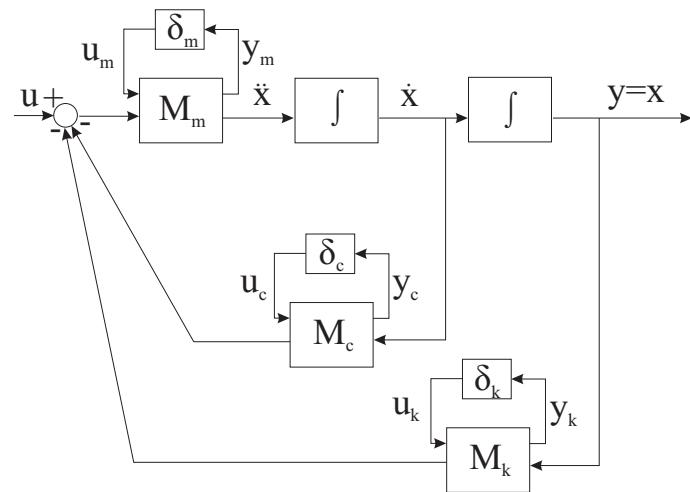
Независимо колко сложна е схемата, неточно известните параметри в нея участват или директно, или с реципрочната си стойност, така че всички матрици M ще имат вида или като на M_m , или като M_c и M_k .

Така представянето на системата добива вида от фиг. 2.4.

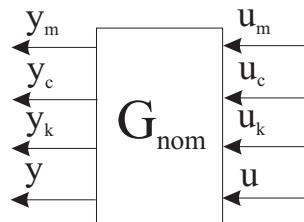
Входовете и изходите на δ_m , δ_c и δ_k се означават съответно с y_m , y_c , y_k и u_m , u_c , u_k . Тогава δ_m , δ_c и δ_k могат формално да се изолират в отделна система, която е прието да се означава с Δ и се нарича *матрица на неопределеността*, или просто *смущение*. Тя ще има вида

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_m & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c & 0 \\ 0 & 0 & \delta_k \end{pmatrix},$$

а останалата част, която съдържа само известните величини \bar{m} , \bar{c} , \bar{k} , p_m , p_c , p_k , ще представя номиналната система, която ще означим с G_{nom} и ще има четири входа и четири изхода, както е показано на фиг. 2.5.



Фигура 2.4: Система маса-демпфер-пружина с неопределени параметри



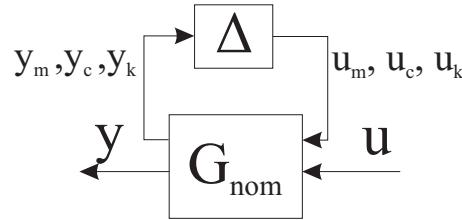
Фигура 2.5: Номинална система маса-демпфер-пружина

Очевидно, G_{nom} и Δ са свързани с горно ЛДП (т.e., чрез обратна връзка), както е представено на фиг. 2.6:

$$y = F_U(G_{nom}, \Delta)u.$$

Матрицата Δ е структурирана – тя има блок-диагонална структура. Всеки от диагоналните ѝ елементи отговаря за точно определен неизвестен параметър.

Представянето на фиг. 2.6 е основно в постановката на робастното управление. То ни позволява да третираме матрицата Δ като неизвестен матричен коефициент на обратна връзка, който внася смущения в поведението на системата. Задачата на синтезираното робастно управляващо устройство е да минимизира нейното влияние върху поведението на системата наравно с външните физически



Фигура 2.6: Система маса-демпфер-пружина, представена чрез ЛДП

смущения.

Описанието в пространство на състоянията на G_{nom} може да се изведе и аналитично (което би имало предимството, че точно ще знаем кое състояние в A матрицата на какво отговаря). Ако се положи

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1,$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = \ddot{x}_1,$$

се стига до следната система уравнения:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ y_m \\ y_c \\ y_k \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} & -p_m & -\frac{p_c}{\bar{m}} & -\frac{p_k}{\bar{m}} & \frac{1}{\bar{m}} \\ -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} & -p_m & -\frac{p_c}{\bar{m}} & -\frac{p_k}{\bar{m}} & \frac{1}{\bar{m}} \\ 0 & \bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_m \\ u_c \\ u_k \\ u \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_m \\ u_c \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_m & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c & 0 \\ 0 & 0 & \delta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_m \\ y_c \\ y_k \end{pmatrix}.$$

Матриците от описанието в пространство на състоянията на номиналната система са съответно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_m & -\frac{p_c}{\bar{m}} & -\frac{p_k}{\bar{m}} & \frac{1}{\bar{m}} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} \\ 0 & \bar{c} \\ \bar{k} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -p_m & -\frac{p_c}{\bar{m}} & -\frac{p_k}{\bar{m}} & \frac{1}{\bar{m}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В тази глава, обаче, ще демонстрираме няколко способа, които позволяват описанието на системата с неопределеност да бъде направено в MATLAB® по-лесно и автоматизирано.

2.2 Модел с неопределеност при предварително разделени G_{nom} и Δ

Първият начин да получим модел с неопределеност в MATLAB®7 е да използваме полученото аналитично описание в пространство на състоянията. За целта при конструирането на G_{nom} може да използваме познатата команда `ss` за получаване на описание в пространство на състоянията.

За елементите δ на матрицата Δ ще използваме командата `ureal`. Тя се използва за създаване на неопределен реален параметър от съответния клас `ureal`. Синтаксисът ѝ е следният:

```
p = ureal('name', nominalvalue, 'Property1', Value1, ...
           'Property2', Value2, ...)
```

От параметрите на `ureal` само '`name`' и `nominalvalue` са задължителни. Неопределененият реален параметър ще има име, зададено с '`name`', и номинална стойност, зададена с `nominalvalue`.

Максималното отклонение от `nominalvalue` може да се зададе по три различни начина (чрез съответното свойство '`Property`'):

`PlusMinus`: абсолютното отклонение от `nominalvalue`

`Range`: интервалът, съдържащ `nominalvalue`

`Percentage`: процентното отклонение от `nominalvalue`

Свойството `Mode` пък показва кое от тези три предишни свойства ще остане непроменено, ако се промени `nominalvalue`. Неговите възможни стойности са

'Range', 'Percentage' и 'PlusMinus', като по подразбиране Mode е 'PlusMinus', със стойност [-1 1].

Свойството `Autosimplify` на `ureal` показва как ще се опростяват изрази, съдържащи такива елементи. По подразбиране стойността му е `basic` – това означава, че ще се използват елементарни методи за алгебрично опростяване. Други възможни стойности са `off` (без опростяване) и `full` (прилагат се и числени методи за опростяване на динамични системи, използвани за намаляване на реда).

Моделът на системата маса-демпфер-пружина се построява по следния начин.

```
% Gnom:
mn = 3; cn = 1; kn = 2; pm = 0.4; pc = 0.2; pk = 0.3;
A = [ 0           1
      -kn/mn   -cn/mn];
B = [ 0           0           0           0
      -pm       -pc/mn    -pk/mn    1/mn];
C = [-kn/mn   -cn/mn
      0           cn
      kn         0
      1           0];
D = [ -pm     -pc/mn    -pk/mn  1/mn
      0           0           0           0
      0           0           0           0
      0           0           0           0];
Gnom = ss(A,B,C,D)

% Delta:
deltam = ureal('deltam',0,'Range',[-1,1])      %uncertain atom
deltac = ureal('deltac',0,'Range',[-1,1])
deltak = ureal('deltak',0,'Range',[-1,1])
Delta = diag([deltam,deltac,deltak])            %class umat
```

Отклонението от `nominalvalue` автоматично се преобразува до `PlusMinus`. Получената матрица `Delta` е от клас `umat` – неопределенна матрица, тъй като освен постоянни елементи тя съдържа и обекти от клас `ureal`. Можем да видим свойствата ѝ:

```
get(Delta)
```

за което получаваме

```
NominalValue: [3x3 double]
Uncertainty: [1x1 atomlist]
```

и да проверим стойностите им:

```
Delta.Uncertainty
Delta.Uncertainty.deltam
```

за което получаваме

```
deltac: [1x1 ureal]
deltak: [1x1 ureal]
deltam: [1x1 ureal]
Uncertain Real Parameter: Name deltam, NominalValue 0, Range [-1 1]
```

Номиналната стойност на Delta

```
Delta.NominalValue
```

е

0	0	0
0	0	0
0	0	0

За заместване на неопределени обекти с конкретни стойности може да се използва командата `usubs` (която работи като аналог на командата `subs`). Нейният синтаксис е следният:

```
B = usubs(M,atomname1,value1,atomname2,value2,...)
B = usubs(M,{atomname1;atomname2;...},{value1;value2;...})
B = usubs(M,StrucArray)
```

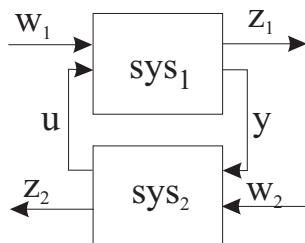
Както се вижда, редът и начинът за задаване на елементите `atomname` и техните стойности в неопределения обект M могат да бъдат различни. За пример да заместим δ_m , δ_c и δ_k в матрицата Δ с 1:

```
usubs(Delta,'deltam',1,'deltac',1,'deltak',1)
```

което дава резултат

1	0	0
0	1	0
0	0	1

За сглобяването на G_{nom} и Δ може да е използва командата `lft`. Тя изчислява обобщена обратна връзка (кръстосано произведение, произведение на Редхефер).



Фигура 2.7: Обобщена обратна връзка

За системата, показана на фиг. 2.7, чрез командата

```
sys = lft(sys1,sys2,nu,ny)
```

се свързват първите nu изхода на $sys2$ към последните nu входа на $sys1$ и последните ny изхода на $sys1$ към последните ny входа на $sys2$. Така, тази команда се използва за изчисляване на Линейно дробно преобразуване.

Ако се зададе само

```
sys = lft(sys1,sys2)
```

то се свързват колкото е възможно повече от “кръстосаните” сигнали и в зависимост от това, коя от двете подсистеми е с повече изходи и входове, се получава горно ЛДП или долно ЛДП.

Нека сглобим системата с неопределеност:

```
uss1 = lft(Delta,Gnom)
```

Полученият обект `uss1` е от клас `uss` – описание в пространство на състоянията с неопределеност, тъй като сред съставящите елементи има такива от клас `ureal`:

```

USS: 2 States, 1 Output, 1 Input, Continuous System
deltac: real, nominal = 0, range = [-1 1], 1 occurrence
deltak: real, nominal = 0, range = [-1 1], 1 occurrence
deltam: real, nominal = 0, range = [-1 1], 1 occurrence

```

Нека видим какви са свойствата на `uss1`:

```
get(uss1)
```

което дава

```

    a: [2x2 umat]
    b: [2x1 umat]
    c: [1 0]
    d: 0
StateName: {2x1 cell}
    Ts: 0
    InputName: {''}
    OutputName: {''}
    InputGroup: [1x1 struct]
    OutputGroup: [1x1 struct]
    NominalValue: [1x1 ss]
    Uncertainty: [1x1 atomlist]
    Notes: {}
    UserData: []

```

Командата

`uss1.Uncertainty`

дава

```

uss1.Uncertainty
deltac: [1x1 ureal]
deltak: [1x1 ureal]
deltam: [1x1 ureal]

```

а командата

`uss1.NominalValue`

дава номиналното описание в пространство на състоянията, което е

```

a =
      x1      x2
x1      0      1
x2 -0.6667 -0.3333

b =
      u1
x1      0
x2  0.3333

c =

```

```

x1  x2
y1   1   0

d =
u1
y1   0

```

Continuous-time model

Последното може да се получи и като

```
usubs(uss1,'deltam',0,'deltac',0,'deltak',0)
```

Можем да го преобразуваме в предавателна функция с командата

```
tf1 = tf(uss1.NominalValue)
```

и получената предавателна функция на номиналната система е

```

Transfer function:
0.3333
-----
s^2 + 0.3333 s + 0.6667

```

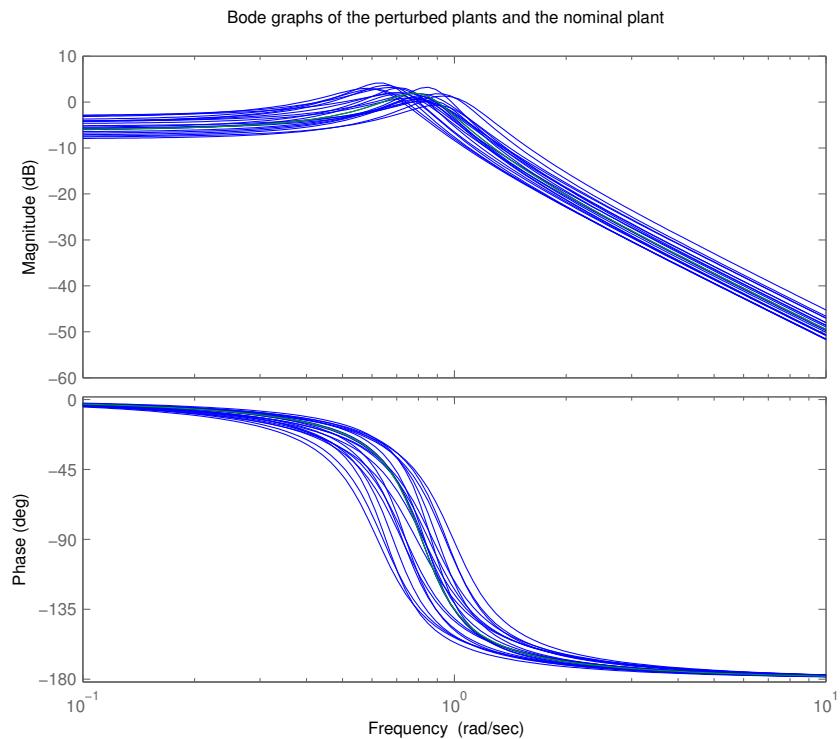
Интересно е да видим честотните характеристики на системата маса-демпфер-пружина за различни параметрични смущения, т.е., за различни стойности на δ_m , δ_c и δ_k . Това може да се направи с цикъл по тези три параметъра; обаче, може да се използват и разширението свойства на командата `bode` в MATLAB[®]7. За обекти от клас `uss` автоматично се изчислява семейство честотни характеристики за 20 стойности на неопределените параметри, случаен разпределени, както и за номиналната стойност. Това може да стане така:

```

w = logspace(-1,1,100);
figure(1)
bode(uss1,w)
title('Bode graphs of the perturbed plants and the nominal plant')
hold on
bode(uss1.NominalValue,w)

```

Резултатът е показан на фиг. 2.8.



Фигура 2.8: Честотни характеристики на параметрично смутените системи

2.3 Пряко конструиране на модел с неопределеност

Както бе отбелязано, методът с аналитично извеждане на номиналната система и матрицата Δ има предимството, че знаем точно съответствията на елементите на системните матрици с физическите състояния. Този метод, обаче, е доста трудоемък и е вероятен източник на грешки при описание на по-сложни системи.

Моделът с неопределеност може да се получи направо и така:

```
m = ureal('m',3,'Percentage',[-40,40])
c = ureal('c',1,'Range',[.8,1.2])
k = ureal('k',2,'PlusMinus',[-.6,.6])
uss2 = tf(1,[m,c,k])
```

Тук са използвани разширениите възможности на командата `tf` да работи със

системи с неопределеност. Веднага трябва да се подчертава, че и други команди имат подобни разширени възможности, но резултантната система, ако има елементи с неопределеност, е винаги от клас `uss`. Така е и тук – за `uss2` на екрана се извежда

```
USS: 2 States, 1 Output, 1 Input, Continuous System
c: real, nominal = 1, range = [0.8 1.2], 1 occurrence
k: real, nominal = 2, variability = [-0.6 0.6], 1 occurrence
m: real, nominal = 3, variability = [-40 40]%, 2 occurrences
```

Внимателният поглед върху резултата веднага разкрива един възможен недостатък на този подход, който ще бъде подчертан още веднъж по-нататък при разглеждането на робастния синтез: оказва се, че параметърът m се среща в системата `uss2` два пъти – а това значи, че получената реализация в пространство на състоянията не съдържа минимално възможния брой параметри.

Можем да опитаме да опростим модела с командата `simplify`. Тя има няколко режима: '`full`', '`basic`' и '`class`'. Първите два са аналогични на свойството `Autosimplify` на елементите с неопределеност, а '`class`' единствено премахва несреещащите се нито един път неопределени елементи. В случая, обаче, дори команда

```
simplify(uss2, 'full')
```

не премахва двойното появяване на m .

С командите

```
uss2.NominalValue
tf2 = tf(uss2.NominalValue)
```

можем отново да получим номиналната система, която е същата като в предишната точка.

2.4 Символно конструиране на модел с неопределеност

Моделът с неопределеност може да се конструира и със следните команди:

```
m = ureal('m',3,'Percentage',[-40,40])
c = ureal('c',1,'Range',[.8,1.2])
k = ureal('k',2,'PlusMinus',[-.6,.6])
s = tf('s')
g1 = (1/s)/m
int2 = 1/s
uss3 = feedback(int2*feedback(g1,c),k)
```

което е пряко описание на схемата от фиг. 2.2. Резултатът е също обект от клас `uss`:

```
USS: 2 States, 1 Output, 1 Input, Continuous System
c: real, nominal = 1, range = [0.8 1.2], 1 occurrence
k: real, nominal = 2, variability = [-0.6 0.6], 1 occurrence
m: real, nominal = 3, variability = [-40 40]%, 1 occurrence
```

Тук и трите неопределени параметъра се срещат по един път, но и при този метод има опасност от повтаряне на параметри.

2.5 Конструиране на модел с неопределеност с използване на `iconnect`

Класът `iconnect` се използва за описване на сложни схеми. Обектите от клас `iconnect` имат следните три свойства, които трябва да бъдат зададени:

`Input`: символен вектор, представя входните величини

`Output`: символен вектор, представя изходните величини

`Equation`: с командата `equate` се описват връзките между входните, изходните и междинните променливи.

Отначало се създава празен обект от клас `iconnect`, а след това се задават свойствата му `Input`, `Output` и `Equation`.

Входните, изходните и междинните променливи трябва да бъдат обекти от клас `icsignal`. Те са символни вектори, представлящи сигналите в схемата. Например, команда

```
icsignal(4)
```

създава четиримерен вектор-стълб за използване от `iconnect`.

Да опишем входно-изходната зависимост на фиг. 2.2 с `icsignal`. За междинни променливи избираме x и \dot{x} :

```
u = icsignal(1)
x = icsignal(1)
xdot = icsignal(1)
iconnect1 = iconnect;
iconnect1.Input = u;
iconnect1.Output = x;
iconnect1.Equation{1} = equate(x, tf(1,[1,0])*xdot);
iconnect1.Equation{2} = equate(xdot, tf(1,[m,0])*(u-k*x-c*xdot));
```

С `get(iconnect1)` могат да се видят свойствата на получената система:

```
Equation: {[1x1 icsignal]  [1x1 icsignal]}
Input: [1x1 icsignal]
Output: [1x1 icsignal]
System: [1x1 uss]
```

Както се вижда от изпълнението на командата

`iconnect1.System`

тя също е от клас `uss`:

```
USS: 2 States, 1 Output, 1 Input, Continuous System
c: real, nominal = 1, range = [0.8 1.2], 1 occurrence
k: real, nominal = 2, variability = [-0.6 0.6], 1 occurrence
m: real, nominal = 3, variability = [-40 40]%, 1 occurrence
```

2.6 Конструиране на модел с неопределеност с използване на `sysic`

Алтернатива на `iconnect` за получаване на системното описание е команда `sysic`. За да бъде използвана тя, предварително в работното пространство на MATLAB трябва да бъдат зададени следните променливи: `systemnames`, `inputvar` и `outputvar`. Те са текстови низове (`char`) и смисълът им е следният:

`systemnames` съдържа имената на системите, които ще бъдат свързвани. Те трябва да бъдат разделени с интервал (а не, например, запетая или табулатор) и да няма никакви други знаци. Системи с дадените в списъка имена вече трябва да съществуват в работното пространство.

`inputvar` е списък, определящ имената на външните входове (имената са формални, т.е., такива променливи не е необходимо да съществуват). Списъкът трябва да е оформлен като вектор-стълб (т. е., заграден с квадратни скоби `[]`). Размерността на всеки вход от списъка може да се зададе във фигурни скоби `{ }`, напр. `U1{3}`.

`outputvar` съдържа списък с изходите на системата – по-точно, с уравненията, по които се получават изходните величини (те нямат собствени имена); изходите се получават като линейни комбинации от външните входове и изходите на подсистемите, описани в `systemnames`. Пореден изход на обект се задава в кръгли скоби (съгласно конвенцията, че на редовете на системни матрици съответстват изходи, а на колоните – входове). Например, изразът `G(2:3,5)` означава, че за системата G взимаме входове 2, 3 и 5.

Освен това, за всяка от подсистемите, споменати в `systemnames`, трябва да е съставена отделна променлива, описваща входовете ѝ по начина, валиден за

`outputvar`. Имената на тези променливи трябва да започват с `input_to_` и да завършват с името на подсистемата.

Тогава, командата

```
SysOutName = sysic
```

ще прочете имената на подсистемите, зададени в `systemnames`, описанията на връзките и ще изчисли системното описание на резултантната система с името `SysOutName`. Прави се и проверка за съответствие на броя сигнали.

За системата маса-демпфер-пружина системното описание с помощта на `sysic` може да се получи така:

```
m1 = inv(m);
int1 = 1/s;
int2 = tf(1,[1,0]);
systemnames = 'int1 int2 c k m1';
inputvar = '[u]';
outputvar = '[int2]';
input_to_int1 = '[m1]';
input_to_int2 = '[int1]';
input_to_c = '[int1]';
input_to_k = '[int2]';
input_to_m1 = '[u-c-k]';
uss4 = sysic
```

Обърнете внимание, че за получаване на $\frac{1}{m}$ е използвана команда `inv`, тъй като m съдържа неопределеност и прякото деление $\frac{1}{m}$ води до грешка. Демонстрирани са два различни, но еквивалентни начина за получаване на двета интегратора `int1` и `int2`.

Получената система `uss4` е също от клас `uss`. С команда `lftdata` всеки та-
къв обект може да се декомпозира на номинална система и нормализирана мат-
рица на неопределеността (с \mathcal{H}_∞ норма, равна на 1). Синтаксисът на команда-
та `lftdata` е следният:

```
[Gnom,Delta,Blkstruct,Normunc] = lftdata(uss_sys);
```

В `Gnom` се съдържа номиналната система, а в `Delta` - матрицата на неопреде-
леността. `Blkstruct` връща $n \times 1$ структура, където `Blkstruct(i)` описва i -тия
нормализиран неопределен елемент. `Normunc` връща масив от нормализираните
неопределени елементи.

Да декомпозираме системата с неопределеност `uss4`:

```
[Gnom1,Delta1,Blkstruct,Normunc] = lftdata(uss4);
```

`Gnom1` се получава като описание в пространство на състоянията от клас `ss`, тъй като не съдържа неопределености, а `Delta1` е от клас `umat`.

2.7 Други функции за конструиране на модел с неопределеност

Освен разгледаните по-горе команди, ще се спрем на още няколко по-често използвани.

С командата `ucomplex` се създават комплексни елементи с неопределеност. Нейният синтаксис наподобява този на `ureal`:

```
b = ucomplex('NAME',nominalvalue,'Property1',Value1,...  
'Property2',Value2,...)
```

Тук неопределеността (максималното отклонение) се задава по два начина: чрез свойството `Radius` (радиус на окръжността с център в `nominalvalue`), или чрез свойството `Percentage` (радиусът на окръжността е процент от абсолютната стойност на `nominalvalue`).

Командата `frd` за получаване на честотни характеристики работи и за обекти от клас `uss`. В такъв случай се получава обект от клас `ufrd` – честотна характеристика с неопределеност. Например, ЧХ на системата `uss4` може да се получи така:

```
frres = frd(uss4,w)
```

Получава се

```
UFRD: 1 Output, 1 Input, Continuous System, 100 Frequency points  
c: real, nominal = 1, range = [0.8 1.2], 1 occurrence  
k: real, nominal = 2, variability = [-0.6 0.6], 1 occurrence  
m: real, nominal = 3, variability = [-40 40]%, 1 occurrence
```

Ходографът на Найквист за номиналната система може да се начертава така:

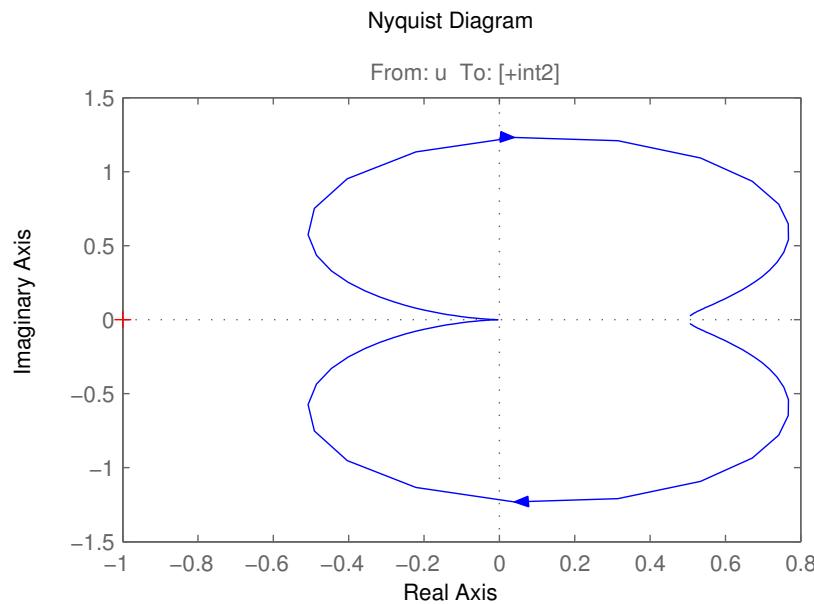
```
nyquist(frres.Nominalvalue)
```

Командата

```
B = usample(sys,N)
```

изчислява семейство от N различни реализации на неопределената система `sys` за случайни стойности на неопределените й параметри.

С командите `uss` и `ufrd` се създават нови обекти от съответните класове.



Фигура 2.9: Ходограф на Найквист за номиналната система

2.8 Задачи

1. Възможно ли е да се получи неминимална реализация с използване на команда `sysic? A` с `iconnect?`? Какво трябва да се направи, за да се избегне това?
2. Съставете модел с неопределеност за двумерната система

$$G = \begin{pmatrix} K \\ \frac{10s+1}{1} \\ \frac{1}{Ts+1} \end{pmatrix}$$

където $\bar{K} = 5$, $\bar{T} = 0.5$, неопределеността в K е $\pm 30\%$, а в T – $\pm 10\%$.

3. За системата, описана с диференциалното уравнение

$$a_0 \ddot{x} + 2a_0 \dot{x} + a_1 x = b_0 \dot{u} + b_1 u,$$

където $\bar{a}_0 = 0.9$, $\bar{a}_1 = 2$, $\bar{b}_0 = 0.2$, $\bar{b}_1 = 1$ и всички параметри са с неопределеност $\pm 30\%$, съставете модел на системата с неопределеност в пространство

на състоянията (клас `uss`). Обърнете внимание на повтарящия се параметър \bar{a}_0 . Как изглежда матрицата Δ ?

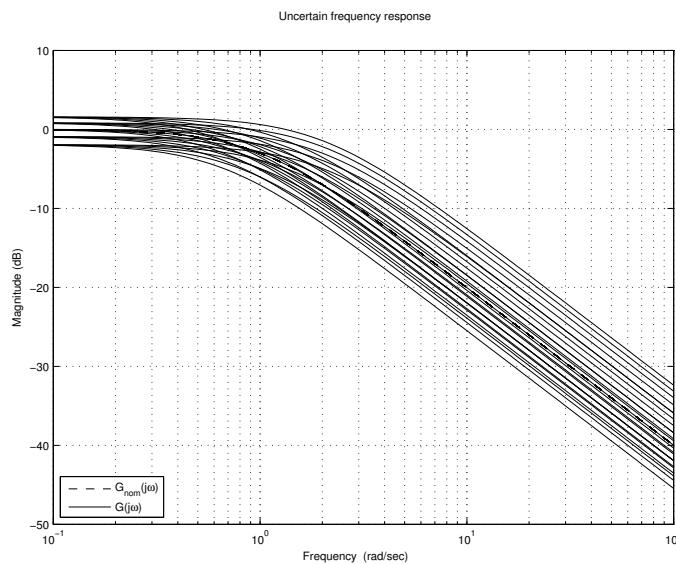
Глава 3

МОДЕЛИ С НЕСТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

3.1 Теоретични сведения

Терминът *неопределеност* се отнася до разликите или грешките между моделите и реалността, и всеки механизъм, използван за изразяване на тези грешки, се нарича *представяне на неопределеността*. Представянията на неопределеността варират в зависимост от структурата, които те съдържат. Това отразява както нашето познаване на физическите механизми, които пораждат разликите между модела и обекта, така и нашите възможности за представяне на тези механизми по начин, който облекчава третирането им.

В общия случай ние сме принудени да използваме не само единствен параметризиран модел, а множество от модели (“множество на неопределеността”), които позволяват да се обхванат възможните динамични характеристики на обекта. Един прост пример е използването на граници върху предавателните функции в честотната област, за да се опише множеството на моделите. При използването на такива множества за описание на физически системи границите в общия случай нарастват с увеличаването на честотата (фиг. 3.1). В частност, при достатъчно високи честоти фазата е напълно неизвестна (т.е., имаме $\pm 180^\circ$ неопределеност). Това е следствие от динамичните свойства, които са присъщи на физическите системи, и води до по-слабо структурирано представяне на неопределеността. Обикновено в честотната област е възможно да се представи в структурирана форма само нискочестотната неопределеност. Високочестотните неопределености в модела, които се дължат на безкрайномерни електромеханични резонанси,



Фигура 3.1: Неопределени честотни характеристики

чисти закъснения, процеси на разсейване и т.н. не могат да се описват по този начин. Тогава се използват модели във вид на т.нар. неструктуррирана неопределеност.

При неструктуррираната неопределеност се ограничава големината на възможните смущения, но смущенията не се свързват с конкретни елементи на обекта. (Обърнете внимание, че тук под *смущения* се имат предвид параметрични смущения, а не смущаващи въздействия.)

Трите най-често използвани модели на неструктуррирана неопределеност за многомерен обект са следните. Нека $G_n(s)$ е номиналната предавателна матрица, която представлява модел на обекта без неопределеност, и нека $G(s)$ означава предавателната матрица в присъствието на неопределеност. Тогава

$$G(s) = G_n(s) + \Delta_a(s), \quad (3.1)$$

$$G(s) = G_n(s)[I + \Delta_i(s)] \quad (3.2)$$

или

$$G(s) = [I + \Delta_o(s)]G_n(s), \quad (3.3)$$

където Δ_a представлява *адитивно смущение*, Δ_i е *входно мултипликативно смущение* и Δ_o е *изходно мултипликативно смущение*.

Единственото ограничение върху тези смущения е тяхната “големина”, която се измерва с $\|\Delta\|_\infty$. Ако желаем да направим големината честотно зависима, то можем да използваме $\bar{\sigma}(\Delta)$ или еквивалентно можем да положим $\Delta = W_1 \tilde{\Delta} W_2$, където W_1 и W_2 са минимално фазови предавателни матрици (без полюси и нули в дясната комплексна полуравнинна), които служат като честотно зависими тегловни функции. В този случай обикновено избираме W_1 и W_2 така, че $\|\tilde{\Delta}\|_\infty \leq 1$.

Адитивният модел (3.1) се използва при решаването на някои прости задачи за робастна стабилизация, но мултипликативните модели (3.2) и (3.3) често са по-реалистични, тъй като $\|\Delta_i\|_\infty$ и $\|\Delta_o\|_\infty$ представляват относителни, а не абсолютни величини. Например, $\|\Delta_i\|_\infty \leq 0.1$ означава, че големината на смущението е най-много 10% от “големината” на G_n , тъй като

$$\begin{aligned}\|G - G_n\|_\infty &= \|G_n \Delta_i\|_\infty \\ &\leq \|G_n\|_\infty \|\Delta_i\|_\infty \\ &\leq 0.1 \|G_n\|_\infty\end{aligned}$$

Задавайки, обаче, $\|\Delta_a\|_\infty \leq 0.1$, получаваме че

$$\begin{aligned}\|G - G_n\|_\infty &= \|\Delta_a\|_\infty \\ &\leq 0.1.\end{aligned}$$

При описанието на мултипликативни смущения се нуждаем и от двата модела (3.2) и (3.3), тъй като умножението на предавателни матрици не е комутативно. Представянето (3.2) предполага, че цялата неопределеност възниква на входа на обекта, докато (3.3) означава, че цялата неопределеност възниква на изхода. Използването на две тегловни предавателни матрици (W_1 и W_2) вместо една прави възможно границата върху смущението да бъде винаги нормализирана до

$$\|W_1^{-1} \Delta W_2^{-1}\|_\infty \leq 1.$$

Друг възможен модел с неструктуррирана неопределеност е моделът, основан на факторизацията на взаимно прости множители (вж. т. 1.1)

$$G(s) = N_r(s) M_r^{-1}(s), \quad (3.4)$$

където

$$N_r(s) = N_{rn}(s) + \Delta_N(s) \text{ и } M_r(s) = M_{rn}(s) + \Delta_M(s). \quad (3.5)$$

Голямо преимущество при използването на операторни норми за описание на неопределеността на модела е, че не е необходимо да се постулира съществуването на “истинска” предавателна матрица на модела. Реалните обекти винаги са

нелинейни и често нестационарни, така че не може да съществува “истинско” описание с предавателна матрица. Ние обаче можем да интерпретираме модела на неопределеността, например (3.1), по следния начин. Да предположим, че прилагаме вход $u(t)$ към обекта, такъв, че $\|u\|_2 = 1$ и че полученият изход е $y(t)$. Да предположим освен това, че същият вход, приложен към модел с предавателна матрица $G_n(s)$, дава изхода $y_n(t)$. Тогава (3.1) означава, че

$$\|y - y_n\|_2 \leq \|\Delta_a\|_\infty,$$

като това неравенство е в сила независимо от вида на номиналния модел.

Тъй като смущението Δ е честотно зависимо, неструктурният неопределеност се нарича и *комплексна неопределеност*.

3.2 Модел с адитивна неопределеност

Следният пример илюстрира как могат да се използват команди от Robust Control Toolbox, за да се получи модел на едномерна система с адитивна неопределеност.

Пример 3.1 Нека разгледаме обект на управление от първи ред с неопределеност в предавателния коефициент и времеконстантата

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}, \quad 0.8 \leq K \leq 1.2, \quad \frac{0.7}{15} \leq T \leq \frac{1.3}{15}.$$

Номиналният модел се взема като

$$G_n(s) = \frac{1}{\frac{1}{15}s + 1}.$$

Моделът с адитивна неопределеност се избира като

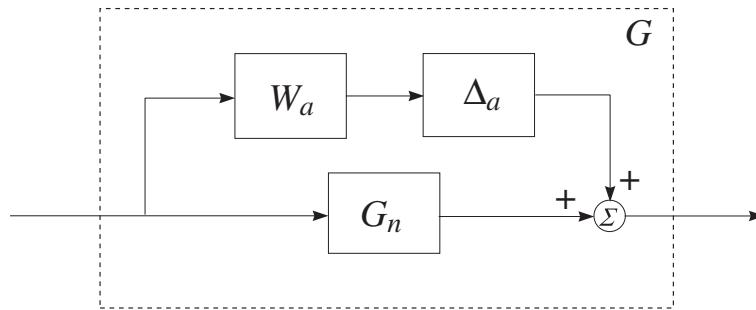
$$G(s) = G_n(s) + W_a(s)\Delta_a(s),$$

където

$$|\Delta_a(j\omega)| \leq 1.$$

Структурната схема на обекта с адитивна неопределеност е показана на фиг. 3.2.

За да се определи тегловната предавателна функция $W_a(s)$ се построяват честотните характеристики на грешката $G(j\omega) - G_n(j\omega)$ за различни стойности на параметрите K и T . Това се извършва с командите



Фигура 3.2: Обект с адитивна неопределеност

```

omega = logspace(-1,3,100);
%
K0 = 1.0; T0 = 1/15;
Gnom = tf([K0],[T0 1]);
Gnom_frd = frd(Gnom,omega);
figure(1)
hold off
for K = 0.8*K0:0.08*K0:1.2*K0
    for T = 0.7*T0:0.06*T0:1.3*T0
        G = tf([K],[T 1]);
        G_frd = frd(G,omega);
        diff = G_frd - Gnom_frd;
        bodemag(diff,'c--',omega)
        hold on
    end
end
grid
temp1 = 'Approximation of uncertain transfer function';
temp2 = ' by additive uncertainty'; title([temp1 temp2])
legend('|Wa(j\omega)|','|G(j\omega)-G_{nom}(j\omega)|',3)

```

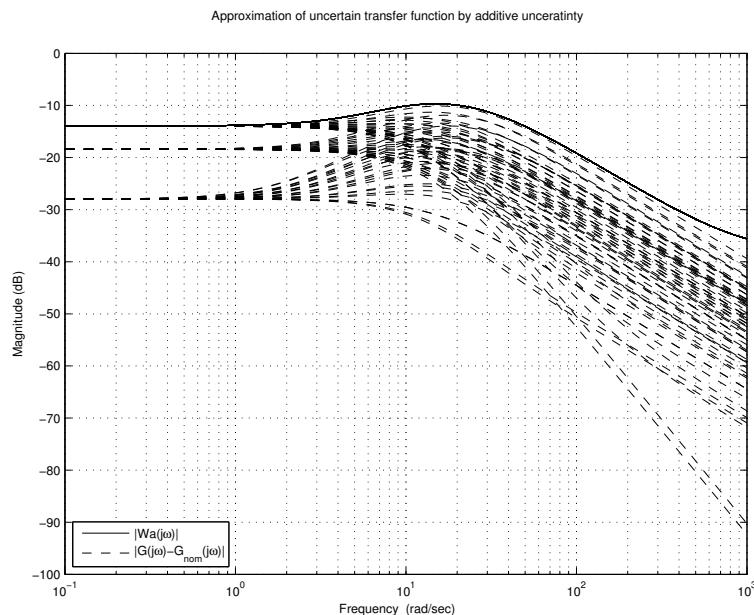
Получаването на честотните характеристики се извършва с команда `frd`.

Честотните характеристики на грешката са показани на фиг. 3.3.

Имаме, че

$$|G(j\omega) - G_n(j\omega)| = |W_a(j\omega)\Delta_a(j\omega)| \leq |W_a(j\omega)|,$$

така че $|W_a(j\omega)|$ представлява горна граница на честотните характеристики на грешката. С командите



Фигура 3.3: Апроксимация с адитивна неопределеност

```
ord = 2;
wfit
```

се намира достатъчно точна апроксимация от втори ред на тази горна граница. С командите

```
[freq,resp_db] = ginput(20); % въвеждане на 20 точки
for i = 1:20 % преобразуване на логаритмичната
    resp(i) = 10^(resp_db(i)/20); % характеристика в амплитудно-частотна
end % характеристика
sys = frd(resp,freq); % създаване на frd-обект
W = fitmagfrd(sys,ord); % апроксимиране на частотната
% характеристика
Wtf = tf(W); % преобразуване в предавателна функция
```

записани във файла `wfit.m`, се намира устойчива и минимално-фазова апроксимация на предавателна функция при зададена логаритмична частотна характеристика. За целта в случая се използват 20 точки от горната граница, които се въвеждат с натискане на левия бутон на мишката.

В резултат получаваме

```

Transfer function:
0.0121 s^2 + 11.4 s + 56.95
-----
s^2 + 36.25 s + 283.7

```

Като недостатък на този модел може да се отбележи фактът, че за представяне на неопределеността в обекта от първи ред е необходимо да се използва тегловна предавателна функция на система от втори ред.

Честотната характеристика на W_a също е показана на фиг. 3.3.

Моделът с адитивна неопределеност се получава с командите

```

Delta_a = ultidyn('Delta_a',[1 1]);
G = Gnom + Wa*Delta_a

```

В случая комплексната скаларна неопределеност Δ_a се задава с команда `ultidyn`.

3.3 Модел с мултипликативна неопределеност

Получаването на модел на едномерна система с мултипликативна неопределеност се илюстрира със следния пример.

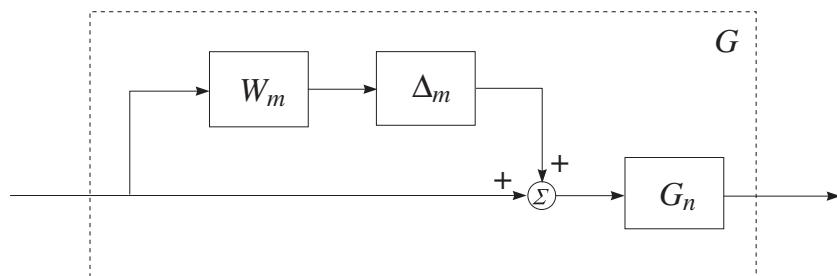
Пример 3.2 Нека е даден обекта с неопределеност, разгледан в Пример 3.1.

Моделът с мултипликативна неопределеност се избира като

$$G(s) = G_n(s)[1 + W_m(s)\Delta_m(s)],$$

където

$$|\Delta_m(j\omega)| \leq 1.$$



Фигура 3.4: Обект с мултипликативна неопределеност

Структурната схема на обекта с мултиплективна неопределеност е показана на фиг. 3.4.

В случая се построяват амплитудно честотните характеристики на относителната грешка

$$\frac{|G(j\omega) - G_n(j\omega)|}{|G_n(j\omega)|},$$

което се извършва с командите.

```
omega = logspace(-1,3,100);
%
K0 = 1.0; T0 = 1/15;
Gnom = tf([K0],[T0 1]);
Gnom_frd = frd(Gnom,omega);
figure(1)
hold off
for K = 0.8*K0:0.08*K0:1.2*K0
    for T = 0.7*T0:0.06*T0:1.3*T0
        G = tf([K],[T 1]);
        G_frd = frd(G,omega);
        reldiff = (G_frd - Gnom_frd)/Gnom_frd;
        bodemag(reldiff,'c--',omega)
        hold on
    end
end
grid
temp1 = 'Approximation of uncertain transfer function';
temp2 = ' by multiplicative uncertainty'; title([temp1 temp2]);
legend('|Wm(j\omega)|',...
    '|(G(j\omega)-G_{nom}(j\omega))/G_{nom}(j\omega)|',3)
```

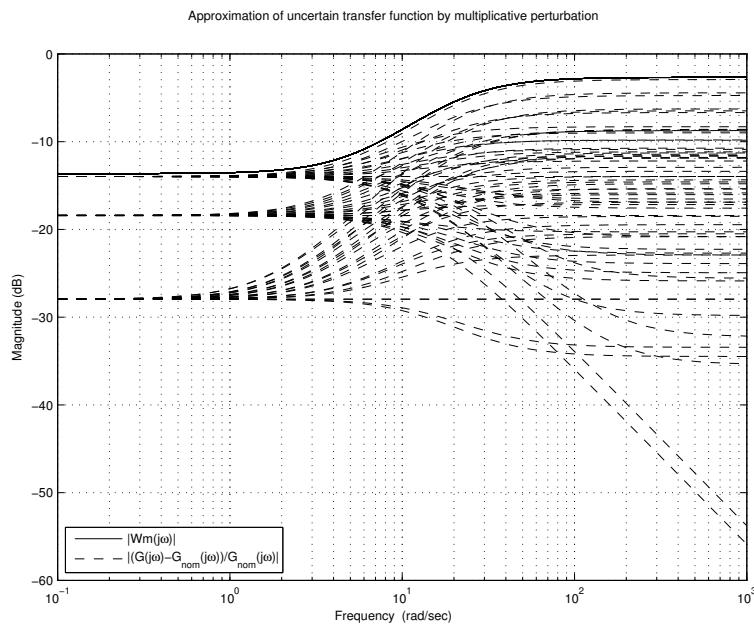
Получените честотни характеристики са показани на фиг. 3.5.

Тъй като

$$\frac{|G(j\omega) - G_n(j\omega)|}{|G_n(j\omega)|} \leq |W_m(j\omega)|,$$

определянето на $W_m(j\omega)$ е еквивалентно на намирането на горната граница на амплитудно честотните характеристики на относителната грешка. Това става с командите

```
ord = 1;
wfit
Wm = Wtf
```



Фигура 3.5: Апроксимация с мултипликативна неопределеност

като отново се използва файлът `wfit.m` при ред на апроксимацията, равен на 1. След изпълнението на тези команди намираме устойчива, минимално фазова апроксимация на горната граница

Transfer function:

```
0.7351 s + 4.288
-----
s + 20.65
```

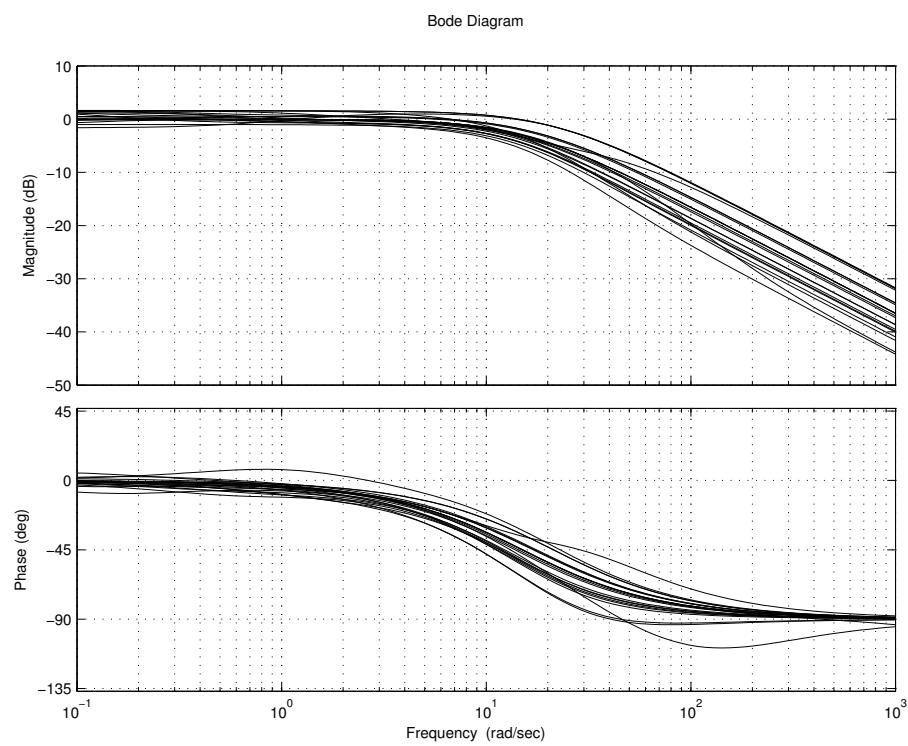
Честотната характеристика на W_m е показана на фиг. 3.5.

Получаването на модела с мултипликативна неопределеност става с командите

```
Delta_m = ultidyn('Delta_m',[1 1]);
G = Gnom*(1 + Wm*Delta_m)
```

което дава неопределен модел от втори ред в пространство на състоянията

```
USS: 2 States, 1 Output, 1 Input, Continuous System
Delta_m: 1x1 LTI, max. gain = 1, 1 occurrence
```



Фигура 3.6: Честотни характеристики на модела с неопределеност

Честотните характеристики на модела с неопределеност се получават с командния ред

```
bode(Gnom, 'r--', G, 'b-', omega)
```

и са показани на фиг. 3.6.

3.4 Немоделирана динамика

Нека разгледаме множеството от обекти

$$G(s) = G_n(s)f(s),$$

където $G_n(s)$ е фиксирана (и известна) предавателна функция. Ние желаем да пренебрегнем члена $f(s)$ (който може да е фиксирана предавателна функция или

може да принадлежи на множество на неопределеност) и да представим $G(s)$ чрез мултипликативна неопределеност с номинален модел G_n във вида

$$G(s) = G_n(s)(1 + W_m(s)\Delta_m(s)),$$

където $\Delta_m(j\omega) \leq 1$.

Тъй като

$$\frac{G(s) - G_n(s)}{G_n(s)} = f(s) - 1,$$

то амплитудно честотната характеристика на относителната неопределеност, дължаща се на пренебрегването на динамиката на $f(s)$, е

$$\frac{|G - G_n|}{|G_n|} = |f(j\omega) - 1|.$$

Оттук се получава, че

$$|W_m(j\omega)| = \max \left| \frac{G - G_n}{G_n} \right| = \max |f(j\omega) - 1|.$$

Тази процедура се илюстрира със следния пример, при който пренебрегнатото чисто закъснение се представя с мултипликативна неопределеност.

Пример 3.3 Даден е обект на управление $G = G_n(s)e^{-\tau s}$, където $0 \leq \tau \leq 0.1$ и $G_n(s)$ не зависи от τ . Желаем да представим обекта чрез мултипликативна неопределеност и номинален модел $G_n(s)$. За целта най-напред построяваме амплитудно-честотната характеристика на относителната грешка

$$|f(j\omega) - 1| = |e^{-j\omega\tau} - 1| = \sqrt{(\cos(\omega\tau) - 1)^2 + \sin(\omega\tau)^2}$$

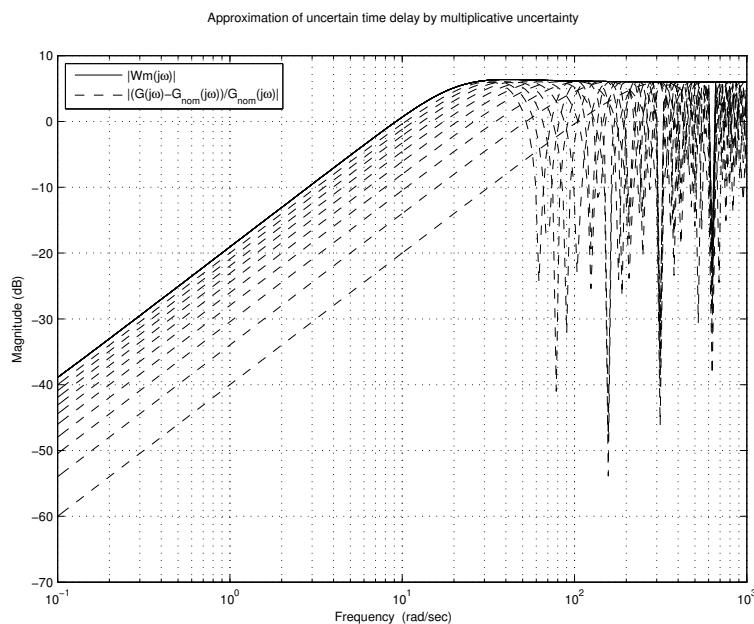
за стойности на τ между 0 и 0.1. Това се извършва с командите

```
omega = logspace(-1,3,200);
figure(1)
hold off
for tau = 0:0.01:0.1;
    for i = 1:200
        om = omega(i);
        pert(i) = sqrt((cos(om*tau)-1)^2 + sin(om*tau)^2);
    end
    magg = frd(pert,omega);
    bodemag(magg,'c--')
    hold on
```

```

end
grid
temp1 = 'Approximation of uncertain time delay';
temp2 = ' by multiplicative uncertainty'; title([temp1 temp2])
legend('|Wm(j\omega)|', ...
'|(G(j\omega)-G_{nom}(j\omega))/G_{nom}(j\omega)|',2)

```



Фигура 3.7: Апроксимация на неопределен чисто закъснение

Получените честотни характеристики са показани на фиг. 3.7. След това се намира устойчива и минимално фазова апроксимация на мултипликативната неопределеност както в пример 3.2, като се използват командите

```

ord = 2;
wfit
Wm = Wtf

```

В резултат за тегловната предавателна функция $W_m(s)$ се получава

```

Transfer function:
2 s^2 + 54 s + 1.1
-----
s^2 + 37 s + 485

```

3.5 Многомерни модели с неструктуррирана неопределеност

Получаването на модели на многомерни системи с неструктуррирана неопределеност може да стане с помощта на методите, разгледани в т. 3.2 – 3.4, като за всеки елемент на предавателната матрица се намира едномерен модел с адитивна или мултипликативна неопределеност. Получените скаларни модели след това се обединяват в предавателна матрица, за да се получи моделът с неопределеност на многомерната система.

Нека например разгледаме модел на двумерна система с неопределеност, която има предавателна матрица

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix},$$

където g_{11} , g_{12} , g_{21} , g_{22} са скаларни предавателни функции, съдържащи неопределеност. Тези предавателни функции се представят със соответствните модели, апроксимирали поотделно максималната грешка във всеки един елемент.

Ако всеки един от елементите е представен с модел с мултипликативна неопределеност, за модела на цялата система получаваме

$$G = \begin{bmatrix} g_{n11}(1 + W_{11}\Delta_{11}) & g_{n12}(1 + W_{12}\Delta_{12}) \\ g_{n21}(1 + W_{21}\Delta_{11}) & g_{n22}(1 + W_{22}\Delta_{22}) \end{bmatrix},$$

където g_{n11} , g_{n12} , g_{n21} , g_{n22} са номиналните предавателни функции, W_{11} , W_{12} , W_{21} , W_{22} са получените при апроксимациите тегловни функции, а Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} , Δ_{22} са комплексни скаларни неопределености от типа *ultidyn*.

Обърнете внимание, че в получения модел неопределеността вече се характеризира с определена структура, независимо че в отделните елементи тя е неструктуррирана.

3.6 Задачи

- За едномерна система с предавателна функция

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1},$$

където K се променя в диапазона $10 - 12$, T се променя в диапазона $0.1 - 0.15$ и ξ се променя в диапазона $0.3 - 0.4$, намерете модел с адитивна неопределеност, следвайки методиката, разгледана в т. 3.2.

2. За системата от предишната задача намерете модел с мултипликативна неопределеност, следвайки методиката, разгледана в т. 3.3.
3. За двумерната система с номинална предавателна матрица

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{10}{s^2 + 0.4s + 16} & \frac{1}{\frac{s+1}{5}} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

и неопределени закъснения по първия и втория вход в диапазона $0 - 0.2$, намерете модел с неструктуррирана неопределеност, следвайки методиката, разгледана в т. 3.4.

Глава 4

РОБАСТНА УСТОЙЧИВОСТ ПРИ НЕСТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

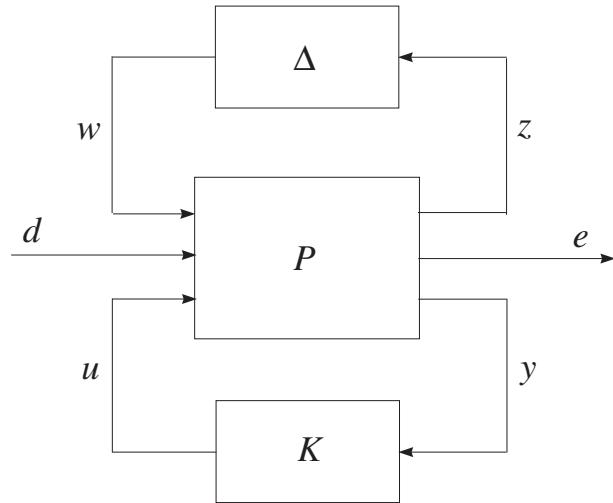
4.1 Теоретични сведения

Използвайки представянето с линейни дробни преобразувания (ЛДП), задачата за управление на линейна многомерна система с неопределеност може да се представи със структурната схема, показана на фиг. 4.1.

Блокът, означен с P , е отворената система и съдържа всички известни елементи, включително номиналния модел на обекта и тегловните функции на неопределеността. Блокът Δ е неопределененият елемент от множеството, което параметризира цялата предполагаема неопределеност на модела. По-нататък се предполага, че блокът Δ е устойчив и ограничен по норма: $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. Управляващото устройство в системата е блокът K . Блокът P има три множества от входове: входове от неопределеността w , смузващи въздействия d и управляващи въздействия u . Генерират се три множества от изходи: изходи от неопределеността z , грешки e и измервания y .

Задачата за синтез се състои в определяне на управляващо устройство K , което осигурява вътрешна устойчивост на системата и поддържа предавателната матрица между d и e малка в смисъла на \mathcal{H}_∞ -нормата за цялото множество от допустими неопределености Δ .

Необходимо е да се има предвид, че в процеса на намиране на обобщеното описание, показано на фиг. 4.1, всяка неопределеност, възникваща на нивото на системните елементи (чувствителни елементи, изпълнителни елементи и т.н.) се превръща автоматично в структурирана неопределеност на нивото на обобщената



Фигура 4.1: Описание с ЛДП на задачата за управление

система P .

Затворената система е ЛДП на неопределеността и управляващото устройство, което се дава от

$$\begin{aligned} e &= F_U(F_L(P, K), \Delta)d \\ &= F_L(F_U(P, \Delta), K)d. \end{aligned}$$

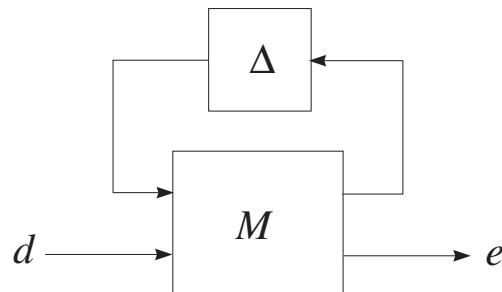
В тази глава се разглеждат методи за анализ на робастността. Ето защо управляващото устройство може да се разглежда като известен елемент на системата и да се абсорбира в структурата на отворената система. Нека означим

$$M(s) = F_L(P(s), K(s)) = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

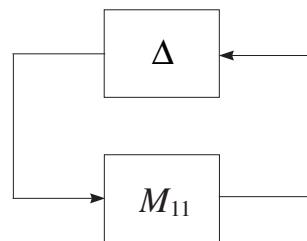
Тогава общата структурна схема, показана на фиг. 4.1, се привежда в структурната схема, показана на фиг. 4.2, където

$$e = F_U(M, \Delta)d = [M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}]d.$$

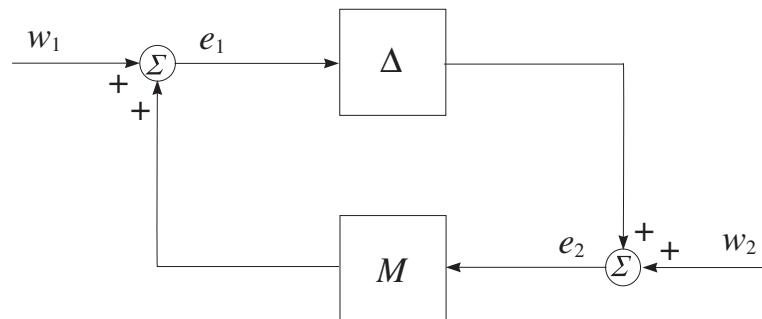
При разглеждане на робастността на системата външните въздействия не оказват влияние върху устойчивостта. Ето защо при анализа на робастната устойчивост се използва структурната схема, показана на фиг. 4.3.



Фигура 4.2: Постановка на задачата за анализ на робастността



Фигура 4.3: Постановка за задачата за анализ на робастната устойчивост

Фигура 4.4: $M - \Delta$ контур за анализ на устойчивостта

Условията за робастна устойчивост в случая на неструктуррирана неопределеност се извеждат с помощта на т. нар. *теорема за малкия коефициент на усиление*.

Нека да разгледаме съединението, показано на фиг. 4.4, с устойчива $p \times q$ предавателна матрица $M(s)$.

В съответствие с теоремата за малкия коефициент на усилване [3] $M - \Delta$ система, показана на фиг. 4.4 с $M_{11} = M$, е устойчива за всички смущения $\Delta(s)$, удовлетворяващи $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$ (т.е., имаме робастна устойчивост), ако и само ако

$$\bar{\sigma}(M(j\omega)) < 1 \text{ за всяко } \omega, \quad (4.1)$$

което е еквивалентно на

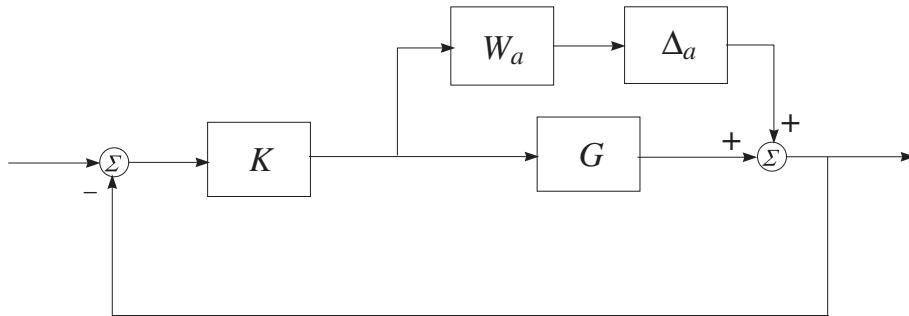
$$\|M\|_\infty < 1. \quad (4.2)$$

Условието 4.3 може да се запише като

$$\bar{\sigma}(M(j\omega))\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1, \text{ за всяко } \omega \text{ и за всяко } \Delta. \quad (4.3)$$

В следващите две точки са представени необходимите и достатъчни условия за робастна устойчивост за най-често срещаните случаи на неструктуррирана неопределеност.

4.2 Условия за робастна устойчивост при адитивна и мултипликативна неопределеност



Фигура 4.5: Адитивна неопределеност

За случая на адитивна неопределеност, показан на фиг. 4.5, множеството на всички възможни обекти се дава от

$$G_p = G + \Delta_a W_a.$$

За да изведем матрицата M , изолираме смущението и определяме предавателната матрица

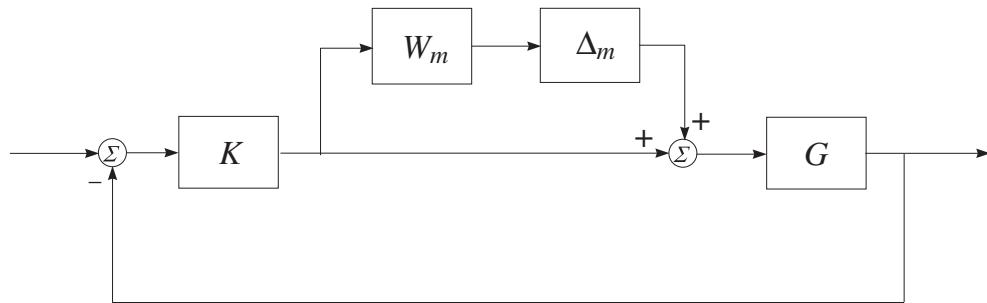
$$M = W_a M_0,$$

където

$$M_0 = K(I + GK)^{-1} = KS.$$

В резултат на прилагане на теоремата за малкия коефициент на усилване получаваме условието за робастна устойчивост

$$\|W_a KS\|_\infty < 1.$$



Фигура 4.6: Входна мултипликативна неопределеност

За случая на входна мултипликативна неопределеност, показан на фиг. 4.6, множеството на всички възможни обекти се дава от

$$G_p = G(I + \Delta_m W_m).$$

В този случай

$$M = W_m M_0,$$

където

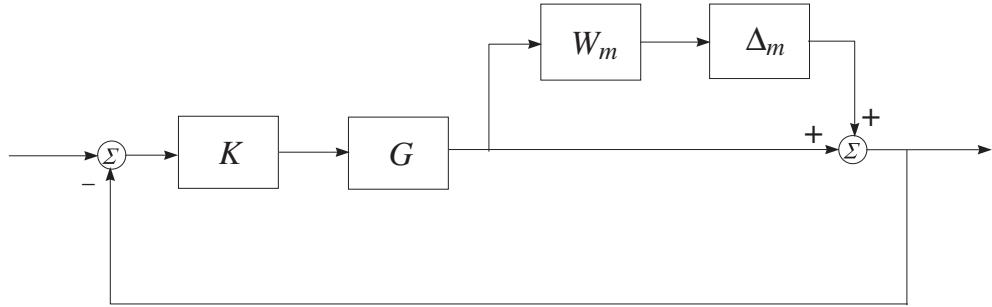
$$M_0 = -(I + KG)^{-1}KG = -T_i$$

с точност до знака е входната допълнителна чувствителност. В резултат условието за робастна устойчивост е

$$\|W_m T_i\|_\infty < 1.$$

За случая на изходна мултипликативна неопределеност, показан на фиг. 4.7, имаме, че

$$G_p = (I + \Delta_m W_m)G.$$



Фигура 4.7: Изходна мултипликативна неопределеност

В този случай

$$M = W_m M_0,$$

където

$$M_0 = GK(I + GK)^{-1} = T_o$$

е изходната допълнителна чувствителност. Условието за робастна устойчивост е

$$\|W_m T_o\|_\infty < 1.$$

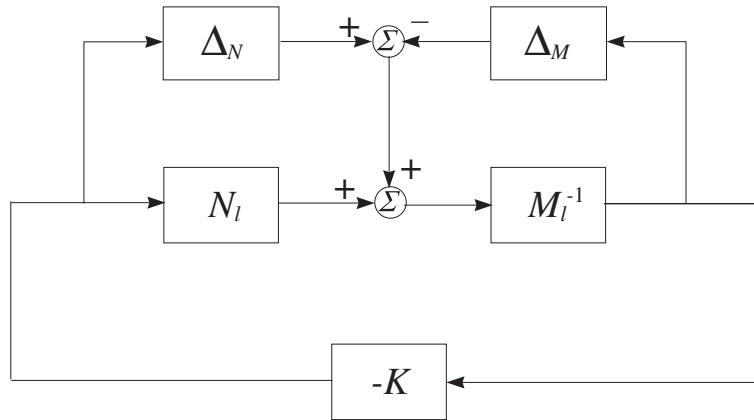
Проверката за робастна устойчивост може да се извърши чрез честотните характеристики на сингулярните стойности на съответната матрица $(W_a K S, W_m T_i, W_m T_o)$ или чрез изчисляване на \mathcal{H}_∞ нормата на тази матрица с команда `norm`.

4.3 Робастна устойчивост при неопределеност в простите множители

Едно важно описание на неопределеността, което влиза в тази категория, е описането с взаимно прости множители, показано на фиг. 4.7, за което множеството от обекти е

$$G_p = (M_\ell + \Delta_M)^{-1} (N_\ell + \Delta_N), \quad \|[\Delta_N \ \Delta_M]\|_\infty \leq \varepsilon, \quad (4.4)$$

където $G = M_\ell^{-1} N_\ell$ е лява взаимно прста факторизация на номиналната система (вж. т. 1.1). Това описание на неопределеността е достатъчно общо и то позволява и нулите, и полюсите, да преминават в дясната комплексна полуравнина. Трябва да се отбележи, че в този случай предпочитаме да не нормализираме смущението, така че неговата норма да е по-малка от единица. Това се прави, тъй като това описание на неопределеността често се използва при синтеза на управляващо



Фигура 4.8: Неопределеност във взаимно простите множители

устройство, където целта е да се максимира големината на неопределеността (ε), така че робастната устойчивост да се запазва.

За да се провери робастната устойчивост можем да преобразуваме блок–схемата, за да получим $M - \Delta$ -структурата от фиг. 4.3 с

$$\Delta = [\Delta_N \ \Delta_M], \quad M = - \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} M_\ell^{-1}. \quad (4.5)$$

Тогава от теорема за малкия коефициент на усиливане получаваме, че системата е устойчива за всяко $\|\Delta_N \ \Delta_M\|_\infty \leq \varepsilon$, ако и само ако е изпълнено условието

$$\|M\|_\infty < 1/\varepsilon. \quad (4.6)$$

Този резултат има основна роля в процедурата за \mathcal{H}_∞ синтез при желани честотни характеристики, разгледана в гл. 7.

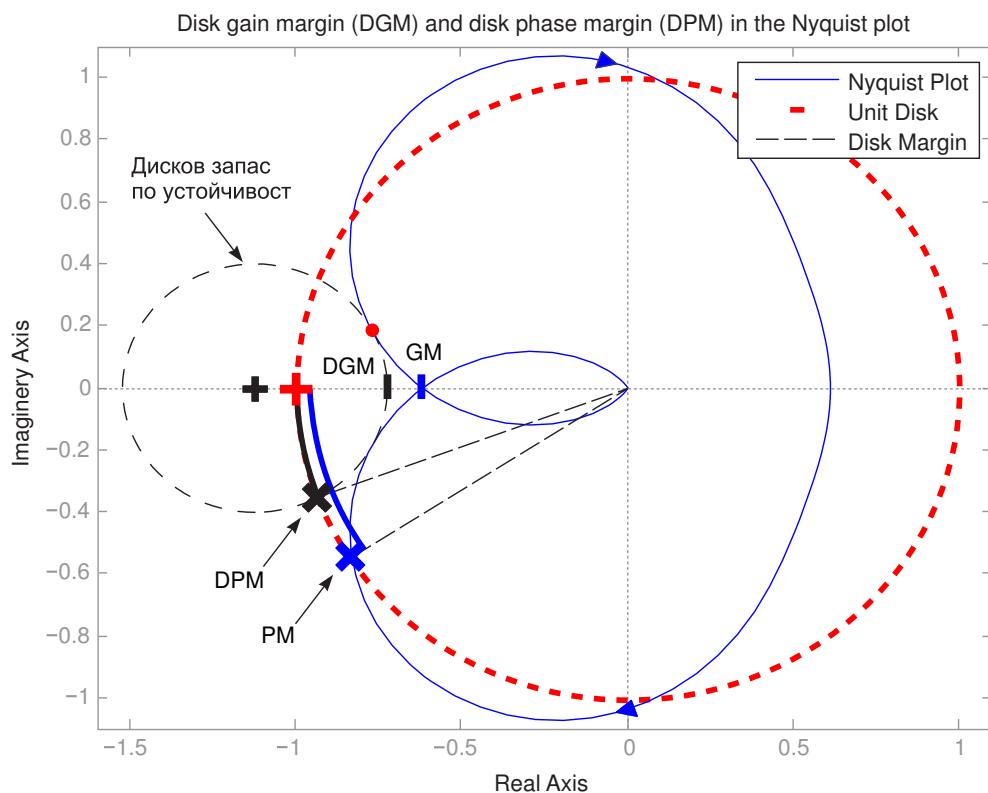
4.4 Определяне на запаса по устойчивост

Анализът на робастната устойчивост на система с неструктуррирана неопределеност е свързан с определянето на запаса по устойчивост.

Изчисляването на запаса по устойчивост може да се извърши с командите `loopmargin` и `wcmargin`.

С команда `[sm, dm, mm] = loopmargin(L)` се определят три типа запаси по устойчивост на номинална многомерна система, зададена с $N \times N$ предавателната матрица на отворената система L и единична матрица в обратната връзка.

или едномерният запас по устойчивост е $N \times 1$ структура, съдържаща информация за запаса по амплитуда и фаза на всеки канал, разглеждан самостоятелно от останалите канали. Това са класическите запаси по устойчивост на отделните канали, които се разглеждат като се пренебрегнат връзките помежду им. За многомерна система тези запаси не са реалистични, тъй като действителните запаси по устойчивост могат да са много по-малки от едномерните поради взаимните влияния между каналите.



Фигура 4.9: Дисков запас по амплитуда и дисков запас по фаза

или *дисковият запас по устойчивост* е $N \times 1$ структура, съдържаща информация за дисковия запас по амплитуда и дисковия запас по фаза за всеки канал. Дисковият запас по устойчивост за i -тия канал се определя от най-големия диск с център върху отрицателната реална ос в точката $(DGM + 1/DGM)/2$, който съдържа критичната точка $(-1, 0)$ и се допира до ходографа на Найквист на $L(i, i)$ (вж. фиг. 4.9). Дисковите запаси по амплитуда и фаза се дават от пресичането на този диск с реалната ос и единичната окръжност. (На фигурата

стойностите на GM и PM отговарят на класическите запаси по амплитуда и фаза, а стойностите на DGM и DPM отговарят на дисковия запас по амплитуда и фаза.) По-конкретно, като долната и горна граница на дисковия запас по амплитуда се вземат съответно абсолютните стойности на DGM и $1/DGM$. Дисковият запас по устойчивост дава най-голямата област за всеки канал, такава че за всички изменения на усилването и фазата в тази област номиналната затворена система остава устойчива.

Дисковият запас по амплитуда и дисковият запас по фаза са долни граници на класическите запаси по амплитуда и фаза и се използват за оценяване на комбинираните изменения на усилването и фазата, които са допустими от гледна точка на запазване на устойчивостта.

mm или многомерният запас по устойчивост е структура, съответстваща на едновременни и независими изменения в отделните канали на предавателната матрица L . mm съдържа информация за най-голямата област, такава че за всички изменения на усилването и фазата, възникващи независимо във всеки канал, затворената система остава устойчива. Обърнете внимание, че mm е единствена структура, независеща от броя на каналите, тъй като измененията във всички канали се третират едновременно. Този запас по устойчивост е по-подходящ за използване при многомерните системи.

В случаите, когато в системата присъства неопределеност, вместо командата `loopmargin` е по-добре да се използва командата `wcmargin`, с която се определят запасите по амплитуда и фаза в най-лошия случай. Тази команда изчислява най-големия дисков запас по устойчивост, такъв че за всички възможни стойности на неопределеността и всички изменения на усилването и фазата вътре в диска, затворената система остава устойчива. Следователно, резултатите от изчисляването на най-лошия запас по устойчивост означават, че затворената система е устойчива за дадено множество на неопределеността и ще остава устойчива в присъствието на допълнителни изменения на усилването и фазата в дадения входно-изходен канал.

Командата `[margi, margo] = wcmargin(L)` изчислява комбинираните най-лоши входни и изходни запаси по устойчивост за контур с обратна връзка, състоящ се от предавателна матрица на отворената система L и единична матрица в обратната връзка. L трябва да бъде неопределенена система, обект от типа `uss` или `ufrd`.

За системи с неструктуррирана неопределеност като запас по устойчивост може да се разглежда и величината $1/\|M\|_\infty$. Тази величина показва колко пъти може да се увеличи неопределеността в системата, запазвайки същевременно нейната устойчивост.

Запасът по устойчивост при неопределеност във взаимно простите множители се изчислява с командата

```
[marg,freq] = ncfmargin{Gnom,K}
```

където G_{nom} е номиналната предавателна матрица на обекта, а `marg` съдържа горна и долната граница на запаса по устойчивост и `freq` е честотата, съответстваща на горната граница. Този запас по устойчивост лежи между 0 и 1 и характеризира робастността към неструктурни смущения. Стойности на `marg` над 0.3 обикновено показват достатъчен запас по устойчивост.

4.5 Пример за анализ на робастната устойчивост

Разглеждаме двуканална система с обект от 5-ти ред с два входа и два изхода и номинална предавателна матрица

$$G_{nom} = \begin{bmatrix} \frac{6}{(0.9s+1)(0.1s+1)} & \frac{-0.05}{0.1s+1} \\ \frac{0.07}{0.3s+1} & \frac{5}{(1.8s-1)(0.06s+1)} \end{bmatrix}.$$

Системата има неопределеност на първия вход, състояща се от 5% грешка в нискочестотната област, която нараства и става 100% при 35 rad/s, достигайки 1000% във високочестотната област. Неопределеността във втория вход е 8% в нискочестотната област, 100% при 40 rad/s, нараствайки до 1000% във високочестотната област.

Робастната устойчивост на затворената система ще бъде анализирана за две управляващи устройства:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{7(s+1)}{0.3s+1} & 0 \\ 0 & \frac{18(s+2)}{s+1} \end{bmatrix}$$

и

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{2(s+1)}{s} & \frac{-s}{3s+1} \\ \frac{-5(s+1)}{0.8s+1} & \frac{4(0.7s+1)}{s} \end{bmatrix}.$$

Най-напред формираме тегловните функции на двете входни неопределености и построяваме модела на обекта с входна мултиплективна неопределеност

```
W1 = makeweight(0.05,35,10);
W2 = makeweight(0.08,40,10);
Delta1 = ultidyn('Delta1',[1 1]);
Delta2 = ultidyn('Delta2',[1 1]);
```

```

W = blkdiag(W1,W2);
Delta = blkdiag(Delta1,Delta2);
G = Gnom*(eye(2) + Delta*W)

```

В резултат получаваме двумерен обект от осми ред

```

USS: 8 States, 2 Outputs, 2 Inputs, Continuous System
Delta1: 1x1 LTI, max. gain = 1, 1 occurrence
Delta2: 1x1 LTI, max. gain = 1, 1 occurrence

```

Първоначално ще анализираме системата с управляващото устройство K_1 . Определяме входната допълнителна чувствителност с командните редове

```

looptransfer = loopsens(G,K1);
Ti = looptransfer.Ti;

```

след което получаваме сингулярните стойности на предавателната матрица WT_i (при изчисленията се използва номиналната допълнителна чувствителност)

```

figure(1)
omega = logspace(-1,4,100);
sigma(W*Ti.Nominal,omega)
grid

```

Честотните характеристики на сингулярните стойности са показани на фиг. 4.10. Вижда се, че максимумът на най-голямата сингулярна стойност е по-голям от единица (около 11 dB), което показва че системата не е робастно устойчива. Точната стойност на \mathcal{H}_∞ нормата се получава с команда

```
[PeakNorm,freq] = norm(W*Ti.Nominal,'inf')
```

и е равна на

```
PeakNorm =
```

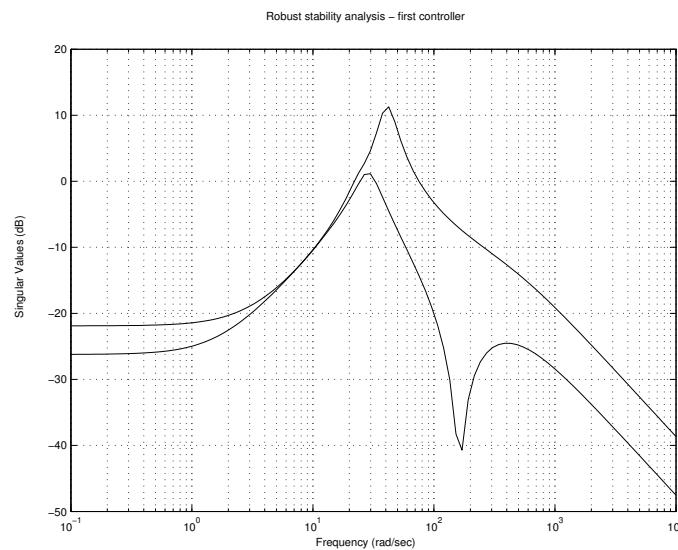
3.7165

Нека сега анализираме робастната устойчивост на системата с второто управляващо устройство.

Сингулярните стойности на матрицата WT_i са показани на фиг. 4.11. Стойността на \mathcal{H}_∞ нормата в случая е

```
PeakNorm =
```

0.8836



Фигура 4.10: Анализ на робастната устойчивост за първото управляващо устройство

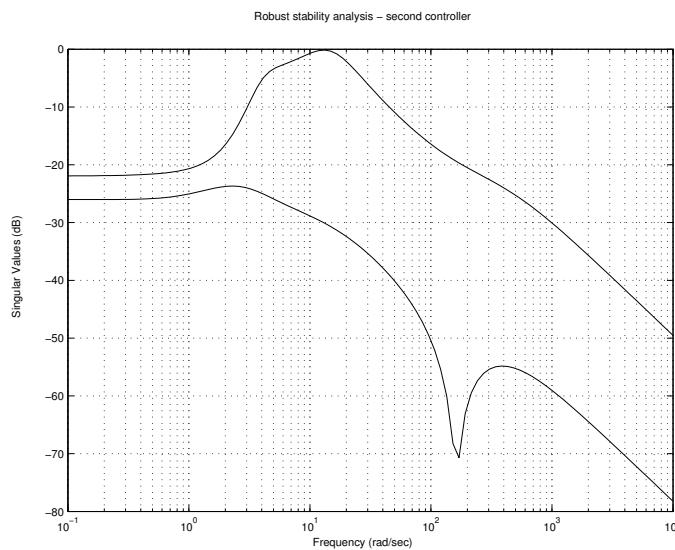
което означава, че затворената система постига робастна устойчивост. Необходимо е да се отбележи, че по-добрата робастност на затворената система в този случай се дължи на наличието на извъндиагонални елементи в предавателната матрица на управляващото устройство.

Получаването на запасите по устойчивост става с командата

```
[sm, dm, mm] = loopmargin(G*K2);
```

За запаса по устойчивост на първия канал се получава

```
sm(1)
ans =
GainMargin: [1x0 double]
GMFrequency: [1x0 double]
PhaseMargin: 94.7544
PMFrequency: 6.4466
DelayMargin: 0.2565
DMFrequency: 6.4466
Stable: 1
```



Фигура 4.11: Анализ на робастната устойчивост за второто управляващо устройство

Запасът по амплитуда за първия канал е безкрайно голям, а запасът по фаза е 94.75 градуса. Дисковият запас по устойчивост показва, че при едновременни изменения на усилването и фазата в този канал са допустими изменения на усилването между 0.156 и 6.412 и изменения на фазата между -72.27 градуса и 72.27 градуса.

```
dm(1)
ans =
GainMargin: [0.1560 6.4121]
PhaseMargin: [-72.2716 72.2716]
Frequency: 3.8062
```

Вижда се, че когато са разрешени едновременни изменения на усилването и фазата, запасът по устойчивост значително се стеснява.

За класическия запас по устойчивост за втория канал се получава

```
sm(2)
ans =
GainMargin: [0.1158 227.7183]
```

74 ГЛАВА 4. РОБАСТНОСТ ПРИ НЕСТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

```
GMFrequency: [1.2417 171.6139]
PhaseMargin: 41.4064
PMFrequency: 4.7050
DelayMargin: 0.1536
DMFrequency: 4.7050
Stable: 1
```

което показва, че са допустими изменения на усилването между 0.116 и 227.72 и 41.4 градуса изменения във фазата. За дисковия запас в този канал се получава

```
dm(2)
ans =
GainMargin: [0.4823 2.0732]
PhaseMargin: [-38.4998 38.4998]
Frequency: 3.922
```

което отново показва значително стесняване на запаса по устойчивост.

Многомерният запас по устойчивост дава информация за максимално възможните едновременни и независими изменения на усилването и фазата във всеки канал. В случая този анализ дава

```
mm
mm =
GainMargin: [0.5566 1.7967]
PhaseMargin: [-31.8008 31.8008]
Frequency: 3.9226
```

което показва, че са допустими изменения в усилването между 0.557 и 1.797 и изменения във фазата между -31.8 градуса и 31.8 градуса. По такъв начин при едновременни и независими изменения на усилването и фазата в двата канала запасът по устойчивост значително намалява.

Анализът на най-лошия случай при наличието на неопределеност отговаря на максимално допустимия дисков запас по устойчивост за всички възможни неопределенисти Δ_1 и Δ_2 . Този анализ се извършва с команда

```
[wcmargi,wcmargo] = wcmargin(G*K2);
```

В най-лошия случай на изхода на първия канал са допустими изменения в усилването между 0.466 и 2.147 и изменения във фазата между -40.05 и 40.05 градуса.

```
wcmargo(1)
ans =
GainMargin: [0.4658 2.1468]
PhaseMargin: [-40.0471 40.0471]
Frequency: 15.5245
Sensitivity: [1x1 struct]
```

По такъв начин допустимите изменения в усилването и фазата при вариране на неопределеностите Δ_1 и Δ_2 са значително по-малки от измененията, които са допустими при номиналната система. Такова стесняване на допустимите изменения в усилването и фазата се наблюдава и във втория канал:

```
wcmargo(2)
ans =
GainMargin: [0.5672 1.7631]
PhaseMargin: [-30.8785 30.8785]
Frequency: 4.4491
Sensitivity: [1x1 struct]
```

Максималната големина на неопределеността, за която се запазва устойчивостта на затворената система, може да се намери от \mathcal{H}_∞ нормата на матрицата WT_i като

`1/PeakNorm`

което дава

`ans =`

`1.1317`

Тази величина може да се разглежда като запас по устойчивост и показва, че големината на неопределеността може да се увеличи 1.13 пъти, запазвайки в същото време устойчивостта на затворената система. За разглежданата система този резултат е консервативен, т.е., истинският запас по устойчивост е по-голям, тъй като в случая матрицата Δ има вида

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}$$

т.е., тя вече има определена структура, докато при анализа се предполага, че тази матрица има четири ненулеви блока. Това потвърждава казаното по-горе,

76 ГЛАВА 4. РОБАСТНОСТ ПРИ НЕСТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

че всяка неопределеност, възникваща на нивото на отделните системни елементи, се превръща в структурирана неопределеност на нивото на обобщената система. Точният запас по устойчивост в случая може да се намери с команда **robuststab**, която се използва при структурирана неопределеност и е равен на 2.49, т.е., системата може да толерира до 249% от моделираната неопределеност.

Анализът на усилването в най-лошия случай се извършва с команда

```
[maxgain,wcu] = wcgain(S_o)
```

като под “усилване” в случая се има предвид максимумът на най-голямата сингулярна стойност (\mathcal{H}_∞ нормата) на изходната чувствителност. Резултатът е

```
maxgain =
```

```
LowerBound: 3.3331  
UpperBound: 3.3348  
CriticalFrequency: 4.4491
```

```
wcu =
```

```
Delta1: [1x1 ss]  
Delta2: [1x1 ss]
```

като в променливата **wcu** се получава неопределеността, за която имаме максималното усилване. Заместването на тази неопределеност в изходната чувствителност дава възможност да се получат сингулярните стойности на S_o в най-лошия случай:

```
omega = logspace(-1,3,100);  
sigma(usubs(So,wcu), 'r.', So, 'b-', omega)
```

Сингулярните стойности на матрицата S_o за различни неопределености са показвани заедно с тези в най-лошия случай на фиг. 4.12.

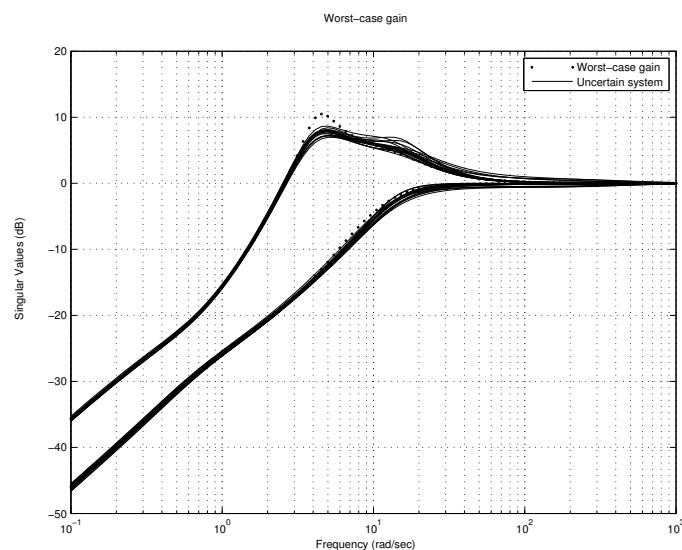
Запасът по устойчивост при неопределеност във взаимно простите множители на предавателната матрица на обекта се намира с команда

```
[marg,freq] = ncfmargin{Gnom,K2}
```

което дава

```
marg =
```

```
0.0999
```



Фигура 4.12: Анализ на усилването в най-лошия случай

```
freq =
```

```
17.0798
```

Резултатът показва, че запасът по устойчивост на затворената система по отношение на неопределеност във взаимно простите множители е малък.

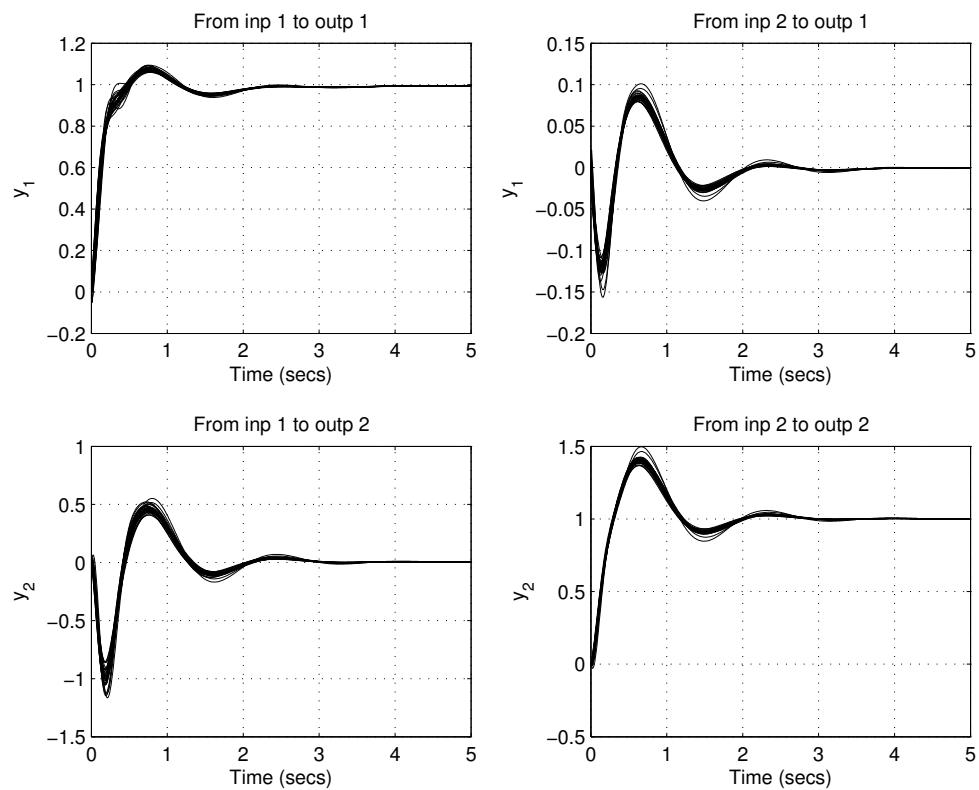
И накрая, преходните процеси по задание при единично въздействие на първия вход на системата с неопределеност за 30 случаини стойности на неопределеността се намират с командите:

```
tfin = 5;
nsample = 30;
[To30,samples] = usample(To,nsample);
time = 0:tfin/500:tfin;
nstep = size(time,2);
ref1(1:nstep) = 1.0;
ref2(1:nstep) = 0.0;
ref = [ref1' ref2'];
nsample = 30;
```

78 ГЛАВА 4. РОБАСТНОСТ ПРИ НЕСТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

```
[To30,samples] = usample(To,nsample);
figure(4)
subplot(2,2,1)
hold off
for i = 1:nsample
    [y,t] = lsim(To30(1:2,1:2,i),ref,time);
    plot(t,y(:,1),'r-')
    hold on
end
grid
title('From inp 1 to outp 1') xlabel('Time (secs)')
ylabel('y_1')
figure(4)
subplot(2,2,3)
hold off
for i = 1:nsample
    [y,t] = lsim(To30(1:2,1:2,i),ref,time);
    plot(t,y(:,2),'b-')
    hold on
end
grid
title('From inp 1 to outp 2')
xlabel('Time (secs)')
ylabel('y_2')
```

Аналогично се получават преходните процеси при единично въздействие на втория вход. Преходните процеси по задание са показани на фиг. 4.13.



Фигура 4.13: Преходни процеси на системата с неопределеност

4.6 Задачи

1. Дадена е двуканална система с обект от 5-ти ред с три входа и два изхода и номинална предавателна матрица

$$G_{nom} = \begin{bmatrix} \frac{2}{0.015s^2 + 0.8s + 1} & \frac{0.02}{0.3s + 1} & \frac{-0.08}{0.4s + 1} \\ \frac{0.04}{0.1s + 1} & \frac{1}{0.04s^2 + 1.2s + 1} & \frac{-0.03}{s + 1} \end{bmatrix}.$$

Системата има неопределеност на първия вход, състояща се от 6% грешка в нискочестотната област, която при 45 rad/s достига 100%, достигайки до 500% във високочестотната област. Неопределеността във втория вход е 4% в нискочестотната област, 100% при 50 rad/s, нарастващи до 1000% във високочестотната област. Неопределеността в третия вход е 5% в нискочестотната област, 100% при 60 rad/s, нарастващи до 800% във високочестотната област.

Управляващото устройство на системата е

$$K = \begin{bmatrix} \frac{5(0.3s + 1)}{0.1s + 1} & 0 \\ 0 & \frac{10(0.5s + 1)}{0.2s + 1} \\ \frac{s + 1}{0.2s + 1} & \frac{-0.4}{0.5s + 1} \end{bmatrix}.$$

Необходимо е да се извършат следните изследвания:

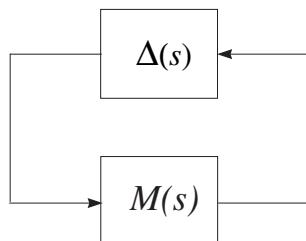
- Постройте модел на обекта с входна мултипликативна неопределеност;
- Изследвайте робастната устойчивост на затворената система;
- Определете запасите по устойчивост и дисковите запаси по устойчивост на двета канала и многомерния запас по устойчивост;
- Определете дисковите запаси по устойчивост на двета канала в най-лошия случай;
- Получете амплитудно-честотните характеристики на изходната чувствителност в най-лошия случай;
- Намерете запаса по устойчивост при неопределеност във взаимно простите множители на предавателната матрица на обекта;
- Получете преходните процеси по задание на затворената система с неопределеност.

Глава 5

РОБАСТНА УСТОЙЧИВОСТ ПРИ СТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

5.1 Теоретични сведения

Разгледаните в Глава 4 условия за робастна устойчивост са изведени, без да се взема предвид възможната структура на неопределеността. Поради това при прилагането им за системи със структурирана неопределеност могат да се получат много пессимистични оценки за устойчивостта. За да се отчете наличната информация за структурата на неопределеността при анализа на такива системи, е въведена т. нар. структурирана сингулярна стойност, означавана с μ .



Фигура 5.1: $M - \Delta$ контур за анализ на устойчивостта

За целите на анализа на робастната устойчивост е удобно системите за управление с неопределеност да се представят с $M - \Delta$ контура, показан на фиг. 5.1, с отделени известна и неизвестна част. С $M(s)$ е означена предавателната матрица

на номиналната затворена система. Неизвестната част представлява множество от предавателни матрици $\Delta(s)$ със зададена блок-диагонална структура, съответстваща на структурата на неопределеността на разглежданата система (броя, вида, размерността и повтаряемостта на неопределените елементи). Искаме да определим колко големи в смисъла на \mathcal{H}_∞ нормата могат да бъдат предавателните матрици $\Delta(s)$, така че системата да остава устойчива.

Известно е, че при устойчиви $M(s)$ и $\Delta(s)$ затвореният контур на фиг. 5.1 е устойчив, ако за всяка честота ω е изпълнено условието

$$\det(I - M(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0. \quad (5.1)$$

Имайки предвид (5.1), задачата за анализ на робастната устойчивост на системата може да се формулира така: да се определи големината, измерена с \mathcal{H}_∞ нормата, на най-малката структурирана предавателна матрица $\Delta(s)$, за която контурът $M - \Delta$ става неустойчив, т.e. за която

$$\det(I - M(j\omega)\Delta(j\omega)) = 0$$

за някаква стойност на честотата. Поставената задача мотивира начина на въвеждане на структурираната сингулярна стойност.

Нека са зададени комплексна матрица M и множество Δ от блок-диагонални матрици с определена структура. (Матриците M и Δ могат да се разглеждат като получени от $M(j\omega)$ и $\Delta(j\omega)$ за фиксирана стойност на честотата.)

Структурираната сингулярна стойност $\mu_\Delta(M)$ на $M \in \mathcal{C}^{n \times m}$ по отношение на Δ се дефинира чрез зависимостта

$$\mu_\Delta(M) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\min \{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0\}}, \quad (5.2)$$

като се приема $\mu_\Delta(M) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, ако не съществува $\Delta \in \Delta$, за което $\det(I - M\Delta) = 0$.

В съответствие с това определение, $\mu_\Delta(M)$ е обратно пропорционално на големината на най-малкото Δ от множеството Δ , което води до $\det(I - M\Delta) = 0$, т.e., до неустойчивост на стационарен затворен контур $M - \Delta$.

Анализът на робастната устойчивост на системи за управление с неопределеност, представени във вида на фиг. 5.1, се основава на теорема, формулираща необходимо и достатъчно условие за устойчивост [2]. Предполага се, че предавателната матрица $M(s)$ е правилна и устойчива, а предавателните матрици $\Delta(s)$ са правилни, устойчиви и за всяка фиксирана стойност на честотата принадлежат на множеството Δ . Тогава, съгласно тази теорема, контурът на фиг. 5.1 е вътрешно устойчив за всички предавателни матрици $\Delta(s)$ с $\|\Delta(s)\|_\infty < 1/\beta$, ако и само ако

$$\mu_\Delta(M(j\omega)) \leq \beta \quad \text{за всяко } \omega, \quad (5.3)$$

където $\beta > 0$.

Обикновено е удобно да се работи с множество от структурирани предавателни матрици $\Delta(s)$ с големина $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$. В този случай необходимото и достатъчно условие за робастна устойчивост се свежда до

$$\mu_\Delta(M(j\omega)) < 1 \quad \text{за всяко } \omega. \quad (5.4)$$

Представлява интерес да се отбележи, че условието за робастна устойчивост (5.4) може да се запише във вида

$$\mu_\Delta(M(j\omega))\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1 \quad \text{за всяко } \omega,$$

което може да се интерпретира като “обобщена теорема за малкия коефициент на усилване”, която взема предвид структурата на предавателните матрици $\Delta(s)$ (за разлика от теоремата за малкия коефициент на усилване, вж. Глава 4).

Нека за дадена неопределенена система максимумът по отношение на честотата на структурираната сингулярна стойност е β . Тогава системата гарантирано е устойчива за всички предавателни матрици $\Delta(s)$ със зададената структура с големина $\|\Delta(s)\|_\infty < 1/\beta$. Освен това, съществува конкретна предавателна матрица $\Delta(s)$, имаща зададената структура, с $\|\Delta(s)\|_\infty = 1/\beta$, която причинява неустойчивост. От тези резултати следва, че величината $1/\beta$ можем да разглеждаме като запас по устойчивост на неопределената система, показващ до какво ниво на структурираната неопределеност системата остава устойчива.

С изключение на някои прости случаи, структурираната сингулярна стойност μ не може да се изчисли точно. Съществуват обаче ефективни алгоритми за определяне на горна и добра граници на μ . Поради това заключенията за робастната устойчивост на системата трябва да се правят в термините на тези граници. Нека максимумите по отношение на честотата на горната и долната граници на структурираната сингулярна стойност означим съответно с β_u и β_l . Тогава:

- Разглежданата неопределенена система е гарантирано устойчива за всички структурирани предавателни матрици $\Delta(s)$ с $\|\Delta(s)\|_\infty < 1/\beta_u$;
- Съществува конкретна структурирана предавателна матрица $\Delta(s)$ с $\|\Delta(s)\|_\infty = 1/\beta_l$, която дестабилизира системата.

Освен това, за случая на нормализирана неопределеност

$$\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$$

следва:

- Ако $\beta_u < 1$, системата е робастно устойчива по отношение на моделираната неопределеност;
- Ако $\beta_l > 1$, робастна устойчивост не се постига;
- Ако $\beta_l < 1$, а $\beta_u > 1$, не може да се направи сигурно заключение за устойчивостта; възможно е системата да не е робастно устойчива.

5.2 Команди за анализ на робастната устойчивост

В Robust Control Toolbox основно средство за анализ на робастната устойчивост на системи със структурирана неопределеност е команда `robuststab`. Тя не изисква представяне на системата в $M - \Delta$ вид. Синтаксисът ѝ е:

```
[stabmarg,destabunc,report] = robuststab(sys,opt)
[stabmarg,destabunc,report,info] = robuststab(sys,opt)
```

Входни аргументи:

`sys` - модел на изследваната неопределенена система, който може да бъде от клас `uss` или от клас `ufrd`. Ако `sys` е от клас `uss`, изчисленията се извършват за подходящо избрани от функцията `robuststab` стойности на честотата. Ако е от клас `ufrd`, се използва асоциираният със `sys` вектор с честоти;

`opt` - незадължителен входен аргумент. Представлява обект, създаван с команда `robopt('name1',value1,'name2',value2,...)`. Някои от по-често използваният му елементи са:

`Display` - даване в командния прозорец на информация по време на изчисленията; по подразбиране е '`off`';

`Sensitivity` - определяне на влиянието на неопределените елементи върху запаса по устойчивост; по подразбиране е '`on`'.

Изходни аргументи:

`stabmarg` - структура със следните полета:

`UpperBound` - горна граница на запаса по устойчивост;

`LowerBound` - добра граница на запаса по устойчивост;

`DestabilizingFrequency` - стойност на честотата, за която системата става неустойчива. Съответства на горната граница на запаса по устойчивост;

destabunc - структура, съдържаща комбинация от стойности на неопределените елементи, най-близки до номиналните (т.е., най-малката неопределеност), която дестабилизира системата. Съответства на горната граница на запаса по устойчивост;

report - променлива, съдържаща текстово описание на резултати от анализа на робастната устойчивост;

info - структура с няколко полета, по-важните от които са:

Frequency - вектор с честотите, за които са извършени изчисленията;

MussvBnds - **frd** обект, съдържащ изчислените стойности на горната граница (**MussvBnds(1,1)**) и долната граница (**MussvBnds(1,2)**) на структурираната сингулярна стойност;

Sensitivity - структура с толкова полета, колкото е броят на неопределените елементи. Във всяко поле е записано число, показващо влиянието на съответния неопределен елемент върху запаса по устойчивост. Например, числото 40 означава, че ако интервалът на неопределеност се увеличи с 25%, запасът по устойчивост ще се намали с 10% (25% от 40).

Ще се спрем на някои особености при интерпретиране на резултатите, които се получават чрез командата **robuststab**.

Ако неопределената система **sys** е от клас **uss**, команда **robuststab** прави проверка за устойчивостта на номиналната система. В случай, че тя е неустойчива, на **UpperBound** и **LowerBound** се присвоява $-\infty$. Ако обаче **sys** е от клас **ufrd**, такава проверка не се извършва, като се предполага, че номиналната система е устойчива.

Анализът на робастната устойчивост с функцията **robuststab** се основава на изчисляване на границите на структурираната сингулярна стойност, като преди това неопределената система се преобразува в $M - \Delta$ вид с $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$, т.е., резултатите от анализа се отнасят за нормализирана неопределеност. (Да отбележим, че до голяма степен тези неща остават "скрити" от потребителя.)

Резултатите от анализа на устойчивостта се получават в термините на горната и долната граници на запаса по устойчивост. Да напомним, че в случая запасът по устойчивост се въвежда като реципрочна стойност на максимума на структурираната сингулярна стойност по отношение на честотата. Следователно, горната граница на запаса по устойчивост е равна на реципрочната стойност на максимума по отношение на честотата на долната граница на структурираната сингулярна стойност (т.е., $\text{UpperBound} = 1/\beta_l$), а долната граница на запаса се

86 ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТ ПРИ СТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

получава по същия начин от горната граница на структурираната сингулярна стойност ($\text{LowerBound} = 1/\beta_u$).

Като се имат предвид условията за устойчивост, формулирани чрез границите на структурираната сингулярна стойност, на основата на получените граници на запаса по устойчивост могат да се направят следните заключения:

- Ако $\text{LowerBound} > 1$, неопределената система е робастно устойчива по отношение на моделираната неопределеност;
- Ако $\text{UpperBound} < 1$, системата не постига робастна устойчивост;
- Ако $\text{LowerBound} < 1$, а $\text{UpperBound} > 1$, не е възможно да се направи сигурно заключение за устойчивостта; системата може да не е робастно устойчива.

Нека например $\text{LowerBound} = 1.25$, а $\text{UpperBound} = 1.3$. Освен че системата е робастно устойчива за зададеното ниво на неопределеност, в случая се гарантира, че:

- Системата запазва устойчивост за нива на неопределеност, по-малки от 125% от зададеното;
- Съществува поне една комбинация от стойности на неопределеността с ниво 130% от зададеното, която причинява неустойчивост. (Една от тези дестабилизиращи комбинации е включена в структурата `destabunc`.)

Освен с `robuststab`, анализът на робастната устойчивост може да се извърши с помощта на командата `mussv`, която изчислява горна и долната граници на структурираната сингулярна стойност $\mu_{\Delta}(M)$ във функция на честотата. За прилагането ѝ е необходимо неопределената система да бъде представена в $M - \Delta$ вид (фиг. 5.1) с нормализирана неопределеност $\|\Delta(s)\|_{\infty} \leq 1$. Базовият синтаксис на `mussv` е:

```
bounds = mussv(M, BlkStructure)
```

Описание на аргументите:

M - модел на известната част на неопределената система, който може да бъде от клас `frd` (както е обикновено при използване на функцията `mussv`) или комплексна матрица. Ако е от клас `frd`, границите на структурираната сингулярна стойност се изчисляват за асоциирания с M вектор с честоти;

BlkStructure - входен аргумент, чрез който се описва блок-диагоналната структура на предавателните матрици $\Delta(s)$. Представлява матрица с две колони и толкова редове, колкото е броят на неопределените елементи в системата. Всеки ред на матрицата съдържа информация, която описва съответния неопределен блок, като:

- Скаларен реален параметър (неопределен елемент от клас `ureal`) се описва с $[-1 \ 0]$, а повтарящ се n пъти скаларен реален параметър - с $[-n \ 0]$;
- Скаларен комплексен блок (1×1 елемент от клас `ultidyn` или елемент от клас `icomplex`) се задава с $[1 \ 0]$, а повтарящ се n пъти - с $[n \ 0]$;
- $n \times m$ пълен комплексен блок ($n \times m$ елемент от клас `ultidyn`) се описва с $[n \ m]$.

bounds - изходен аргумент. Ако M е от клас `frd`, **bounds** е `frd` обект, съдържащ изчислените стойности на горната граница (`bounds(1,1)`) и долната граница (`bounds(1,2)`) на структурираната сингуларна стойност на M по отношение на структурата на неопределеността, зададена чрез **BlkStructure**.

Обикновено за представяне на неопределената система в изисквания от `mussv` вид се използва команда

```
[M,Delta,BlkStruct] = lftdata(sys)
```

която извлича M -**Delta** декомпозиция (с нормализирани неопределенни елементи) на неопределенена система с модел `sys`. При това изходният аргумент **BlkStruct** описва блок-диагоналната структура на **Delta** и е във вид, позволяващ непосредственото му използване като входен аргумент на функцията `mussv` (избягвайки по този начин изложеното по-горе задаване на блоковата структура на неопределеността). Също така трябва да се има предвид, че за анализа на робастната устойчивост е необходимо да се вземе само тази част на M , която е свързана с **Delta**.

Да отбележим, че функциите `lftdata` и `mussv` се използват от командата за анализ на робастната устойчивост `robuststab`.

Командите `robuststab` и `mussv` могат да се използват за анализ както на непрекъснати, така и на дискретни системи. При това видът на системата не е необходимо да се указва от потребителя, тъй като тази информация се съдържа в `uss` и `ufrd` моделите.

5.3 Примери за анализ на робастната устойчивост

Ще разгледаме два примера за анализ на робастната устойчивост: на едномерна система и на многомерна система.

Пример 5.1 Разглеждаме едномерна система за управление с обект, характеризиращ се с неточно известни параметри и немоделирана динамика на входа. Предавателната функция на обекта при пренебрегване на немоделираната динамика има вида

$$G = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Номиналните стойности на параметрите са $k = 0.4$, $T_1 = 0.2$ s и $T_2 = 0.1$ s, като относителната им неопределеност е 50%, т.е. възможните стойности на k са в интервала от 0.2 до 0.6, на T_1 - от 0.1 до 0.3 и на T_2 - от 0.05 до 0.15. Предполага се, че максималната възможна неопределеност, дължаща се на немоделираната динамика, е 2% в областта на ниските честоти, постепенно нараства до 100% за честота 8 rad/s и достига 400% в областта на високите честоти.

В системата се използва управляващо устройство с предавателна функция

$$K = 10 \frac{s+4}{s+8},$$

което е определено така, че да се осигури устойчивост и желано качество на затворената система с номиналния модел на обекта.

Задачата е да анализираме устойчивостта на затворената система при отчитане на неопределеността в обекта.

Модел на системата се съставя с дадените по-долу командни редове. Влиянието на немоделираната динамика е отчетено чрез включване в модела на обекта на входна мултиплективна неопределеност с тегловна предавателна функция W . Допълнителната чувствителност T се използва по-нататък при анализа на системата.

```

k = ureal('k',0.4,'Percentage',50);
T1 = ureal('T1',0.2,'Percentage',50);
T2 = ureal('T2',0.1,'Percentage',50);
W = makeweight(0.02,8,4);
delta = ultidyn('delta',[1,1]);
G = tf(k,[1 0])*tf(1,[T1 1])*tf(1,[T2 1])*(1 + W*delta);
s = tf('s');
K = 10*(s+4)/(s+8);
L = G*K;
T = feedback(L,1);

```

В резултат за модела на обекта се получава:

```
G
USS: 4 States, 1 Output, 1 Input, Continuous System
      T1: real, nominal = 0.2, variability = [-50 50]%, 1 occurrence
      T2: real, nominal = 0.1, variability = [-50 50]%, 1 occurrence
      delta: 1x1 LTI, max. gain = 1, 1 occurrence
      k: real, nominal = 0.4, variability = [-50 50]%, 1 occurrence
```

G е неопределенена система от клас `uss`, зависеща от неопределените елементи T_1 , T_2 и k от клас `ureal` и δ от клас `ultidyn`. Тънко е `uss` обект, зависещ от тези неопределени елементи.

Робастната устойчивост на системата за управление ще анализираме с помощта на функцията `robuststab` с входен аргумент допълнителната чувствителност T (ясно е, че резултатите ще бъдат същите, ако вместо T използваме функцията на чувствителността).

```
[stabmarg,destabunc,report,info] = robuststab(T);
```

Получаваме

```
stabmarg =
      UpperBound: 1.4399
      LowerBound: 1.4038
      DestabilizingFrequency: 9.8760
```

откъдето следва:

- за зададената структура и ниво на неопределеността затворената система е робастно устойчива (долната граница на запаса по устойчивост $LowerBound > 1$);
- системата запазва устойчивост за нива на неопределеност, по-малки от 140.38% от зададеното;
- съществува неопределеност с ниво 143.99% от зададеното, която дестабилизира системата.

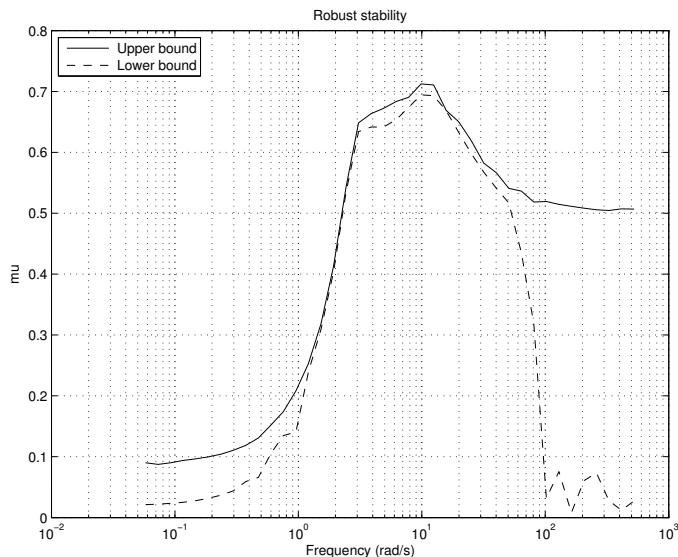
Направените заключения за робастната устойчивост на системата се съдържат в променливата `report`. В нея е включена и информация за влиянието на неопределените елементи върху запаса по устойчивост. Най-силно влияние оказва неопределеността, дължаща се на немоделираната динамика; най-слабо е влиянието на неопределеността във времеконстантата T_2 .

```

report =
Uncertain System is robustly stable to modeled uncertainty.
-- It can tolerate up to 140% of the modeled uncertainty.
-- A destabilizing combination of 144% of the modeled uncertainty
exists, causing an instability at 9.88 rad/s.
-- Sensitivity with respect to uncertain element ...
'T1' is 45%. Increasing 'T1' by 25% leads to a 11% decrease
in the margin.
'T2' is 10%. Increasing 'T2' by 25% leads to a 3% decrease
in the margin.
'delta' is 65%. Increasing 'delta' by 25% leads to a 16% decrease
in the margin.
'k' is 34%. Increasing 'k' by 25% leads to a 9% decrease
in the margin.

```

С това поставената задача за анализ на робастната устойчивост на разглежданата система за управление е решена. С цел по-добро усвояване на работата с командата `robuststab` по-долу са дадени някои допълнителни резултати, като трябва да се има предвид, че те не са задължителен елемент от анализа на робастната устойчивост.



Фигура 5.2: Честотни характеристики на горната и долната граници на μ

В редица случаи, особено при синтеза на робастни управляващи устройства, е полезно да се разполага с графика на структурираната сингуларна стойност в зависимост от честотата. На фиг. 5.2 са показани честотните характеристики на горната и долната граници на μ , построени с командните редове:

```
semilogx(info.MussvBnds(1,1), 'r-', info.MussvBnds(1,2), 'b--')
grid
title('Robust stability')
xlabel('Frequency (rad/s)')
ylabel('mu')
legend('Upper bound', 'Lower bound')
```

Знаем, че анализът на робастната устойчивост с команда `robuststab` се основава на изчисляване на границите на структурираната сингуларна стойност. (Макар че, както видяхме досега в примера, това до голяма степен остава скрито от ползвателя на Robust Control Toolbox.) За проверка, да определим максимумите по отношение на честотата на долната и горната граници на μ и от тях като реципрочни стойности да получим съответно горната и долната граници на запаса по устойчивост. Освен тези граници, в структурата `SM` да включим и честотата, съответстваща на максимума на долната граница на μ :

```
[pk1,pk1idx] = max(info.MussvBnds(1,2).ResponseData(:));
[pku,pkuidx] = max(info.MussvBnds(1,1).ResponseData(:));
pkmu.UpperBound = pku;
pkmu.LowerBound = pk1;
SM.UpperBound = 1/pk1;
SM.LowerBound = 1/pku;
SM.DestabilizingFrequency = info.Frequency(pk1idx);

pkmu =
    UpperBound: 0.7124
    LowerBound: 0.6945

SM =
    UpperBound: 1.4399
    LowerBound: 1.4038
    DestabilizingFrequency: 9.8760
```

Вижда се, че получените по този начин резултати са същите както записаните в структурата `stabmarg`.

По-нататък, да увеличим интервала на неопределеност на всички неопределени елементи 1.4037 пъти (малко под долната граница на запаса по устойчивост),

92 ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТ ПРИ СТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

да изчислим полюсите на допълнителната чувствителност T за например 500 случаи комбинации от стойности на неопределеността и да определим максималната реална част на полюсите:

```
T.Uncertainty.T1.Percentage = 1.4037*50;
T.Uncertainty.T2.Percentage = 1.4037*50;
T.Uncertainty.delta.Bound = 1.4037;
T.Uncertainty.k.Percentage = 1.4037*50;
T500 =usample(T,500);
p500 = pole(T500);
max(real(p500(:)))
ans =
-2.4966e-007
```

Както очакваме, при това ниво на неопределеност всички полюси имат отрицателни реални части.

След като възстановим началните интервали на неопределеност, нека се убедим, че за неопределеността, съдържаща се в променливата `destabunc`, затворената система е неустойчива с дестабилизиращи полюси $\pm j9.876$:

```
pole(usubs(T,destabunc))
ans =
-44.09022971539950
-20.44288775969776 +20.83606968360331i
-20.44288775969776 -20.83606968360331i
-0.00000000000000 + 9.87604821324991i
-0.00000000000000 - 9.87604821324991i
-1.94328500831424 + 1.05799232801631i
-1.94328500831424 - 1.05799232801631i
-4.4133600294187
```

Сега да определим нормализираното разстояние от дестабилизиращите стойности на неопределените елементи

```
destabunc =
T1: 0.0560
T2: 0.0506
delta: [1x1 ss]
k: 0.6880
```

до номиналните им стойности:

```

actual2normalized(T.Uncertainty.T1,destabunc.T1)
ans =
-1.4399
actual2normalized(T.Uncertainty.T2,destabunc.T2)
ans =
-0.9870
actual2normalized(T.Uncertainty.delta,destabunc.delta)
ans =
1.4399
actual2normalized(T.Uncertainty.k,destabunc.k)
ans =
1.4399

```

За три от елементите нормализираното разстояние е равно на горната граница на запаса по устойчивост, докато за четвъртия разстоянието е по-малко от тази граница. Оставяме на читателя да провери, че дестабилизиращите стойности на T_1 , T_2 и k съответстват на получените нормализирани разстояния, а амплитудно-частотната характеристика на `destabunc.delta` има максимум, равен на 1.4399.

Нека изследваме робастната устойчивост на разглежданата система за управление и с помощта на команда `mussv`. За тази цел първо се извлича $M - \Delta$ декомпозиция от допълнителната чувствителност T :

```
[M,Delta,BlkStruct] = lftdata(T);
```

Знаем, че `BlkStruct` може да се използва като входен аргумент на `mussv`, чрез който се описва структурата на неопределеността. Освен това, за анализа на робастната устойчивост трябва да се вземе тази част на M , която е свързана с `Delta`. Тъй като входовете и изходите на `Delta` са свързани съответно с изходи и входове на M , необходимата за анализа предавателна матрица може да се формира с командните редове:

```

szDelta = size(Delta);
M11 = M(1:szDelta(2),1:szDelta(1));

```

За съпоставимост на резултатите, частотната характеристика на `M11` определяме за вектора с честоти, за който е извършен анализът с `robuststab`:

```

omega = info.Frequency;
M11_g = frd(M11,omega);

```

Извиква се функцията `mussv`

```
rbnds = mussv(M11_g,BlkStruct);
```

94 ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТ ПРИ СТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

и на основата на получените резултати за горната и долната граници на структурираната сингулярна стойност могат да се направят съответните заключения за робастната устойчивост на системата за управление.

Да определим максимумите по отношение на честотата на горната и долната граници на структурираната сингулярна стойност:

```
[pku,pkuidx] = max(rbnds(1,1).ResponseData(:));
[pkl,pklidx] = max(rbnds(1,2).ResponseData(:));
pku
ans =
    0.7124
pkl
ans =
    0.6945
```

Както трябва да се очаква, резултатите съвпадат с получените при анализа с командалата `robuststab`.

За сравнение, нека оценим робастната устойчивост на системата за управление, разглеждайки неопределеността като неструктуррирана. В този случай, тъй като

```
norm(M11,'inf')
ans =
    8.1459
```

от теоремата за малкия коефициент на усилване следва, че системата е устойчива за всички 4×4 (неструктурирани) предавателни матрици $\Delta(s)$ с големина $\|\Delta(s)\|_\infty < 0.1228$. Обърнете внимание, че тази оценка за робастната устойчивост е повече от 11 пъти по-песимистична от резултата, получен с помощта на структурираната сингулярна стойност при отчитане структурата на неопределеността!

Пример 5.2 Разглеждаме двуканална система за управление с обект с предавателна матрица

$$G = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2} \begin{bmatrix} -s + b_1 & b_2 s + 1 \\ -b_3 & -s + b_4 \end{bmatrix}$$

с номинални стойности на параметрите $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$ и $b_4 = 2$.

Управляващото устройство

$$K = \frac{2(s+2)(s^2+2s+4)}{s(s+1)(s^2+2s+7)} \begin{bmatrix} -s+2 & -2s-1 \\ 3 & -s+2 \end{bmatrix}$$

е синтезирано така, че да се осигури декуплиране на каналите и желани преходни процеси на затворената система с номиналния модел на обекта [4].

При анализа на системата е реалистично да се предположи, че параметрите в модела на обекта не са известни точно. Например, нека приемем, че относителната неопределеност в параметрите a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 и b_4 е 10%. Как ще се отрази тази неопределеност върху устойчивостта на системата за управление?

Модел на обекта с неопределеност съставяме с командните редове

```
a1 = ureal('a1',2,'Percentage',10);
a2 = ureal('a2',4,'Percentage',10);
b1 = ureal('b1',2,'Percentage',10);
b2 = ureal('b2',2,'Percentage',10);
b3 = ureal('b3',3,'Percentage',10);
b4 = ureal('b4',2,'Percentage',10);
dn = [1 a1 a2];
g11 = tf([-1 b1],dn);
g12 = tf([b2 1],dn);
g21 = tf([-b3],dn);
g22 = tf([-1 b4],dn);
G = [g11 g12;g21 g22];
```

в резултат на което се получава

```
G
USS: 8 States, 2 Outputs, 2 Inputs, Continuous System
a1: real, nominal = 2, variability = [-10 10]%, 4 occurrences
a2: real, nominal = 4, variability = [-10 10]%, 4 occurrences
b1: real, nominal = 2, variability = [-10 10]%, 1 occurrence
b2: real, nominal = 2, variability = [-10 10]%, 1 occurrence
b3: real, nominal = 3, variability = [-10 10]%, 1 occurrence
b4: real, nominal = 2, variability = [-10 10]%, 1 occurrence
```

`G` е `uss` модел, зависещ от шест неопределени реални параметри. Вижда се обаче, че параметрите a_1 и a_2 се повтарят по 4 пъти. До същия резултат се достига и при използване на опцията `'full'` в `ureal` или на командата `simplify`. Освен това, съставеният модел е от 8-и ред, докато минималната реализация на модела на обекта с номиналните стойности на неопределените параметри е от 4-ти ред. За съжаление, в Robust Control Toolbox няма команда за получаване на минимална реализация на неопределени системи от клас `uss`.

По-нататък, с командите

```
s = tf('s');
```

96 ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТ ПРИ СТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

```
Ktf = 2*(s+2)*(s^2+2*s+4)/(s*(s+1)*(s^2+2*s+7))*[-s+2 -2*s-1;3 -s+2];  
K = ss(Ktf,'min');
```

получаваме минимална реализация в пространството на състоянията на управлящото устройство, която е от 6-ти ред:

```
size(K)  
State-space model with 2 outputs, 2 inputs, and 6 states.
```

Определяме изходната предавателна матрица на отворената система и изходната допълнителна чувствителност

```
looptf = loopsens(G,K);  
L = looptf.Lo;  
T = looptf.To;
```

които ще използваме при анализа на системата.

Нека най-напред изследваме устойчивостта на номиналната система с команда

```
[sm,dm,mm] = loopmargin(L);
```

Анализът дава:

```
dm(1)  
ans =  
    GainMargin: [0.1576 6.3440]  
    PhaseMargin: [-72.0843 72.0843]  
    Frequency: 2.0284  
  
dm(2)  
ans =  
    GainMargin: [0.1576 6.3440]  
    PhaseMargin: [-72.0843 72.0843]  
    Frequency: 2.0284  
  
mm =  
    GainMargin: [0.1576 6.3439]  
    PhaseMargin: [-72.0843 72.0843]  
    Frequency: 2.0284
```

Дисковите запаси по устойчивост и многомерният запас по устойчивост в случая съвпадат, което се дължи на факта, че управлящото устройство осигурява

декуплиране и еднаква динамика на двата канала. От анализа следва, че затворената система с номиналния модел на обекта се характеризира със значителен запас по устойчивост. Това обаче не е гаранция за добра робастна устойчивост на системата.

Робастната устойчивост на системата ще анализираме с командата `robuststab`, като за разлика от Пример 5.1 сега ще зададем подходящ вектор с честоти:

```
omega = logspace(-1,1,100);
T_g = ufrd(T,omega);
[stabmarg,destabunc,report,info] = robuststab(T_g);
```

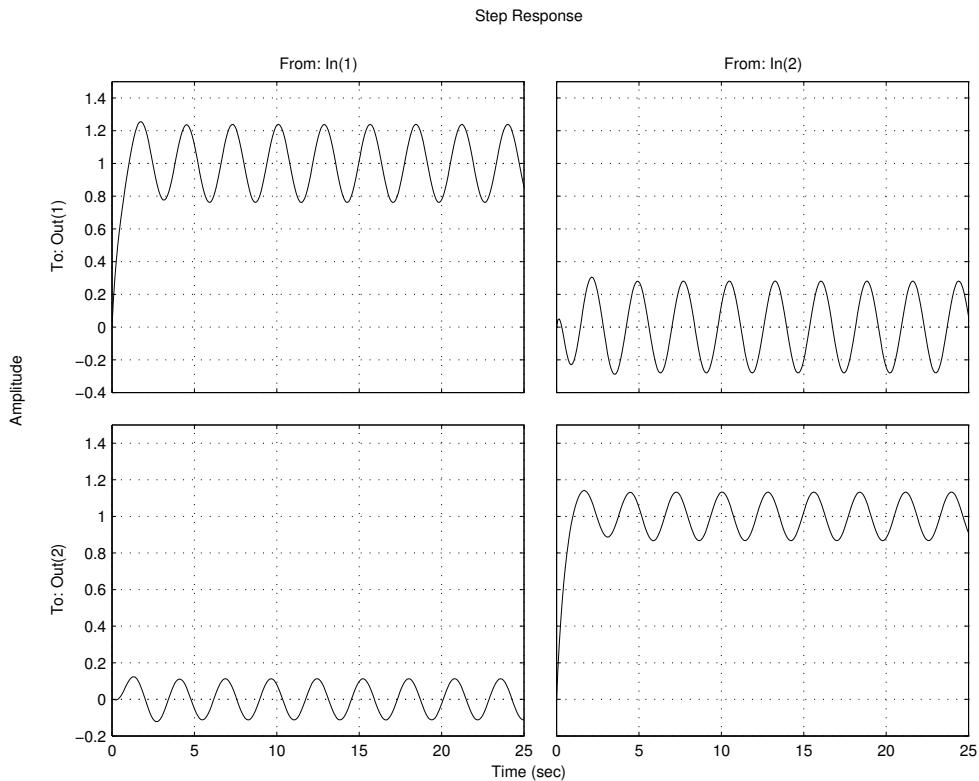
В резултат се получава:

```
report =
Uncertain System is robustly stable to modeled uncertainty.
-- It can tolerate up to 139% of the modeled uncertainty.
-- A destabilizing combination of 195% of the modeled uncertainty
exists, causing an instability at 2.26 rad/s.
-- Sensitivity with respect to uncertain element ...
'a1' is 18%. Increasing 'a1' by 25% leads to a 5% decrease
in the margin.
'a2' is 13%. Increasing 'a2' by 25% leads to a 3% decrease
in the margin.
'b1' is 31%. Increasing 'b1' by 25% leads to a 8% decrease
in the margin.
'b2' is 31%. Increasing 'b2' by 25% leads to a 8% decrease
in the margin.
'b3' is 36%. Increasing 'b3' by 25% leads to a 9% decrease
in the margin.
'b4' is 31%. Increasing 'b4' by 25% leads to a 8% decrease
in the margin.

stabmarg =
UpperBound: 1.9478
LowerBound: 1.3942
DestabilizingFrequency: 2.2570
```

От анализа следва, че затворената система е гарантирано устойчива за нива на неопределеност, по-малки от 139% от зададеното, т.e., при относителна неопределеност в параметрите a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 и b_4 , по-малка от 13.9% (139% от моделираната 10%-на относителна неопределеност).

98 ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТ ПРИ СТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ



Фигура 5.3: Преходни процеси за дестабилизираща неопределеност

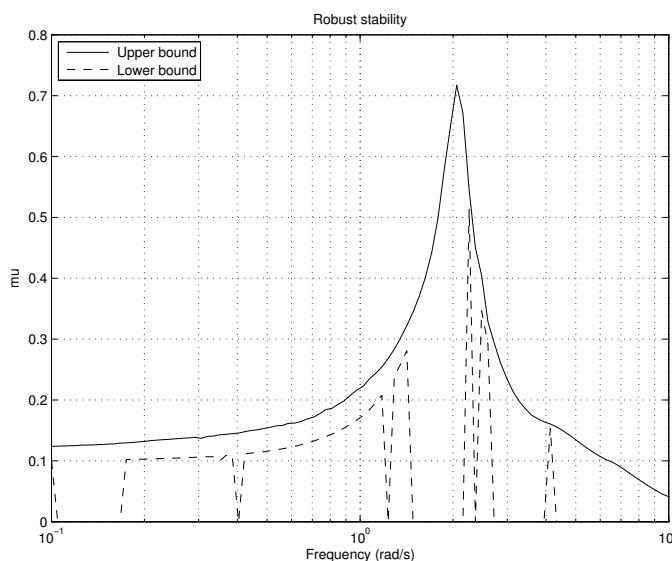
Освен това, анализът дава комбинация от стойности на неопределените параметри с ниво на неопределеност 195% от зададеното, която дестабилизира системата. Преходните процеси на затворената система в този случай, построени с командите

```
Tdu = usubs(T,destabunc);
step(Tdu,25), grid
```

са представени на фиг. 5.3.

Честотните характеристики на горната и долната граници на структурираната сингуларна стойност са показани на фиг. 5.4, като максимумите им са (съответните команди са дадени в Пример 5.1):

```
pkmu =
UpperBound: 0.7173
```



Фигура 5.4: Горна и долна граници на структурираната сингуларна стойност

LowerBound: 0.5134

В случая прави впечатление, че разликата между максимумите на долната и горната граници на структурираната сингуларна стойност е сравнително голяма. Такъв резултат е възможно да се получи за системи, зависещи само от реални неопределени параметри, като той се дължи на някои особености при изчисляване на долната граница на структурираната сингуларна стойност.

Условията за изчисляване на долната граница на $\bar{\mu}$ могат да се подобрят чрез добавяне към реалните неопределени параметри на малка, например с относителна големина 1%, комплексна неопределеност. Това може да се извърши като всеки неопределен параметър се представи като сума от `ureal` елемент с интервал на неопределеност 99% от зададения и `ucomplex` елемент с номинална стойност 0 и радиус, равен на 1% от зададения интервал на неопределеност. Така се покрива нивото на неопределеност в системата, като съвсем незначително нараства консерватизъмът на резултатите от анализа.

За разглежданата система въвеждането на 1% комплексна неопределеност при представяне на неопределенните параметри може да стане по следния начин:

```
a1r = ureal('a1r',2,'PlusMinus',0.99*0.2);
a1c = ucomplex('a1c',0,'Radius',0.01*0.2);
a1 = a1r + a1c;
```

100 ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТ ПРИ СТРУКТУРИРАНА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

```
a2r = ureal('a2r',4,'PlusMinus',0.99*0.4);
a2c = ucomplex('a2c',0,'Radius',0.01*0.4);
a2 = a2r + a2c;
b1r = ureal('b1r',2,'PlusMinus',0.99*0.2);
b1c = ucomplex('b1c',0,'Radius',0.01*0.2);
b1 = b1r + b1c;
b2r = ureal('b2r',2,'PlusMinus',0.99*0.2);
b2c = ucomplex('b2c',0,'Radius',0.01*0.2);
b2 = b2r + b2c;
b3r = ureal('b3r',3,'PlusMinus',0.99*0.3);
b3c = ucomplex('b3c',0,'Radius',0.01*0.3);
b3 = b3r + b3c;
b4r = ureal('b4r',2,'PlusMinus',0.99*0.2);
b4c = ucomplex('b4c',0,'Radius',0.01*0.2);
b4 = b4r + b4c;
```

За модифицирания модел на обекта със смесена неопределеност се получава:

```
Gmu
USS: 8 States, 2 Outputs, 2 Inputs, Continuous System
a1c: complex, nominal = 0, radius = 0.002, 4 occurrences
a1r: real, nominal = 2, variability = [-0.198 0.198], 4 occurrences
a2c: complex, nominal = 0, radius = 0.004, 4 occurrences
a2r: real, nominal = 4, variability = [-0.396 0.396], 4 occurrences
b1c: complex, nominal = 0, radius = 0.002, 1 occurrence
b1r: real, nominal = 2, variability = [-0.198 0.198], 1 occurrence
b2c: complex, nominal = 0, radius = 0.002, 1 occurrence
b2r: real, nominal = 2, variability = [-0.198 0.198], 1 occurrence
b3c: complex, nominal = 0, radius = 0.003, 1 occurrence
b3r: real, nominal = 3, variability = [-0.297 0.297], 1 occurrence
b4c: complex, nominal = 0, radius = 0.002, 1 occurrence
b4r: real, nominal = 2, variability = [-0.198 0.198], 1 occurrence
```

Резултатите от анализа на робастната устойчивост на системата са дадени по-долу (без част от текста в **report**).

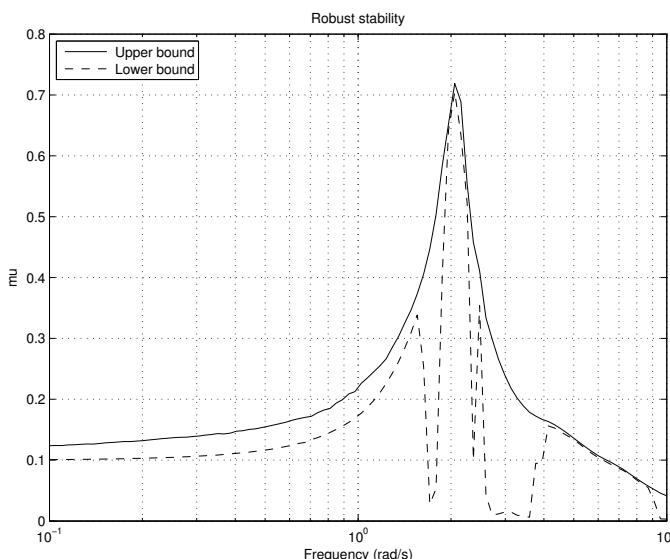
```
report =
Uncertain System is robustly stable to modeled uncertainty.
-- It can tolerate up to 139% of the modeled uncertainty.
-- A destabilizing combination of 142% of the modeled uncertainty
exists, causing an instability at 2.06 rad/s.
```

```

stabmarg =
    UpperBound: 1.4190
    LowerBound: 1.3911
DestabilizingFrequency: 2.0565

pkmu =
    UpperBound: 0.7189
    LowerBound: 0.7047

```

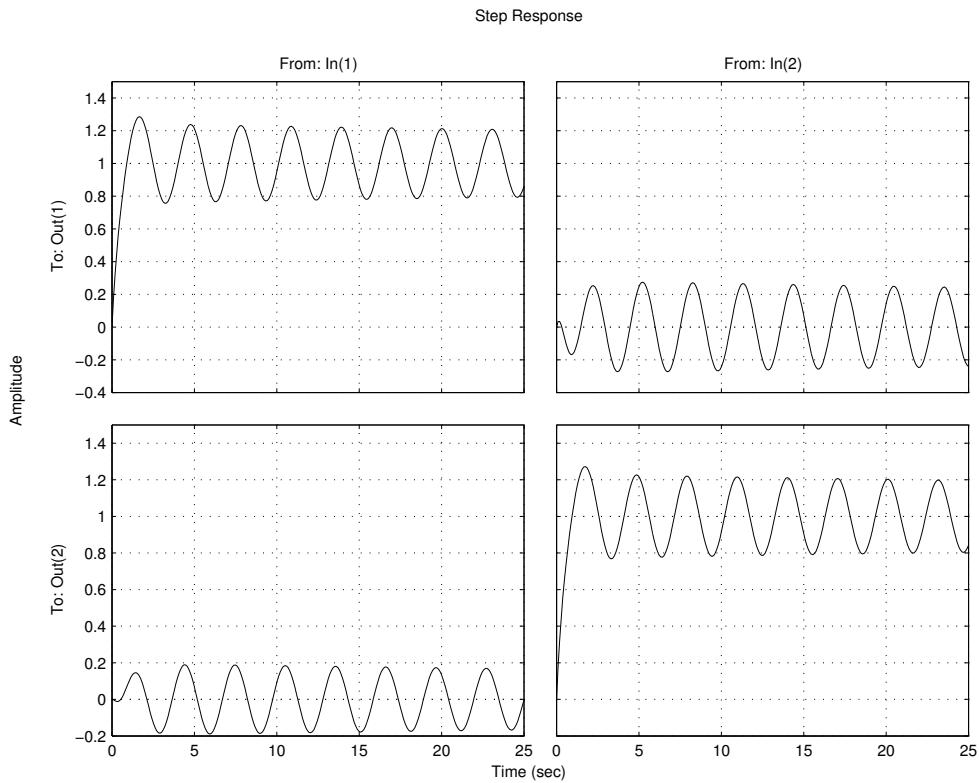


Фигура 5.5: Горна и долна граници на μ при смесена неопределеност

На фиг. 5.5 са представени честотните характеристики на горната и долната граници на структурираната сингулярна стойност.

Вижда се, че максимумът на долната граница на структурираната сингулярна стойност вече е близо до максимума на горната граница и по този начин се получава по-добра оценка за точната стойност на μ . В същото време съпоставянето на получените резултати в случаите на смесена и чисто параметрична неопределеност показва, че разлика между максимумите на горната граница на структурираната сингулярна стойност практически няма.

За проверка, нека построим преходните процеси на затворената система с модела на обекта с чисто параметрична неопределеност, като на неопределените



Фигура 5.6: Преходни процеси за стойности на ureal елементите в destabunc

параметри зададем записаните в destabunc стойности на съответните ureal елементи. От графиките, показани на фиг. 5.6, може да се направи изводът, че в случая (за 99% от интервалите на неопределеност) затворената система е съвсем близо до границата на устойчивост.

И така, от проведенния анализ следва, че разглежданата многомерна система за управление с декуплиращо управляващо устройство се характеризира със сравнително лоша робастна устойчивост - системата губи устойчивост при относителна неопределеност в параметрите на модела на обекта от около 14%.

5.4 Задачи

1. Дадена е система за управление с обект с неточно известни параметри и неопределеност на входа. Предавателната функция на обекта е

$$G = \frac{k}{Ts + 1},$$

където коефициентът k и времеконстантата T имат номинални стойности съответно 1 и 2 и относителна неопределеност 25%. Максималната неопределеност на входа на обекта е 5% в областта на ниските честоти, постепенно нараства до 100% за честота 2.5 rad/s и достига 500% във високочестотната област.

Предавателната функция на управляващото устройство има вида

$$K = \frac{k_c(T_c s + 1)}{T_c s}.$$

Съставете модел на обекта като неопределеността на входа му представите като мултиплективна неопределеност. Изследвайте робастната устойчивост на затворената система за две групи стойности на коефициентите в управляващото устройство: 1) $k_c = 0.15$, $T_c = 0.4$; 2) $k_c = 3.4$, $T_c = 1.1$. Съпоставете получените резултати.

2. Дадена е двуканална система за управление с обект с предавателна матрица

$$G = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T_1 s + 1} & \frac{k_2}{T_2 s + 1} \\ \frac{k_3}{T_3 s + 1} & \frac{k_4}{T_4 s - 1} \end{bmatrix}.$$

Номиналните стойности на параметрите са $k_1 = 7.2$, $T_1 = 0.9$, $k_2 = -3$, $T_2 = 1.2$, $k_3 = 2$, $T_3 = 3$, $k_4 = 5$ и $T_4 = 0.7$, като относителната им неопределеност е 45%.

Предавателната матрица на управляващото устройство е

$$K = \begin{bmatrix} \frac{10(s+1)}{0.3s+1} & 0 \\ 0 & \frac{15(s+2)}{s+1} \end{bmatrix}$$

Изследвайте робастната устойчивост на:

- а) затворената многомерна система за управление;
- б) двете независими затворени едномерни системи, които се получават при пренебрегване на извъндиагоналните елементи в предавателната матрица на обекта.

3. Дадена е двуканална система за управление с обект с предавателна матрица

$$G = \frac{1}{s^2 + 2s + 4} \begin{bmatrix} -s + 2 & 2s + 1 \\ -3 & -s + 2 \end{bmatrix}$$

и декуплиращо управляващо устройство

$$K = \frac{2(s+2)(s^2 + 2s + 4)}{s(s+1)(s^2 + 2s + 7)} \begin{bmatrix} -s + 2 & -2s - 1 \\ 3 & -s + 2 \end{bmatrix}.$$

Обектът има неопределеност на двета входа, която не надвишава 2% в областта на ниските честоти, постепенно нараства до 100% за честота 10 rad/s и достига 200% в областта на високите честоти.

Съставете модел на обекта с входна мултипликативна неопределеност и анализрайте робастната устойчивост на затворената система. Сравнете получените резултати с тези в Пример 5.2.

4. Анализирайте робастната устойчивост на системата от Пример 5.2 при 15% относителна неопределеност в параметрите на модела на обекта. Извършете анализа и като въведете комплексна неопределеност с относителна големина 1% при представяне на неопределените параметри. Съпоставете получените резултати с тези в Пример 5.2.

Глава 6

РОБАСТНО КАЧЕСТВО

Ще разгледаме два подхода за анализ на робастността на качеството на системи за управление с неопределеност: определяне на т.нр. “най-лошо” качество и анализ на робастното качество с помощта на структурираната сингулярна стойност.

6.1 Определяне на най-лошото качество

За качеството на преходните процеси може да се съди приблизително по максимума на честотната характеристика на най-голямата сингулярна стойност (\mathcal{H}_∞ нормата) на матрицата на допълнителната чувствителност или на матрицата на чувствителността. За системи с неопределеност представлява интерес да се определи най-голямата стойност на този максимум за допустимата неопределеност. Тази стойност, представляваща възможно най-голямото усилване в честотната област, за която преходните процеси обикновено са най-лоши, е прието да се нарича “най-лошо” усилване, а качеството на неопределената система в този случай – “най-лошо” качество.

В Robust Control Toolbox най-лошото качество на системи с неопределеност може да се определи с команда `wcgain`. Тя изчислява добра и горна граници на усилването в най-лошия случай и намира неопределеността, съответстваща на това усилване. Синтаксисът, входните и изходните аргументи на `wcgain` са:

```
[maxgain,wcunc] = wcgain(sys)  
[maxgain,wcunc,info] = wcgain(sys)
```

`sys` – модел на изследваната затворена неопределенена система, който може да бъде от клас `uss` или от клас `ufrd`. Ако `sys` е от клас `uss`, изчисленията се извършват за подходящо избрани от функцията `wcgain` стойности на

честотата, а ако е от клас `ufrd`, се използва асоциираният със `sys` вектор с честоти;

`maxgain` – структура със следните полета:

`LowerBound` – долната граница на най-лошото усилване;

`UpperBound` – горна граница на най-лошото усилване;

`CriticalFrequency` – стойност на честотата, съответстваща на `LowerBound`;

`wcunc` – структура, съдържаща комбинация от стойности на неопределените елементи, за която усилването е най-лошо. Съответства на долната граница на най-лошото усилване;

`info` – структура със следните полета:

`Frequency` – вектор с честотите, за които е извършен анализът на неопределената система;

`Sensitivity` – структура, съдържаща информация за влиянието на неопределените елементи върху усилването в най-лошия случай. Например, ако в дадено поле е записано числото 20, това означава, че ако интервалът на неопределеност на съответния елемент се увеличи с 25%, стойността на най-лошото усилване ще се увеличи с 5% (25% от 20).

Командата `wcgain` може да се използва за анализ както на непрекъснати, така и на дискретни системи. При това видът на системата не е необходимо да се указва от потребителя, тъй като тази информация се съдържа в `uss` и `ufrd` моделите.

Пример 6.1 Разглеждаме системата за управление, описана в Пример 5.1. Искаме да определим най-лошото качество на преходните процеси за допустимата неопределеност в обекта.

За определяне на най-лошото качество ще използваме функцията `wcgain` с входен аргумент допълнителната чувствителност T . (Съставянето на модела на системата е разгледано в Пример 5.1.)

```
[maxgain,wcunc,info] = wcgain(T);
```

В резултат се получава:

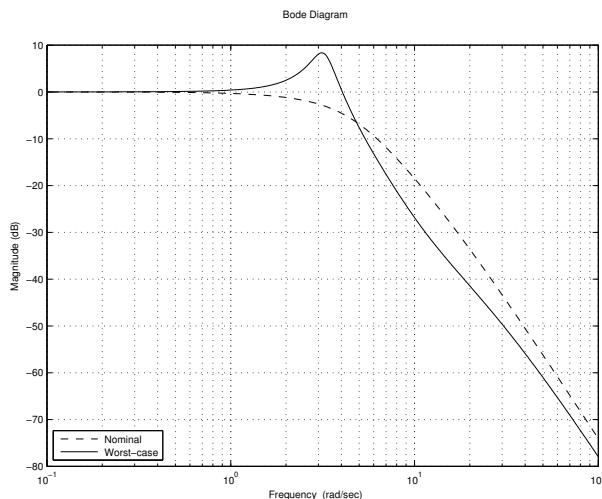
```
maxgain =
    LowerBound: 2.6052
    UpperBound: 2.6155
```

```
CriticalFrequency: 3.0713
```

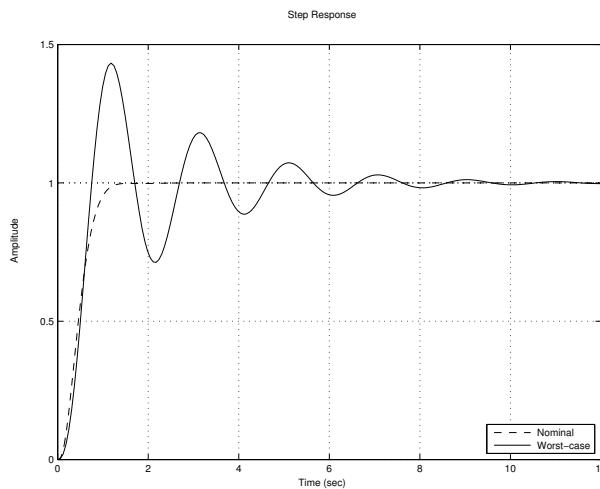
```
wcunc =
    T1: 0.3000
    T2: 0.1500
    delta: [1x1 ss]
    k: 0.6000

info.Sensitivity
ans =
    T1: 16.4367
    T2: 23.6952
    delta: 134.8467
    k: 48.6641
```

Пикът на амплитудно-честотната характеристика на допълнителната чувствителност за допустимата неопределеност е между 2.6052 и 2.6155, като долната му граница се получава за възможно най-големите стойности на коефициента k и времеконстантите T_1 и T_2 . Най-силно влияние върху усилването в най-лошия случай има неопределеността, дължаща се на немоделираната динамика.



Фигура 6.1: Амплитудно-честотни характеристики на затворената система в номиналния и в най-лошия случай



Фигура 6.2: Преходни функции на затворената система в номиналния и в най-лошия случай

Нека сравним качеството на затворената система с номиналния модел на обекта с качеството в най-лошия случай. За тази цел на фигури 6.1 и 6.2 са показани логаритмичните амплитудно-честотни характеристики и преходните функции на затворената система, построени с дадените по-долу командни редове:

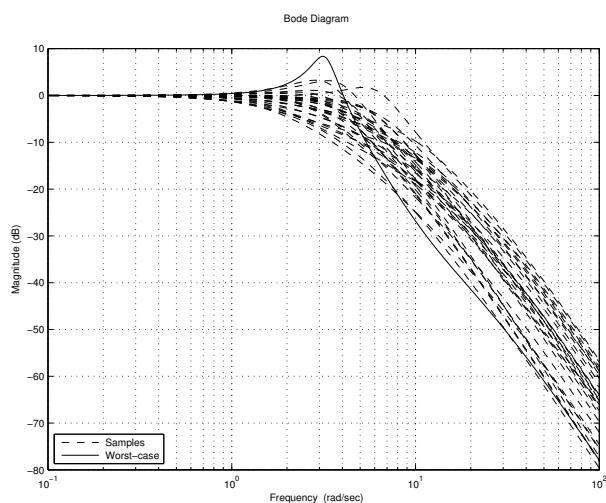
```
Twc = usubs(T,wcunc);
figure(1)
omega = logspace(-1,2,300);
bodemag(T.Nom,'r--',Twc,'b',omega), grid
legend('Nominal','Worst-case',3)
figure(2)
step(T.Nom,'r--',Twc,'b'), grid
legend('Nominal','Worst-case',4)
```

От получените резултати следва, че неопределеността в обекта може да доведе до значително влошаване на качеството на затворената система. В най-лошия случай преходният процес е силно колебателен с пререгулиране около 43% и времетраене почти 7 пъти по-голямо от това на затворената система с номиналния модел на обекта.

Да построим логаритмичните амплитудно-честотни характеристики и преходните функции на допълнителната чувствителност, например, за 30 случајни ком-

бинации от стойности на неопределеността и ги сравним със съответните характеристики в най-лошия случай:

```
T30 = usample(T,30);
figure(1)
bodemag(T30,'r--',Twc,'b',omega), grid
legend('Samples','Worst-case',3)
figure(2)
step(T30,'r--',Twc,'b'), grid
legend('Samples','Worst-case',4)
```



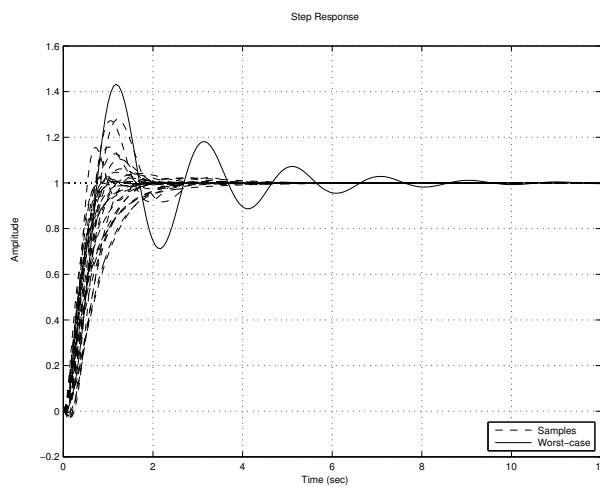
Фигура 6.3: Случайни и най-лоша амплитудно-честотни характеристики

От графиките, показани на фигури 6.3 и 6.4, се вижда, че за неопределеността, получена чрез командата `wcgain`, усилването действително е най-голямо, а качеството на преходния процес – най-лошо.

Близки резултати от анализа се получават, ако вместо допълнителната чувствителност като входен аргумент на `wcgain` се използва функцията на чувствителността.

Пример 6.2 Разглеждаме двуканалната система за управление с декуплиращо управляващо устройство, дадена в Пример 5.2. Задачата е да определим най-лошото качество на системата при 10%-на относителна неопределеност в параметрите a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 и b_4 на модела на обекта.

Съставянето на модела на системата с неопределеност е разгледано в Пример 5.2.



Фигура 6.4: Случайни и най-лоша преходни функции

На фиг. 6.5 са показани преходните процеси по задание на затворената система с номиналния модел на обекта, построени с команда

```
step(T.Nom,5), grid
```

Както се вижда, взаимно влияние между каналите няма. Преходните процеси на двата изхода са едни и същи, с пререгулиране около 8% и времетраене 2.5 s.

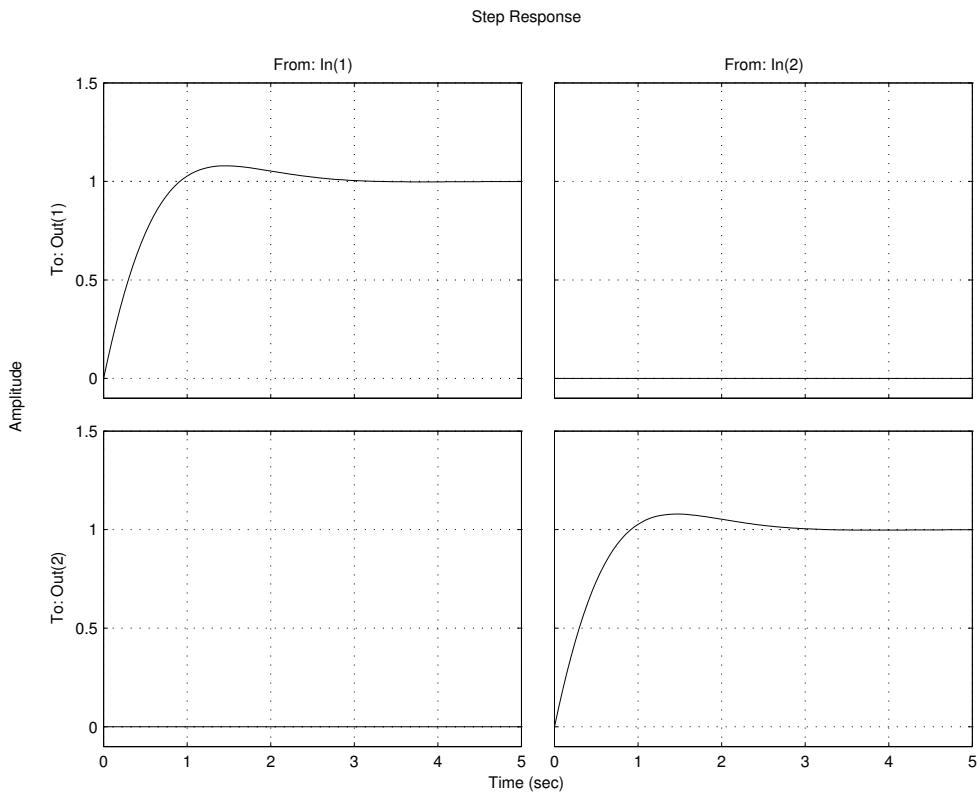
Нека сега анализираме качеството на неопределената затворена система, като за целта използваме функцията `wcgain` с входен аргумент матрицата на изходната чувствителност.

```
S = looptf.So;
[maxgain,wcunc,info] = wcgain(S);
```

Анализът дава:

```
maxgain =
    LowerBound: 2.4149
    UpperBound: 2.4153
    CriticalFrequency: 2.0434
```

```
wcunc =
    a1: 1.8000
    a2: 3.6000
```



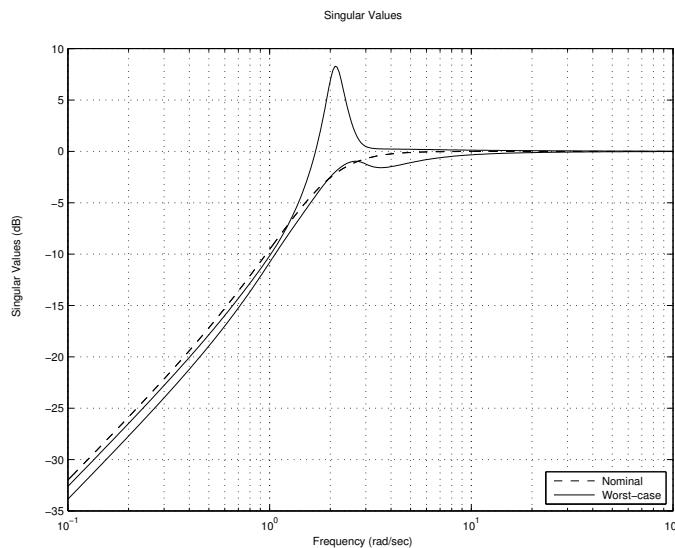
Фигура 6.5: Преходни процеси на номиналната затворена система

b1: 2.2000
 b2: 1.8000
 b3: 2.7000
 b4: 2.2000

```

info.Sensitivity
ans =
    a1: 0.0626
    a2: 26.9539
    b1: 38.9504
    b2: 93.8545
    b3: 83.4116
    b4: 33.9413
  
```

Най-силно влияние върху усилването в най-лошия случай оказва неопределеността в параметрите b_2 и b_3 в извъндиагоналните елементи на предавателната матрица на обекта.



Фигура 6.6: Сингуларни стойности в номиналния и в най-лошия случай

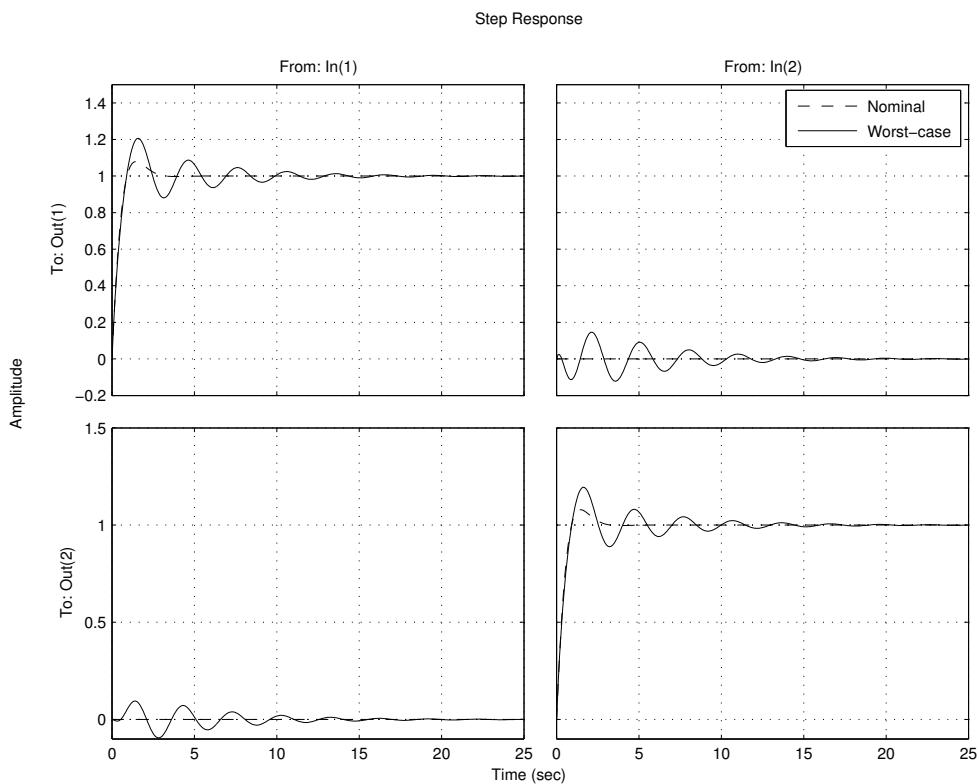
На фигури 6.6 и 6.7 са показани сингуларните стойности на изходната чувствителност и преходните процеси на затворената система за комбинацията от стойности на неопределените параметри, съдържащи се в променливата `wcunc`. За сравнение са дадени съответните характеристики за номиналните стойности на параметрите (в този случай честотните характеристики на двете сингуларни стойности съвпадат). Характеристиките са построени с командните редове

```

Swc = usubs(S,wcunc);
Twc = usubs(T,wcunc);
figure(1)
omega = logspace(-1,2,300);
sigma(S.Nom,'r--',Swc,'b',omega), grid
legend('Nominal','Worst-case')
figure(2)
step(T.Nom,'r--',Ttwc,'b'), grid
legend('Nominal','Worst-case')

```

Резултатите показват, че при 10% неопределеност в параметрите качеството на

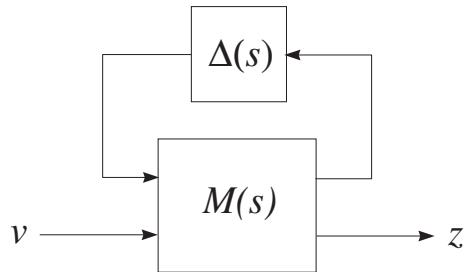


Фигура 6.7: Преходни процеси в номиналния и в най-лошия случай

системата за управление съществено се влошава. Наблюдава се значително взаимно влияние между каналите, нараства колебателността и времетраенето на преходните процеси.

6.2 Използване на структурираната сингуллярна стойност

Към качеството на системите за управление обикновено се поставят редица изисквания: например, необходимо е да се осигури следене на задаващите въздействия с допустима грешка, потискане на смущенията и измерителния шум, ограничаване големината на управляващите въздействия и др. С помощта на подходящи тегловни предавателни функции тези изисквания могат да се обединят в един общ показател, характеризиращ качеството на системата.



Фигура 6.8: Структурна схема за анализ на робастното качество

За формулиране на задачата за анализ на робастното качество на система за управление с неопределеност ще използваме показаната на фиг. 6.8 структурна схема. Известната част $M(s)$ включва модела на номиналната затворена система за управление, тегловните функции за представяне на неопределеността и тегловните функции, с помощта на които се формират изискванията към качеството. Неизвестната част представлява множество от предавателни матрици $\Delta(s)$ със зададена блок-диагонална структура, съответстваща на структурата на неопределеността на разглежданата система. Входният вектор v съдържа всички сигнали, подадени към системата: задаващо въздействие, смущения, измерителен шум. В изходния вектор z са включени сигнали, имащи смисъла на "грешки", които характеризират качеството на системата: например, претеглените (с тегловни предавателни функции) грешка на следене, управляващо въздействие и др.

Нека с $T_{zv}(s)$ означим предавателната матрица от v до z . като показател за качеството на системата е подходящо да се използва величината

$$\|T_{zv}(s)\|_\infty. \quad (6.1)$$

Колкото стойността ѝ е по-малка, толкова "грешките" z , предизвикани от "най-лошите" входни сигнали v , са по-малки и следователно качеството на системата е по-добро. (Величината $\|T_{zv}(s)\|_\infty$ се използва като критерий за качество при синтеза на робастни управляващи устройства, изложен в следващите глави. Там е разгледан и важният въпрос за избиране на подходящи тегловни предавателни функции за удовлетворяване на взаимно противоречивите изисквания към качеството на системите за управление.)

Предавателната матрица $T_{zv}(s)$ може да се представи като линейно дробно преобразуване на $M(s)$ и $\Delta(s)$: $T_{zv} = F_U(M, \Delta)$. Очевидно е, че показателят за качество зависи от неопределеността. Искаме да определим до какво ниво на неопределеност $\|T_{zv}(s)\|_\infty$ не надвишава определена стойност.

Задачата за анализ на робастното качество може да се сведе до задача за

анализ на робастната устойчивост на затворен контур, съставен от блока $M(s)$ и разширен блок на неопределеността

$$\Delta_P(s) = \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0 \\ 0 & \Delta_F(s) \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

В (6.2) $\Delta_F(s)$ е фиктивна комплексна неопределеност (неструктурирана предавателна матрица), наричана блок на качеството, с размерност $n_z \times n_v$, където n_z и n_v са съответно размерностите на векторите z и v . Нека структурираната сингуллярна стойност на M по отношение на разширена неопределеност Δ_P за всяка честота ω удовлетворява условието

$$\mu_{\Delta_P}(M(j\omega)) \leq \beta.$$

Изпълнението на това условие гарантира, че за всички предавателни матрици $\Delta(s)$ със зададената структура с големина $\|\Delta(s)\|_\infty < 1/\beta$ затворената система е устойчива и $\|T_{zv}(s)\|_\infty \leq \beta$. Освен това, съществува конкретна предавателна матрица $\Delta(s)$, имаща зададената структура, с $\|\Delta(s)\|_\infty = 1/\beta$, за която или $\|T_{zv}(s)\|_\infty = \beta$, или системата е неустойчива.

Тъй като се изчисляват горна и долната граници на структурираната сингуллярна стойност, а не точната ѝ големина, заключенията за робастността на качеството трябва да се правят на основата на тези граници. Нека максимумите по отношение на честотата на горната и долната граници на структурираната сингуллярна стойност $\mu_{\Delta_P}(M)$ означим съответно с β_u и β_l . Тогава:

- За всички предавателни матрици $\Delta(s)$, имащи зададената структура, с $\|\Delta(s)\|_\infty < 1/\beta_u$, затворената система е устойчива и $\|T_{zv}(s)\|_\infty \leq \beta_u$;
- Съществува конкретна предавателна матрица $\Delta(s)$ със зададената структура с $\|\Delta(s)\|_\infty = 1/\beta_l$, за която или $\|T_{zv}(s)\|_\infty \geq \beta_l$, или системата е неустойчива.

Обикновено тегловните предавателни функции, с чиято помощ се формират изискванията към качеството, се избират така, че при изпълнение на условието

$$\|T_{zv}(s)\|_\infty < 1 \quad (6.3)$$

системата за управление има желано качество.

Казва се, че дадена неопределенена система постига робастно качество, ако за допустимата неопределеност системата е устойчива и условието (6.3) е изпълнено.

При изискване към качеството (6.3) и нормализирана неопределеност

$$\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$$

са в сила следните изводи:

- Ако $\beta_u < 1$, системата постига робастно качество за моделираната неопределеност (естествено и робастна устойчивост);
- Ако $\beta_l > 1$, робастно качество не се постига.

Ясно е, че ако $\beta_l < 1$, а $\beta_u > 1$, не е възможно да се направи сигурно заключение дали системата постига робастно качество.

При анализа на робастното качество, по аналогия с анализа на робастната устойчивост, се въвежда понятието запас по качество. Той показва до какво ниво на неопределеността системата има определено качество. Запасът по качество pm е равен на реципрочната стойност на максимума по отношение на честотата на структурираната сингулярна стойност $\mu_{\Delta_P}(M)$, т.е. $pm = 1/\beta$. Горната граница pm_u и долната граница pm_l на запаса по качество се получават съответно чрез β_l и β_u :

$$pm_u = \frac{1}{\beta_l} , \quad pm_l = \frac{1}{\beta_u} .$$

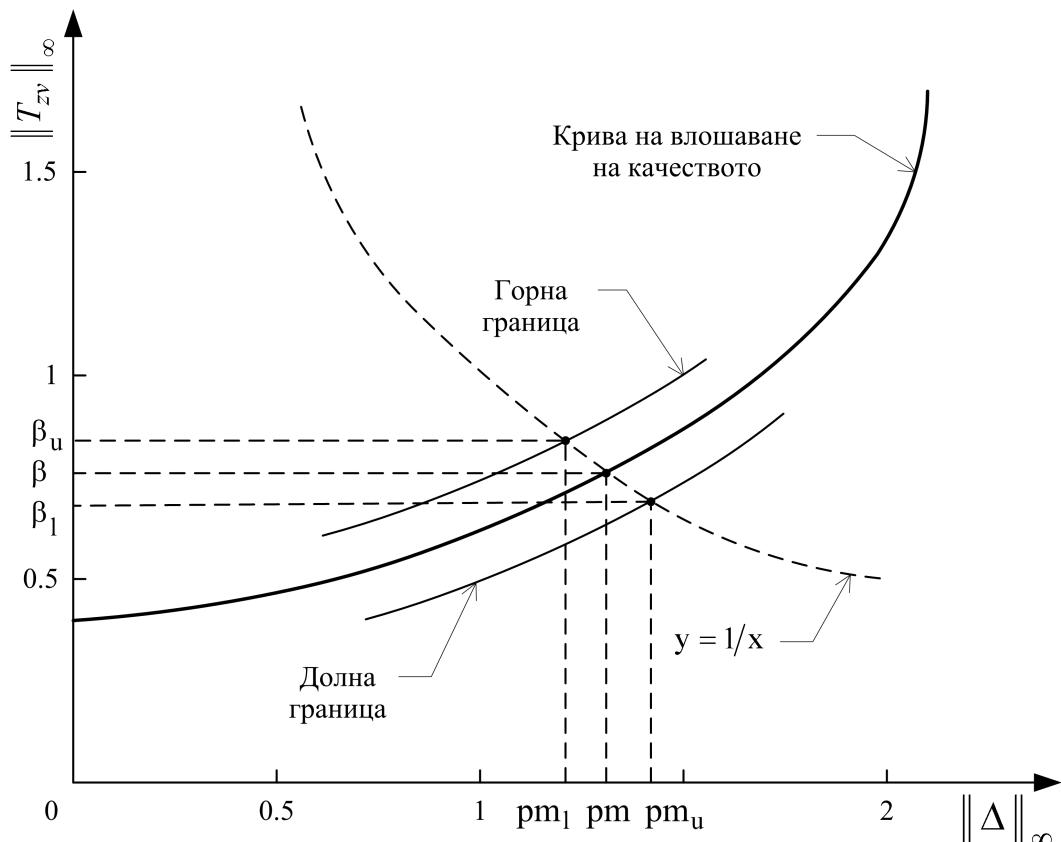
Фиг. 6.9 илюстрира начина на определяне на запаса по качество. На фигурата е показана примерна крива на влошаване на качеството на система за управление с неопределеност. С увеличаване на големината на неопределеността стойността на показателя за качество монотонно нараства и при определено ниво на неопределеност системата губи устойчивост. Дадени са също горната и долната граници на кривата на влошаване на качеството, които се получават при анализа на робастното качество с помощта на структурираната сингулярна стойност. Пресечните точки на тези криви с хиперболата $y = 1/x$ имат абсциси, равни на запаса по качество pm и границите му pm_l и pm_u , и ординати – съответно β , β_u и β_l .

За анализ на робастното качество е най-удобно да се използва командата **robustperf**. Резултатите от анализа с тази команда се получават в термините на долната и горната граници на запаса по качество. Синтаксисът, входните и изходните ѝ аргументи са подобни на командата за анализ на робастната устойчивост **robuststab**.

```
[perfmargin,perfmarginunc,report] = robustperf(sys,opt)
[perfmargin,perfmarginunc,report,info] = robustperf(sys,opt)
```

Входни аргументи:

sys – модел на неопределената система (разширена с тегловните предавателни функции, чрез които се формират изискванията към качеството, т.е. $T_{zv}(s)$). Ако **sys** е от клас **uss**, изчисленията се извършват за подходящо избрани от функцията **robustperf** стойности на честотата. Ако е от клас **ufrd**, се използва асоциираният със **sys** вектор с честоти. Системата може да бъде както непрекъсната, така и дискретна;



Фигура 6.9: Запас по качество

`opt` – незадължителен входен аргумент, който се създава с команда `robopt` по същия начин, както за `robuststab`.

Изходни аргументи:

`perfmargin` – структура със следните полета:

`UpperBound` – горна граница на запаса по качество;

`LowerBound` – долна граница на запаса по качество;

`CriticalFrequency` – стойност на честотата, съответстваща на горната граница на запаса по качество;

`perfmarginunc` – комбинация от стойности на неопределените елементи, съответстващи на горната граница на запаса по качество;

report – променлива, съдържаща текстово описание на резултати от анализа на робастното качество;

info – структура с няколко полета, по-важните от които са:

Frequency – вектор с честотите, за които са извършени изчисленията;

MussvBnds – **frd** обект, съдържащ изчислените стойности на горната граница (**MussvBnds(1,1)**) и долната граница (**MussvBnds(1,2)**) на структурираната сингулярна стойност за случая на робастно качество;

Sensitivity – структура, съдържаща информация за влиянието на неопределените елементи върху запаса по качество.

Анализът на робастното качество с команда **robustperf** се основава на изчисляване на границите на структурираната сингулярна стойност, като важно е да се има предвид, че получените резултати са за нормализирана неопределеност $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$.

Нека например границите на запаса по качество са **LowerBound = 1.25** и **UpperBound = 1.29**. В този случай се гарантира, че за нива на неопределеност, по-малки от 125% от зададеното (т.е., 1.25 нормализирани единици), затворената система е устойчива и стойността на показателя за качество (\mathcal{H}_∞ нормата на **sys**) е по-малка или равна на 0.8. Освен това, съществува поне една комбинация от стойности на неопределеността с ниво 129% от зададеното, за която или стойността на показателя за качество е по-голяма или равна на 0.775 (т.е. 1/1.29), или затворената система е неустойчива. (Една от тези комбинации е включена в структурата **perfmarginc**.)

При изискване към качеството (6.3) могат да се направят следните заключения: ако **LowerBound > 1**, системата постига робастно качество за моделираната неопределеност; ако **UpperBound < 1**, робастно качество не се постига; ако **LowerBound < 1**, а **UpperBound > 1**, не е възможно да се направи сигурно заключение.

Освен с **robustperf**, анализът на робастното качество може да се извърши като с команда **mussv** се изчислят горната и долната граници на структурираната сингулярна стойност $\mu_{\Delta_P}(M)$ във функция на честотата.

Пример 6.3 Разглеждаме системата за управление, описана в Пример 5.1. С G е означена предавателната функция на обекта, с K – на управляващото устройство. Нека основните изисквания към качеството на системата са да се осигури следене на задаващото въздействие (r) с допустима грешка (e) и ограничаване големината на управляващото въздействие (u). Съгласно първото изискване, функцията на чувствителността S , свързваща e с r , трябва да бъде

достатъчно малка в областта на ниските честоти (r е нискочестотен сигнал). Второто изискване налага предавателната функция KS между r и u да бъде малка. За отчитане на тези две изисквания, като показател за качеството при анализа на системата е подходящо да се използва величината

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u K S \end{bmatrix} \right\|_{\infty}, \quad (6.4)$$

където W_p и W_u са тегловни предавателни функции. Нека

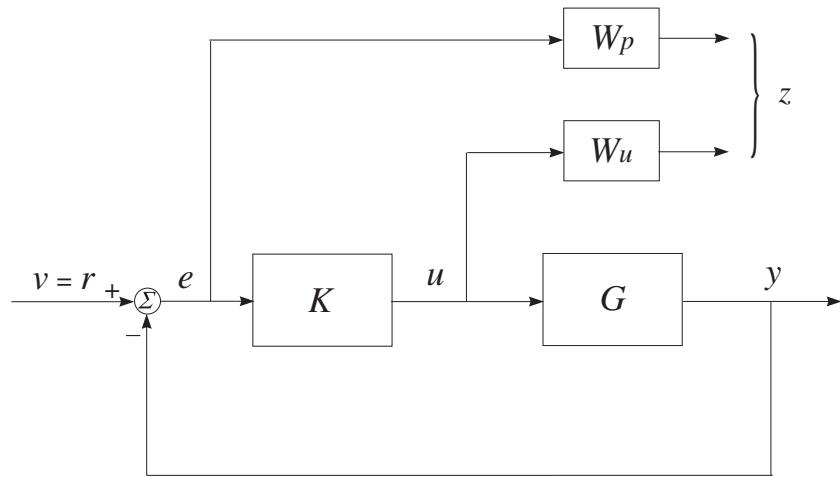
$$W_p = 0.8 \frac{s^2 + 18s + 50}{s^2 + 24s + 0.04}, \quad W_u = 0.02$$

са избрани така, че при изпълнение на условието

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u K S \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \quad (6.5)$$

системата за управление има желано качество, т.е. осигурява се желана точност на следене на задаващото въздействие и ограничаване на управляващото въздействие до зададена стойност.

Задачата е да анализираме робастността на качеството на системата за управление при отчитане на неопределеността в обекта.



Фигура 6.10: Блок–схема на затворената система с изисквания към качеството

Необходимата за анализа на робастното качество блок–схема на затворената система, включваща тегловните функции W_p и W_u , е показана на фиг. 6.10. В

случая

$$T_{zv} = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u K S \end{bmatrix},$$

като изходният вектор z съдържа претеглените “грешки”, а вход е задаващото въздействие.

Модел на системата се съставя с помощта на командата **sysic**, като предавателната матрица $T_{zv}(s)$ се запаметява в променливата **clp** от клас **uss**:

```
Wp = 0.8*tf([1 18 50],[1 24 0.04]);
Wu = 0.02*tf(1);
systemnames = ' K G Wp Wu ';
inputvar = '[ ref ]';
outputvar = '[ Wp; Wu ]';
input_to_K = '[ ref - G ]';
input_to_G = '[ K ]';
input_to_Wp = '[ ref - G ]';
input_to_Wu = '[ K ]';
clp = sysic;
```

За системата с номиналния модел на обекта

```
norm(clp.Nom,'inf')
ans =
0.8774
```

условието (6.5) се удовлетворява и следователно затворената система постига номинално качество.

Робастното качество на системата ще анализираме с командата **robustperf**, като зададем подходящ вектор с честоти:

```
omega = logspace(-3,3,200);
clp_g = ufrd(clp,omega);
[perfmargin,perfmarginunc,report,info] = robustperf(clp_g);
```

В резултат се получава:

```
perfmargin =
UpperBound: 0.6691
LowerBound: 0.6677
CriticalFrequency: 3.3701
```

Следователно, тъй като $\text{UpperBound} < 1$, изискването към качеството (6.5) не се удовлетворява за допустимата неопределеност, т.е., системата не постига робастно качество.

От получените от анализа резултати също следва, че за нива на неопределеност, по-малки от 66.77% от зададеното, стойността на показателя за качество (6.4) е по-малка или равна на $1/0.6677 = 1.4976$.

Освен това, анализът дава комбинация от стойности на неопределеността с ниво 66.91% от зададеното, за която стойността на (6.4) е по-голяма или равна на $1/0.6691 = 1.494$. (От Пример 5.1 знаем, че системата е робастно устойчива за допустимата неопределеност.)

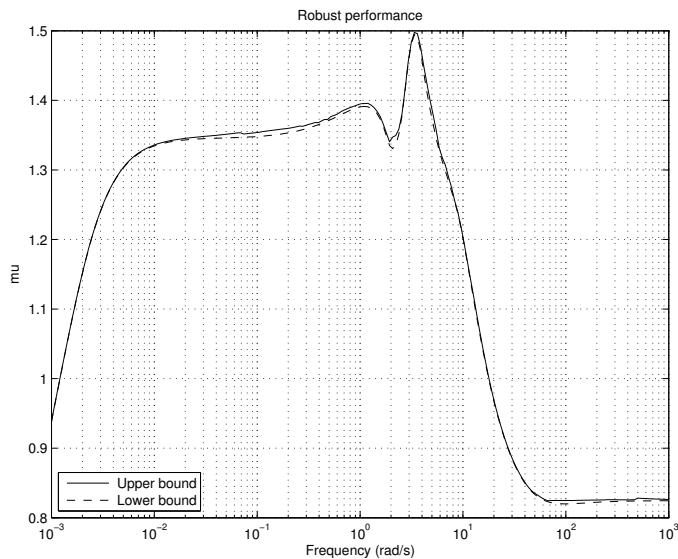
Част от направените заключения за робастността на качеството на системата се съдържат в променливата `report`. В нея е включена също информация за влиянието на неопределените елементи върху запаса по качество. Най-силно влияние оказва неопределеността в коефициента k .

```
report =
Uncertain System achieves a robust performance margin of 0.6691.
-- A model uncertainty exists of size 66.8% resulting
  in a performance margin of 1.5 at 3.37 rad/s.
-- Sensitivity with respect to uncertain element ...
  'T1' is 10%. Increasing 'T1' by 25% leads to a 3% decrease
  in the margin.
  'T2' is 7%. Increasing 'T2' by 25% leads to a 2% decrease
  in the margin.
  'delta' is 29%. Increasing 'delta' by 25% leads to a 7% decrease
  in the margin.
  'k' is 39%. Increasing 'k' by 25% leads to a 10% decrease
  in the margin.
```

По-долу са дадени някои допълнителни резултати, които не са задължителен елемент от анализа на робастното качество.

В редица случаи при анализа на робастното качество на системи за управление е необходимо да се разполага с графика на структурираната сингуллярна стойност в зависимост от честотата. На фиг. 6.11 са показани честотните характеристики на горната и долната граници на μ , построени с командните редове:

```
semilogx(info.MussvBnds(1,1), 'r-', info.MussvBnds(1,2), 'b--')
grid
title('Robust performance')
xlabel('Frequency (rad/s)')
ylabel('mu')
```



Фигура 6.11: Честотни характеристики на горната и долната граници на μ

```
legend('Upper bound', 'Lower bound', 3)
```

Максимумите по отношение на честотата на горната и долната граници на структурираната сингулярна стойност са:

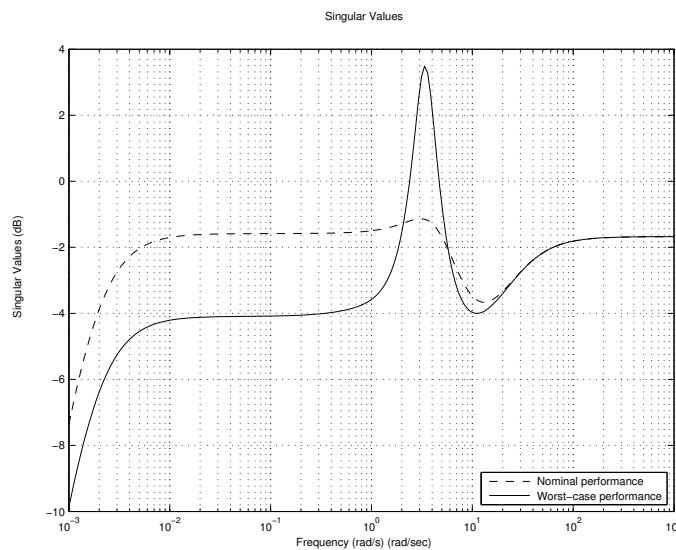
```
pkmu =
UpperBound: 1.4976
LowerBound: 1.4944
```

Стойността на показателя за качество (6.4) за неопределеността, съдържаща се в променливата `perfmarginc`, е по-голяма от долната граница на μ :

```
norm(usubs(clp,perfmarginc), 'inf')
ans =
1.4949
```

За илюстриране на влиянието на неопределеността върху показателя за качество, на фиг. 6.12 са показани сингулярните стойности на предавателната матрица $T_{zv}(s)$ за номиналния модел на обекта и за неопределеността в `perfmarginc`. Характеристиките са получени с командите:

```
clp_pmu = usubs(clp,perfmarginc);
```



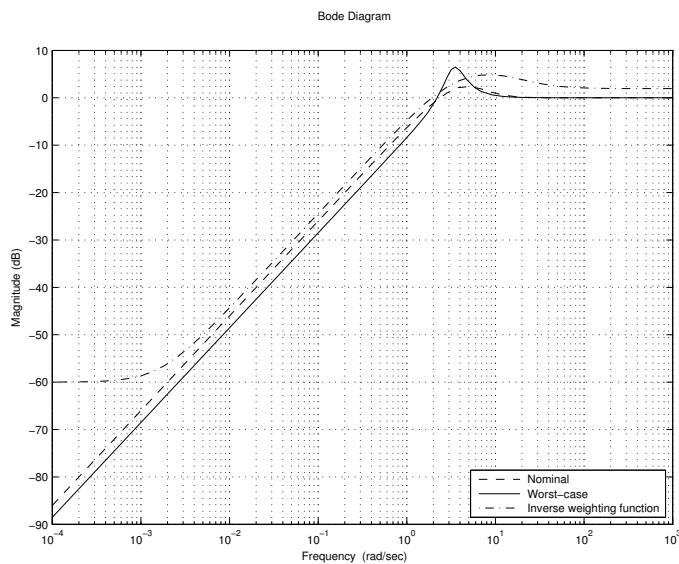
Фигура 6.12: Сингуларни стойности на $T_{zv}(s)$ в номиналния и в най-лошия случай

```
sigma(clp.Nom,'r--',clp_pmu,'b',omega), grid
xlabel('Frequency (rad/s)')
legend('Nominal performance','Worst-case performance')
```

На фиг. 6.13 са показани амплитудно-честотните характеристики на обратната тегловна функция W_p^{-1} и на функцията на чувствителността S за номиналния модел на обекта и за неопределеността в `perfmarginunc`, построени с дадените по-долу команди. За удовлетворяване на условието (6.5) е необходимо честотната характеристика на S да бъде разположена под характеристиката на W_p^{-1} за всички стойности на честотата. Вижда се, че за неопределеността в `perfmarginunc` това изискване не се изпълнява в средночестотната област, което ще доведе до недопустима колебателност на преходните процеси при следене на задаващото въздействие.

```
S = feedback(1,G*K);
S_pmu = usubs(S,perfmarginunc);
bodemag(S.Nom,'r--',S_pmu,'b',inv(Wp),'c-.',{1e-4,1e3})
grid
legend('Nominal','Worst-case','Inverse weighting function')
```

Да построим честотните характеристики на сингуларните стойности на $T_{zv}(s)$ за 30 случайни неопределености с ниво на неопределеност, равно на долната гра-



Фигура 6.13: Функции на чувствителността в номиналния и в най-лошия случай

ница на запаса по качество, и ги сравним с характеристиката за неопределеността в `perfmargin`:

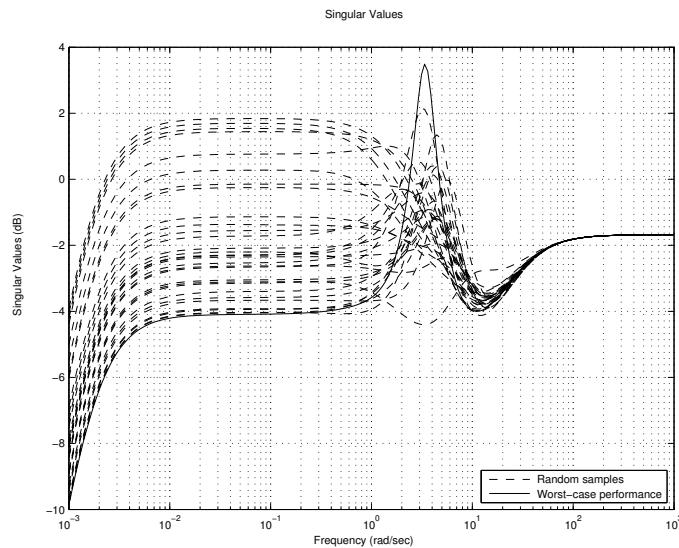
```
clp.Uncertainty.T1.Percentage = 0.6677*50;
clp.Uncertainty.T2.Percentage = 0.6677*50;
clp.Uncertainty.delta.Bound = 0.6677;
clp.Uncertainty.k.Percentage = 0.6677*50;
clp30 = usample(clp,30);
sigma(clp30,'r--',clp_pmu,'b',omega), grid
legend('Random samples','Worst-case performance')
```

От графиките, показани на фиг. 6.14, се вижда, че за неопределеността, получена чрез командалата `robustperf`, показателят за качество има най-висока стойност.

Анализът на системата може да се извърши и като с командалата `mussv` се изчислят границите на структурираната сингулярна стойност за случая на робастно качество във функция на честотата. Това е удобно да се направи в следната последователност.

Формира се фиктивен комплексен блок на качеството с необходимата размерност

```
PerfBlock = ucomplexm('PerfBlock',zeros(size(clp,2),size(clp,1)));
```



Фигура 6.14: Случайни и най-лоша сингуларни стойности на $T_{zv}(s)$

който се свързва с входовете и изходите на $T_{zv}(s)$:

```
modclp = lft(PerfBlock,clp);
```

Получават се блокът M и структурата на разширения блок на неопределеността Δ_P :

```
[M,Delta,BlkStruct] = lftdata(modclp);
```

Извиква се функцията `mussv`

```
M_g = frd(M,omega);
bndp = mussv(M_g,BlkStruct);
```

и на основата на получените резултати за горната и долната граници на структурираната сингуларна стойност могат да се направят заключения за робастността на качеството на разглежданата система за управление с неопределеност.

6.3 Задачи

1. Дадена е система за управление с обект с неточно известни параметри и неопределеност на входа. Предавателната функция на обекта е

$$G = \frac{k}{Ts + 1} ,$$

където коефициентът k и времеконстантата T имат номинални стойности съответно 1 и 2 и относителна неопределеност 25%. Максималната неопределеност на входа на обекта е 5% в областта на ниските честоти, постепенно нараства до 100% за честота 2.5 rad/s и достига 500% във високочестотната област.

Предавателната функция на управляващото устройство има вида

$$K = \frac{k_c(T_c s + 1)}{T_c s},$$

където: 1) $k_c = 0.15$, $T_c = 0.4$; 2) $k_c = 3.4$, $T_c = 1.1$.

За двете групи стойности на коефициентите в управляващото устройство извършете следните изследвания:

- а) Съставете модел на обекта, като неопределеността на входа му представите като мултипликативна неопределеност;
- б) С команда `wcgain` определете най-лошото качество на системата за управление;
- в) Получете амплитудно-честотните характеристики и преходните функции на затворената система в номиналния и в най-лошия случай;
- г) Получете амплитудно-честотните характеристики и преходните функции на затворената система за определен брой случаи и ги сравнете със съответните характеристики в най-лошия случай;
- д) Сравнете резултатите от анализа за двете групи стойности на коефициентите в управляващото устройство.

2. Дадена е двуканална система за управление с обект с предавателна матрица

$$G = \frac{1}{s^2 + 2s + 4} \begin{bmatrix} -s + 2 & 2s + 1 \\ -3 & -s + 2 \end{bmatrix}$$

и декуплиращо управляващо устройство

$$K = \frac{2(s+2)(s^2 + 2s + 4)}{s(s+1)(s^2 + 2s + 7)} \begin{bmatrix} -s + 2 & -2s - 1 \\ 3 & -s + 2 \end{bmatrix}.$$

Обектът има неопределеност на двета входа, която не надвишава 2% в областта на ниските честоти, постепенно нараства до 100% за честота 10 rad/s и достига 200% в областта на високите честоти.

Необходимо е да се извършат следните изследвания:

- а) Съставете модел на обекта с входна мултипликативна неопределеност;
- б) Определете най-лошото качество на системата като използвате командата `wcgain` с входен аргумент изходната чувствителност;
- в) Получете честотните характеристики на сингулярните стойности на изходната чувствителност и преходните процеси на затворената система в номиналния и в най-лошия случай.
3. Дадена е система за управление с обект с номинална предавателна функция

$$G_n = \frac{1}{s - 1}$$

и входна мултипликативна неопределеност с тегловна предавателна функция

$$W = 0.25 \frac{0.5s + 1}{0.03125s + 1}.$$

Предавателната функция на управляващото устройство има вида

$$K = \frac{k(Ts + 1)}{s},$$

където: 1) $k = 10, T = 0.9$; 2) $k = 1, T = 2.8$.

Системата има желано качество при изпълнение на условието

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u K S \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1,$$

където

$$W_p = \frac{0.25s + 0.6}{s + 0.006}, \quad W_u = 0.01$$

са тегловни предавателни функции, с чиято помош се формират изискванията към качеството, а с S е означена функцията на чувствителността. Блок-схемата на затворената система, включваща тегловните функции W_p и W_u , е показана на фиг. 6.10.

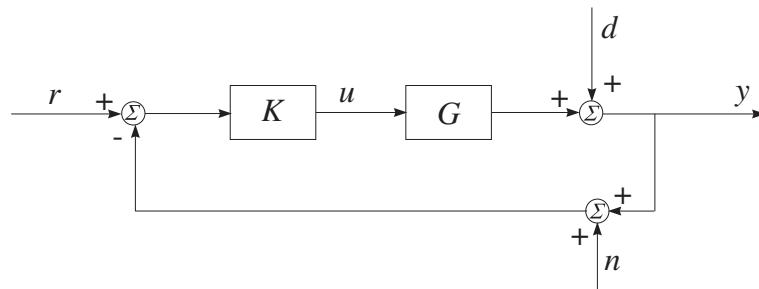
За двете групи стойности на кофициентите в управляващото устройство анализирайте робастното качество на системата, като използвате команда `robustperf`. Сравнете номиналното и робастното качество на системата. Съпоставете резултатите от анализа за двете групи стойности на кофициентите.

Глава 7

СИНТЕЗ ПРИ ЖЕЛАНИ ЧЕСТОТНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ

7.1 Компромиси при синтеза на многомерните системи

Синтезът на многомерни системи в честотната област се основава на идеята, че задоволително задаване на усилването за матрична предавателна функция се дава от сингуллярните стойности на предавателната матрица. Чрез използването на сингуллярните стойности, класическите идеи за синтез при желани честотни характеристики могат да се обобщят за многомерни системи. За да се илюстрира то-



Фигура 7.1: Система с обратна връзка

ва, нека разгледаме конфигурацията, показана на фиг. 7.1. Съединението на обекта G и управляващото устройство K се управлява от заданията r , изходните смущения d и измервателните шумове n . Тук y са изходите, които трябва да се управ-

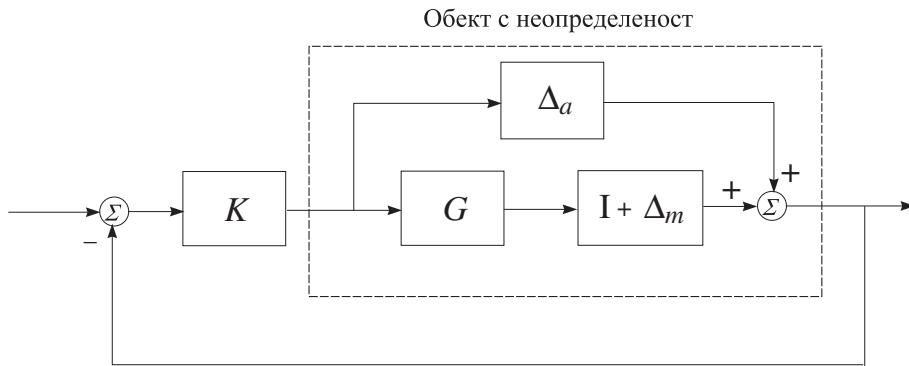
ляват, а u са управляващите сигнали. В термините на функцията на чувствителността $S(s) = (I + L(s))^{-1}$ и функцията на допълнителната чувствителност (предавателната матрица на затворената система) $T(s) = L(s)(I + L(s))^{-1} = I - S(s)$, където $L(s) = G(s)K(s)$, имаме следните важни съотношения:

$$y(s) = T(s)r(s) + S(s)d(s) - T(s)n(s), \quad (7.1)$$

$$u(s) = K(s)S(s)[r(s) - n(s) - d(s)]. \quad (7.2)$$

Тези зависимости определят редица цели по отношение на затворената система в допълнение на изискването, че $K(s)$ трябва да стабилизира $G(s)$:

1. За *потискане на смущението* $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ трябва да се направи малко.
2. За *потискане на шума* $\bar{\sigma}(T(j\omega))$ трябва да се направи малко.
3. За *следене на заданието* трябва да се направи $\bar{\sigma}(T(j\omega)) \approx \underline{\sigma}(T(j\omega)) \approx 1$.
4. За *намаляване на енергията за управление* $\bar{\sigma}(R(j\omega))$, където $R(s) = K(s)S(s)$, трябва да се направи малко.



Фигура 7.2: Адитивна и мултипликативна неопределеност

Ако неструктурината неопределеност в модела на обекта G е представена с адитивно смущение, т.е., $G_p(s) = G(s) + \Delta_a(s)$ (вж. фиг. 7.2), то големината на най-малката дестабилизираща адитивна неопределеност е

$$\bar{\sigma}(\Delta_a(j\omega)) = \frac{1}{\bar{\sigma}(R(j\omega))}.$$

Ето защо една следваща цел е

5. За *робастна устойчивост* в присъствието на адитивно смущение $\bar{\sigma}(R(j\omega))$ трябва да се направи малко.

Алтернативно, ако неопределеността е моделирана с изходно мултипликативно смущение, такова, че $G_p(s) = (I + \Delta_m(s))G(s)$, големината на най-малката дестабилизираща мултипликативна неопределеност е

$$\bar{\sigma}(\Delta_m(j\omega)) = \frac{1}{\bar{\sigma}(T(j\omega))}.$$

Ето защо можем да поискаме и

6. За *робастна устойчивост* в присъствието на изходно мултипликативно смущение $\bar{\sigma}(T(j\omega))$ трябва да се направи малко.

Изискванията към затворената система от 1 до 6 не могат да се удовлетворят едновременно. Следователно синтезът на система с обратна връзка е компромис между конфликтни цели в честотната област. Това не е толкова трудно, тъй като честотните области, в които целите са важни, могат да са съвсем различни. Например, потискането на смущението е типично нискочестотно изискване, докато потискането на шума обикновено има смисъл във високочестотната област.

Задаването на желано потискане на смущаващото въздействие може да се запише като

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq |W_1^{-1}(j\omega)|, \quad (7.3)$$

където $|W_1^{-1}(j\omega)|$ е желаната величина на отслабване на смущението. Правейки $W_1(j\omega)$ зависима от честотата ω , даваме възможност да се зададе различна величина на отслабването за всяка честота ω .

Като следствие от връзката на матриците R и T с робастността на системата при неструктурирани смущения е обичайно запасите по устойчивост на затворената система да се зададат с помощта на неравенства върху сингулярните стойности като

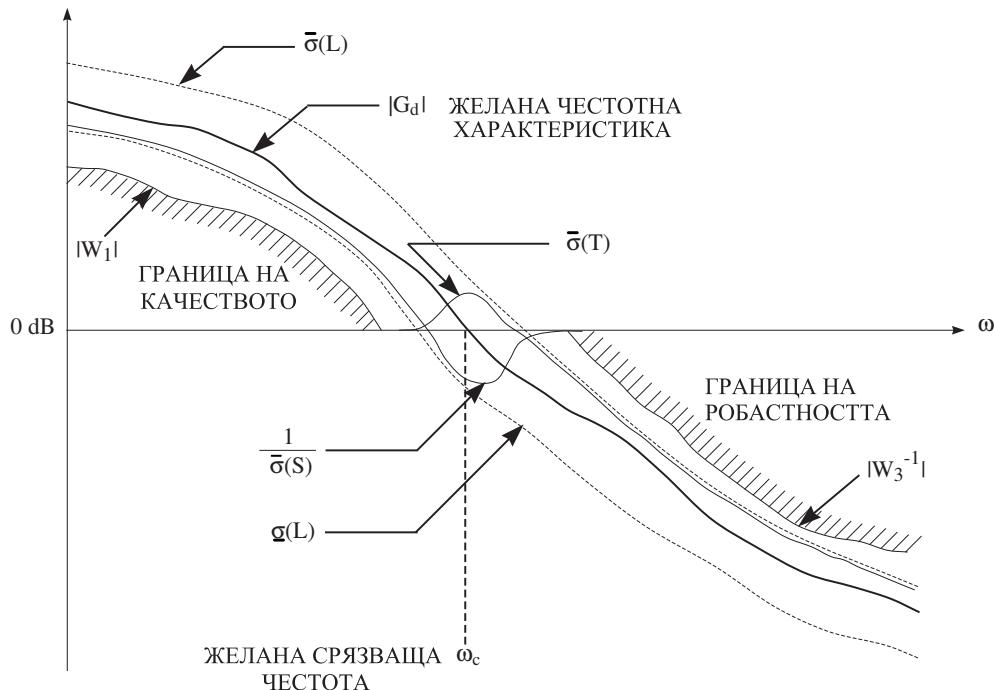
$$\bar{\sigma}(R(j\omega)) \leq |W_2^{-1}(j\omega)|, \quad (7.4)$$

$$\bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq |W_3^{-1}(j\omega)|, \quad (7.5)$$

където $|W_2(j\omega)|$ и $|W_3(j\omega)|$ са съответно най-големите адитивни и мултипликативни смущения върху обекта.

Обичайна практика е ефектът на всички неопределености в обекта да се отрази с единствена фиктивна мултипликативна неопределеност Δ_m , така че изискванията към синтеза да се запишат като

$$\frac{1}{\sigma_i(S(j\omega))} \leq |W_1(j\omega)|; \quad \sigma_i(T(j\omega)) \leq |W_3^{-1}(j\omega)|.$$

Фигура 7.3: Задаване на сингуларните стойности на L , S и T

Тези условия са еквивалентни на

$$\frac{1}{\sigma(S(j\omega))} \leq |W_1(j\omega)|; \quad \bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq |W_3^{-1}(j\omega)|,$$

така както е показано на фиг. 7.3. Интересно е да се отбележи, че в горната половина на фигурата (над оста 0 dB)

$$\underline{\sigma}(L(j\omega)) \approx \frac{1}{\bar{\sigma}(S(j\omega))},$$

докато в долната половина на фигурата (под оста 0 dB) е изпълнено

$$\bar{\sigma}(L(j\omega)) \approx \bar{\sigma}(T(j\omega)).$$

Този резултат следва от факта, че

$$S \stackrel{\text{def}}{=} (I + L(s))^{-1} \approx L(s)^{-1} \text{ ако } \underline{\sigma}(L(j\omega)) \gg 1,$$

$$T \stackrel{\text{def}}{=} L(s)(I + L(s))^{-1} \approx L(s) \text{ ако } \bar{\sigma}(L(j\omega)) \ll 1.$$

От фиг. 7.3 следва, че предавателната матрица на управляващото устройство $K(s)$ трябва да се синтезира така, че честотните характеристики $\bar{\sigma}(L(j\omega))$ и $\underline{\sigma}(L(j\omega))$ да избягват заприхованите области. Иначе казано, за добро качество $\underline{\sigma}(L(j\omega))$ трябва да се направи да лежи над границата за качеството, а за робастна устойчивост $\bar{\sigma}(L(j\omega))$ трябва да се принуди да лежи под границата на робастността. Формирането на сингулярните стойности на $L(s)$ чрез подходящ избор на $K(s)$ е сравнително лесна задача, но да се направи това така, че да се гарантира устойчивостта на затворената система в общия случай, е трудно. Устойчивостта на затворената система не може да бъде определена от сингулярните стойности на отворената система, тъй като те не носят информация за фазо-честотните характеристики на системата.

7.2 \mathcal{H}_∞ синтез при желани честотни характеристики

Командата `loopsyn` дава възможност да се синтезира стабилизиращо управляващо устройство, за което честотните характеристики на отворената система са оптимизирани така, че да са максимално близо до желаните честотни характеристики G_d (вж. фиг. 7.3). Базовият синтаксис на командата `loopsyn` за синтез при желани честотни характеристики е

$$K = \text{loopsyn}(G, G_d)$$

където G е предавателната матрица на обекта, G_d съответства на желаните честотни характеристики на предавателната матрица на отворената система $L = GK$ и K е оптималното управляващо устройство. Управляващото устройство K има свойството, че формира отворения контур $L = GK$ по такъв начин, че неговите честотни характеристики са максимално близо до честотните характеристики на G_d при ограничението, че управляващото устройство трябва да стабилизира затворената система.

Желаните честотни характеристики G_d трябва да отговарят на следните условия:

- **Робастна устойчивост.** Желаният контур G_d трябва да има ниско усиливане (колкото е възможно по-ниско) във високочестотната област, където моделът е толкова лош, че неговите фазо-честотни характеристики са напълно неверни, с грешки, приближаващи $\pm 180^\circ$ и повече.
- **Качество.** Желаният контур G_d трябва да има високо усиливане (колкото е възможно по-високо) в нисковестотната област, където моделът е добър,

за да се постигне добра точност в установен режим и добро потискане на смущаващото въздействие.

- **Сръзваща честота и наклон.** Желаните честотни характеристики G_d трябва да имат сръзваща честота ω_c между тези две честотни области и под сръзващата честота характеристиките трябва да имат наклон от -20 или -40 dB/декада, което позволява да се поддържа фазовото закъснение по-малко от -180° в честотната лента на пропускане ($0 < \omega < \omega_c$).

Други съображения, които могат да повлият върху избора на G_d , са полюсите и нулите на обекта G , разположени в дясната комплексна полуравнина, които налагат фундаментални ограничения върху сръзващата честота ω_c . Така например, сръзващата честота ω_c трябва да бъде по-голяма от модула на всеки неустойчив полюс и по-малка от модула на всяка неустойчива нула, т.е.,

$$\max_{Re(p_i) > 0} |p_i| < \omega_c < \min_{Re(z_i) > 0} |z_i|.$$

Ако тези изисквания при избора на G_d не са спазени, команда `loopsyn` ще изчисли оптималното управляващо устройство K , но отвореният контур $L = GK$ ще има лошо приближение към G_d , поради което изискванията към качеството няма да бъдат удовлетворени.

Пример 7.1 Дадена е двумерна система с обект от 5-ти ред с два входа и два изхода с изходна мултипликативна неопределеност, чиято предавателна матрица има вида

$$G = (I_2 + \Delta W)G_{nom},$$

където

$$G_{nom} = \begin{bmatrix} \frac{12}{0.2s+1} & -\frac{0.05}{0.1s+1} \\ \frac{0.1}{0.3s+1} & \frac{5}{0.7s-1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}, |\Delta_1| < 1, |\Delta_2| < 1,$$

и

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix}$$

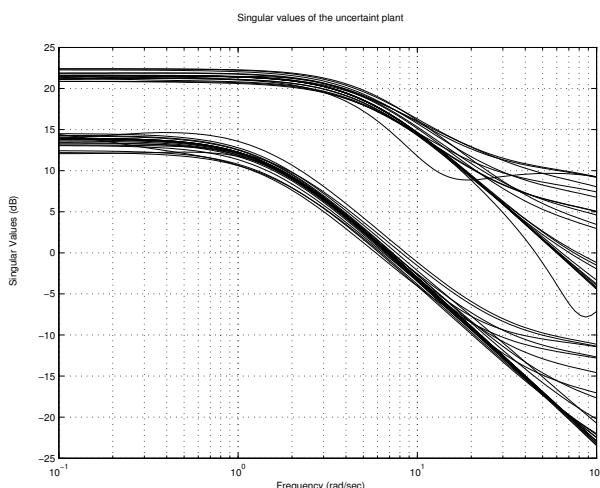
е матрица от тегловните функции, които се определят от грешките на модела в двета канала. Неопределеността на първия изход е 10% в нискочестотната област, нараства до 100% при $\omega = 20$ rad/s и достига 1000% във високоочестотната област. Неопределеността на втория изход е 20% в нискочестотната област, 100% при $\omega = 25$ rad/s и 1000% във високоочестотната област.

Моделът на обекта с неопределеност се получава с командите

```

s = tf('s');
g11 = 12/(0.2*s + 1);
g12 = -0.05/(0.1*s + 1);
g21 = 0.1/(0.3*s + 1);
g22 = 5/(0.7*s - 1);
Gnom = [g11 g12;g21 g22];
w1 = makeweight(0.1,20,10);
w2 = makeweight(0.2,25,10);
W = blkdiag(w1,w2);
Delta_1 = ultidyn('Delta_1',[1 1]);
Delta_2 = ultidyn('Delta_2',[1 1]);
Delta = blkdiag(Delta_1,Delta_2);
G = (eye(2) + Delta*W)*Gnom;

```



Фигура 7.4: Сингуларни стойности на обекта

Сингуларните стойности на обекта са показани на фиг. 7.3. Вижда се, че след честота 20 rad/s в честотните характеристики на обекта има значителна неопределеност, която може да достигне до 20 dB при честоти, по-големи от 100 rad/s . Ето защо управляващото устройство трябва да бъде синтезирано така, че отворената система да има усилване, което е по-малко от -20 dB за $\omega > 100 \text{ rad/s}$.

Изискванията към сингуларните стойности на предавателната матрица на отворената система са:

- **Изисквания към робастността:** Наклон от -20 dB/декада и усилване

от -20 dB за честота 100 rad/s,

- **Изисквания към качеството:** Да се максимизира $1/\sigma(S)$ във високочестотната област.

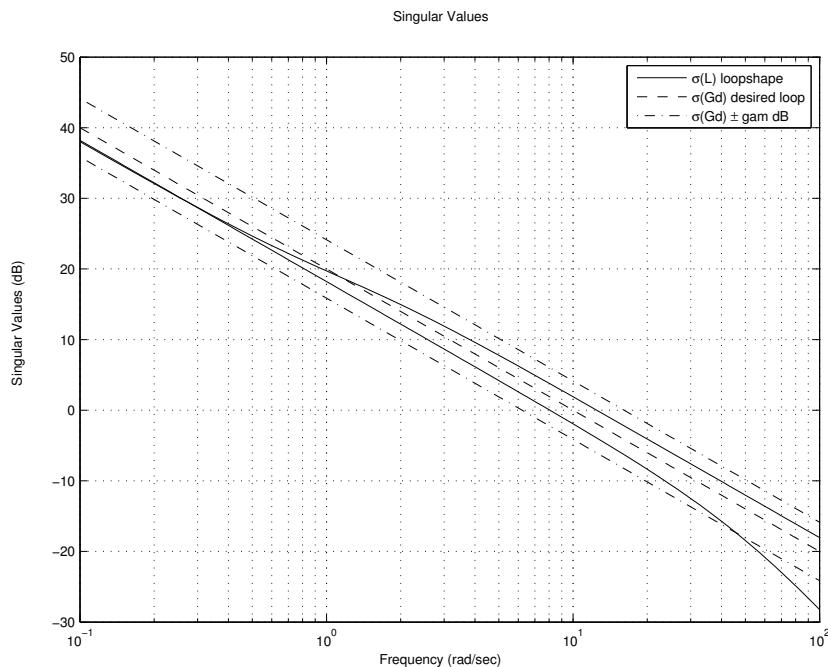
Двете изисквания могат да се удовлетворят вземайки желаната предавателна функция на отворената система във вида

$$G_d(s) = 10/s.$$

(Обърнете внимание, че коефициентът в числителя на $G_d(s)$ е точно равен на желаната сръзваща честота ω_c .)

\mathcal{H}_∞ синтезът при желани честотни характеристики се извършва с командите

```
Gd = 10/s;
[K,cls,gam] = loopsyn(Gnom,Gd);
```



Фигура 7.5: Резултати от синтеза с функцията loopsyn

Желаните честотни характеристики и получените честотни характеристики на отворената система са показани на фиг. 7.5. Те са получени с команда

```

looptransfer = loopsens(Gnom,K);
L = looptransfer.Lo;
sigma(L,'r-',Gd,'b--',Gd/gam,'k-.',Gd*gam,'k-.',omega)

```

Вижда се, че и двете сингулярни стойности на $L = GK$ са близо до желаната честотна характеристика G_d . Числото $\pm \text{gam}$, dB (т.e., $20\log_{10}(\text{gam})$) показва точността, с която честотните характеристики на отворената система приближават желаните честотни характеристики

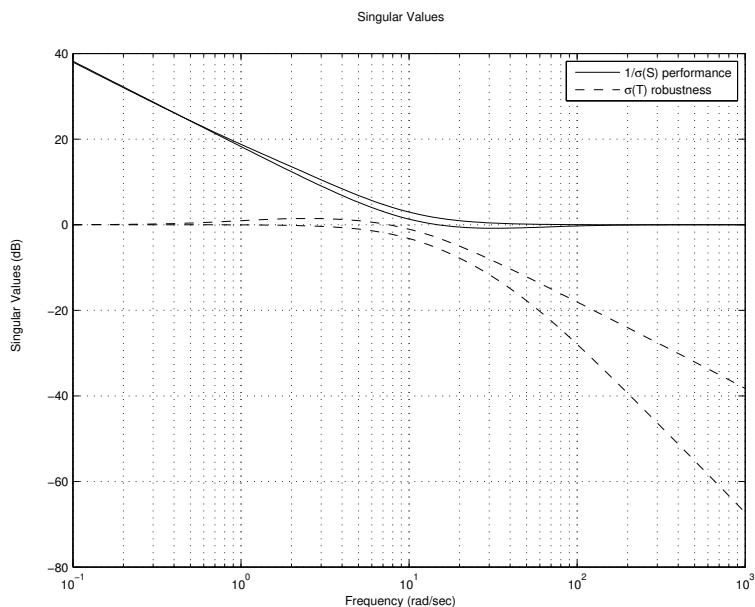
$$\bar{\sigma}(GK), \text{dB} \geq |G_d| - \text{gam}, \text{dB} \text{ за } \omega < \omega_c,$$

$$\bar{\sigma}(GK), \text{dB} \leq |G_d| + \text{gam}, \text{dB} \text{ за } \omega > \omega_c.$$

В случая имаме, че

`gam =`

1.6097



Фигура 7.6: Робастност и качество на затворената система

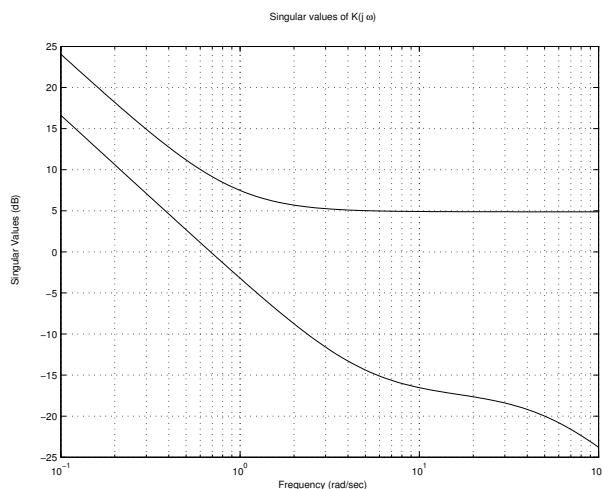
Величините $1/\sigma_i(S)$, характеризиращи качеството, и величините $\sigma_i(T)$, характеризиращи робастността на системата, се получават с командите

```

omega = logspace(-1,3,100);
I = eye(size(L));
sigma(I+L,'r-',T,'b--',omega);
grid
legend('1/\sigma(S) performance','\sigma(T) robustness')

```

(Обърнете внимание, че величините $1/\sigma_i(S)$ са сингулярни стойности на матрицата $S^{-1} = I + L$.) Резултатите са показани на фиг. 7.6.

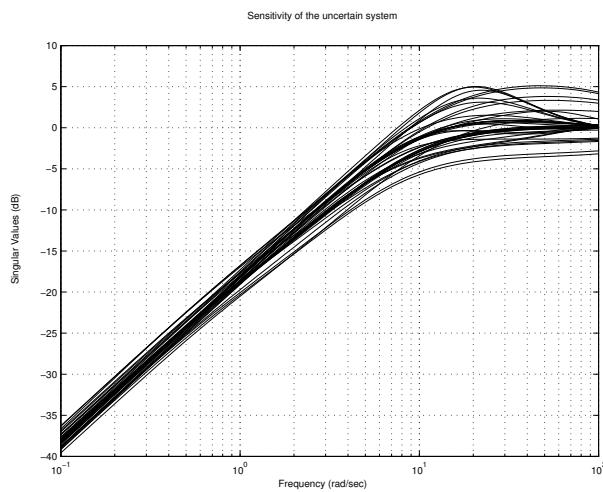


Фигура 7.7: Сингулярни стойности на управляващото устройство

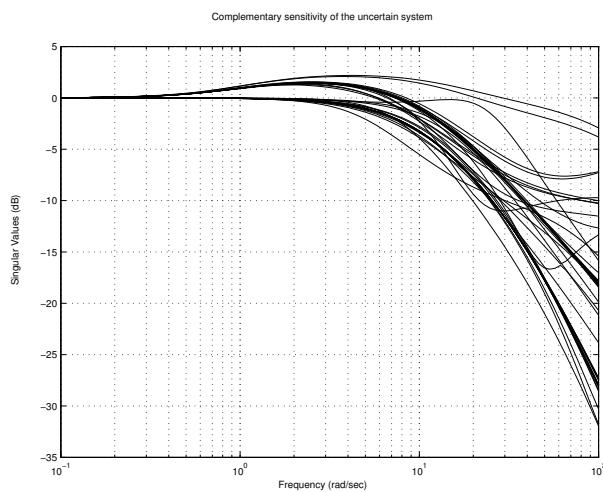
Сингулярните стойности на управляващото устройство са показани на фиг. 7.7. Устройството е от 10-ти ред и има интегриращ ефект в ниските честоти.

Чувствителността и допълнителната чувствителност на затворената система с неопределеност са показани на фигури 7.8 и 7.9.

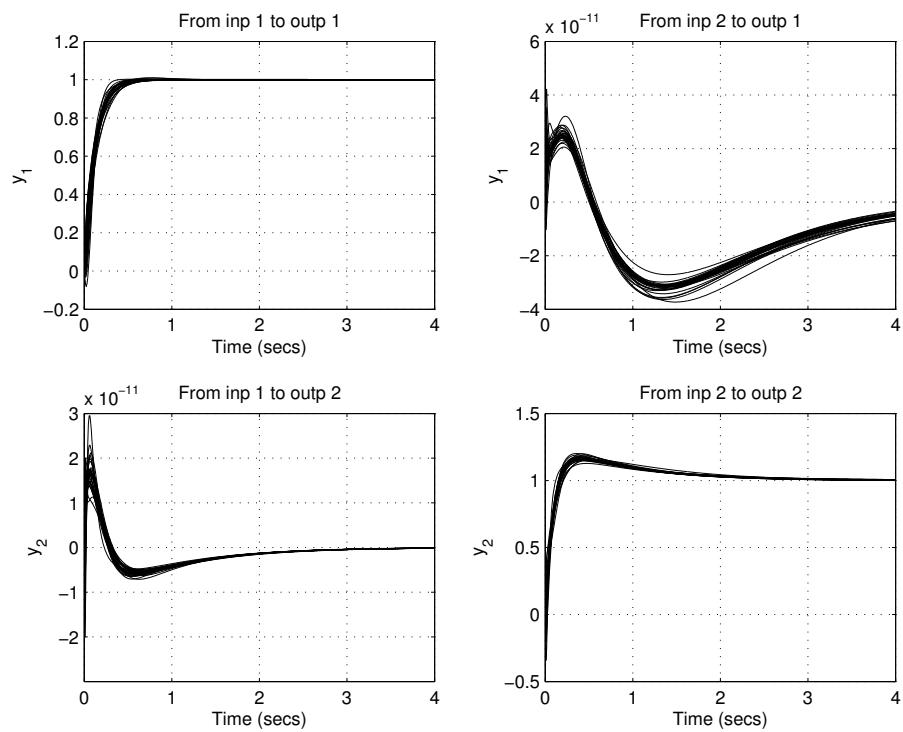
Преходните процеси на затворената система с неопределеност са показани на фиг. 7.10. Вижда се, че взаимното влияние между двата канала е изключително малко (т.e., каналите са *декуплирани*), което се дължи на близостта на двете сингулярни стойности на $L = GK$ до желаната честотна характеристика Gd .



Фигура 7.8: Чувствителност на системата с неопределеност



Фигура 7.9: Допълнителна чувствителност на системата с неопределеност

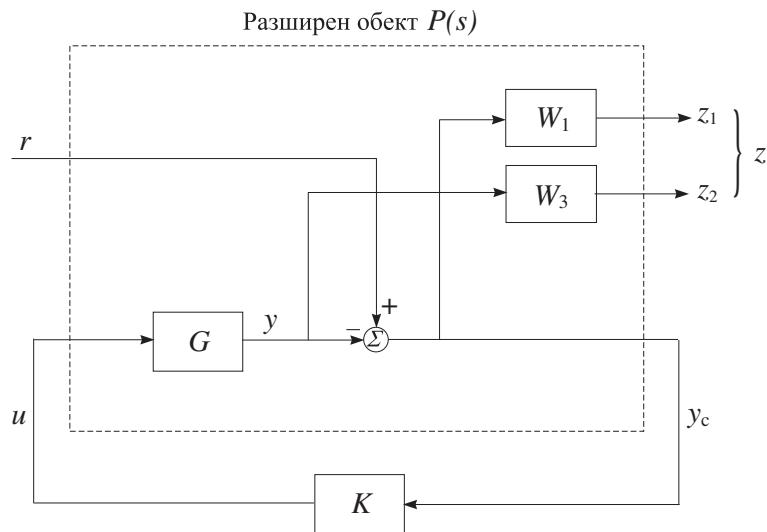


Фигура 7.10: Преходни процеси на затворената система

7.3 \mathcal{H}_∞ синтез при смесена чувствителност

Друга възможност за синтез при желани честотни характеристики е \mathcal{H}_∞ синтез при смесена чувствителност, който се извършва с помощта на команда

`K = mixsyn(G,W1,[],W3)`



Фигура 7.11: \mathcal{H}_∞ синтез при смесена чувствителност

При този синтез изискванията към качеството и робастната устойчивост, зададени с уравнения (7.3) и (7.5), се обединяват в единствено изискване по отношение на \mathcal{H}_∞ нормата

$$\|T_{zr}\|_\infty < 1,$$

където (вж. фиг. 7.11)

$$T_{zr} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix}.$$

Величината $\|T_{zr}\|_\infty$ се нарича *критерий за смесена чувствителност*, тъй като тя “наказва” едновременно чувствителността $S(s)$ и допълнителната чувствителност $T(s)$. Синтезът при желани честотни характеристики се постига, когато функцията W_1 има желаната форма за честоти $\omega < \omega_c$, а функцията $1/W_3$ има желаната форма за честоти $\omega > \omega_c$. При избора на W_1 и W_3 за синтез с команда `mixsyn` трябва да се осигури, че срязващата честота при 0 dB за амплитудно-честотната

характеристика на W_1 да е под сръзващата честота при 0 dB за амплитудно-честотната характеристика на $1/W_3$, така както е показано на фиг. 7.3. Това дава възможност да се получи “пролука” за желаната честотна характеристика G_d , която да премине между границата на качеството W_1 и границата на робастността $1/W_3$. В противен случай изискванията към качеството и робастността няма да се удовлетворят.

Командата `mixsyn` може да се използва и в по-общия вид

```
[K,cl,gam] = mixsyn(G,W1,W2,W3)
```

който дава възможност да се намери управляващо устройство K , минимизиращо \mathcal{H}_∞ нормата на претеглената смесена чувствителност

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 R \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty .$$

Включването на члена $W_2 R$ дава възможност да се “накаже” управляващия сигнал $u(t)$, с което да се минимизира енергията за управление. Тегловните функции W_1 , W_2 , W_3 могат да са скаларни променливи, матрици със съответните размерности или празни променливи.

Получените въз основа на изчисленото K матрици S , R и T удовлетворяват неравенствата

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(S(j\omega)) &\leq \gamma \underline{\sigma}(W_1^{-1}(j\omega)), \\ \bar{\sigma}(R(j\omega)) &\leq \gamma \underline{\sigma}(W_2^{-1}(j\omega)), \\ \bar{\sigma}(T(j\omega)) &\leq \gamma \underline{\sigma}(W_3^{-1}(j\omega)), \end{aligned}$$

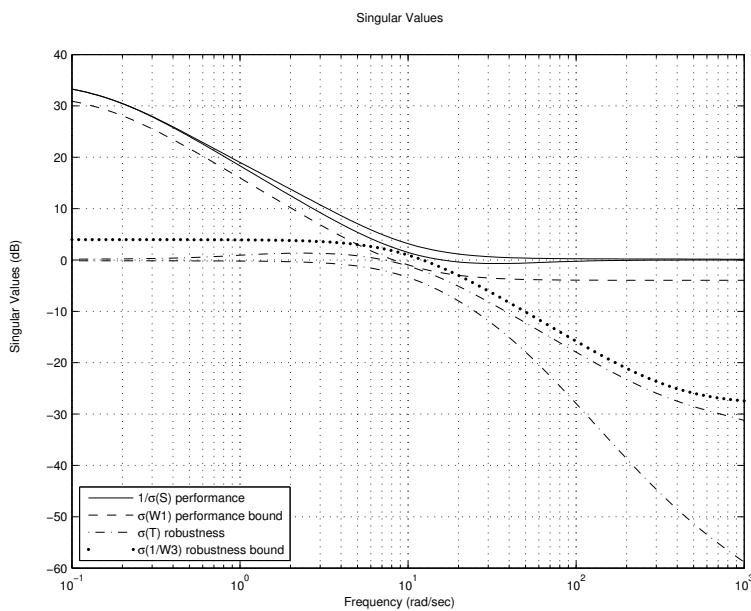
където $\gamma = gam$. Ако $\gamma < 1$ е изпълнено, то $\|T_{zr}\|_\infty < 1$.

Пример 7.2 Разглеждаме системата с мултипликативна неопределеност, дадена в Пример 7.1. Границите на качеството и робастната устойчивост са зададени с тегловните функции

$$W_1 = \frac{s + 10}{2s + 0.3}, \quad W_3 = \frac{s + 10}{0.05s + 20}.$$

Синтезът на \mathcal{H}_∞ оптимално управляващо устройство при смесена чувствителност се извършва с командите

```
W1 = (s + 10)/(2*s + 0.3);
W3 = (s + 10)/(0.05*s + 20);
[K_h,cl_h,gam] = mixsyn(Gnom,W1,[],W3);
```



Фигура 7.12: Резултати от синтеза с функцията mixsyn

Резултатите от синтеза се анализират с помощта на командните редове

```

looptransfer = loopsens(Gnom,K_h);
L = looptransfer.Lo;
T = looptransfer.To;
I = eye(size(L));
figure(1)
omega = logspace(-1,3,100);
sigma(I+L,'b-',W1/gam,'r--',T,'b-.',gam/W3,'r.',omega)
grid
legend('1/\sigma(S) performance','\sigma(W1) performance bound', ...
        '\sigma(T) robustness','\sigma(1/W3) robustness bound',3)
figure(2)
omega = logspace(-1,3,100);
sigma(L,'b-',W1/gam,'r--',gam/W3,'r.',omega)
grid
legend('\sigma(L)','\sigma(W1) performance bound', ...
        '\sigma(1/W3) robustness bound',3)

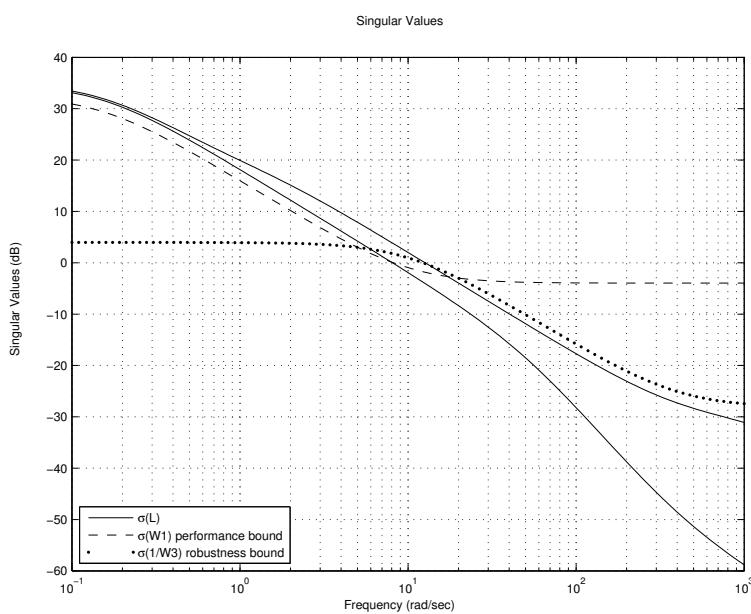
```

На фиг. 7.12 са показани сингуларните стойности на S и T и границите на качеств-

вото и робастността, съответно W_1 и $1/W_3$. Вижда се, че минималната сингулярна стойност на S^{-1} се намира над честотната характеристика на W_1 , а максималната сингулярна стойност на T е под честотната характеристика на $1/W_3$. Това означава, че изискванията към качеството и робастността, зададени с тегловните функции W_1 и W_3 , се спазват. Действително, имаме че

`gam =`

0.7891

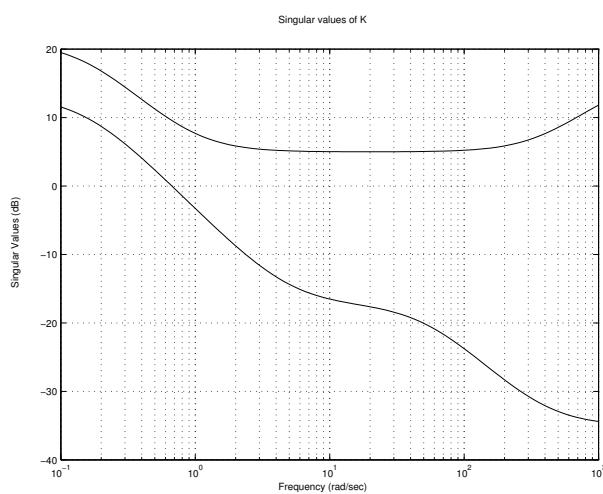


Фигура 7.13: Сингулярни стойности на отворената система

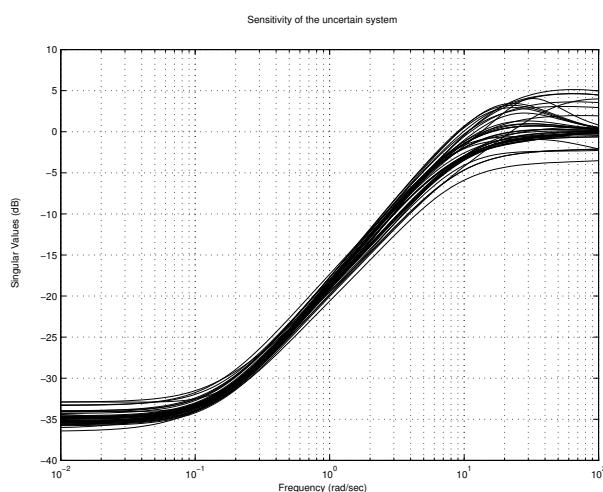
На фиг. 7.13 са показани отделно сингулярните стойности на отворената система L по отношение на границите на качеството W_1 и робастната устойчивост $1/W_3$. Като резултат от спазването на изискванията към качеството и робастността, в нискочестотната област минималната сингулярна стойност на L се намира над границата W_1 , а във високочестотната област максималната сингулярна стойност на L е под границата $1/W_3$.

Сингулярните стойности на управляващото устройство са показани на фиг. 7.14. Устройството е от 8-и ред и има интегриращ ефект в ниските честоти.

Чувствителността и допълнителната чувствителност на затворената система с неопределеност са показани на фигури 7.15 и 7.16.

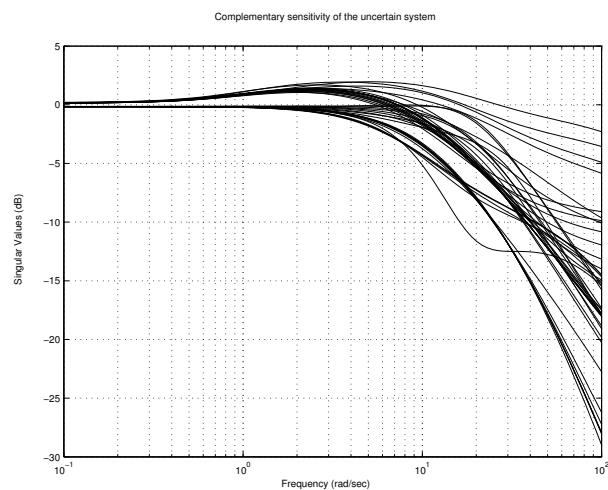


Фигура 7.14: Сингуларни стойности на управляващото устройство

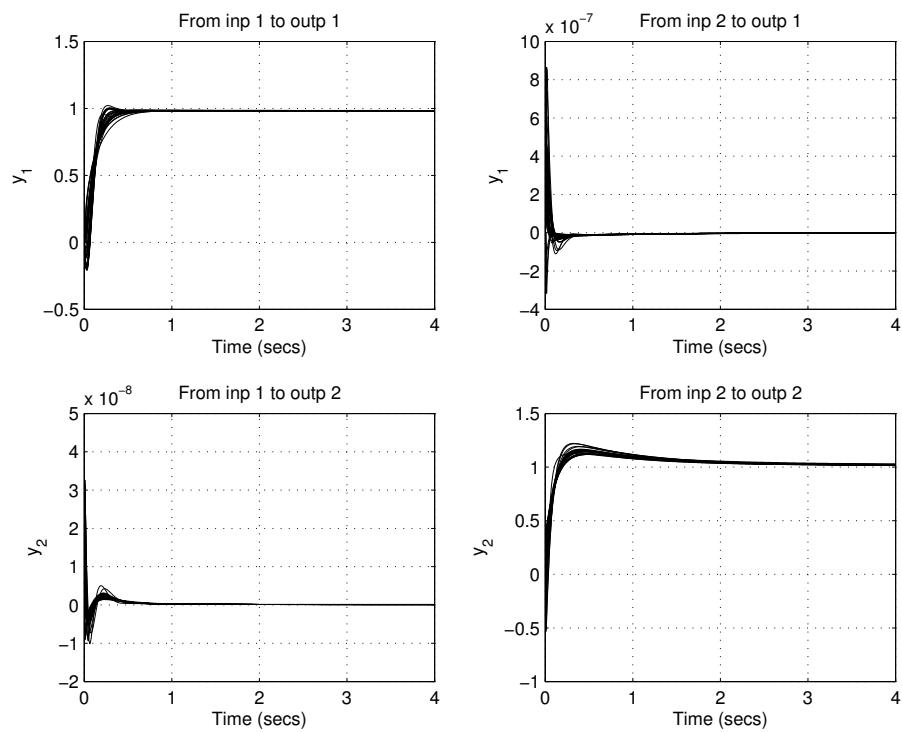


Фигура 7.15: Чувствителност на системата с неопределеност

Преходните процеси на затворената система с неопределеност са показани на фиг. 7.17. Вижда се, че и при този синтез взаимното влияние между двета канала е пренебрежимо.



Фигура 7.16: Допълнителна чувствителност на системата с неопределеност



Фигура 7.17: Преходни процеси на затворената система

7.4 Задачи

1. Дадена е двумерна система с предавателна матрица

$$G = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{1s+1} & -\frac{0.05}{0.1s+1} \\ \frac{0.1}{0.3s+1} & \frac{k_2}{T_2s-1} \end{bmatrix},$$

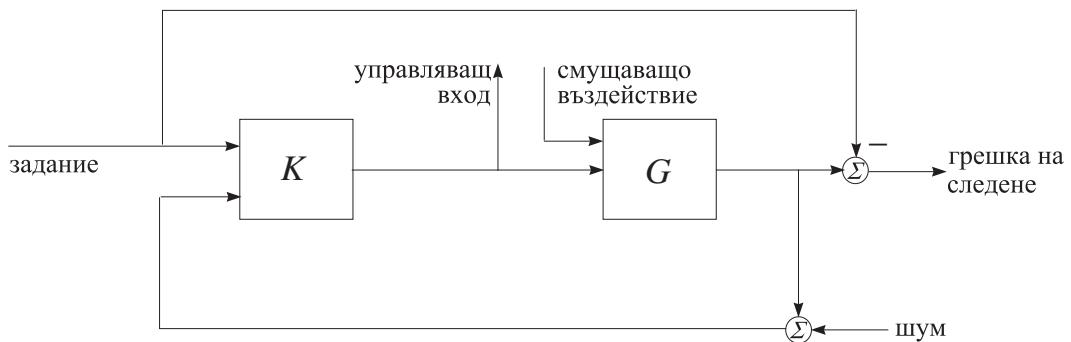
където коефициентите k_1 и k_2 имат номинални стойности съответно 12 и 5 и относителна неопределеност 15%, а времеконстантите T_1 и T_2 имат номинални стойности съответно 0.2 и 0.7 и относителна неопределеност 20%. Необходимо е да се извършат следните изследвания:

- a) Постройте модел с неопределеност на дадената система;
 - b) Синтезирайте управляващо устройство при желани честотни характеристики, за което са изпълнени следните изисквания:
 - Изисквания към робастността: Наклон от -20 dB/декада и усилване от -20 dB за честота 100 rad/s,
 - Изисквания към качеството: Да се максимизира $1/\sigma(S)$ във нискочестотната област;
 - c) Получете сингулярните стойности на отворената система и ги сравнете с желаната честотна характеристика;
 - d) Получете сингулярните стойности на матриците на чувствителността и допълнителната чувствителност на затворената система с неопределеност;
 - d) Получете преходните процеси на затворената система с неопределеност.
2. За системата от предишната задача извършете следните изследвания:
- a) Синтезирайте \mathcal{H}_∞ оптимално управляващо устройство при смесена чувствителност с граници на качеството и робастната устойчивост, зададени от
- $$W_1 = \frac{s + 10}{2s + 0.3}, \quad W_3 = \frac{s + 10}{0.05s + 20};$$
- b) Получете сингулярните стойности на матриците на чувствителността и допълнителната чувствителност и ги сравнете с границите на качеството и робастността;
 - c) Получете сингулярните стойности на матриците на чувствителността и допълнителната чувствителност на затворената система с неопределеност;
 - d) Получете преходните процеси на затворената система с неопределеност.

Глава 8

\mathcal{H}_∞ СИНТЕЗ

8.1 \mathcal{H}_∞ качество



Фигура 8.1: Типична затворена система с изисквания към качеството

Задачата за \mathcal{H}_∞ качество на система за управление е илюстрирана на фиг. 8.1, където G е обектът на управление, а K е управляващото устройство. Целта на синтеза е да се намери управляващо устройство K , което да минимизира грешката на следене и управляващия входен сигнал за всички възможни задания, смущаващи въздействия и шумове в чувствителните елементи. По такъв начин един естествен показател на качеството е усилването на затворената система от външните въздействия (задания, смущаващи въздействия и шумове) към регулираните променливи (грешка на следене и управляващ входен сигнал). Поконкретно, нека T означава предавателната матрица от външните въздействия

към регулираните променливи,:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \text{грешка на следене} \\ \text{управляващ вход} \end{bmatrix}}_{\text{регулирани променливи}} = T \underbrace{\begin{bmatrix} \text{задание} \\ \text{смутиращо въздействие} \\ \text{шум} \end{bmatrix}}_{\text{външни въздействия}}.$$

Качеството на затворената система може да се оцени чрез измерване на усилването от външните въздействия към регулираните променливи. С други думи, доброто качество се асоциира с малка големина на матрицата T . За многомерни системи е естествено допустимото качество да се характеризира с някоя от системните норми, като при синтеза на робастните системи обикновено се използва \mathcal{H}_∞ нормата. При това критерият за качество трябва да взема предвид:

- Относителната големина на външните въздействия
- Честотната зависимост на сигналите
- Относителната важност на големините на регулираните променливи.

Ето защо ако показателят на качеството е във вид на матрична норма, в действителност той трябва да се вземе като *претеглена норма*

$$\|W_L T W_R\|,$$

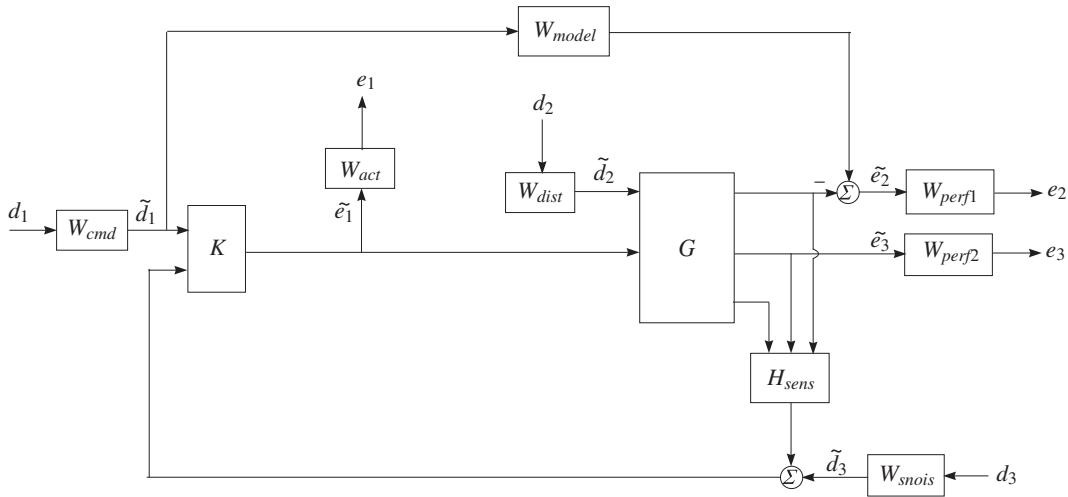
където тегловните матрични функции W_L и W_R трябва да са честотно зависими, за да отчетат ограниченията върху честотната лента и спектралното съдържание на външните въздействия.

8.2 Връзка с типични изисквания към качеството

Показателите на качеството на затворената система се формулират като претеглени предавателни матрици, които трябва да се направят малки с помощта на обратна връзка. На фиг. 8.2 е показана блок-схема в общия случай, която съдържа редица тегловни функции.

Блоковете на фигурата могат да са скаларни предавателни функции или предавателни матрици, в зависимост от конкретния пример.

Целта на \mathcal{H}_∞ управлението е предавателната матрица на затворената система T_{ed} да удовлетворява условието $\|T_{ed}\|_\infty < 1$. Тегловните функции се използват за мащабиране на входно-изходните предавателни функции, така че когато $\|T_{ed}\|_\infty < 1$, да е в сила подходяща зависимост между \tilde{d} и \tilde{e} .



Фигура 8.2: Обобщена блок-схема с претеглено качество

Изискванията към качеството на затворената система се преобразуват в контекста на \mathcal{H}_∞ синтеза с помощта на *тегловни* или *мащабиращи функции*. Тегловните функции се избират така, че да отчетат относителната големина на сигналите, тяхната честотна зависимост и тяхната относителна важност. Това е показано на фиг. 8.2, където теглата или мащабиранията $[W_{cmd}, W_{dist}, W_{snois}]$ се използват да преобразуват и мащабират нормализираните входни сигнали $[d_1, d_2, d_3]$ в сигнали с физически единици $[\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3]$. По подобен начин теглата или мащабиранията $[W_{act}, W_{perf1}, W_{perf2}]$ преобразуват и мащабират сигналите с физически единици в нормализираните изходни сигнали $[e_1, e_2, e_3]$. По-долу е показана интерпретация на сигналите, тегловните функции и моделите.

Сигнал	Значение
d_1	Нормализиран задаващ сигнал
\tilde{d}_1	Типичен задаващ сигнал във физически единици
d_2	Нормализирано смущаващо въздействие
\tilde{d}_2	Типично смущаващо въздействие във физически единици

Сигнал	Значение
d_3	Нормализиран шум в чувствителните елементи
\tilde{d}_3	Типичен шум във физически единици
e_1	Претеглен управляващ сигнал
\tilde{e}_1	Действителен управляващ сигнал във физически единици
e_2	Претеглена грешка на следене
\tilde{e}_2	Действителна грешка на следене във физически единици
e_3	Претеглена грешка на обекта
\tilde{e}_3	Действителна грешка на обекта във физически единици

W_{cmd}

W_{cmd} се включва в задачите за \mathcal{H}_∞ управление, които изискват следене на задаващо въздействие. W_{cmd} формира задаващите сигнали (амплитуда и честота) в реални (или типични) задаващи сигнали, които се очакват да възникнат. Тази тегловна функция описва амплитудната и фазовата зависимост на задаващия сигнал от нормализирания сигнал, който го генерира. Обикновено W_{cmd} има амплитудно-честотна характеристика, която е постоянна в нискочестотната област и намалява във високочестотната област.

W_{model}

W_{model} представлява желаният идеален модел на затворената система и често се включва при формулирането на задачи с изисквания за следене. За добро следене на заданието затворената система е целесъобразно да реагира като звено от втори ред с подходящ коефициент на затихване. Идеалният модел тогава може да се избере като

$$W_{model} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega + \omega^2}$$

за желана собствена честота ω и желан коефициент на затихване ξ . Вследствие на преобразуването на физическите единици може да се наложи и добавянето на съответен коефициент на пропорционалност.

W_{dist}

W_{dist} формира честотното съдържание и амплитудата на външното смущаващо въздействие, влияещо на обекта.

W_{perf1}

W_{perf1} претегля разликата между реакцията на затворената система и идеалния модел W_{model} . Обикновено се желае точно следене на идеалния модел при ниските честоти и по-неточно следене при високите честоти. В такъв случай амплитудно-честотната характеристика на W_{perf1} е плоска в ниските честоти, след това започва да пада с наклон -20 или -40 dB/dec и отново става плоска с малка ненулева стойност във високите честоти, т.е., тази тегловна функция представлява нискочестотен филтър. Обратната на тази тегловна функция е свързана с допустимата големина на грешката на следене, дължаща се на заданията и смущенията описани с W_{cmd} и W_{dist} .

W_{perf2}

W_{perf2} наказва променливи, които са вътрешни за обекта G или други променливи, които не са част от критерия за следене.

W_{act}

W_{act} се използва, за да се формира наказанието върху управляващите въздействия. Всеки управляващ сигнал обикновено се наказва независимо от останалите.

W_{snois}

W_{snois} представлява модел в честотната област на измервателния шум. Всяка обратна връзка от чувствителен елемент към управляващото устройство се характеризира с някъкъв шум, който е по-интензивен в определени честотни диапазони. Например редица чувствителни елементи за измерване на ъглова скорост се характеризират с висока точност в нискочестотния диапазон, но с увеличаването на честотата шумът при измерването се засилва. Амплитудно-честотната характеристика на тегловната функция за такъв чувствителен елемент ще има малка стойност в нискочестотния диапазон и ще нараства постепенно с увеличаване на честотата. Тази честотна характеристика се определя въз основа на лабораторни експерименти или по данни на производителя на чувствителния елемент.

H_{sens}

H_{sens} представлява модел на динамиката на чувствителните елементи и свър-

заните с тях филтри.

Разгледаната блок-схема има универсално предназначение при \mathcal{H}_∞ синтеза и дава възможност да се формулират различни изисквания към качеството на затворената система. В някои конкретни случаи отделни блокове могат да не присъстват в схемата.

8.3 Пример за \mathcal{H}_∞ синтез

В тази точка се разглежда \mathcal{H}_∞ синтезът на управляващо устройство за системата маса/демпфер/пружина, разгледана в т. 2.1.

Целта на синтеза на системата маса/демпфер/пружина е да се намери линейна обратна връзка по изхода $u(s) = K(s)y(s)$, която осигурява следните свойства на затворената система.

Номинална устойчивост и качество: Синтезираното управляващо устройство трябва да направи затворената система вътрешно устойчива, като желаното качество на затворената система трябва да се постига за номиналния модел на обекта G_{nom} . В дадения случай критерият за качество се взема във вида

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p S(G_{nom}) \\ W_u K S(G_{nom}) \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1, \quad (8.1)$$

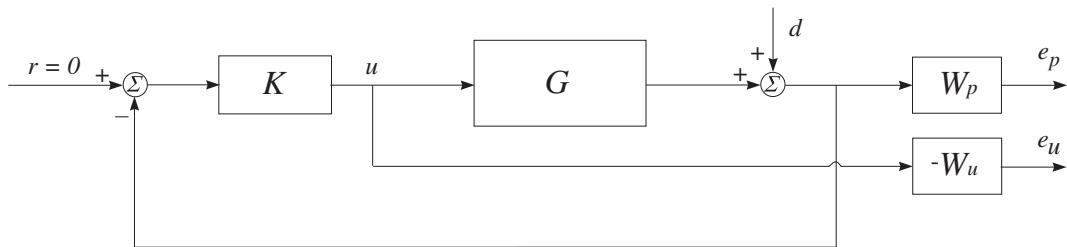
където $S(G_{nom}) = (I + G_{nom}K)^{-1}$ е изходната функция на чувствителността на номиналната система и W_p , W_u са тегловни функции, избрани така, че да представлят изискванията към качеството в честотната област, включително ограниченията към големината на управляващите въздействия. Удовлетворяването на горното неравенство показва, че затворената система успешно потиска ефекта на смущаващото въздействие и постига желаното качество. Трябва също така да се отбележи, че функцията на чувствителността S дава и връзката между задаващото въздействие и грешката на следене.

Робастна устойчивост: Затворената система постига робастна устойчивост ако тя е вътрешно устойчива за всички възможни модели на обекта G . В дадения случай това означава, че системата трябва да остава устойчива за всички $1.8 \leq m \leq 4.2$, $0.8 \leq c \leq 1.2$, $1.4 \leq k \leq 2.6$.

Робастно качество: В допълнение към робастната устойчивост, за всички модели на обекта G трябва да се удовлетворява критерият за качество

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p(I + GK)^{-1} \\ W_u K(I + GK)^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1. \quad (8.2)$$

Освен това е желателно сложността на управляващото устройство да е приемлива, т.е., то да е от достатъчно нисък ред.



Фигура 8.3: Структура на затворената система

Блок-схема на затворената система, която включва структурата на обратната връзка и управляващото устройство, както и елементите, отразяващи неопределеността в модела и изискванията към качеството, е показана на фиг. 8.3.

Може да се покаже, че

$$\begin{bmatrix} e_p \\ e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p(I + GK)^{-1} \\ W_uK(I + GK)^{-1} \end{bmatrix} d.$$

Следователно, критерият за качество е предавателните функции от d към e_p и e_u да са малки в смисъла на $\|\cdot\|_\infty$. Тегловните функции W_p и W_u се използват да отразят относителното значение на изискването за качество в различните честотни диапазони.

Трябва да се има предвид, че тази задача може да се реши и с команда `mixsyn`, разгледана в т. 7.3, но дадените тук програмни сегменти могат да се модифицират за решаване и на по-сложни задачи в съответствие с блок-схемата, показана на фиг. 8.2.

В дадения случай тегловната функция на качеството е скаларна функция $W_p(s) = w_p(s)$ и е избрана във вида

$$w_p(s) = 0.95 \frac{s^2 + 1.8s + 10}{s^2 + 8.0s + 0.01},$$

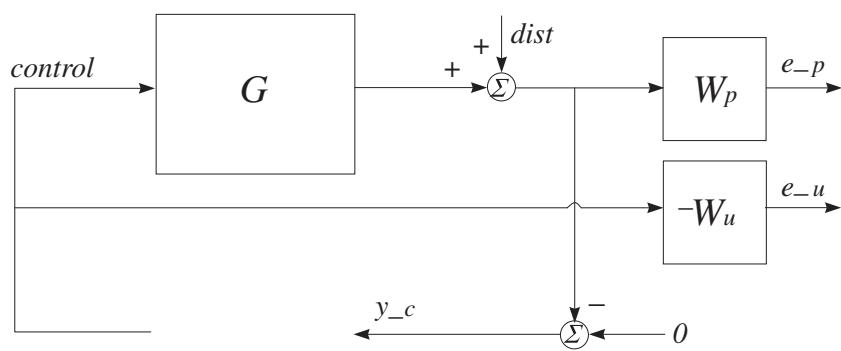
което осигурява, освен добро потискане на смущаващото въздействие, добър преходен процес (продължителност на преходния процес по-малка от 10 s и пререгулиране по-малко от 20% за номиналната система). Тегловната функция на управлението W_u се избира просто като скалар $w_u = 10^{-2}$. Трябва да се отбележи, че намирането на подходящи тегловни функции е критична стъпка при робастния синтез и обикновено изисква няколко опита. При сложни системи могат да са необходими значителни усилия.

Задаването на тегловните функции става във файла `wts_mds.m` със следните оператори

```

nuWp = [1 1.8 10];
dnWp = [1 8 0.01];
gainWp = 0.95;
Wp = gainWp*tf(nuWp,dnWp);
nuWu = 1;
dnWu = 1;
gainWu = 10^(-2);
Wu = gainWu*tf(nuWu,dnWu);

```



Фигура 8.4: Структура на отворената система

Структурата на отворената система е представена на фиг. 8.4. Променливиата y_c (входът на управляващото устройство) се взема с отрицателен знак, тъй като командите, предназначени за синтез в Robust Control Toolbox, получават управляващи устройства с положителна обратна връзка.

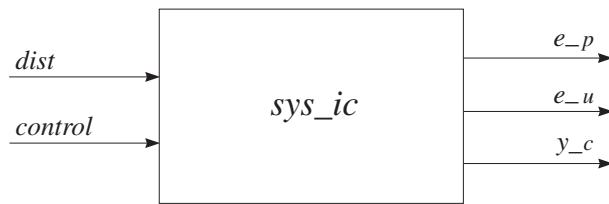
Получаването на структурата на отворената състрема се извършва във файла `olp_mds.m` с помощта на команда `sysic` като се използват следните оператори

```

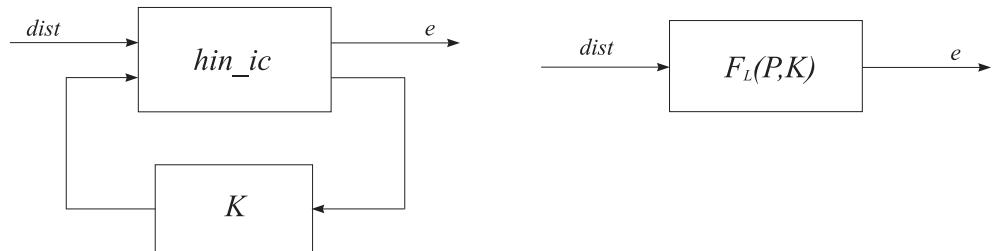
systemnames = ' G Wp Wu ';
inputvar = '[ dist; control ]';
outputvar = '[ Wp; -Wu; -G-dist ]';
input_to_G = '[ control ]';
input_to_Wp = '[ G+dist ]';
input_to_Wu = '[ control ]';
sys_ic = sysic;

```

Отворената система се получава в променливата `sys_ic` и има два входа и три изхода (фиг. 8.5).



Фигура 8.5: Обобщена блок-схема на отворената система

Фигура 8.6: Затворени ЛДП в \mathcal{H}_∞ синтеза

При синтеза се използва команда `hinfsyn`, която изчислява субоптимално \mathcal{H}_∞ управляващо устройство, основано на дадената структура на отворената система. Синтаксисът, входните и изходните аргументи на командата `hinfsyn` са

`[k,clp] = hinfsyn(p,nmeas,ncon,glow,ghigh,tol)`

Аргументите имат следното значение.

Входни аргументи

съединение на отворената система	p
брой на измерванията	nmeas
брой на управленията	ncons
долна граница на бисекцията	glow
горна граница на бисекцията	ghigh
абсолютен допуск за метода на бисекцията	tol

Изходни аргументи

управляващо устройство	k
затворената система	clp

Тъй като неопределеността не може да се вземе предвид при \mathcal{H}_∞ синтеза, се използва съединението на номиналната отворената система, запаметено в про-

менливата `hin_ic`. Броят на измерванията и броят на управлениета са равни на 1. Интервалът за γ итерацията е избран между 0.1 и 10 с допуск $tol = 0.001$. На всяка итерация програмата показва текущата стойност на γ и резултатите от пет теста за съществуване на субоптимално управляващо устройство. Накрая на всяка итерация се показва символът `p` или `f`, който индицира дали текущата стойност на γ се приема или отхвърля. Символът `#` се използва за да се означи кое от петте условия за съществуване на \mathcal{H}_∞ (суб)оптимално управляващо устройство се нарушава при използваното γ . Когато итертивната процедура завърши, се дава минимално достигимата стойност на γ . Предавателната матрица на затворената система от `dist` към `e` се запаметява в променливата `clp`.

По-долу се дава файлът `hin_mds.m`, използван при синтеза на \mathcal{H}_∞ (суб)оптимално управляващо устройство K_{hin} , следван от резултатите, получени при синтеза.

```
nmeas = 1;
ncon = 1;
gmin = 0.1;
gmax = 10;
tol = 0.001;
hin_ic = sys_ic.Nominal;
[K_hin,clp] = hinfsyn(hin_ic,nmeas,ncon,gmin,gmax,tol);
disp(' ')
get(K_hin)
disp(' ')
disp('Closed-loop poles')
sp = pole(clp)
```

Resetting value of Gamma min based on D_11, D_12, D_21 terms

Test bounds: 0.9500 < gamma <= 10.0000

gamma	hamx_eig	xinf_eig	hamy_eig	yinf_eig	nrho_xy	p/f
10.000	8.9e-001	2.6e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
5.475	8.9e-001	2.7e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
3.212	8.9e-001	2.7e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
2.081	8.8e-001	2.7e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
1.516	8.8e-001	2.7e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
1.233	8.8e-001	2.8e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
1.091	8.8e-001	2.8e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
1.021	8.8e-001	2.9e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
0.985	8.8e-001	2.9e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p

0.968	8.8e-001	2.9e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
0.959	8.8e-001	3.0e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
0.954	8.8e-001	3.0e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
0.952	8.8e-001	3.0e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
0.951	8.8e-001	3.0e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p
0.951	8.8e-001	3.0e-003	1.3e-003	0.0e+000	0.0000	p

Gamma value achieved: 0.9506

Минимално достижимата стойност на γ е 0.9506. Полученото оптимално управляващо устройство е от 4-ти ред, какъвто е редът на отворената система. Полюсите на затворената система са

```
sp =
-6.7234 + 2.4023i
-6.7234 - 2.4023i
-0.9277 + 2.6665i
-0.9277 - 2.6665i
-0.1667 + 0.7993i
-0.1667 - 0.7993i
-7.9987
-0.0013
```

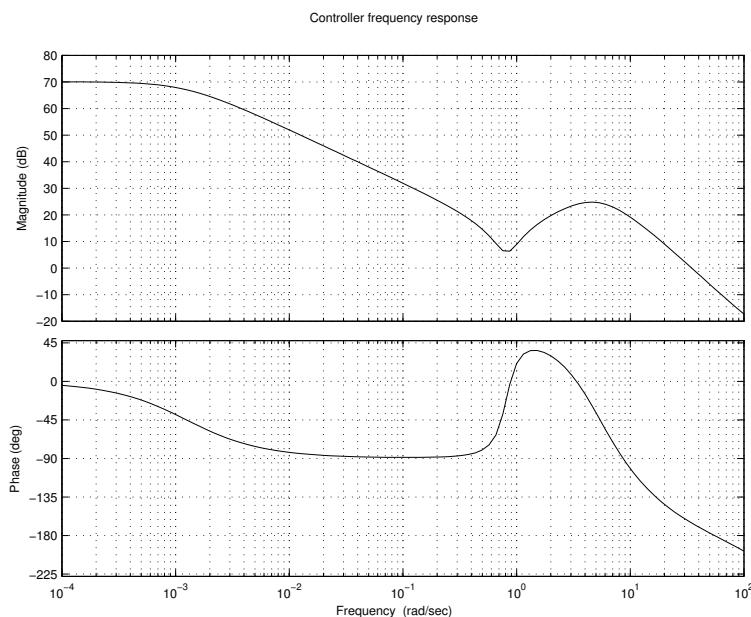
което показва, че затворената система е устойчива. Тъй като стойността на \mathcal{H}_∞ нормата на затворената система е по-малка от единица, условието за номинално качество (8.1) се спазва.

Амплитудно-частотната и фазо-частотната характеристика на управляващото устройство са показани на фиг. 8.7.

Анализът на робастната устойчивост на затворената система се извършва с M-файла `rob_mds`, като се използват операторите

```
clp_ic = lft(sys_ic,K);
omega = logspace(-1,2,100);
clp_g = ufrd(clp_ic,omega);
opt = robopt('Display','on');
[stabmarg,destabu,report,info] = robuststab(clp_g,opt);
report
loglog(info.MussvBnds(1,1),'r-',info.MussvBnds(1,2),'b--')
```

Резултатите от анализа се получават в променливата `report`.



Фигура 8.7: Честотни характеристики на \mathcal{H}_∞ управляващото устройство

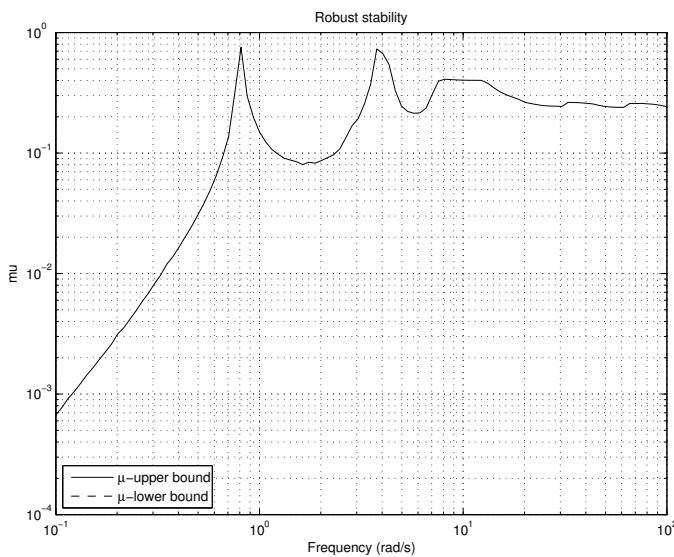
```
report =
```

```
Uncertain System is robustly stable to modeled uncertainty.
-- It can tolerate up to 133% of the modeled uncertainty.
-- No modeled uncertainty exists to cause an instability at 0.1 rad/s.
-- Sensitivity with respect to uncertain element ...
  'c' is 2%. Increasing 'c' by 25% leads to a 1% decrease
  in the margin.
  'k' is 41%. Increasing 'k' by 25% leads to a 10% decrease
  in the margin.
  'm' is 97%. Increasing 'm' by 25% leads to a 24% decrease
  in the margin.
```

Тези резултати показват, че затворената система е робастно устойчива при моделираната неопределеност. При това са допустими изменения в параметрите, които са 1.33 пъти (133 %) по-големи от моделираната неопределеност.

На фиг. 8.8 е показана честотната характеристика на структурираната сингулярна стойност, съответстваща на задачата за анализ на робастната устойчивост.

Анализът на номиналното и робастното качество на затворената система се



Фигура 8.8: Робастна устойчивост на затворената система

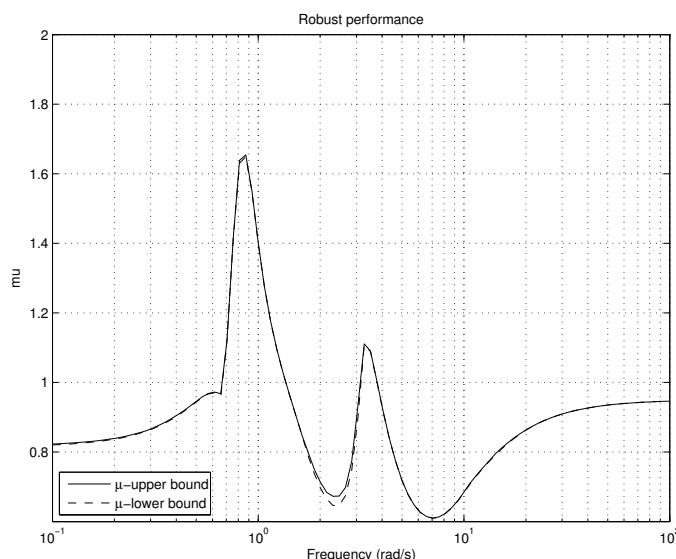
извършва с файла `nrp_mds`. Анализът на робастното качество, извършен с операторите

```
opt = robopt('Display','on');
[perfmargin,perfmarginunc,report,info] = robustperf(clp_g,opt);
report
semilogx(info.MussvBnds(1,1),'r- ',info.MussvBnds(1,2),'b--')
```

дава следния резултат

```
report =
Uncertain System achieves a robust performance margin of 0.6064.
-- A model uncertainty exists of size 60.4% resulting in a
    performance margin of 1.65 at 0.87 rad/s.
-- Sensitivity with respect to uncertain element ...
    'c' is 5%. Increasing 'c' by 25% leads to a 1% decrease
        in the margin.
    'k' is 25%. Increasing 'k' by 25% leads to a 6% decrease
        in the margin.
    'm' is 35%. Increasing 'm' by 25% leads to a 9% decrease
        in the margin.
```

От този резултат се вижда, че затворената система не постига робастно качество. Запасът по качество е 0.6064, което показва, че при неопределеност по-голяма от 60.6% от зададената, условието за робастно качество (8.2) се нарушава. Този резултат не е изненадващ, тъй като \mathcal{H}_∞ синтезът гарантира постигането само на номинално качество (и то при условие, че при синтеза е удовлетворено условието $\gamma < 1$).



Фигура 8.9: Робастно качество на затворената система

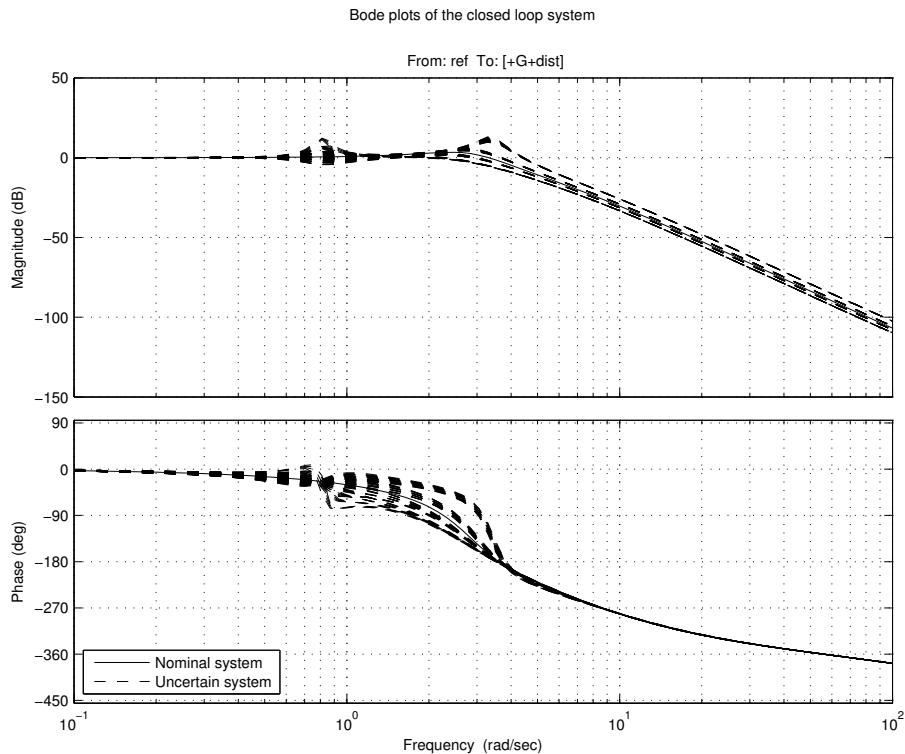
На фиг. 8.9 е показана честотната характеристика на структурираната сингуларна стойност, съответстваща на задачата за анализ на робастното качество.

Получаването на честотните характеристики на затворената система с неопределени параметри се извършва с файла `frs_mds`, като отворената система без тегловните функции се моделира с файла `sim_mds`. С командата `gridureal` на всеки от трите неопределени параметри се задават по четири стойности, което дава възможност да се получат общо $4^3 = 64$ характеристики.

```

sim_mds
omega = logspace(-1,2,100);
clp_ic = lft(sim_ic,K);
clp64 = gridureal(clp_ic,'c',4,'k',4,'m',4);
bode(clp_ic(1,1).Nominal,'r-',clp64(1,1),'b--',omega), grid

```



Фигура 8.10: Честотни характеристики на затворената система с неопределеност

Амплитудно-честотните и фазо-честотните характеристики на затворената система при вариране на неопределените параметри са показани на фиг. 8.10.

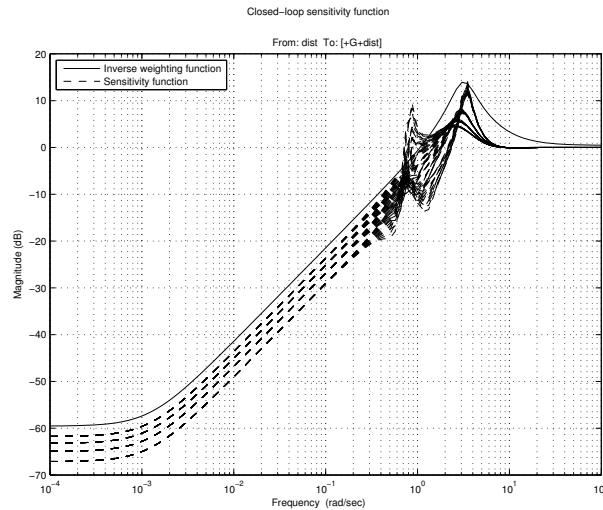
Сравнението на функцията на чувствителността на системата с неопределеност и обратната тегловна функция на качеството се извършва с командните редове

```
sen_loop = clp(1,2);
sen64 = gridureal(sen_loop,'c',4,'k',4,'m',4);
bodemag(1/Wp,'r-',sen64,'b--',omega), grid
```

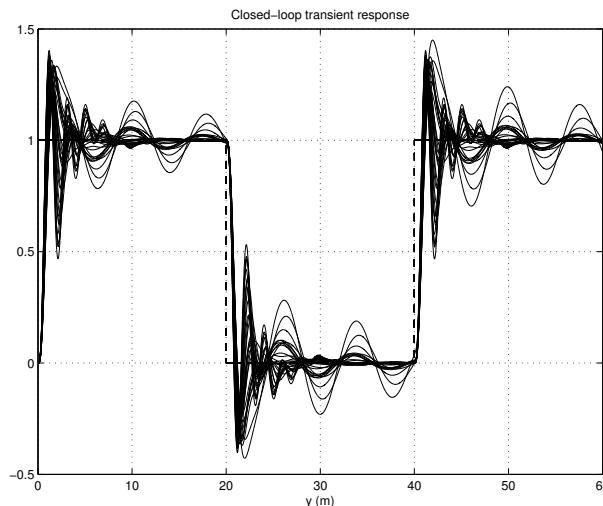
От сравнението, показано на фиг. 8.11, се вижда, че за някои стойности на неопределените параметри условието

$$|W_p S| < 1$$

се нарушава, което е следствие от факта, че не се постига робастно качество.



Фигура 8.11: Функция на чувствителността на системата с неопределеност



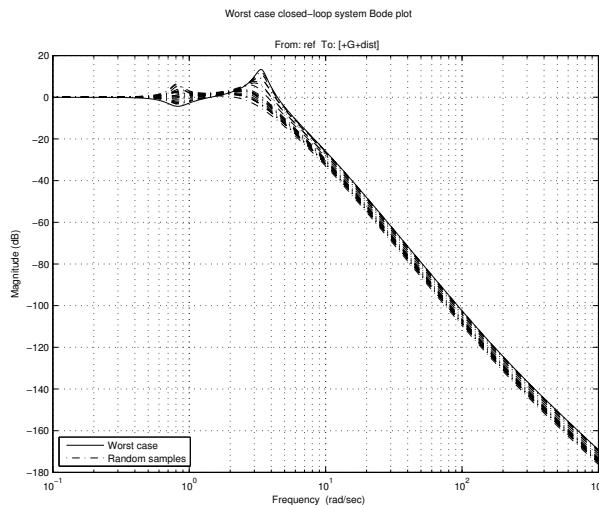
Фигура 8.12: Преходни процеси по задание на системата с неопределеност

Преходните процеси по задание и смущение на системата с неопределеност се получават с файла `mcs_mds`. Преходните процеси по задание са показани на фиг. 8.12. Вижда се, че за всички стойности на неопределените параметри пререгули-

рането не надхвърля 50 %.

Анализът на най-лошото качество на затворената система се извършва с файла `wcp_mds`. Най-голямото усилване и съответната му неопределеност се намират с командата `wcgain`. Тази неопределеност се замества в предавателната функция на затворената система и получената амплитудно-честотна характеристика се съпоставя с честотните характеристики на системата с неопределеност. Това се извършва с операторите

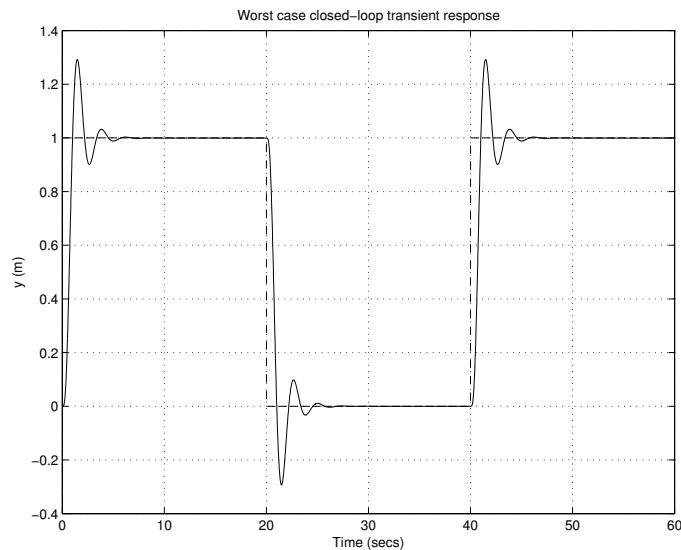
```
T = clp_ic(1,1);
[maxgain,maxgainunc] = wcgain(T);
Twc = usubs(T,maxgainunc);
T20 = usample(T,20);
omega = logspace(-1,3,400);
bodemag(Twc,'r-',T20,'b-.',omega), grid
```



Фигура 8.13: Амплитудно-честотни характеристики за най-лошото качество

Резултатът от съпоставянето е показан на фиг. 8.13.

На фиг. 8.14 са показани преходните процеси по задание, получени за случая на най-лошо качество.



Фигура 8.14: Преходни процеси за най-лошото качество

8.4 Задачи

1. Даден е обект на управление с предавателна функция

$$G = \frac{s - 10}{(s + 1)(s + 10)}.$$

Синтезирайте \mathcal{H}_∞ управляващо устройство, което минимизира показателя на качеството

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p SG \\ W_u KSG \end{bmatrix} \right\|_\infty,$$

където

$$W_p = \frac{1}{s + 0.001}, \quad W_u = \frac{s + 2}{s + 10}.$$

За целта формирайте структурата на разширена система с помощта на команда `sysic` и използвайте команда `hinfssyn` за \mathcal{H}_∞ синтез.

Получете честотните характеристики на функциите на чувствителността и преходните процеси на затворената система.

2. Дадена е система, чиято блок-схема е показана на фиг. 8.3, с предавателна

матрица на обекта

$$G = \begin{bmatrix} k_1 & 0.05 \\ \frac{T_1 s + 1}{0.1} & -\frac{0.1 s + 1}{k_2} \\ \frac{0.3 s + 1}{T_2 s - 1} & \end{bmatrix},$$

където коефициентите k_1 и k_2 имат номинални стойности съответно 12 и 5 и относителна неопределеност 15%, а времеконстантите T_1 и T_2 имат номинални стойности съответно 0.2 и 0.7 и относителна неопределеност 20%. (Обектът е същият, както в задача 7.1.) Необходимо е да се извършат следните изследвания:

- а) Постройте модел с неопределеност на дадената система;
- б) Синтезирайте \mathcal{H}_∞ управляващо устройство, което минимизира показателя на качеството

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p S(G_{nom}) \\ W_u K S(G_{nom}) \end{bmatrix} \right\|_\infty,$$

където

$$W_p = \begin{bmatrix} w_p & 0 \\ 0 & w_p \end{bmatrix}, \quad W_u = \begin{bmatrix} w_u & 0 \\ 0 & w_u \end{bmatrix},$$

и

$$w_p = \frac{0.95(s^2 + 2000s + 4000)}{s^2 + 1900s + 10}, \quad w_u = \frac{10^{-6}(0.1s + 1)}{0.001s + 1}.$$

- в) Анализирайте робастната устойчивост на затворената система;
- г) Анализирайте робастното качество на затворената система;
- д) Получете сингулярните стойности на матриците на чувствителността и допълнителната чувствителност на затворената система с неопределеност;
- е) Получете преходните процеси на затворената система с неопределеност.

Глава 9

μ СИНТЕЗ И ДК ИТЕРАЦИИ

9.1 Теоретични сведения. Решаване на задачата за μ синтез

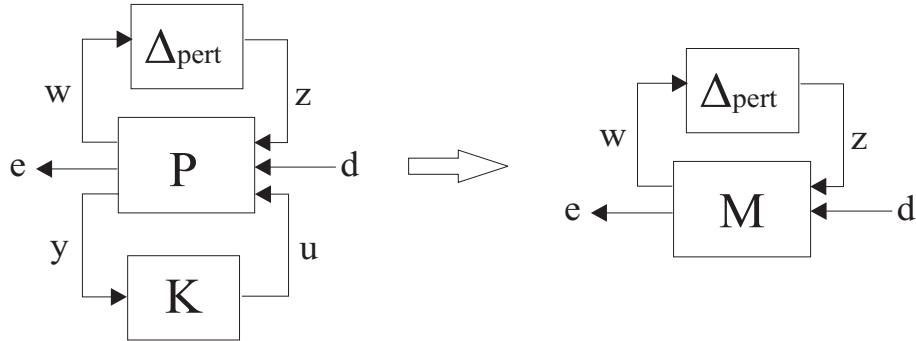
Както бе показано, максималната сингулярна стойност (\mathcal{H}_∞ нормата) е мощно средство за анализ на системи с неструктуррирана неопределеност. Методът позволява лесно да се интерпретират различни неопределености и изисквания към качеството в термините на свързване на многомерни системи, описани в пространство на състоянията. Така то преодолява ограниченията на класическите понятия запас по модул и запас по фаза. Преодолява се практическата непригодност на линейно-квадратичния подход за синтез на робастни управляващи устройства поради предположението при този подход, че всички смущения имат характера на бял Гаусов шум; а за фиктивните смущения, дължащи се на блока на неопределеността, това е неоправдано пессимистично предположение.

Обаче, оценките (а, следователно, и синтезът), основани на \mathcal{H}_∞ нормата, е възможно от своя страна да бъдат много консервативни поради факта, че в действителност блокът на неопределеността може да има определена структура. Например при моделиране на система с неточно известни параметри матрицата Δ често има строго диагонална структура.

Затова изглежда изкушаващо да се използва μ нормата не само при анализа, но и при синтеза на робастни управляващи устройства.

За да се приложи методът на μ синтеза, то задачата трябва да бъде представена, както е показано на фиг. 9.1, с използване на Линейно дробни преобразувания (ЛДП). За яснота ще бъдат повторени и систематизирани някои от постановките, разгледани в предишните глави.

Моделът на обекта за управление трябва да бъде представен като съединение между номинален блок (P) и матрица на неопределеността (Δ_{pert}); основната цел

Фигура 9.1: Постановка на задачата за μ синтез

е да се синтезира такова управляващо устройство K , което минимизира предавателната функция от физическите смущаващи въздействия d и приведените към тях сигнали z , произвеждани от блока на неопределеността, към грешката e и приведения към e сигнал w .

Тук P съдържа номиналния модел и тегловните функции на качеството, управлението и т. н. С оглед на това, че P представлява предавателна функция от множеството сигнали $[z, d, u]^T$ към $[w, e, y]^T$, неговата структура е следната:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & P_{13}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & P_{23}(s) \\ P_{31}(s) & P_{32}(s) & P_{33}(s) \end{bmatrix}. \quad (9.1)$$

Δ_{pert} е блокът, параметризиращ неопределеностите в модела. За него трябва да се изпълнява условието

$$\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta_{pert}(j\omega)] \leq 1. \quad (9.2)$$

Сигналите, достъпни за управляващото устройство K , са означени с y , а произведеното от K управляващо въздействие – с u .

С използване на ЛДП затворената система се представя във формата

$$e = F_U(F_L(P, K), \Delta_{pert})d = F_L(F_U(P, \Delta_{pert}), K)d. \quad (9.3)$$

Условието за робастно качество е

$$\max_{\omega} \mu_{\Delta}(F_L(P, K)(j\omega)) < 1, \quad (9.4)$$

където $\mu_\Delta(\cdot)$ е структурираната сингуларна стойност по отношение на разширена с блок за качеството Δ_F структура Δ_{pert} :

$$\Delta \equiv \begin{bmatrix} \Delta_{pert} & 0 \\ 0 & \Delta_F \end{bmatrix} : \Delta_F \in \mathbb{C}^{ne \times nd}, \quad (9.5)$$

Δ_F отговаря за предаването на реалните смущения към съответстващите им грешки.

Целта на задачата за μ синтез може да се формулира така: да се намери стабилизиращо управляващо устройство K , което минимизира максималната стойност на $\mu_\Delta(\cdot)$ (за зададен честотен вектор), т.е.,

$$\min_K \max_\omega \mu_\Delta(F_L(P, K)(j\omega)). \quad (9.6)$$

Тази задача не може да се реши пряко. Всички познати методи, включително реализираните в MATLAB® (DK итерации и метод с Линейни матрични неравенства), са основани на някаква процедура с търсене.

Тук ще бъде разгледан накратко методът с DK итерации, основан на свойствата на μ нормата:

$$\rho(M) \leq \mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(M),$$

където $M \equiv (F_L(P, K))$ представлява определената част от системата заедно с управляващото устройство и $\rho(M)$ е спектралният радиус на M . За да се изчисли $\mu_\Delta(M)$ се използват такива преобразувания върху M , които не променят $\mu_\Delta(M)$, но променят $\rho(M)$ и $\bar{\sigma}(M)$:

$$\max_\Delta \rho(\Delta M) = \mu_\Delta(M) \leq \inf_D (DMD^{-1}), \quad (9.7)$$

където за машабиращата система D е в сила равенството $\Delta D = D \Delta$. Структурата на D е следната:

$$D = diag(d_1 I_1 \dots d_n I_n, D_1 \dots D_p, I_F). \quad (9.8)$$

Тук блоковете $d_1 I_1 \dots d_n I_n$ съответстват на пълните блокове $\Delta_1 \dots \Delta_n$, $D_1 \dots D_p$ съответстват на повтарящите се (за $I_m > 1$) или неповтарящите се (за $I_m=1$) скаларни блокове $\delta_1 I_{m1} \dots \delta_p I_{mp}$ в матрицата на неопределеността. I_F е фиктивен блок, съответстващ на блока за качеството.

Тогава задачата за синтез на μ оптимален контролер може да се преформулира така:

$$\min_{K_s} \max_\omega \min_{D_\omega} \bar{\sigma}(D_\omega M D_\omega^{-1}), \quad (9.9)$$

където с K_s сме означили стабилизиращо управляващо устройство. Ще използваме факта, че умножаването с ортогонална матрица не променя максималната

сингулярна стойност – това ни дава възможността да заменим мащабиращата матрица D с $\hat{D} = UD$, където U е ортогонална матрица. Това означава, че при определянето на фазата на D_ω има свобода, която позволява тя да бъде идентифицирана с реално-рационална, устойчива и минималнофазова система $D(s)$. Заменяйки максималното сингулярно число с \mathcal{H}_∞ норма, задачата за синтез на μ оптимален регулатор придобива окончателно вида:

$$\min_{K_s} \min_{D(s)} [D(s)F_L(P, K)D(s)^{-1}]_\infty. \quad (9.10)$$

Тази формулировка позволява задачата за μ синтез да се реши чрез двустъпкова оптимизационна процедура, известна като DK итерации:

A. К стъпка. За фиксирано $D(s)$ се решава задачата за намиране на H_∞ оптимален регулатор K_s . На първата стъпка може да се зададе $D(s) = I$, а след това мащабираната с D система ще бъде $P_e = P$:

$$K_s := \min_{K_s} [D(s)F_L(P_e, K)D(s)^{-1}]_\infty. \quad (9.11)$$

B. Изчислява се $\mu_\Delta(M)$, като при това процедурата автоматично получава и D_ω .

B. D стъпка. Полученото D_ω се идентифицира с реално-рационална, устойчива и минималнофазова система $D(s)$.

Г. Оригиналната система се разширява с D :

$$P_e(s) = \text{diag}(D, I)P(s)\text{diag}(D^{-1}, I). \quad (9.12)$$

Д. За разширенаата система отново се минава към стъпка A. Повтарят се няколко итерации и се избира контролерът, даващ минимална μ норма на затворената система.

Както е забелязал читателят, на всяка К стъпка се прави \mathcal{H}_∞ синтез на разширенаата система, която може да е от доста висок ред (тъй като включва два пъти мащабиращата система D) – а \mathcal{H}_∞ управляващото устройство, синтезирано от MATLAB[®], има същия ред както обекта! Разбира се, трябва да се има предвид, че на всяка стъпка се разширява не вече разширенаата система, а само оригиналната.

Високият ред на полученото управляващо устройство, както и фактът, че процедурата с DK итерации не е гарантирано сходяща, са сред основните недостатъци на метода. За щастие, както ще видим по-нататък, често е възможно редът на управляващото устройство да бъде намален значително, без съществена промяна в свойствата му.

9.2 Теоретични сведения – изчисляване на D стъпката

Свойствата на K стъпката (която представлява \mathcal{H}_∞ синтез) бяха разгледани в предишната глава. Тук ще се спрем на D стъпката.

И така, матрицата на неопределенността има вида

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \Delta_N & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & \Delta_F \end{bmatrix}, \quad (9.13)$$

където Δ_i са матрици с размерности $r_i \times c_i$, което съответства на машабираща система D от вида

$$D(s) = \begin{bmatrix} d_1(s)I_1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & d_2(s)I_2 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & d_N(s)I_N & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & I_F \end{bmatrix}. \quad (9.14)$$

Тогава задачата за идентификацията на $D(\omega)$ (означени като D_ω) с $D(s)$ може да се раздели на подзадачи за идентификация на всяко $d_i(\omega)$ със съответстващо $d_i(s)$. Както бе казано, промяната във фазата на $d_i(\omega)$ не влияе на $\bar{\sigma}(D_\omega F_L(P, K)(j\omega)D_\omega^{-1})$, затова за всяко положително $d_i(\omega)$ може да се намери правилна, устойчива и минималнофазова система $d_i(s)$.

Тази задача за честотна идентификация може да се реши със следния алгоритъм :

a) за $d_i(\omega)$ се намира такава фазова характеристика $\theta_i(\omega)$, че функцията

$$d_i(\omega) := d_i(\omega)e^{j\theta_i(\omega)} \quad (9.15)$$

да съответства на устойчива и минималнофазова система;

б) за съответното $d_i(\omega)$ с Метода на най-малките квадрати (МНМК) се изчисляват коефициентите на правилна предавателна функция $d_i(s)$;

в) за $d_i(s)$ се получава описание в пространство на състоянията (ПС) във фазо-координатна канонична форма;

г) проверява се дали това описание в ПС все още съответства на устойчива и минималнофазова система (това може да е нарушено при прилагането на МНМК). За целта се изчисляват системните полюси и нули p и z и тези, които имат

положителни реални части, се заменят с $-p$ и $-z$. За новото множество от полюси и нули се конструира наново минимална реализация в ПС – тя има усилването на изходната реализация;

д) описанията в ПС, отговарящи на $d_i(s)$, се сглобяват в $D(s)$, като се добавя и съответстващият на блока на качеството I_F .

За постигане на минималнофазовост при честотната идентификация на съответните $d_i(\omega)$ е приложен алгоритъм, основан на свойствата на логаритъма от дискретното Фуриерово (или Z) преобразуване, като е приложен т. нар. метод на *complex cepstrum* (това не е грешка, а игра на думи). Този метод няма да бъде излаган тук, само ще отбележим, че при него се работи с дискретизирани системи и накрая наново се прави преминаване към непрекъснатата област. Това дава идеята принципно целият алгоритъм за DK итерации при синтез на дискретни системи да бъде реализиран в дискретната област. В MATLAB[®]7 това не е осъществено – при работа с дискретни системи те се преобразуват до непрекъснати, синтезира се непрекъснато управляващо устройство, което накрая се дискретизира.

9.3 Програмни средства в MATLAB[®] за μ синтез чрез DK итерации

В MATLAB[®]7 методът за μ синтез чрез DK итерации е реализиран с функцията `dksyn`. Тя се използва с командния ред:

```
[K,clp,bnd] = dksyn(P,nmeas,ncont,opt)
```

Входни параметри:

P е моделът на обекта с неопределеност (трябва да бъде от клас `uss`), получен, например, чрез командата `sysic` (за разлика от командата за \mathcal{H}_∞ синтез `hinfsyn`, която може да работи само с номиналната система);

`nmeas` – брой измервани изхода на обекта (броени отдолу нагоре);

`ncont` – брой управлявани входове на обекта (също броени отдолу нагоре);

`opt` – незадължителен параметър. Той е обект, създаван с командата `opt=dkitopt` и има следните елементи:

`opt.FrequencyVector` – вектор с честоти за μ анализа. Ако не е зададен, се избира автоматично;

`opt.InitialController` – управляващо устройство за първата итерация, по подразбиране – празен `ss` обект;

`opt.AutoIter` – автоматичен режим на DK итерации, по подразбиране е '`On`';

`opt.DisplayWhileAutoIter` – даване в командния прозорец на информация за напредъка на DK итерациите, по подразбиране е '`Off`';

`opt.StartingIterationNumber` – номер на първата итерация, по подразбиране е 1;

`opt.NumberOfAutoIterations` – колко итерации да се изпълнят, по подразбиране е 10;

`opt.AutoScalingOrder` – максимален ред на апроксимиранието D машабиращи системи, по подразбиране е 5;

`opt.AutoIterSmartTerminate` – автоматично прекратяване на итерациите при невъзможност за подобрене на резултата, по подразбиране е '`On`';

`opt.AutoIterSmartTerminateTol` – толерансът, използван от

`opt.AutoIterSmartTerminate`, по подразбиране е 0.005.

Изходни параметри:

`K` – синтизираното управляващо устройство (`ss` обект);

`clp` – модел на затворената система (`uss` обект) – може да се получи и като

```
clp=lft(P,K);
```

`bnd` – максимумът на μ нормата на затворената система `clp`.

Командата `dksyn` работи както с непрекъснати, така и с дискретни системи. Това не е необходимо да се указва от потребителя, тъй като тази информация се съдържа в `ss` и `uss` обектите.

9.4 Пример за μ синтез с използване на `dksyn`

Нека направим опит за синтез на μ управляващо устройство за системата масадемпфер-пружина. Един от най-лесните начини за съставяне на модела е следният:

Трите неточно известни параметъра са:

```
m = ureal('m',3,'Percentage',[-40,40])
c = ureal('c',1,'Range',[.8,1.2])
k = ureal('k',2,'PlusMinus',[-.6,.6])
```

Получаване на модел на обекта от клас `uss`:

```
mds1 = tf(1,[m,c,k])
```

Добавяне на филтър за качеството:

```
s = tf('s')
Wp = (s^2+1.8*s+10)/(s^2+8*s+.01)
systemnames = 'mds1 Wp';
inputvar = '[dist; control]';
outputvar = '[Wp; -mds1-dist]';
input_to_mds1 = '[control]';
input_to_Wp = '[mds1+dist]';
mds1_olp = sysic %разширена отворена система
```

Получаване на вектор с честотите:

```
w = logspace(-1,1,100);
```

Управляващи параметри за DK-итерациите:

```
opt_mds = dkitopt('FrequencyVector',w,'DisplayWhileAutoIter','on',...
'NumberOfAutoIterations',5)
```

Така управляващите параметри, подадени на dksyn, ще бъдат следните:

```
Property Object Values:
    FrequencyVector: [1x100 double]
    InitialController: [0x0 ss]
        AutoIter: 'on'
    DisplayWhileAutoIter: 'on'
    StartingIterationNumber: 1
    NumberOfAutoIterations: 5
        AutoScalingOrder: 5
    AutoIterSmartTerminate: 'on'
    AutoIterSmartTerminateTol: 0.0050
        Default: [1x1 struct]
        Meaning: [1x1 struct]
```

Напомняме, че векторът с честотите не е задължително да бъде задаван – ако не е указан, той ще бъде съставен автоматично.

Опит за μ синтез:

```
nmeas = 1;
ncon = 1;
[K_mu1,clp1,mubounds1] = dksyn(mds1_olp,nmeas,ncon,opt_mds);
```

След стартиране на горната команда на всяка стъпка в командния прозорец се подава информация за хода на процедурата с DK итерациите. Информацията

за хода на съответната K стъпка, която представлява \mathcal{H}_∞ синтез, е идентична с тази от функцията `hinfsyn`. При D стъпката се подава информация за реда на мащабиращата система D , получен при апроксимирането на блоковете на матрицата D - както блок по блок, така и изцяло. Накрая се извежда резюме на извършените до момента итерации

Отначало се извежда информация за първата K стъпка (\mathcal{H}_∞ оптимален синтез), която се извършва за немащабираната с D система:

```
Resetting value of Gamma min based on D_11, D_12, D_21 terms
```

```
Test bounds:      1.1690 < gamma <=      1.9412
```

gamma	hamx_eig	xinf_eig	hamy_eig	yinf_eig	nrho_xy	p/f
1.941	8.6e-001	7.3e-002	1.1e-003	4.0e-008	0.2397	p
1.555	7.2e-001	-2.4e+004#	9.6e-004	4.0e-008	0.9324	f

```
Gamma value achieved:      1.9412
```

След това се изчислява затворената с получения \mathcal{H}_∞ оптимален контролер система и ѝ се прави μ анализ:

```
Calculating MU of closed-loop system: points completed (of 100)
...100 points completed (of 100)...100
...100 points completed (of 100)...100
```

Извежда се резюме за направената K стъпка и μ анализа на получената затворена система:

Iteration Summary

Iteration #	1
Controller Order	4
Total D-Scale Order	0
Gamma Achieved	1.941
Peak mu-Value	1.665

Във всяка колонка се дава номерът на DK итерацията, редът на синтезираното управляващо устройство, общият ред на мащабиращите системи (а той е удвоеният ред на D , тъй като присъстват D и D^{-1}), достигнатите стойности на \mathcal{H}_∞ и μ нормата.

Както се и очаква, полученият контролер е от 4-ти ред, колкото е и редът на разширена с филтър за качество оригинална система. Затворената система постига $\gamma = 1.941$ и пикова стойност на μ нормата 1.665.

Следва извеждане на резултатите от първата D стъпка:

```
Auto Fit in Progress
    Block 1, MaxOrder=5, Order = 0
1
    Block 2, MaxOrder=5, Order = 0
1
2
    Block 3
        Element[1 1], MaxOrder=5, Order = 0 1 2
        Element[2 1], MaxOrder=5, Order = 0 1 2
        Element[1 2], MaxOrder=5, Order = 0
        Element[2 2], MaxOrder=5, Order = 0 1 2 3
    Block 4, MaxOrder=5, Order = 0
```

За всеки от четирите блока на $D(j\omega)$ се прави идентификация с динамични системи $d(s)$ от все по-висок ред, докато се постигне достатъчно добро приближение. Редът на $D(s)$ е 10, а общият ред на $D_L(s)$ и $D_R(s)$ ще бъде съответно два пъти по-голям, което се вижда и от резюмето на втората K стъпка:

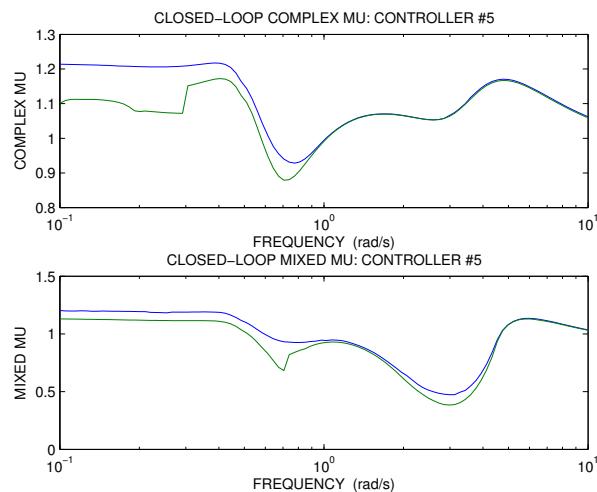
```
Iteration Summary
-----
Iteration #      1      2
Controller Order 4      24
Total D-Scale Order 0      20
Gamma Acheived   1.941  6.599
Peak mu-Value     1.665  1.582
```

Следва втората D стъпка и т. н.

За резултата от цялата процедура може да се съди по резюмето след 5-тата итерация:

```
Iteration Summary
-----
Iteration #      1      2      3      4      5
Controller Order 4      24      20      18      22
Total D-Scale Order 0      20      16      14      18
Gamma Acheived   1.941  1.582  1.482  1.240  1.217
Peak mu-Value     1.665  1.582  1.482  1.240  1.217
Next MU iteration number: 6
```

Управляващо устройство е синтезирано, но задачата за робастен синтез не е решена – μ норма на затворената система по-малка от 1 не се достига при никоя от итерациите – минималната ѝ стойност е 1.217 (ако бъдат направени още итерации, резултатът също не се подобрява). Това се вижда и от графиките на комплексното и смесеното μ на фиг. 9.2.



Фигура 9.2: μ норма на затворената система – първи опит

Преди да опитаме нещо друго, нека още веднъж разгледаме внимателно модела:

`mds1`

Информацията за него е

```
USS: 2 States, 1 Output, 1 Input, Continuous System
c: real, nominal = 1, range = [0.8 1.2], 1 occurrence
k: real, nominal = 2, variability = [-0.6 0.6], 1 occurrence
m: real, nominal = 3, variability = [-40 40]%, 2 occurrences
```

Вижда се, че параметърът m се среща два пъти в `mds1`. Този учудващ на пръв поглед факт (върху който беше обърнато внимание и в глава 2) се дължи на използването на функцията `tf` за построяване на модела – ако атомите, използвани като параметри в `tf`, са с неопределеност (напр. от клас `ureal`, както е тук), то полученият модел е от клас `uss`. При съставянето на матриците от описанието в

пространство на състоянията е била получена реализация, която не съдържа минимално възможният брой параметри, а това е затруднило процедурата за синтез.

Всъщност това се вижда и от резюметата на D стъпките – навсякъде *block3*, който съответства на δ_m , е с размерност 2×2 .

При изграждане на модела чрез **iconnect** (ако не се внимава кои точно величини са избрани за междинни променливи) може да се стигне до същия проблем.

Затова най-добре е моделът да се прави чрез **sysic**. Използването на тази функция гарантира, че получената реализация ще съдържа минимално възможният брой параметри. Нека сега построим наново модела чрез **sysic** и да опитаме да извършим наново μ синтез:

```
m1 = inv(m);
s = tf('s');
int1 = 1/s;
int2 = tf(1,[1,0]);
systemnames = 'int1 int2 c k m1';
inputvar = '[u]';
outputvar = '[int2]';
input_to_int1 = '[m1]';
input_to_int2 = '[int1]';
input_to_c = '[int1]';
input_to_k = '[int2]';
input_to_m1 = '[u-c-k]';
mds2 = sysic
```

Ако сега разгледаме модела

`mds2`

то свойствата му са

```
USS: 2 States, 1 Output, 1 Input, Continuous System
c: real, nominal = 1, range = [0.8 1.2], 1 occurrence
k: real, nominal = 2, variability = [-0.6 0.6], 1 occurrence
m: real, nominal = 3, variability = [-40 40]%, 1 occurrence
```

и виждаме, че и трите неизвестни параметъра се срещат само по веднъж. Разширяваме отново с филтър за качество системата и правим опит за μ синтез:

```
systemnames = 'mds2 Wp';
inputvar = '[dist; control]';
outputvar = '[Wp; -mds2-dist]';
```

```

input_to_mds2 = '[control]';
input_to_Wp = '[mds2+dist]';
mds2_olp = sysic
[K_mu2,clp2,mubounds2] = dksyn(mds2_olp,nmeas,ncon,opt_mds);

```

Резултатът от първата K стъпка е следният:

```

Iteration Number: 1
-----
Resetting value of Gamma min based on D_11, D_12, D_21 terms
Test bounds: 1.0000 < gamma <= 3.5272
gamma hamx_eig xinf_eig hamy_eig yinf_eig nrho_xy p/f
 3.527 5.6e-001 5.5e-002 1.3e-003 0.0e+000 0.2151 p
 2.264 5.3e-001 5.7e-002 1.3e-003 0.0e+000 0.8422 p
 1.632 4.9e-001 -7.0e+002# 1.3e-003 -2.8e-015 8.5167# f
Gamma value achieved: 2.2636

```

а от първата D стъпка:

```

Auto Fit in Progress
  Block 1, MaxOrder=5, Order = 0
  1
  2
    Block 2, MaxOrder=5, Order = 0
  1
  2
    Block 3, MaxOrder=5, Order = 0
  1
  2
    Block 4, MaxOrder=5, Order = 0

```

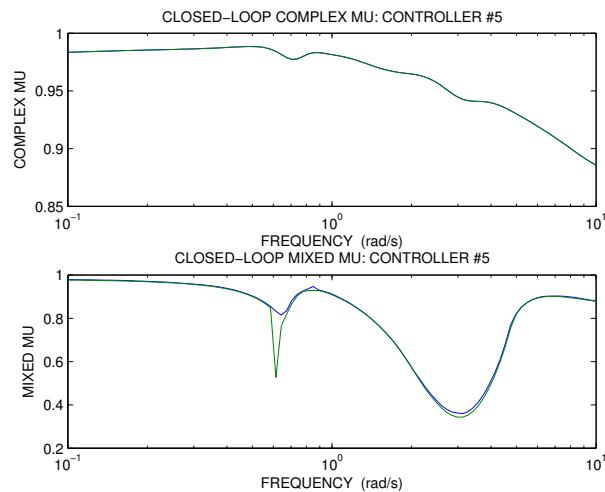
Окончателният резултат след 5-тата итерация е следният:

```

Iteration Summary
-----
Iteration # 1 2 3 4 5
Controller Order 4 16 20 18 18
Total D-Scale Order 0 12 16 14 14
Gamma Acheived 2.264 1.284 1.021 1.018 1.018
Peak mu-Value 2.256 1.244 0.992 0.988 0.988
Next MU iteration number: 6

```

Задачата е решена – най-добро е управляващото устройство, получено на петата итерация. То е от 18-ти ред, а максималната стойност на μ нормата на затворената система с него е 0.988. На фиг. 9.3 са показани комплексното и смесеното μ на затворената с петото управляващо устройство система.



Фигура 9.3: μ норма на затворената система – втори опит

Резултатът може да се провери и чрез `robustperf`:

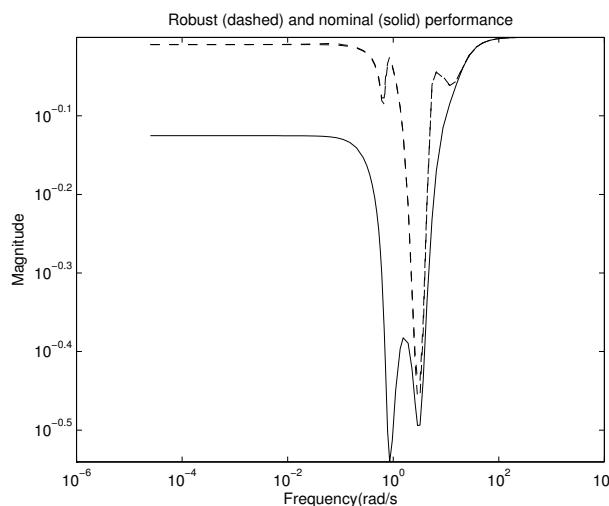
```
[perfmargin2,perfmarginunc2,Report2,infoperf2] = robustperf(clp2)
Report2
```

което дава за робастното качество

```
Uncertain System achieves a robust performance margin of 1.
-- A model uncertainty exists of size 100% resulting in a performance
   margin of 1 at 511 rad/sec.
-- Sensitivity with respect to uncertain element ...
   'c' is 3%. Increasing 'c' by 25% leads to a 1% decrease
      in the margin.
   'k' is 30%. Increasing 'k' by 25% leads to a 8% decrease
      in the margin.
   'm' is 43%. Increasing 'm' by 25% leads to a 11% decrease
      in the margin.
```

Нека сравним честотните характеристики на робастното и номиналното качество. Тъй като номиналната затворена система `clp2` е едномерна, нейната структурирана сингулярна стойност μ може да се намери точно като абсолютната стойност на честотната ѝ характеристика. За да може да сравним двете графики, ще пресметнем номиналното качество за вектора с честоти, върнат от `robustperf`:

```
w2 = infoperf2.Frequency;
mu_nom_clp2 = abs(frd(clp2.NominalValue,w2));
loglog(infoperf2.MussvBnds,'k--')
hold on
loglog(mu_nom_clp2,'k')
title('Robust (dashed) and nominal (solid) performance')
xlabel('Frequency (rad/s)')
ylabel('Magnitude')
```



Фигура 9.4: Номинално и робастно качество на системата с $K_{\mu 2}$

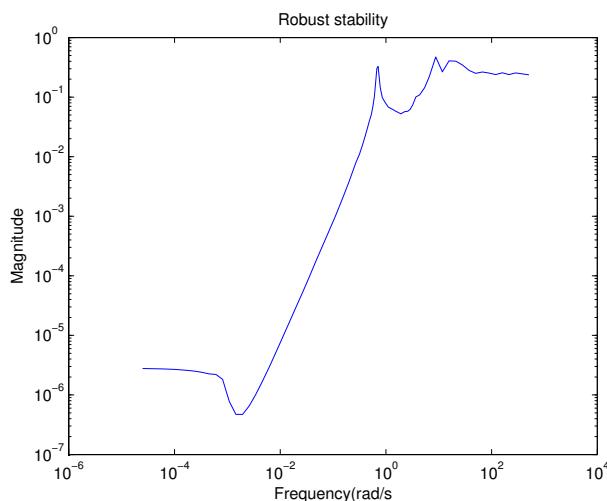
Сравнението е показано на фиг. 9.4. Както и трябва да се очаква, кривата на номиналното качество е (нестрого) под оценките на горната и долната граница на робастното качество. Максималната стойност на μ при анализа и на номиналното, и на робастното качество се постига при високите честоти и е равна и в двата случая на 0.9998, т.е., номиналното и робастното качество се запазват за всички Δ такива, че $\Delta \leq \frac{1}{0.9998}$.

Нека проверим робастната устойчивост:

```
[stabmarg2,destabunc2,Report22,infostab2] = robuststab(clp2);
loglog(infostab2.MussvBnds)
Report22
```

дава за робастната устойчивост

```
Uncertain System is robustly stable to modeled uncertainty.
-- It can tolerate up to 212% of the modeled uncertainty.
-- No modeled uncertainty exists to cause an instability
at 2.5e-005 rad/s.
-- Sensitivity with respect to uncertain element ...
'c' is 1%. Increasing 'c' by 25% leads to a 0% decrease
in the margin.
'k' is 1%. Increasing 'k' by 25% leads to a 0% decrease
in the margin.
'm' is 100%. Increasing 'm' by 25% leads to a 25% decrease
in the margin.
```



Фигура 9.5: Робастна устойчивост на системата с $K_{\mu u2}$

Честотната характеристика на μ за робастната устойчивост е показана на фиг. 9.5. Максималната стойност на μ при анализа на робастната устойчивост е 0.4716, т.e., затворената система е робастно устойчива за всички Δ такива, че $\Delta \leq \frac{1}{0.4716}$.

Нека проверим коя е най-лошата комбинация от стойности на m , c и k . Тези съдържат в `perfmargin1`, изчислен от `robustperf`:

```
perfmargin2 =
c: 0.9106
k: 2.2682
m: 2.4635
```

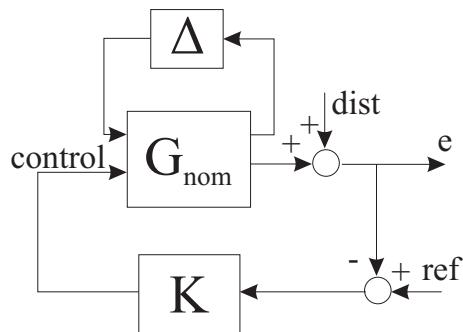
Можем да проверим \mathcal{H}_∞ нормата на затворената система, в която са заместени тези стойности:

```
clp2_wc = usubs(clp2,perfmargin2);
norm(clp2_wc,inf)
```

Резултатът е 1, което би трябвало и да се очаква.

9.5 Честотни характеристики и симулиране на затворената система

За получаване на честотните характеристики и симулиране на затворената система се използва структурата, показана на фиг. 9.6. Тук вече блокът за качество W_p , използван при анализа и синтеза, не е необходим и освен това е добавен входният сигнал ref за задание.



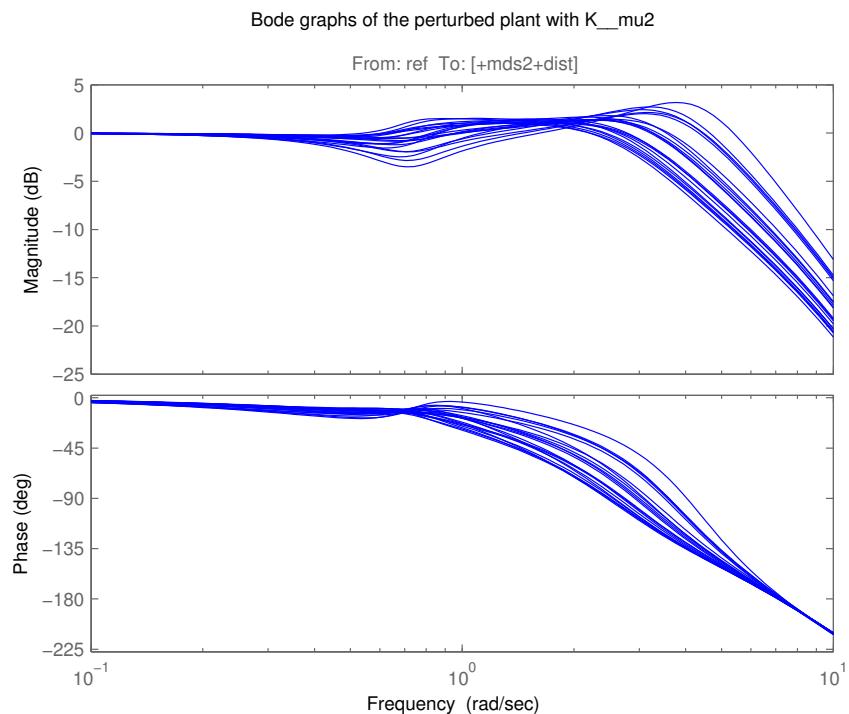
Фигура 9.6: Структура на затворената система

Със следните команди се получава описание на отворената система на името на променливата `mds2_sim`:

```
systemnames = 'mds2';
inputvar = '[ref; dist; control]';
outputvar = '[mds2+dist; ref-mds2-dist]';
input_to_mds2 = '[control]';
mds2_sim = sysic
```

Тя се затваря с управляващото устройство K_{mu2} и за получената затворена система се получава семейство честотни характеристики (от ref към e) при вариране на неопределенните параметри, както е показано на фиг. 9.7:

```
clp2_sim = lft(mds2_sim,K_mu2);
bode(clp2_sim(1,1),w)
```

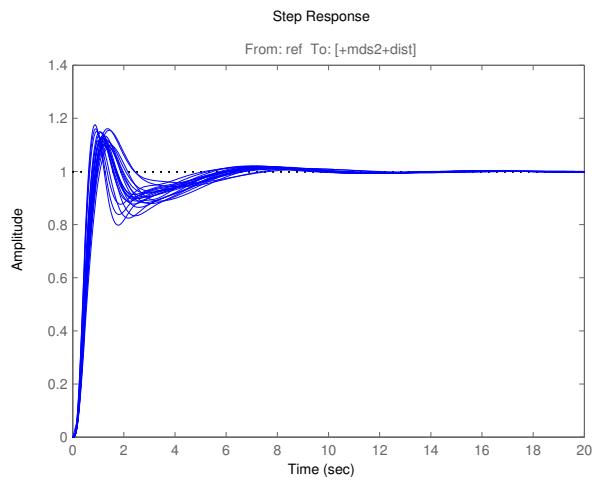
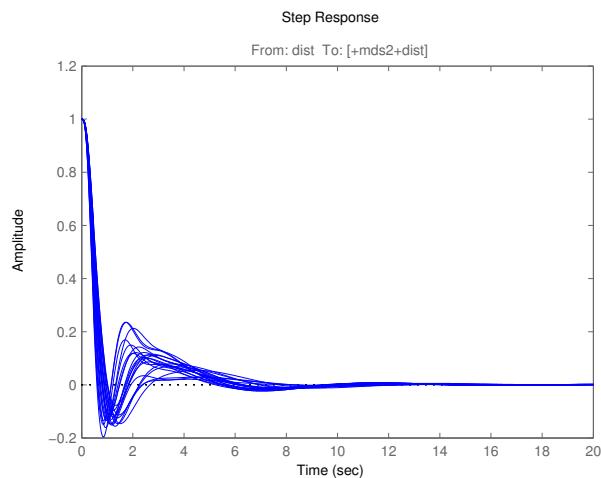


Фигура 9.7: Честотни характеристики на системата с K_{mu2}

По подобен начин с командите

```
step(clp2_sim(1,1),20)
step(clp2_sim(1,2),20)
```

се получават съответно семейство переходни процеси по задание и переходни процеси по смущение на затворената система. Те са показани съответно на фиг. 9.8 и фиг. 9.9. Както и за честотните характеристики, прави впечатление, че разликите между различните варианти не са много големи.

Фигура 9.8: Преходни процеси по задание на системата с K_{mu2} Фигура 9.9: Преходни процеси по смущение на системата с K_{mu2}

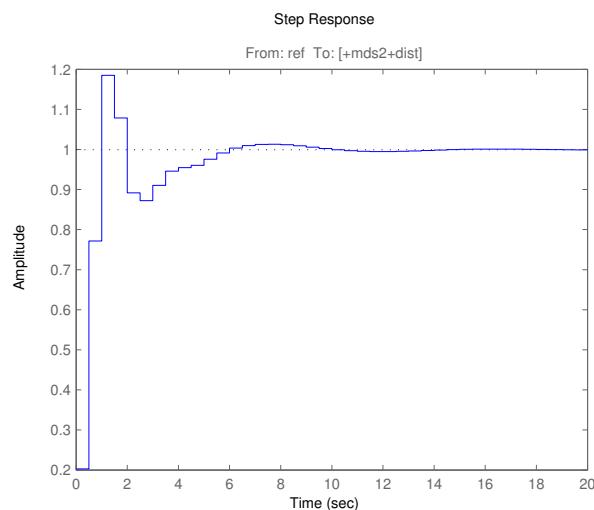
Накрая, нека направим симулация на затворената с цифрово управляващо устройство система, получена чрез дискретизация на непрекъснатото управляващо устройство K_{mu2} . За съжаление, команда за дискретизация `c2d` не може да работи със системи с неопределеност, затова ще симулираме само номинална-

та система. Ако искаме да преодолеем тази трудност, ще трява да моделираме обекта от самото начало в дискретната област.

Дискретизирането с честота 2 Hz на обекта и контролера и симулирането на затворената система се извършват със следните команди:

```
Ts = .5
dmds2_sim = c2d(mds2_sim.NominalValue,Ts,'tustin');
dK_mu2 = c2d(K_mu2,Ts,'tustin');
dclp2_sim = lft(dmds2_sim,dK_mu2);
step(dclp2_sim(1,1),20)
```

Резултатът е показан на фиг. 9.10.



Фигура 9.10: Преходен процес на дискретната система

9.6 Задачи

1. На какво, според вас, се дължи леко различният резултат в по-предишната точка за μ нормата, даден от `dksyn` и `robustperf`?
2. Получете функциите на чувствителност за затворената с K_{mu2} система с неопределеност. Направете анализ с команда `wcsens`.

3. Опитайте μ синтез при различни условия – с различни филтри за качество, различен вектор с честотата и различно ограничение за максималния ред на D системите.
4. Направете μ синтез и за по-сложните системи с неопределеност, дадени в гл. 11 и гл. 12 (управление на главата на твърд диск и еластичен манипулатор).

Глава 10

ОПРОСТЯВАНЕ НА УПРАВЛЯВАЩОТО УСТРОЙСТВО

10.1 Теоретични сведения

Робастното управляващо устройство трябва да осигурява на управляваната система както робастна устойчивост, така и робастно качество. Но за практическото му приложение това не е достатъчно. Реализацията на алгоритъма се извършва с някакво цифрово устройство, напр. управляващ компютър, или специализиран контролер. Някои видове промишлени контролери поддържат пряко въвеждане на четирите матрици от описанието в пространство на състоянията. Това означава, че управляващото устройство трябва да бъде, от една страна, от възможно по-нисък ред, а от друга, е добре описането в пространство на състоянията да бъде *балансирано* – следователно, отделните числа в матриците да са възможно по-близки едно до друго и да не са нито прекалено големи, нито прекалено малки. Така се минимизира вероятността от допускане на големи, дори фатални, числени грешки при извършваните матрични операции.

Намаляването на реда на синтезираното управляващо устройство в пространство на състоянията е особено необходимо, ако то е било получено чрез μ синтез. Първо трябва да се определи значимостта на всяко от състоянията в контролера и евентуално да се премахнат тези, които са неуправлями или ненаблюдаеми. При управляващи устройства, получени с алгоритмите за \mathcal{H}_∞ и μ синтез, неуправлями и ненаблюдаеми състояния не се очакват, но поради числени причини такива е възможно да са се появили. Следва намаляване на реда на управляващото устройство – то може да се извърши чрез премахване на състоянията, които

са по-незначителни; всъщност, построява се реализация на нова система, която не съдържа “изхвърлените” състояния. Резултатът трябва да се провери, като се получи затворената с опростеното управляващо устройство система и се изчисли нейната μ норма. Така с няколко опита, можем да проверим доколко можем да намаляваме реда на управляващо устройство, без μ нормата на затворената система да стане по-голяма от 1.

За оценка на значимостта на отделните състояния е подходящо да се използват Ханкеловите сингулярни стойности. По определение те се получават така:

$$\sigma_H = \sqrt{\lambda_i(PQ)},$$

където $\lambda_i(PQ)$ са собствените стойности на произведението на грамиана на управляемост P и грамиана на наблюдаемост Q , които се получават от следните уравнения на Ляпунов:

$$\begin{aligned} AP + PA^T &= -BB^T, \\ A^T Q + QA &= -C^T C. \end{aligned}$$

За устойчиви системи Ханкеловите сингулярни стойности са мярка за “енергията” на отделните състояния. Това означава, че методите, реализиращи намаляване на реда с Ханкелови сингулярни стойности, изискват описание (на управляващото устройство) да е устойчиво.

В MATLAB[®]7 са предвидени няколко алгоритъма за опростяване на модели в пространство на състоянията, основани на оценка чрез Ханкеловите сингулярни стойности. При едни се измерва адитивната грешка между оригиналната и опростената реализация

$$\|G - G_{red}\|_\infty \leq 2 \sum_{i+1}^n \sigma_i,$$

при други оценката за близост се извършва чрез следната мултипликативна грешка:

$$\|G^{-1}(G - G_{red})\|_\infty \leq 2 \prod_{k+1}^n \left(1 + 2\sigma_i \left(\sqrt{1 + \sigma_i^2} + \sigma_i \right) \right) - 1,$$

а при трети - чрез грешката, основана на декомпозицията по взаимно прости множители (т. нар. *ugap error*).

10.2 Функции за опростяване на управляващото устройство

Няколко метода за опростяване с използването на Ханкеловите сингулярни стойности са реализирани с различни функции. Те могат да се извикват чрез общата функция от по-горно ниво `reduce`. Нейният синтаксис е следният:

```
[Gred,redinfo] = reduce(G,order,'key1','value1', ...)
```

Входни параметри:

G – подлежащото на опростяване описание (от клас **lti**) – единствен задължителен параметър. Ако няма никакви други параметри, се изчертават Ханkelовите сингулярни стойности и се чака въвеждане на ред на модела;

order – ред на опростения модел;

key1, value1, ... – двойки управляващи параметри. Те са следните:

‘Algorithm’, ‘balance’ – за опростяването се извиква функцията **balancmr** (по подразбиране);

‘Algorithm’, ‘schur’ – за опростяването се извиква функцията **schurmr**;

‘Algorithm’, ‘hankel’ – за опростяването се извиква функцията **hankelmr**;

‘Algorithm’, ‘bst’ – за опростяването се извиква функцията **bstmr**;

‘Algorithm’, ‘ncf’ – за опростяването се извиква функцията **ncfmr**;

‘ErrorType’ – вид на грешката, може да е ‘add’, ‘mult’ или ‘ncf’ съответно за адитивна, мултипликативна и *pugar* грешка;

‘MaxError’ – желана големина на грешката, тогава **order** не е необходимо да бъде задаван;

Weights – масив от две тегловни матрици **Wout**, **Win** (от клас **lti**), използват се само ако стойността на ‘ErrorType’ е ‘add’; трябва да са обратими.

Изходни параметри:

Kred – опростеният модел;

redinfo – структура с няколко полета с информация за процедурата по опростяването в зависимост от използвания метод; в повечето случаи съдържа оценка на близостта между изходното и опростеното описание, вектор с устойчивите Ханkelови сингулярни стойности и вектор с неустойчивите (ако има).

При всички положения, ако намаляването на реда е извършено успешно, то разликата между оригиналното и опростеното описание, оценена с \mathcal{H}_∞ норма, ще бъде малка.

Командите за намаляване на реда на управляващото устройство **balancmr**, **schurmr**, **hankelmr**, **bstmr** и **ncfmr** могат да се използват и самостоятелно. Нека разгледаме накратко реализираните в тях методи:

balancmr

Тази команда изчислява балансирана реализация от понижен ред.

Ако системните матрици на подлежащото на опростяване управляващо устройство са A , B , C и D и искаме да намалим реда до k , се прилага следният алгоритъм:

1. Получават се грамианите на управляемост и наблюдаемост P и Q
2. Прави се декомпозиция по сингуларни стойности на грамианите на управляемост и наблюдаемост:

$$P = U_P \Sigma_P V_P^T,$$

$$Q = U_Q \Sigma_Q V_Q^T.$$

3. Намира се квадратен корен на грамианите:

$$L_P = U_P \Sigma_P^{\frac{1}{2}},$$

$$L_O = V_Q \Sigma_Q^{\frac{1}{2}}.$$

4. Прави се декомпозиция по сингуларните стойности на $L_O^T L_P$:

$$L_O^T L_P = U \Sigma V^T.$$

5. Получават се левите и десните преобразуващи фактори за получаване на описанието от намален k -ти ред, като се взимат сингуларните стойности само до k -тата:

$$\bar{S}_L = L_O U(:, 1:k) \Sigma(1:k, 1:k)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\bar{S}_R = L_P V(:, 1:k) \Sigma(1:k, 1:k)^{-\frac{1}{2}}.$$

Матриците \bar{S}_L и \bar{S}_R са означени с горна черта, тъй като те включват само горните сингуларни стойности до k -тата.

6. Реализацията с понижен ред е

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{red} & B_{red} \\ \hline C_{red} & D_{red} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{S}_L^T A \bar{S}_R & \bar{S}_L^T B \\ \hline C \bar{S}_R & D \end{array} \right].$$

Този метод гарантира близост до оригиналното описание в смисъл на малка адитивна грешка

$$\|G - G_{red}\|_\infty \leq 2 \sum_{i+1}^n \sigma_i.$$

schurmr

Изчислява се балансирана реализация от понижен ред чрез декомпозиция на Шур:

1. Получават се грамианите на управляемост и наблюдаемост P и Q .

2. Намира се декомпозицията на Шур с подреждане на собствените стойности и по намаляващ, и по нарастващ ред:

$$V_A^T P Q V_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$V_D^T P Q V_D = \begin{bmatrix} \lambda_n & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

3. Намират се десният и левият ортонормален базис на PQ , съответно за Ханкеловите сингулярни стойности под и над k-ата:

$$V_A = [\underline{V}_R, \bar{V}_L],$$

$$V_D = [\bar{V}_R, \underline{V}_L].$$

4. Намира се декомпозицията по сингулярни стойности на $[\bar{V}_L^T, \bar{V}_R] = U \Sigma V^T$

5. Получават се левите и десните преобразуващи фактори за получаване на описаниеото от намален k-ти ред за сингулярните стойности само до k-ата:

$$\bar{S}_L = \bar{V}_L U \Sigma (1:k, 1:k)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\bar{S}_R = \bar{V}_R V \Sigma (1:k, 1:k)^{-\frac{1}{2}}.$$

6. Получава се реализацията от понижен ред

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{red} & B_{red} \\ \hline C_{red} & D_{red} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{S}_L^T A \bar{S}_R & \bar{S}_L^T B \\ \hline C \bar{S}_R & D \end{array} \right].$$

Методът гарантира близост до оригиналното описание в смисъл на малка адитивна грешка

$$\|G - G_{red}\|_\infty \leq 2 \sum_{i+1}^n \sigma_i.$$

hankelmr

Тази команда изчислява оптимална реализация от понижен ред, оценена с Ханкелова норма. Методът, реализиран с тази команда, дава по-добри резултати

от `balancmr` и `schurmr` в случаите, когато има много малки в числен смисъл Ханелови сингуларни стойности. Гарантира се близост до оригиналното описание в смисъл на малка адитивна грешка

$$\|G - G_{red}\|_\infty \leq 2 \sum_{i+1}^n \sigma_i.$$

1. Получават се грамианите на управляемост и наблюдаемост P и Q
2. За $\sigma_k > \rho \geq \sigma_{k+1}$ се формира дескрипторът

$$E = QP - \rho^2 I$$

и съответното дескрипторно описание в пространство на състоянията

$$\left[\begin{array}{c|c} Es - \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \rho^2 A^T + QAP & QB \\ \hline CP & D \end{array} \right].$$

3. Изчислява се декомпозиция по сингуларни стойности на E и резултатът се взима до ред k :

$$E = [U_{E1}, U_{E2}] \left[\begin{array}{cc} \Sigma_E & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} V_{E1}^T \\ V_{E2}^T \end{array} \right].$$

4. Върху полученото в т. 2 дескрипторно описание се прилага следното преобразувание:

$$\left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} U_{E1}^T \\ U_{E2}^T \end{array} \right] (\rho^2 A^T + QAP) \left[\begin{array}{cc} V_{E1} & V_{E2} \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} U_{E1}^T \\ U_{E2}^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} QB & -C^T \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{cc} C_1 & I_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} CP \\ -\rho B^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} V_{E1} & V_{E2} \end{array} \right],$$

$$D_1 = D.$$

5. Формира се описането в пространство на състоянията

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{red} & B_{red} \\ \hline C_{red} & D_{red} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \Sigma_E^{-1}(A_{11} - A_{12}A_{22}A_{21}) & \Sigma_E^{-1}(B_1 - A_{12}A_{22}B_2) \\ \hline C_1 - C_2A_{22}A_{21} & D_1 - C_2A_{22}B_2 \end{array} \right]$$

и от него се отделя само устойчивата част.

bstmr

Балансирана стохастична реализация от понижен ред.

1. Намират се грамиантите на управляемост и наблюдаемост на левия спектрален фактор $\Phi = \Gamma(\sigma)\Gamma^*(-\sigma) = \Omega^*(-\sigma)\Omega(\sigma)$, като се решават следните две уравнения на Ляпунов и Рикати

$$AP + PA^T + BB^T = 0,$$

$$BW = PC^T + BD^T,$$

$$QA + A^TQ + (QBW - C^T)(-DD^T)(QBW - C^T)^T = 0.$$

2. Намира се декомпозицията на Шур с подреждане на собствените стойности по намаляващ и по нарастващ ред:

$$V_A^T P Q V_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$V_D^T P Q V_D = \begin{bmatrix} \lambda_n & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

3. Намират се десният и левият ортонормален базис на PQ , съответно за Ханкеловите сингулярни стойности под и над k-тото:

$$V_A = [\underline{V}_R, \overline{V}_L],$$

$$V_D = [\overline{V}_R, \underline{V}_L].$$

4. Намира се декомпозицията по сингулярни стойности на $[\overline{V}_L^T, \overline{V}_R] = U\Sigma V^T$.

5. Получават се левите и десните преобразуващи фактори за получаване на описанието от намален k-ти ред за сингулярните стойности само до k-тото:

$$\overline{S}_L = \overline{V}_L U \Sigma (1:k, 1:k)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\overline{S}_R = \overline{V}_R V \Sigma (1:k, 1:k)^{-\frac{1}{2}}.$$

6. Получава се реализацията от понижен ред

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{red} & B_{red} \\ \hline C_{red} & D_{red} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{S}_L^T A \bar{S}_R & \bar{S}_L^T B \\ \hline C \bar{S}_R & D \end{array} \right].$$

Този метод гарантира близост до оригиналното описание в смисъл на мултипликативна грешка

$$\|G^{-1}(G - G_{red})\|_\infty \leq 2 \prod_{k+1}^n \left(1 + 2\sigma_i \left(\sqrt{1 + \sigma_i^2} + \sigma_i \right) \right) - 1.$$

ncfmr

Тази команда изчислява балансирана реализация от понижен ред чрез факторизация по взаимно прости множители.

1. Факторизира се даденото описание по леви взаимно прости множители:

$$G_L = M_L^{-1}(s)N_L(s),$$

където системните матрици на факторите се означават съответно

$$N_L = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_n \\ \hline C_c & D_n \end{array} \right],$$

$$M_L = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_m \\ \hline C_c & D_m \end{array} \right].$$

2. Понижава се редът на G_L до k-ти.

3. Търсената реализация от понижен ред е

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{red} & B_{red} \\ \hline C_{red} & D_{red} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_c - B_m D_m^{-1} C_c & B_n - B_m D_m^{-1} D_n \\ \hline D_m^{-1} C_c & D_m^{-1} D_n \end{array} \right].$$

Съществува и дуален метод с използване на дясна факторизация по взаимно прости множители.

10.3 Пример за опростяване на модела с hankelmr

Ще вземем полученото в глава 9 μ управляващо устройство K_mi2. То е от 18 ред, информацията за което може да се извлече така:

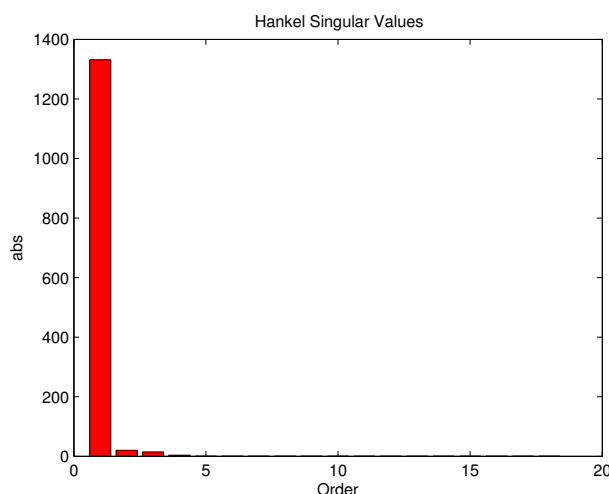
```
sKa = size(K_mu2.a,1)
```

Резултатът е

```
sKa =
18
```

Нека отначало видим Ханкеловите сингулярни стойности, като извикаме командата `reduce` само с един параметър:

```
reduce(K_mu2)
```



Фигура 10.1: Ханкелови сингулярни стойности на управляващото устройство

На фиг. 10.1 се вижда, че първите три-четири сингулярни стойности са значително по-големи от останалите, следователно отговарят на по-значими състояния. Числените им стойности можем да видим, например, така:

```
[Kred,redinfo] = reduce(K_mu2,sKa);
redinfo
redinfo.StabSV
```

Резултатът е

```
ans =
```

```
1.0e+003*
```

```
1.3318
0.0200
0.0147
0.0037
0.0004
0.0004
0.0001
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
```

Опитно се установява, че редът на управляващото устройство може да се намали най-много до 4-ти (с алгоритъма, реализиран в команда `hankelmr`), без да се наруши условието за робастно качество на затворената система. Това става така:

```
[Kred,redinfo] = reduce(K_mu2,4,'Algorithm','hankel');
```

За да проверим резултата, получаваме затворената с опростеното управляващо устройство система и правим μ анализ:

```
clp_red = lft(mds2_olp,Kred);
opt = robopt('Display','on')
[perfmarginred,perfmarginuncred,Reportred,infoperfred] = ...
robustperf(clp_red,opt);
Reportred
```

От резултата, докладван от `Reportred`:

```
Uncertain System achieves a robust performance margin of 1.
-- A model uncertainty exists of size 100% resulting in a performance
margin
```

```

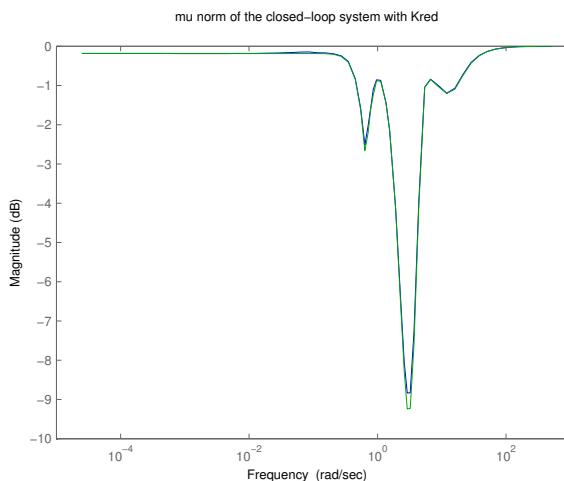
of 1 at 523 rad/sec.
-- Sensitivity with respect to uncertain element ...
'c' is 2%. Increasing 'c' by 25% leads to a 1% decrease
in the margin.
'k' is 23%. Increasing 'k' by 25% leads to a 6% decrease
in the margin.
'm' is 43%. Increasing 'm' by 25% leads to a 11% decrease
in the margin.

```

се вижда, че затворената система постига робастно качество. В това можем да се убедим и като начертаем μ нормата на затворената система:

```
bodemag(infoperfred.MussvBnds(1),infoperfred.MussvBnds(2))
```

Горната и долната граница на смесеното μ са показани на фиг. 10.2.

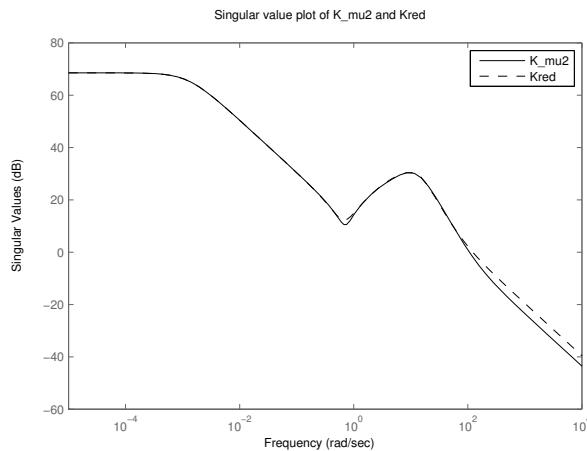


Фигура 10.2: μ норма на затворената система с опростеното управляващо устройство Kred

За сравнение между $K_{\mu 2}$ и K_{red} може да се начертаят техните сингулярни стойности с командата

```
sigma(K_mu2, 'k-', Kred, 'k--')
```

Резултатът е показан на фиг. 10.3 (той е тривиален, тъй като двете управляващи устройства са едномерни, следователно сингулярната стойност е само една). Вижда се, че разлика се появява предимно при високите честоти.

Фигура 10.3: Сингуларни стойности на K_{mu2} и K_{red}

Числена оценка на близостта на двете управляващи устройства може да се направи, като разстоянието между тях се оцени с \mathcal{H}_∞ норма със следната команда:

```
norm(K_mu2-Kred,'inf')
```

Отговорът е

```
ans =
0.7980
```

и може да се провери дали съответства на теоретично предсказаната максимална стойност от формулата за адитивната грешка между оригиналното и управляващото устройство от понижен ред.

10.4 Пример за опростяване на модела с ncfmr

В предишния пример открихме най-ниския ред, до който може да се опрости управляващото устройство, с опитване. Възниква въпросът няма ли някаква процедура, която да оцени доколко може да се намалява редът на управляващото устройство.

За целта могат да се използват Ханкеловите сингуларни стойности от факторизацията по взаимно прости множители. От теорията е известно, че от тях

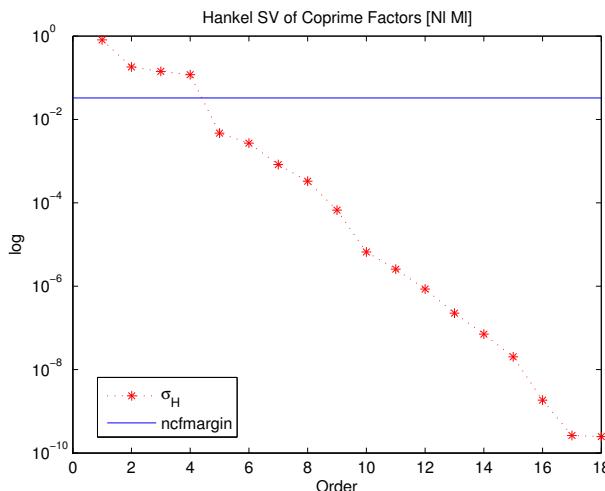
могат да се премахнат всички, които са достатъчно по-малки от запаса по устойчивост, изчислен чрез факторизация по взаимно прости множители, без опасност от загуба на устойчивост. За съжаление, тази процедура не гарантира робастно качество.

За целта начертаваме Ханкеловите сингуларни стойности от факторизацията по взаимно прости множители (в логаритмичен мащаб):

```
hankelsv(K_mu2, 'ncf', 'log');
```

и на същата фигура 10.4 отбелязваме с хоризонтала запаса по устойчивост, получен с командата `ncfmargin`. Командата `ncfmargin` работи само със системи от клас `lti`, затова за оценката ще използваме номиналната система; изследва се само затвореният с управляващото устройство контур с премахнати всички външни входове и изходи:

```
mds2_sim_nom = mds2_sim.Nominalvalue
v = axis;
hold on;
plot(v(1:2),ncfmargin(mds2_sim_nom(2,3),K_mu2)*[1 1]);
hold off
```



Фигура 10.4: Ханкелови сингуларни стойности на K_{mu2} и `ncfmargin`

Вижда се, че четири от Ханкеловите сингуларни стойности са по-големи от запаса по устойчивост, затова ще опитаме да намалим реда на K_{mu2} до 4-ти, но сега с алгоритъма, минимизиращ *нидар* грешката (т.е., извиква се `ncfmr`):

```
Kred_nugap = reduce(K_mu2,4,'errortype','ncf');
```

Полученото управляващо устройство Kred_nugap наистина осигурява робастна устойчивост, както може да се провери с `robuststab`.

Но от анализа с `robustperf` се вижда, че затворената с него система няма робастно качество, като при това μ нормата ѝ е 7.3099.

От двете опростени управляващи устройства само получения в предишната точка Kred с алгоритъма `hankelmr` осигурява робастно качество.

10.5 Задачи

1. За разгледаната система опитайте да намалите реда на управляващото устройство не само до 4, но и до по-висок и по-нисък ред. Винаги ли управляващото устройство от по-висок ред води до по-добро робастно качество?
2. Получете управляващо устройство от понижен ред и с другите методи. Сравнете резултатите, постройте семействата честотни характеристики и преходни процеси на затворените системи с неопределеност.
3. Получете управляващо устройство с намален ред и за по-сложните примери, разгледени в гл. 11 и гл. 12 (управление на главата на твърд диск и еластичен манипулатор).

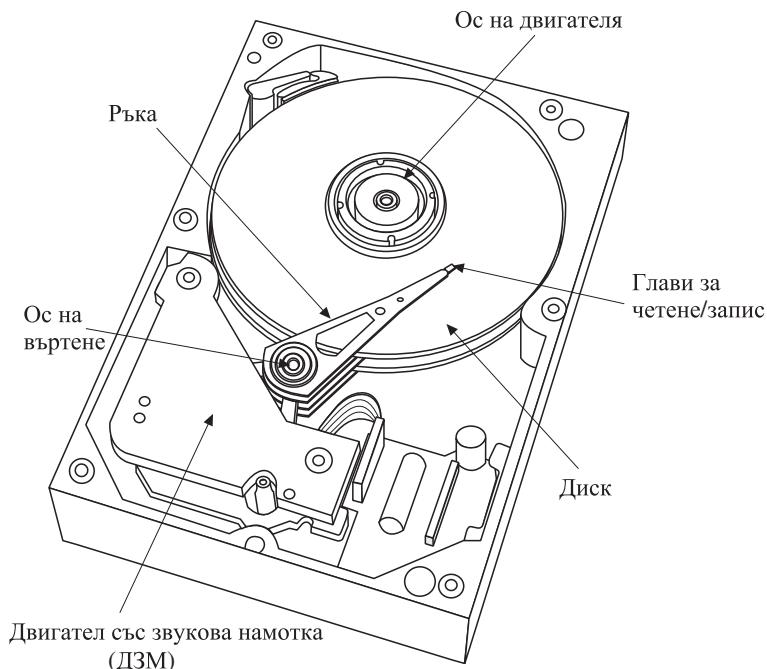
Глава 11

РОБАСТНО УПРАВЛЕНИЕ НА ТВЪРД ДИСК

В тази глава се разглежда синтезът на робастна следяща система на запаметяващо устройство с *твърд диск* (*ТД*). Използват се три метода за робастен синтез: μ -синтез, \mathcal{H}_∞ оптimalен синтез и процедура за \mathcal{H}_∞ синтез при желани честотни характеристики (СЖЧХ). След описанието на динамиката на следящата система на твърд диск в следващата точка, в т. 11.2 е показано в подробности как се извежда моделът на обекта, който включва няколко неопределени параметри. След това се разглежда синтезът на непрекъснато управляващо устройство, използвайки известните методи за робастен синтез. Тези управляващи устройства се сравняват по отношение на робастната устойчивост и робастното качество на затворената система в честотната и временната област. Разглежда се и синтезът на дискретно управляващо устройство. Накрая са представени резултатите от симулирането на нелинейните непрекъсната и дискретна затворени системи, следвани от някои изводи в края на главата.

11.1 Следяща система на твърд диск

Схемата на типично запаметяващо устройство с твърди дискове е показана на фиг. 11.1. Дисковото устройство се състои от няколко плоски диска, покрити от двете страни с много тънки слоеве от магнитен материал (тънък филм). Магнитният материал се използва за запаметяване на данни във вид на магнитни образи. Дисковете се въртят с висока скорост, задвижвани от електродвигател. Напоследък се използва скорост на въртене 5400 об/мин, 7200 об/мин или даже 10 000 и 15 000 об/мин. Данните се извличат от, или се записват върху, дисковете чрез електромагнитни глави за *члене и запис* (*Ч/З*) , които са монтирани на



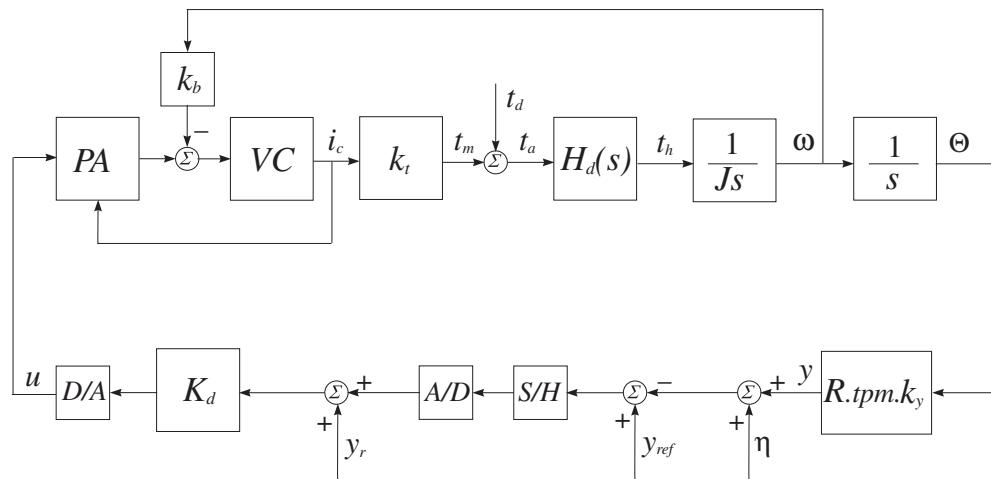
Фигура 11.1: Схема на твърд диск

долната страна на *плъзгачи*. В съвременните твърди дискове четенето на данните се извършва с т.н. *гигантски магнито-съпротивителни (ГМС)* глави, а записването на данните се извършва с тънко-филмови индуктивни глави. Плъзгачите с главите за четене/запис се монтират върху носещи ръце. Ръката представлява олекотена твърда конструкция, което позволява тя да се движи бързо над повърхността на диска. За една глава за четене/запис се използва една ръка и всички ръце се монтират в една сглобка, която се движи над няколко дискови повърхности едновременно. Главите са окачени на няколко микрона над повърхността на диска. Подходящата височина на "летене" на главите над повърхността се постига благодарение на въздушния поток, генериран от въртящия се диск.

Данните, записвани върху дисковете, се намират в концентрични кръгове, наречени *пътечки*. Съвременните твърди дискове имат десетки хиляди пътечки, което води до плътност по-голяма от 1000 *пътечки на миллиметър*. По такъв начин разстоянието между съседни пътечки е от порядъка на микрон. Всяка пътечка се дели на по-малки части, наречени *сектори*, които съдържат 512 байта информация. Върху една пътечка може да има няколко стотици или даже хиляди сектори. Обемът на един диск може да достигне повече от 20 гигабайта.

Носещите ръце се движат над повърхността на диска с помощта на въртящо се устройство със звукова намотка, често наричано *двигател със звукова намотка* (ДЗМ). ДЗМ се състои от звукова намотка, монтирана в края на слобоката с носещите ръце и постоянни електромагнити. Чрез управляване на тока в намотката, главите могат да се движат в едната или другата посока, следейки точно пътечката с данните.

Целта на следящата система на твърдия диск е да се постигне прецизно позициониране на главите за четене/запис над желаната пътешка (режим на следене на пътешката) при четенето и записването на данните и бързо преминаване от една към друга желана пътешка (режим на търсене). Когато устройството премине в режим на търсене, то превключва към алгоритъм за управление на търсения, който е от вида на оптималните по бързодействие (релейни) алгоритми. Когато главата се позиционира над желаната пътешка, устройството превключва към режим на следене на пътешката. В настоящата работа се разглежда само управлящото устройство за режим на следене на пътешката.



Фигура 11.2: Блок-схема на следящата система на твърд диск

Блок-схемата на следящата система на твърд диск е показана на фиг. 11.2. Главите за четене/запис се преместват от двигател със звукова намотка (VC), който се задвижва от изходния ток i_c на усилвател по мощност (PA). Сигналът за действителното положение на главата y се сравнява със сигнала y_{ref} , който представлява желаното положение на главата. В режима на следене на пътечката задаващият вход y_{ref} е теоретично равен на нула и $y(t)$ играе ролята на сигнал на грешката. На практика y_{ref} трябва да бъде положен равен на сигна-

ла, представляващ отклонението на пътешката от окръжността, дължащо се на грешката по положение при записването на информацията. Цифровият сигнал y_r е задание за желаната пътешка и се използва в режима на търсене. Блокът S/H представлява импулсен ключ плюс фиксатор от нулев ред, които отразяват дискретизацията по време. Сигналът на грешката се дискретизира по ниво с *аналого-цифров* (*A/D*) преобразувател и служи като част от входа на цифровото управляващо устройство K_d , което обикновено се реализира върху цифров сигнален процесор. Изходът на управляващото устройство се преобразува в аналогов вид чрез *цифро-аналогов* (*D/A*) преобразувател и се усилва от усилвателя по мощност. Тъй като двигателният момент е пропорционален на тока в звуковата намотка, усилвателят се конфигурира като източник на ток. Външният сигнал t_d е смущението по момент, дължащо се на външни удари и вибрации, шум в усилвателя, шум в цифро-аналоговия преобразувател, триене в сачмения лагер на ръката и отклонението на гъвкавите проводници. Увеличаването на скоростта на въртене увеличава въздушния поток в дисковото устройство, което на свой ред увеличава смущаващия момент върху изпълнителното устройство. Смущаващото въздействие е ниско-частотен сигнал със спектър, който е обикновено под 500 Hz. Шумът в сигнала за положението на главата η включва грешки от дискретизация вследствие на шума в серводемодулатора, крайната разрешаваща способност на аналого-цифровия преобразувател, шум от околната среда и шум на предусилвателя. Шумът в сигнала по положение е високочастотен сигнал със спектрален състав обикновено над 1 kHz. Тъй като измерваният сигнал за грешка по положение (СГП) е замърсен с шум, истинският СГП, $y_{ref} - y$, не е достъпен.

Едно от ограниченията, присъщи на синтеза на сервоуправляващи устройства за твърди дискове с висока плътност на пътешките, е влиянието на механичните резонанси върху следящата система за позициониране на главите. Ако входът на изпълнителното устройство съдържа периодична компонента с честота, равна на резонансната честота, то тази компонента може да бъде усилена многократно, което води до големи отклонения на главите за четене/запис от пътешката. Обикновено изпълнителното устройство има механика, която е проектирана по такъв начин, че резонансите възникват при честоти, които ще бъдат отслабвани от следящата система. С нарастването, обаче, на лентата на пропусканите честоти, за да се изпълнят по-високи изисквания към качеството, това отслабване не може да се постигне поради ограничения при механичното проектиране. Важно е също да се отбележи, че присъствието на резонанси може да ограничи честотната лента на пропускане на следящата система поради ограничения върху запаса на устойчивост. С ограничена честотна лента следящата система няма да е в състояние да постигне желаното качество.

Въртящите се изпълнителни устройства на твърдите дискове могат да имат

десетки резонанси, които могат да доведат до модел от висок ред. На практика, обаче, само 3 или 4 главни резонанси се вземат предвид. Обикновено това са първият и вторият резонанс на усукване (в областта 1500 – 2500 Hz), както и първият резонанс на люлеене (в областта 8000 – 12000 Hz).

Целта на изложението в тази глава е да се синтезира робастна следяща система за 3.5-инчов твърд диск с плътност на пътечките 25 400 пътечки/инч, т.е. 1000 пътечки/mm. Желаната продължителност на преходния процес е около 1 ms в присъствието на 4 резонанси, редица неопределени параметри, шум при измерване положението на главата и смущаващи въздействия. Параметрите на модела на твърдия диск, разглеждан като твърдо тяло, и техните допуски, са дадени в табл. 11.1.

Таблица 11.1: Параметри на твърдото тяло и допуски

Пара- метър	Описание	Стойност	Единица	Допуск
J	инерционен момент на ръката	6.3857×10^{-6}	kg m^2	$\pm 10.0\%$
R	дължина на ръката	5.08×10^{-2}	m	$\pm 0.1\%$
k_{PA}	коефициент на усилвателя	10.0	V/V	$\pm 0.0\%$
k_t	моментна константа на ДЗМ	9.183×10^{-2}	N m/A	$\pm 10.0\%$
k_b	константа на обратното е.д.н.	9.183×10^{-2}	N m/A	$\pm 10.0\%$
t_{ptm}	брой пътечки на метър	10^6	пътечки	–
k_y	коефициент по положение	1.2	V/пътечка	$\pm 5.0\%$
R_{coil}	съпротивление на намотката	8.00	Ω	$\pm 20.0\%$
R_s	съпротивление в обратната връзка на усилвателя	0.2	Ω	$\pm 1.0\%$
L_{coil}	индуктивност на намотката	0.001	H	+0, -15%
e_{max}	напрежение на насищане на усилвателя по мощност	12.0	V	-0, +5%
RPM	скорост на въртене на диска	7200	об/min	$\pm 1.0\%$
t_w	разстояние между пътечките	1	$\mu \text{ m}$	$\pm 1.0\%$

Най-напред ще бъде разгледано извеждането на модела на следящата система на твърдия диск.

Динамиката на въртящата се ръка се описва с уравнението

$$J \frac{d^2\Theta}{dt^2} = t_m + t_d,$$

където J е инерционният момент на ръката, Θ е ъгълът на завъртане на ръката, t_m е моментът на ДЗМ и t_d е смущаващият момент.

Моментът на ДЗМ се дава от

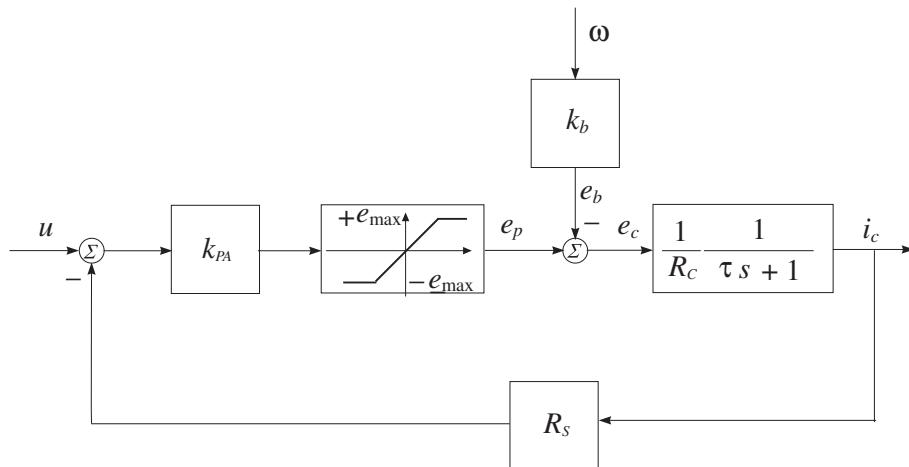
$$t_m = k_t i_c,$$

където k_t е моментната константа на двигателем и i_c е токът през звуковата намотка.

Звуковата намотка има съпротивление R_{coil} и индуктивност L_{coil} . Последователно на звуковата намотка е включено допълнително измервателно съпротивление R_s , за да се приложи обратна връзка от изхода на усилвателя по мощност. Следователно проводимостта на звуковата намотка се описва с предавателната функция

$$G_{vca}(s) = \frac{i_c(s)}{e_c(s)} = \frac{1/R_c}{\tau s + 1},$$

където e_c е входното напрежение на звуковата намотка, $\tau = L_{coil}/R_c$ и $R_c = R_{coil} + R_s$.



Фигура 11.3: Блок-схема на усилвателя по мощност със звукова намотка

Блок-схемата на усилвателя на мощност със звукова намотка е показана на фиг. 11.3. Входът на звуковата намотка е разликата $e_c = e_p - e_b$, където e_p е

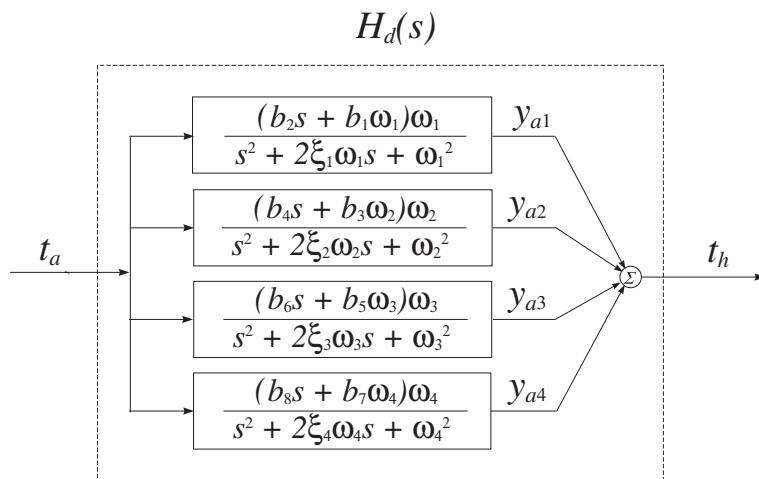
изходното напрежение на усилвателя, а $e_b = k_b \omega$ е обратното електродвижещо напрежение (е.д.н.), което се генерира при движението на намотката в магнитното поле. Тъй като напрежението на насищане на усилвателя е e_{\max} , при отсъствие на обратно е.д.н. усилвателят ще се насища при входно напрежение по-голямо от e_{\max}/k_{PA} . При изследването на линеаризираната система насищането на усилвателя се пренебрегва.

Дължината на дъгата, съответстваща на ъгъл на завъртане на ръката Θ , е равна на $R\Theta$. За малки стойности на Θ броят на пътечките, съдържащи се в дъгата, е $R \cdot \Theta \cdot tpm$. Това дава изходен сигнал $y = R \cdot tpm \cdot k_y \cdot \Theta$.

На следващата стъпка вземаме предвид високочестотните резонанси на слободната съвместна колебание, представени с предавателната функция $H_d(s)$. В дадения случай $H_d(s)$ се състои от четири резонанса и се получава като

$$H_d(s) = \sum_{j=1}^4 \frac{b_{2j}\omega_j s + b_{2j-1}\omega_j^2}{s^2 + 2\xi_j\omega_j s + \omega_j^2}$$

(вж. фиг. 11.4).



Фигура 11.4: Предавателни функции на резонансите

Тук ω_j , ξ_j и b_{2j} , b_{2j-1} са съответно резонансната честота, коефициентът на затихване и свързващите коефициенти на j -тия резонанс, за $j = 1, \dots, 4$. Резонансните параметри обикновено се определят експериментално и техните стойности за разглежданата следяща система са показани в табл. 11.2.

Важно е да се отбележи, че всички параметри на модела са известни с някакви допуски и могат да варират с промяната на работните условия и с времето.

Таблица 11.2: Резонансни параметри и допуски

Пара- метър	Описание	Стойност	Единици	Допуск
ω_1	резонас на лагера на оста	$2\pi 50$	rad/s	$\pm 5.0\%$
ω_2	първи резонанс на усукване	$2\pi 2200$	rad/s	$\pm 12.0\%$
ω_3	втори резонанс на усукване	$2\pi 6400$	rad/s	$\pm 8.0\%$
ω_4	първи резонанс на люлеење	$2\pi 8800$	rad/s	$\pm 15.0\%$
b_1	връзка на първия резонанс	0.006	–	$\pm 7.0\%$
b_2	връзка на първия резонанс	0	1/s	$\pm 7.0\%$
b_3	връзка на втория резонанс	0.013	–	$\pm 10.0\%$
b_4	връзка на втория резонанс	-0.0018	1/s	$\pm 7.0\%$
b_5	връзка на третия резонанс	0.723	–	$\pm 5.0\%$
b_6	връзка на третия резонанс	-0.0015	1/s	$\pm 10.0\%$
b_7	връзка на четвъртия резонанс	0.235	–	$\pm 5.0\%$
b_8	връзка на четвъртия резонанс	-0.0263	1/s	$\pm 10.0\%$
ξ_1	затихване на първия резонанс	0.05	–	$\pm 5.0\%$
ξ_2	затихване на втория резонанс	0.024	–	$\pm 8.0\%$
ξ_3	затихване на третия резонанс	0.129	–	$\pm 10.0\%$
ξ_4	затихване на четвъртия резонанс	0.173	–	$\pm 10.0\%$

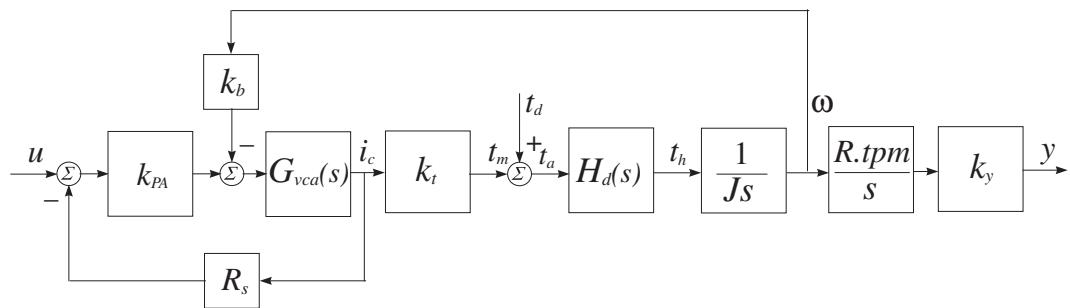
Също така, затворената система може да е твърде чувствителна към външното смущаващо въздействие t_d и шума при измерване на положението η . Двата фактора водят до действителна динамика на системата, която е далече от динамиката на номиналната система. Ето защо е необходимо да се използват методи за синтез, които осигуряват желаната устойчивост и качество на затворената система в присъствието на неопределени параметри, шумове и смущаващи въздействие.

11.2 Получаване на модела на неопределеността

За да се приложат методи за синтез на робастно управление, трябва да разполагаме с модел на обекта, който включва неопределените параметри. Както се вижда от табл. 11.1 и табл. 11.2, общият брой на неопределените параметри е над 25, което усложнява анализа и синтеза на следящата система на твърдия диск. В настоящето изследване ще бъдат взети предвид само тези неопределени параметри, които най-силно влияят върху поведението на затворената система.

Чрез функцията `ureal` се дефинират реалните неопределени параметри

$$J, K_t, K_y, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4.$$



Фигура 11.5: Блок-схема на обекта

Блок-схемата на обекта е показана на фиг. 11.5.

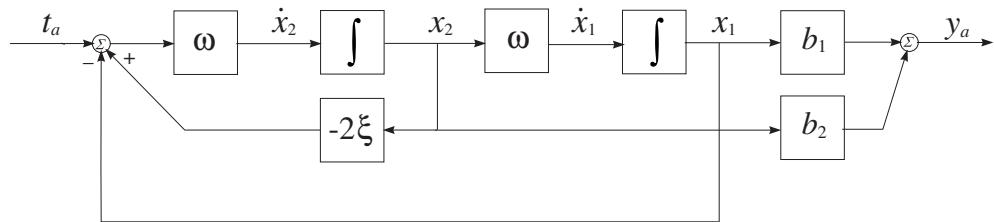
Нека разгледаме най-напред извеждането на модела на неопределеността на резонансите. Всичките четири резонанси имат подобни предавателни функции. Моделът с неопределеност може да се получи по различен начин. Така например, въз основа на представянето, показано на фиг. 11.4, може да се използва функцията `tf`, за да се получи неопределената предавателна функция на всеки един от резонансите. В този случай, обаче, неопределененият параметър ω се повтаря пет пъти, което води до голям брой неопределени параметри в модела. Това усложнява много анализа и особено синтеза на системата. Ето защо в случая се използва представяне в пространство на състоянието, при което ω се повтаря само два пъти.

Моделът на резонанса в пространство на състоянията е

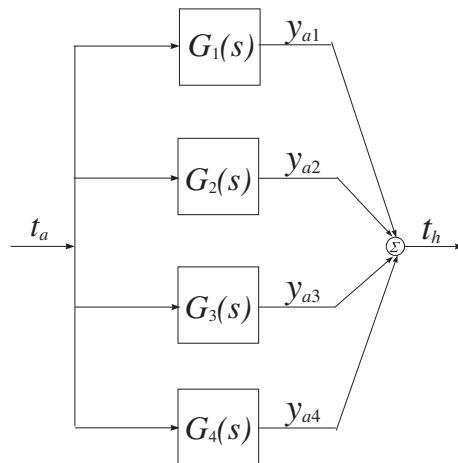
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega x_2, \\ \dot{x}_2 &= \omega(-x_1 - 2\xi x_2 + t_a), \\ y_a &= b_1 x_1 + b_2 x_2.\end{aligned}$$

Блок-схемата, съответстваща на уравненията на състоянието на резонанс, е показана на фиг. 11.6. Неопределеният модел на резонанса в случая се получава с помощта на функцията `iconnect`. В този модел неопределеният параметър ω се повтаря два пъти.

Паралелното съединение на четирите резонанса, което има предавателна функция $H_d(s)$, е показано на фиг. 11.7.



Фигура 11.6: Блок-схема на резонанс



Фигура 11.7: Паралелно съединение на четирите резонанса

След получаването на предавателната функция на резонансите, моделът на обекта се извежда с помощта на функцията `iconnect`, като се използва блок-схемата, показана на фиг. 11.5. Полученият модел е от 11-ти ред и има 11 независими неопределени параметри, като 4 от тях (ω_1 , ω_2 , ω_3 и ω_4) се повтарят по два пъти, така че общият брой на неопределените параметри става 15. Моделът на неопределеността на следящата система на твърдия диск се получава с M-файла `mod_hdd.m` и се записва в променливата G .

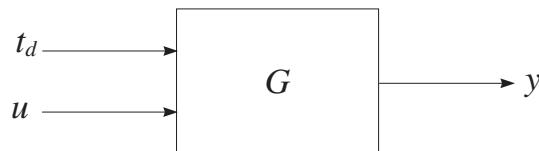
Моделът на твърдия диск има два входа и един изход (фиг. 11.8).

Нека въведем представянето

$$G = [G_d \ G_u],$$

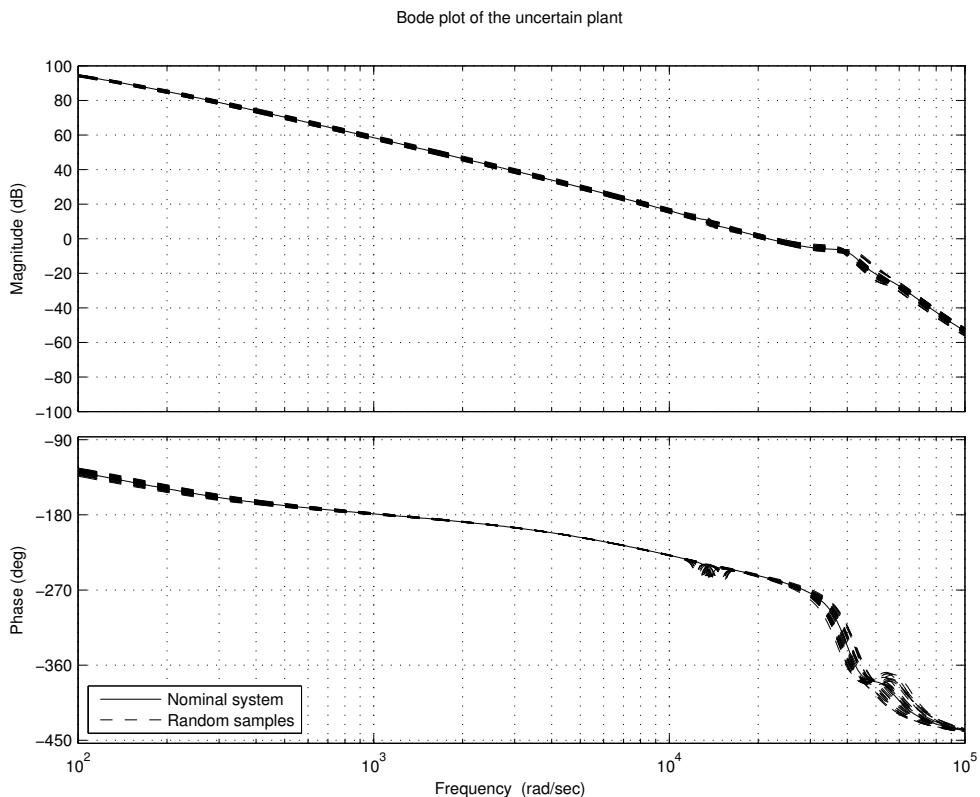
така че

$$y = G_d t_d + G_u u,$$



Фигура 11.8: Блок-схема на твърдия диск, разглеждан като обект на управление

където G_d и G_u са съответно скаларните предавателни функции на обекта по смущаващо и управляващо въздействие.



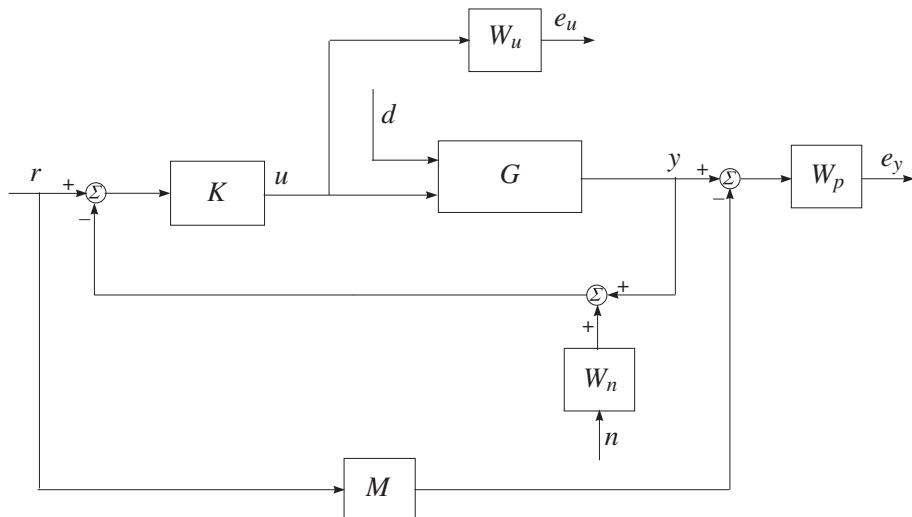
Фигура 11.9: Честотни характеристики на твърдия диск с неопределени параметри

На фиг. 11.9 са показани амплитудно-честотните и фазо-честотните характеристики на твърдия диск, получени от предавателната функция G_u за случаини

стойности на неопределените параметри.

11.3 Изисквания към качеството на затворената система

Синтезът на управляващо устройство на следящата система на твърдия диск ще бъде разгледан най-напред в непрекъснатия случай. Най-доброто възможно качество се получава в непрекъснатия случай и то може да се разглежда като граница за синтез в дискретния случай. Също така, в непрекъснатия случай е по-лесно да се намерят подходящи тегловни функции, които след това могат да се използват и в дискретния случай.



Фигура 11.10: Блок-схема на затворената система с изисквания към качеството

Блок-схемата на затворената система, която включва структурата на обратната връзка и управляващото устройство, както и елементите, представящи изискванията към качеството, е показана на фиг. 11.10.

Системата има задание (r), входно смуздаващо въздействие (d), шум (n) и два изхода (e_y и e_u), характеризиращи качеството. Системата M е идеалният модел, към който трябва да се приближава затворената система. Предавателната матрица на обекта, съдържащ неопределеност, е означена с G . Изискването към качеството е предавателната матрица от r , d и n към e_y и e_u да е малка в смисъла на нормата $\|\cdot\|_\infty$ за всички възможни стойности на неопределените параметри.

Сигналът на шума по положение се получава чрез преминаване на сигнала с единична норма n през тегловната предавателна функция W_n . Предавателните матрици W_p и W_u се използват за отразяване на относителното значение на различните честотни диапазони, за които се изисква качеството. Следователно, изискването към качеството може да се преформулира така, че нормата $\|\cdot\|_\infty$ на предавателната матрица от r, d и n към e_y и e_u да е по-малка от 1.

Възможно е да се покаже, че

$$\begin{bmatrix} e_y \\ e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p(S_o G_u K - M) & W_p S_o G_d & -W_p S_o G_u K W_n \\ W_u S_i K & -W_u K S_o G_d & -W_u K S_o W_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}, \quad (11.1)$$

където $S_i = (I + KG_u)^{-1}$, $S_o = (I + G_u K)^{-1}$ са съответно входната и изходната чувствителности. В (11.1) е използван фактът, че $S_i K = K S_o$. Отбележете, че $S_o G_d$ е предавателната функция от d към y .

Разглежданият критерий е подобен на обичайната задача за оптимизиране на смесената S/KS чувствителност и позволява да се удовлетворят изискванията за робастна устойчивост и робастно качество, включвайки изискванията за качество в еталонния модел M . Шестте функции, които трябва да се минимизират, са описани в табл. 11.3.

Таблица 11.3: \mathcal{H}_∞ функции, които трябва да се минимизират

Функция	Описание
$W_p(S_o G_u K - M)$	Претеглена разлика между идеалната и реалната затворена система
$W_p S_o G_d$	Претеглена чувствителност към смущаващото въздействие
$W_p S_o G_u K W_n$	Претеглена чувствителност към шума
$W_u S_i K$	Претеглено управляващо въздействие, дължащо се на заданието
$W_u K S_o G_d$	Претеглено управляващо въздействие, дължащо се на смущението
$W_u K S_o W_n$	Претеглено управляващо въздействие, дължащо се на шума

Задачата за синтез на следящата система на дисковото запаметяващо устройство е да се намери линейно управляващо устройство $K(s)$ с обратна връзка по изхода, което да осигури следните свойства на затворената система.

Номинално качество:

Затворената система постига номинално качество, ако критерият за качество се удовлетворява за номиналния модел на обекта.

Критерият за номинално качество е да се удовлетвори неравенството

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p(S_o G_{u \text{ nom}} K - M) & W_p S_o G_{d \text{ nom}} & -W_p S_o G_{u \text{ nom}} K W_n \\ W_u S_i K & -W_u K S_o G_{d \text{ nom}} & -W_u K S_o W_n \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1, \quad (11.2)$$

където предавателните функции $G_{d \text{ nom}}$, $G_{u \text{ nom}}$ са получени за номиналните стойности на параметрите на обекта.

Робастна устойчивост:

Затворената система постига робастна устойчивост, ако затворената система е робастно устойчива за всяка възможна динамика на обекта G .

Робастно качество:

Затворената система трябва да остава вътрешно устойчива за всяко G и освен това критерият за качество

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p(S_o G_{u \text{ nom}} K - M) & W_p S_o G_{d \text{ nom}} & -W_p S_o G_{u \text{ nom}} K W_n \\ W_u S_i K & -W_u K S_o G_{d \text{ nom}} & -W_u K S_o W_n \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (11.3)$$

трябва да се удовлетворява за всяко G . Това означава, че структурираната сингуларна стойност, съответстваща на предавателната матрица от

$$\begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \text{ към } \begin{bmatrix} e_y \\ e_u \end{bmatrix}$$

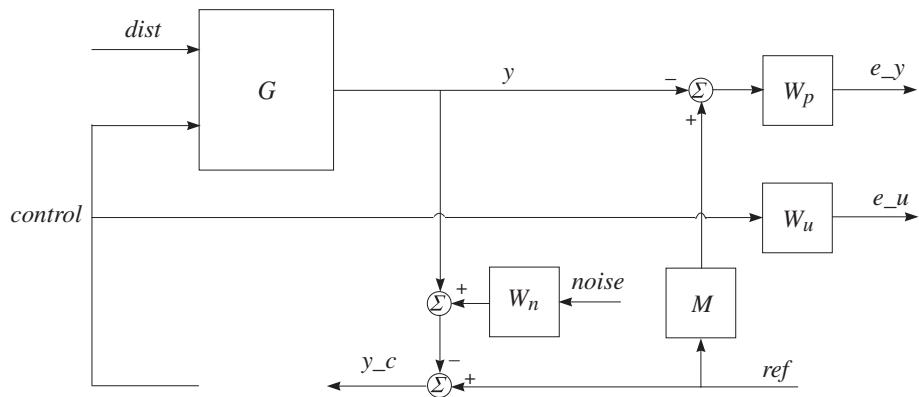
(фиг. 11.10), трябва да е по-малка от 1 по отношение на параметричната неопределеност и комплексната фиктивна неопределеност, свързваща входовете и изходите при анализа на робастното качество.

В допълнение към тези изисквания е желателно синтезираното управляващо устройство да има приемлива сложност, т.е. да е от достатъчно нисък ред.

В съответствие с горните разглеждания, целта на синтеза е да се намери управляващо устройство K , такова, че за всички устойчиви смущения, смутената затворена система да остава устойчива и критерият за качество да се удовлетворява за всички такива смущения.

11.4 Системни съединения

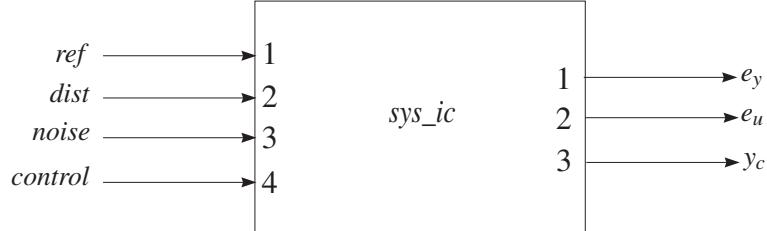
Вътрешната структура на четириивходовата триизходна система, която е запаметена в променливата `sys_ic`, е показана на фиг. 11.11. Заданието, смущението и



Фигура 11.11: Блок-схема на отворената система с изисквания към качеството

шумът са запаметени съответно в променливите *ref*, *dist* и *noise*, а управляващият сигнал – в променливата *control*.

Променливите *ref*, *dist*, *noise*, *y*, *y_c*, *e_y* и *e_u* са скаларни променливи.

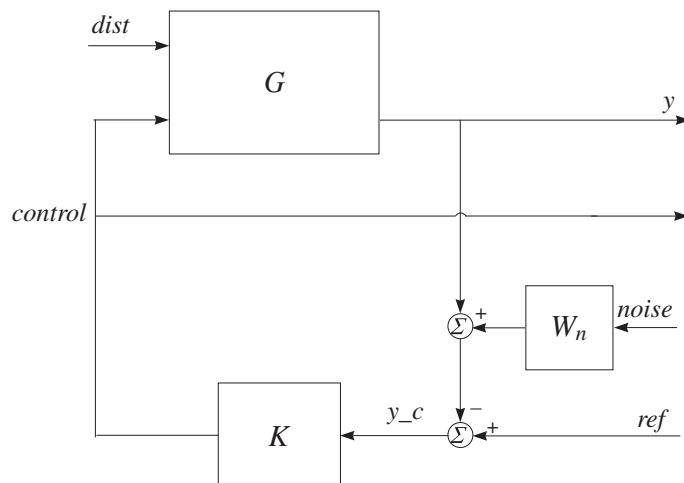


Фигура 11.12: Схематична диаграмма на структурата на отворената система

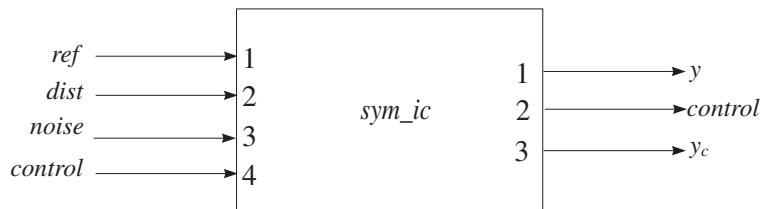
Структурата на отворената система се получава с М-файла *olp_hdd*. Схематичната диаграмма, показваща специфичното входно/изходно подреждане за променливата *sys_ic*, е дадена на фиг. 11.12.

Блок-схемата, използвана при симулирането на затворената система, е показана на фиг. 11.13. Съответната структура на затворената система, която е запаметена в променливата *sim_ic*, се получава с М-файла *sim_hdd*.

Схематичната диаграмма на затворената система, показваща специфичното входно/изходно подреждане за променливата *sim_ic*, е показана на фиг. 11.14.



Фигура 11.13: Блок-схема на затворената система



Фигура 11.14: Схематична диаграмма на структурата на затворената система

11.5 Синтез на непрекъснато управляващо устройство

При синтеза на управляващото устройство се вземат предвид и някои допълнителни ограничения, които са дадени по-долу.

Пик на честотната характеристика на затворената система $< 4 \text{ dB}$

Коефициент на усилване на отворената система $> 20 \text{ dB}$ при 100 Hz

Грешка в установен режим $< 0.1 \mu \text{m}$

Продължителност на преходния процес при изменение на заданието с 1 пътешка $< 1.5 \text{ ms}$

Честотна лента на пропускане $> 1000 \text{ Hz}$

Запас по амплитуда $> 5 \text{ dB}$

Запас по фаза $> 40 \text{ deg}$

Синтезираната система за управление трябва да постига добро потискане на смущаващите въздействия и шумовете. В допълнение на това е необходимо управляващото въздействие да е по-малко от 1.2 V, за да се избегне насищането на усилвателя по мощност.

При синтеза на управляващото устройство ще бъдат използвани μ -синтезът, \mathcal{H}_∞ оптимизацията и \mathcal{H}_∞ синтезът при желани честотни характеристики.

В случая на μ -синтез и \mathcal{H}_∞ оптимизация трябва да се зададат предавателната функция на модела M и тегловните предавателни функции W_n , W_p и W_u .

Предавателната функция на модела се избира така, че преходният процес по отношение на заданието да има пререгулиране по-малко от 20%, а времето на затихване да е по-малко от 1 ms. Един възможен модел, който удовлетворява тези изисквания, е

$$M = \frac{1}{3.75 \times 10^{-9}s^2 + 1.2 \times 10^{-4}s + 1}.$$

Формиращият филтър на шума W_n се определя въз основа на спектралната плътност на шума по положение. В дадения случай той се взема като високочестотния филтър

$$W_n = 6 \times 10^{-4} \frac{0.1s + 1}{0.001s + 1},$$

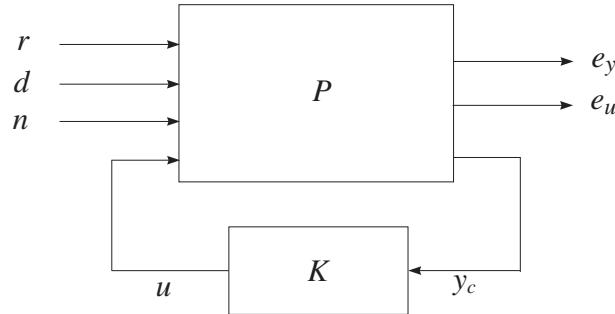
чиито изход има съществено спектрално съдържание над 500 Hz. За този формиращ филтър шумът по положение е само 0.6 mV в нискочестотния диапазон, но той става 60 mV във високочестотния диапазон, което съответства на грешка по положение, равна на 5% от разстоянието между съседни пътечки.

Тегловните функции на качеството W_p и W_u се избират с цел да се осигури приемлив компромис между номиналното качество и робастното качество на затворената система. Те се избират в процеса на μ -синтеза, тъй като този метод за синтез позволява да се постигне максимално качество на неопределената затворена система.

μ -синтез

При μ -синтеза ще бъде взета предвид неопределеността само в модела на твърдото тяло, т.е., разглежда се само неопределеността в параметрите k_t , J и k_y . Включването на неопределеността в резонансите води до това, че $D - K$ итерациите не могат да се сходят и затова тази неопределеност се пренебрегва при синтеза. Това потвърждава изказаното по-горе съображение, че наличието на резонанси води до трудности при синтеза на управляващото устройство. Резонансиите, обаче, се включват с техните номинални стойности в динамиката на обекта, а

заедно с неопределеността се вземат предвид при анализа на затворената система в т. 11.6.



Фигура 11.15: Блок-схема на затворената система с μ -управляващо устройство

Блок-схемата на затворената система, използвана при μ -синтеза, е показана на фиг. 11.15. Нека означим с $P(s)$ предавателната матрица на четириходовата триизходна отворена система. Тази матрица се получава от структурата на отворената система `sys_ic` с команда

```
mu_ic = usubs(sys_ic, 'w1', 'nom', 'w2', 'nom', 'w3', 'nom', 'w4', 'nom', ...
                 'z1', 'nom', 'z2', 'nom', 'z3', 'nom', 'z4', 'nom')
```

и се записва в променливата `mu_ic`. При изпълнението на тази команда параметрите $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ и ξ_4 се заместват с техните номинални стойности. Предавателната матрица $P(s)$ може да се представи като горното линейно-дробно преобразувание

$$P = F_u(P_{nom}, \Delta_r),$$

където матрицата P_{nom} е номиналната предавателна матрица, а Δ_r съдържа трите неопределености в модела на твърдото тяло. Робастното качество на затворената система се разглежда по отношение на блоковата неопределеност

$$\Delta_P := \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_r & 0 \\ 0 & \Delta_F \end{bmatrix} : \Delta_r \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \Delta_F \in \mathbb{C}^{3 \times 2} \right\},$$

където вторият блок Δ_F е фиктивна комплексна неопределеност, която свързва входовете и изходите на затворената система. За да се удовлетвори изискването за робастно качество, е необходимо да се намери стабилизиращо управляващо устройство $K(s)$, такова, че за всяка честота $\omega \in [0, \infty]$ структурираната сингуларна стойност да удовлетворява условието

$$\mu_{\Delta_P}[F_L(P_{nom}, K)(j\omega)] < 1.$$

Изпълнението на това условие гарантира робастното качество на затворената система, т.e.

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p(S_o G_u K - M) & W_p S_o G_d & -W_p S_o G_u K W_n \\ W_u S_i K & -W_u K S_o G_d & -W_u K S_o W_n \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1. \quad (11.4)$$

μ -синтезът се осъществява с М-файла `ms_hdd`. Трябва да се има предвид, че робастното качество, постигнато по време на $D - K$ итерациите, е само по отношение на неопределенностите в модела на твърдото тяло, тъй като само тези неопределеноности се отчитат при синтеза. Ето защо трябва да се извърши допълнителен анализ на робастната устойчивост и робастното качество, който взема предвид и останалите неопределеноности.

Изискванията към качеството на затворената система са отразени в тегловната функция на качеството $W_p(s)$. За сравнение, при синтеза се използват три тегловни функции на качеството. Те са

$$W_{p1}(s) = 10^{-4} \frac{s^2 + 8 \times 10^4 s + 10^8}{s^2 + 7 \times 10^4 s + 2.5 \times 10^4},$$

$$W_{p2}(s) = 10^{-4} \frac{s^2 + 4 \times 10^5 s + 2.5 \times 10^9}{s^2 + 3.9 \times 10^5 s + 6.25 \times 10^5},$$

и

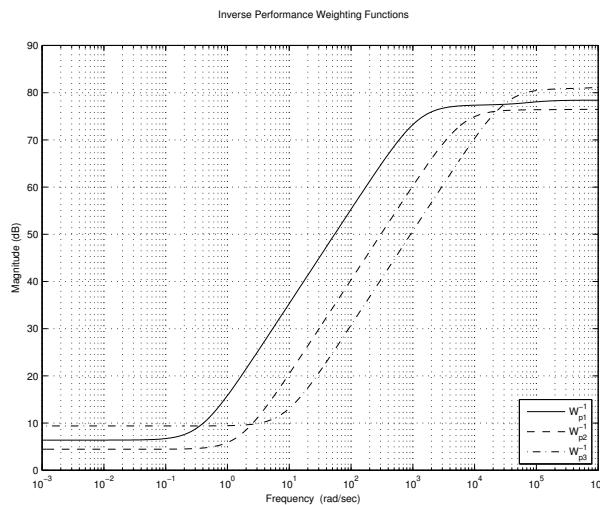
$$W_{p3}(s) = 10^{-4} \frac{s^2 + 1.15 \times 10^6 s + 3.6 \times 10^{10}}{s^2 + 1.05 \times 10^6 s + 9 \times 10^6}.$$

На фиг. 11.16 са показани амплитудно-честотните характеристики, съответстващи на обратните на тези три тегловни функции, т.e. W_{p1}^{-1} , W_{p2}^{-1} и W_{p3}^{-1} . Вижда се, че във всичките три случая целта е да се постигне малка разлика между изходите на системата и модела и малък ефект на смущаващото въздействие върху изходите на системата. Това осигурява добро следене на заданието и малка грешка вследствие на нискочестотни смущаващи въздействия. Промяната на тегловната функция на качеството от W_{p1} към W_{p3} извества характеристиката на обратната тегловна функция надясно (към по-високите честоти), което принуждава системата да следва модела в по-широк честотен диапазон.

Тегловната функция на управлението обикновено се избира като високочестотен филтър, за да се осигури, че управляващото въздействие няма да превиши 1.2 V. В дадения случай се използват следните три тегловни функции:

$$W_{u1}(s) = 10^{-6} \frac{0.385s^2 + s + 1}{10^{-4}s^2 + 2 \times 10^{-3}s + 1},$$

$$W_{u2}(s) = 10^{-6} \frac{0.55s^2 + s + 1}{10^{-4}s^2 + 2.1 \times 10^{-3}s + 1}$$



Фигура 11.16: Честотни характеристики на обратната на W_p

и

$$W_{u3}(s) = 3 \times 10^{-6} \frac{4.05s^2 + s + 1}{10^{-4}s^2 + 2 \times 10^{-3}s + 1}.$$

Тези три управляващи тегловни функции се използват съответно с трите тегловни функции на качеството при μ -синтеза.

Окончателният избор на тегловните функции на качеството и управлението се извършва въз основа на резултатите от съответния μ -синтез. (При първия вариант се използват три $D - K$ итерации, а при втория и третия вариант - по 4 итерации.) Анализът на робастната устойчивост и робастното качество се извършват с файла `mu_hdd`, като се използват командите `robustsatb` и `robustperf`. Резултатите са дадени в табл. 11.4.

От таблицата се вижда, че затворената система постига робастна устойчивост и робастно качество и за трите управляващи устройства. Най-добри резултати, обаче, по отношение на запасите по устойчивост и качество се получават при първото управляващо устройство.

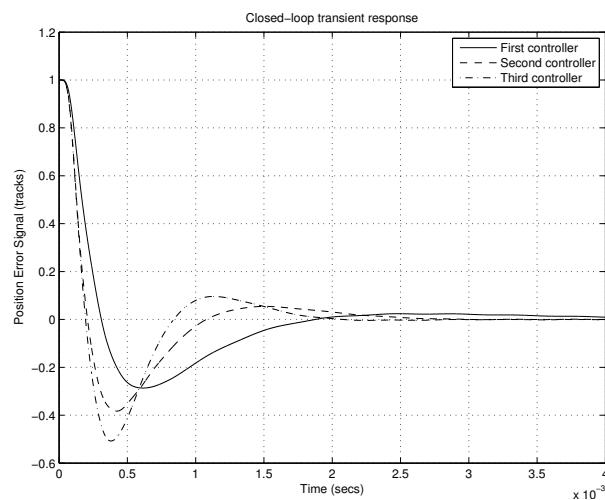
Запасите по амплитуда и фаза в трите случая на синтез се намират от предавателната функция на номиналната отворена система $G_u \text{ nom}K$ с помощта на команда `margin`. Резултатите са дадени в табл. 11.5 и потвърждават правилото, че по-големите запаси по амплитуда и фаза означават по-добра робастност. Преходните процеси на затворената система са показани на фиг. 11.17, за симулирано отклонение от 1 пътчека ($1\mu \text{ m}$) и смущение по товар $t_d = 0.0005 \text{ N m}$.

Таблица 11.4: Робастна устойчивост и робастно качество за трите управляеми устройства

Управляемо устройство	Ред	Робастна устойчивост stabmarg	Робастно качество perfmargin
1	26	2.82	2.33
2	34	2.19	1.94
3	26	1.94	1.19

Таблица 11.5: Запас по амплитуда и фаза за трите управляеми устройства

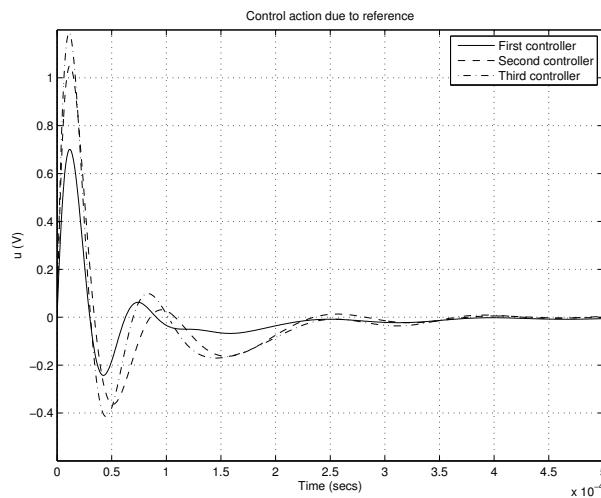
Управляемо устройство	Запас по амплитуда dB	Запас по фаза deg
1	15.1	50.9
2	11.1	44.1
3	10.9	36.6



Фигура 11.17: Преходни процеси за трите μ -управляеми устройства

От фиг. 11.17 се вижда, че първото управляемо устройство дава преходен

процес с най-малко пререгулиране (под 30%), но преходният процес е най-бавен. Третото управляващо устройство дава най-бързия процес, но пререгулирането в този случай е най-голямо (над 50%).

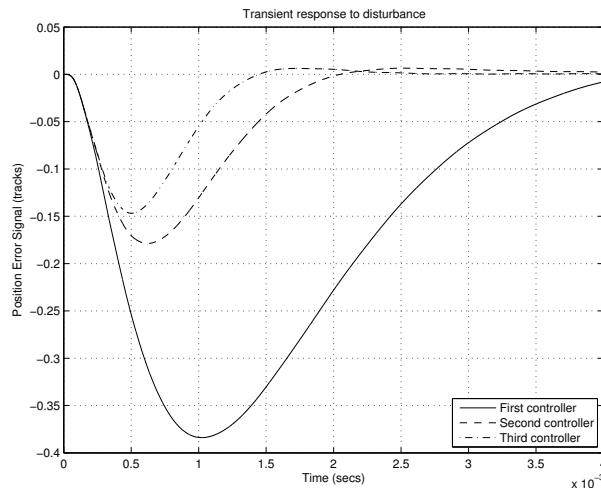


Фигура 11.18: Управляващи сигнали за трите μ -управляващи устройства

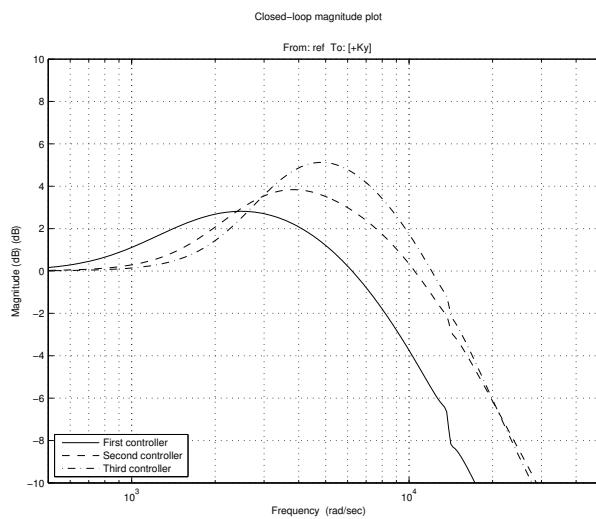
Фиг. 11.18 показва, че в резултат на подходяща настройка на тегловните функции на управлението, всичките три управляващи устройства произвеждат управляващ сигнал, чиято амплитуда е по-малка от 1.2 V.

Сравнението на преходните процеси по смущение, показани на фиг. 11.19, показва, че смущаващото въздействие се потиска най-зле при първото управляващо устройство, а най-добре – при третото. Това е резултат от по-тясната честотна лента на пропускане от 9×10^3 rad/s (измерена при -3 dB) в случая на първото управляващо устройство, сравнена с честотната лента от 15.5×10^3 rad/s в случая на третото управляващо устройство (вж. фиг. 11.20). Обърнете внимание, че най-големият пик на амплитудно-честотната характеристика се получава при третото управляващо устройство, което води до най-голямото пререгулиране на преходния процес.

Резултатите, получени при различни тегловни функции, показват, че преместването на честотната характеристика на обратната тегловна функция надясно води до по-широка честотна лента на затворената система и следователно, до по-бърза динамика на затворената система, но и до по-голямо пререгулиране. В същото време, обаче, това може да намали робастността на затворената система. Ето защо е необходимо да се направи компромис между различните изисквания при синтеза. В дадения случай второто управляващо устройство води до при-



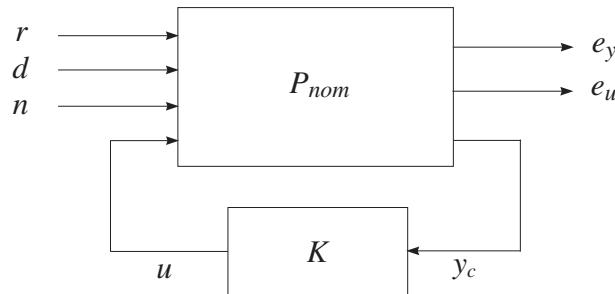
Фигура 11.19: Преходни процеси по смущение за трите μ -управляващи устройства



Фигура 11.20: Амплитудно-честотни характеристики на затворената система за трите μ -управляващи устройства

емлив компромис между изискванията към преходния процес, потискането на смушаващото въздействие и робастността. Ето защо по-нататък тегловните функции W_{p2} и W_{u2} се използват, както при μ -синтеза, така и при \mathcal{H}_∞ синтеза.

\mathcal{H}_∞ синтез



Фигура 11.21: Затворена система с \mathcal{H}_∞ управляващо устройство

Целта на синтеза в този случай е да се намери \mathcal{H}_∞ (суб)оптимално управляващо устройство по изхода за съединението показано на фиг. 11.21, в което неопределенността в обекта се пренебрегва.

Променливата `hin_ic`, която съответства на предавателната матрица P_{nom} на номиналната отворена система, се получава с командния ред

```
hin_ic = sys_ic.Nom
```

\mathcal{H}_∞ оптималното управление минимизира \mathcal{H}_∞ -нормата на $F_L(P_{nom}, K)$ по отношение на предавателната матрица K на управляващото устройство. В дадения случай $F_L(P_{nom}, K)$ (както предавателната матрица в (11.2)) е номиналната предавателна матрица на затворената система от заданието, смущението и шума (променливите `ref`, `dist` и `noise`) към претеглените изходи `e_y` и `e_u`. Синтезът се извършва използвайки M-файла `hinf_hdd.m`, който изчислява (суб)оптимален \mathcal{H}_∞ закон за управление за дадена отворена система. Стойността на γ се избира 10% по-голяма от минимално възможната стойност. Полученото управляващо устройство е от 18-ти ред.

\mathcal{H}_∞ синтез при желани честотни характеристики

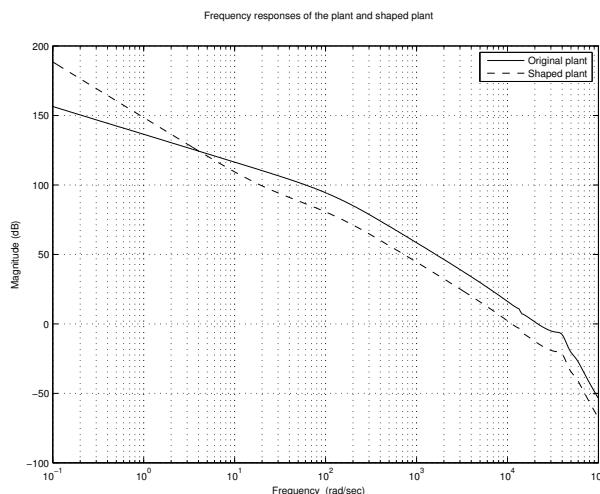
Синтезът на робастна система за управление на твърд диск може да се извърши успешно използвайки процедура за \mathcal{H}_∞ синтез при желани честотни характеристики (СЖЧХ). При \mathcal{H}_∞ СЖЧХ не се използват тегловните функции на качеството, които се прилагат в случаите на μ и \mathcal{H}_∞ синтез. Вместо тях се използват предфилтър W_1 и постфилтър W_2 за да се формира по подходящ начин

честотната характеристика на разширена предавателна функция на отворената система W_2GW_1 .

В дадения случай се използва предфилтър с предавателна функция

$$W_1 = 4 \frac{0.05s + 1}{s}.$$

Кофициентът на усилване 4 се избира, за да се осигури грешка в установен режим, дължаща се на смущаващото въздействие, по-малка от 10% от разстоянието между две съседни пътечки. По-голям кофициент на усилване води до по-малка грешка в установен режим, но до по-лош преходен процес. Постфилърът се взема като $W_2 = 1$.



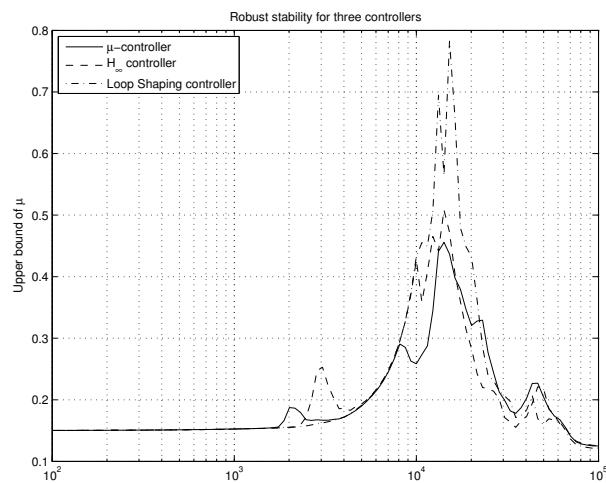
Фигура 11.22: Честотни характеристики на първоначалната и коригираната система

Честотните характеристики на първоначалната и коригираната система са показвани на фиг. 11.22. Синтезът на \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващо устройство се извършва с M-файла `lsh_hdd`, който прилага функцията `ncfsyn`. Редът на получния контролер е 12.

11.6 Сравнение на синтезираните управляващи устройства

Сравнението на затворените системи с μ , \mathcal{H}_∞ и \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващи устройства започваме с анализ на робастната устойчивост и робастното качество.

Робастната устойчивост се тества върху предавателната матрица на затворената система, като изчисляването на структурираната сингулярна стойност $\mu_{\Delta}(\cdot)$ се извършва с команда `mussv`. Матрицата на неопределеността Δ , която е необходима при изчисляването на $\mu_{\Delta}(\cdot)$, се извлича от предавателната матрица на затворената система с команда `lftdata` и има размерност 15×15 (неопределеностите в резонансните честоти участват по два пъти). За да се постигне робастна устойчивост е необходимо максимумът на структурираната сингулярна стойност $\mu_{\Delta}(\cdot)$ по отношение на честотата да е по-малък от 1. Изследването се извършва с файла `rbs_hdd`.

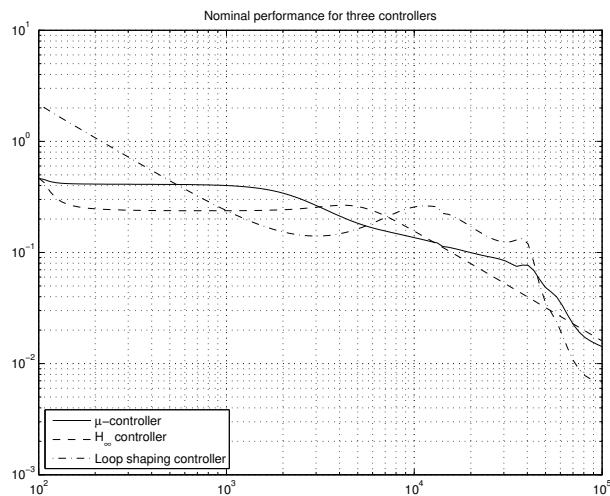


Фигура 11.23: Робастна устойчивост на затворените системи

На фиг. 11.23 са сравнени горните граници на структурираните сингулярни стойности, съответстващи на анализа на робастната устойчивост, на затворените системи с трите управляващи устройства (μ , \mathcal{H}_{∞} и \mathcal{H}_{∞} СЖЧХ).

От фигурата се вижда, че и трите затворени системи постигат робастна устойчивост. Най-добра робастност се получава с μ -управляващото устройство.

Номиналното качество се определя от максималната сингулярна стойност на матрицата от честотните характеристики на затворената система. Сравнението на номиналното качество за трите управляващи устройства, направено на фиг. 11.24, показва, че качеството на системата с \mathcal{H}_{∞} СЖЧХ управляващо устройство в нискочестотния диапазон е много по-лошо от останалите два случая. Това е следствие от факта, че изискванията към качеството, използвани при μ -синтеза и \mathcal{H}_{∞} синтеза, не се използват явно при синтеза на \mathcal{H}_{∞} СЖЧХ управляващото устройство. По-големите стойности на номиналното качество в ниските честоти



Фигура 11.24: Номинално качество на затворените системи

довеждат до по-големи грешки в установен режим.

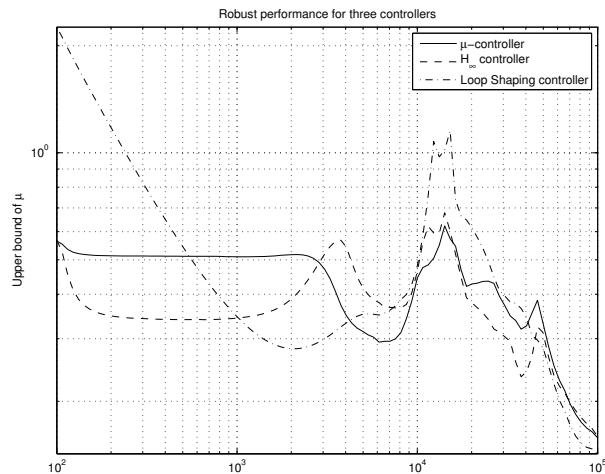
Робастното качество на затворената система също се изследва с помощта на μ -анализа, като отново се използва команда `mussv`. В този случай блокът на неопределеността Δ_P , който се използва при изчисляването на структурираната сингулярна стойност, има размерност 18×17 и се състои от матрицата Δ плюс 3×2 комплексен блок, който отговаря на фиктивна неопределеност и свързва входовете и изходите на затворената система (вж. фиг. 11.15). Робастното качество (по отношение на неопределеността и тегловните функции на качеството) се постига, ако и само ако за всяка честота структурираната сингулярна стойност $\mu_{\Delta_P}(\cdot)$ е по-малка от 1. Изследването се извършва с файла `rbp_hdd`.

Робастното качество за трите управляващи устройства е показано на фиг. 11.25. Отново, \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващото устройство показва големи стойности на μ в нискочестотната област.

Анализът на робастната устойчивост и робастното качество също така разкрива, че най-лошите резултати възникват за честоти, близки до резонансните честоти.

Честотните характеристики на затворените системи с трите управляващи устройства са показани на фиг. 11.26. Вижда се, че системата с \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващо устройство има най-широката честотна лента на пропускане, което осигурява най-бърз преходен процес. Това, обаче, засилва ефекта на шумовете и резонаните.

Честотните характеристики на изходната чувствителност към смущения (фиг.



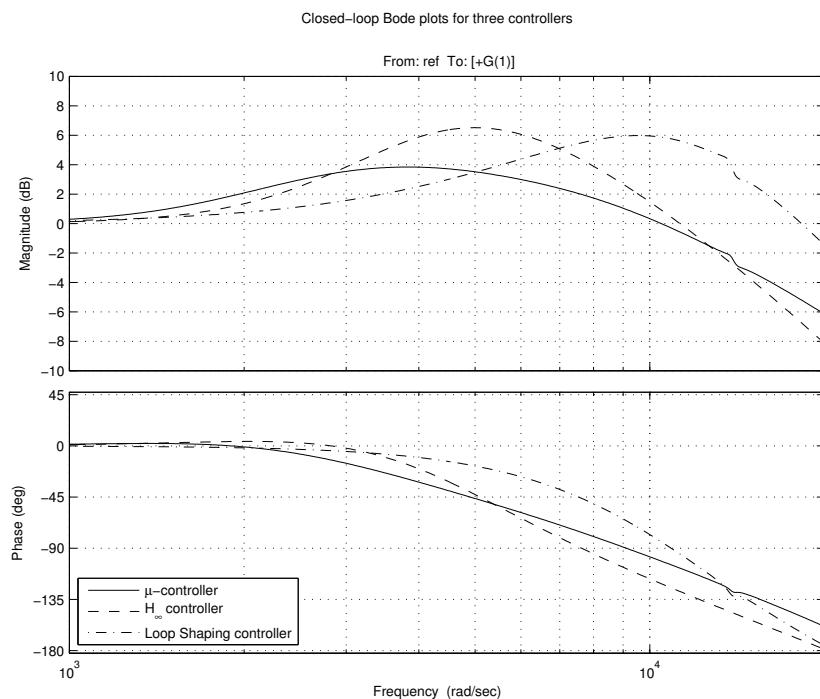
Фигура 11.25: Робастно качество на затворените системи

11.27) показва, че в нискочестотния диапазон влиянието на смущаващото въздействие е най-голямо в случая на \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващо устройство. Подобро потискане на смущенията в този случай може да се постигне избирайки по-голям коефициент на усиливане в предфилтъра. Това, обаче, ще доведе до по-голямо пререгулиране на преходния процес. Чувствителността към смущения в случаите на μ и \mathcal{H}_∞ управляващи устройства достига максимална стойност в честотния диапазон от 10^3 rad/s до 10^4 rad/s, който е вътре в честотната лента на затворената система. Това означава, че затворената система ще е възприемчива към смущаващи въздействия в този честотен диапазон. Интересно е да се отбележи, че чувствителността на системата с \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващо устройство в този честотен диапазон е с 8 dB по-ниска.

Изходната чувствителност към шума е показана на фиг. 11.28. (Обърнете внимание, че чувствителността е по отношение на шума с единична норма, който е вход на формирания филтър на шума.) Най-ниска чувствителност към шума се постига при системата с μ -управляващо устройство, а най-висока – при системата с \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващо устройство.

Честотните характеристики на трите управляващи устройства са показани на фиг. 11.29. Вижда се, че \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващото устройство има много ниско усиливане в диапазона от 40 rad/s до 2000 rad/s, което е причината за слабото потискане на смущенията в този диапазон.

Преходните процеси на затворените системи при номинални стойности на параметрите се получават с файла `clp_hdd`. На фиг. 11.30 са показани преходните

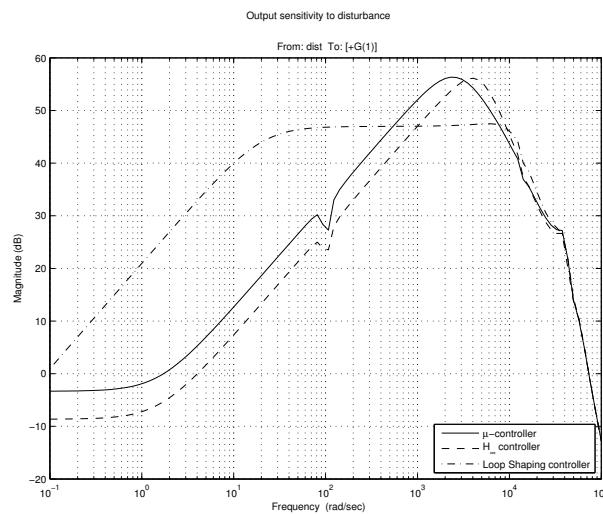


Фигура 11.26: Честотни характеристики на затворените системи

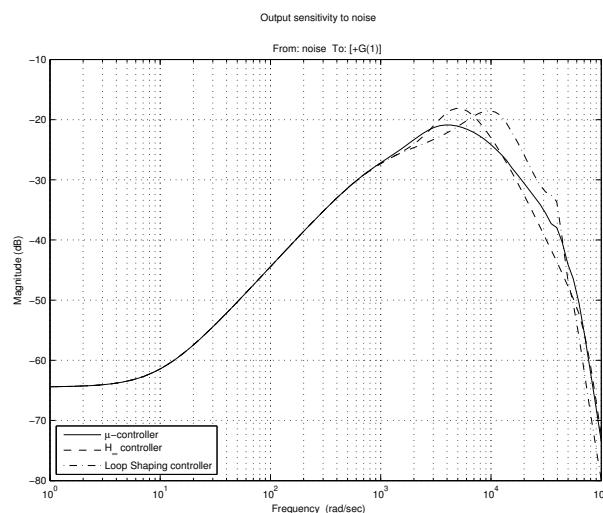
процеси на задание, еквивалентно на разстоянието между 2 съседни пътешки. Докато за \mathcal{H}_∞ и \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващите устройства пререгулирането е около 60%, то е около 38% за μ -управляващото устройство. Продължителността на преходния процес за \mathcal{H}_∞ СЖЧХ, μ и \mathcal{H}_∞ управляващите устройства е съответно 0.8 ms, 1 ms и 1.5 ms.

Управляващите въздействия на трите управляващи устройства са показани на фиг. 11.31. За всички управляващи устройства амплитудата на управляващия сигнал не превишава 1.2 V, както се изисква.

На фиг. 11.32 са показани преходните процеси при стъпаловидно смущаващо въздействие по момент $t_d = 0.0005$ N m (еквивалентно на сила от 9.8×10^{-3} N, приложена към сглобката на дисковите глави). Динамичната грешка за \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващото устройство има най-малкото пререгулиране (10.5%), но има ненулева стойност в установлен режим. Това показва, че в дадения случай СЖЧХ управляващото устройство няма интегриращо действие по отношение на смущаващото въздействие. Динамичната грешка за μ и \mathcal{H}_∞ управляващите устройства е по-малка от 18% от разстоянието между две пътешки, а грешката в установлен



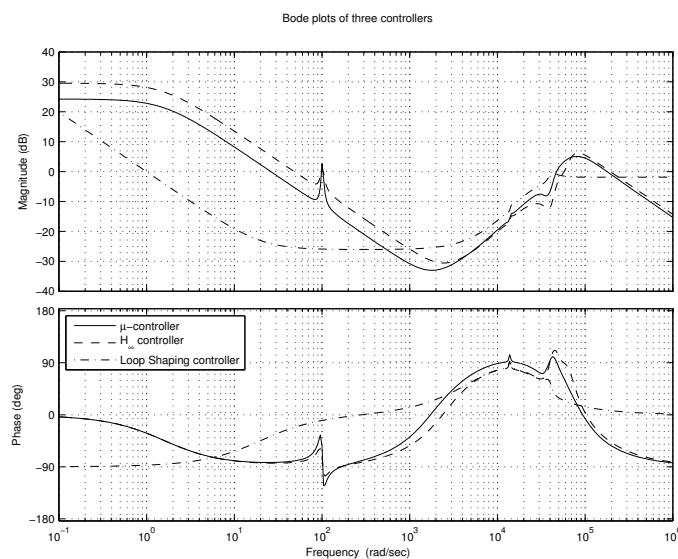
Фигура 11.27: Изходна чувствителност към смущаващото въздействие



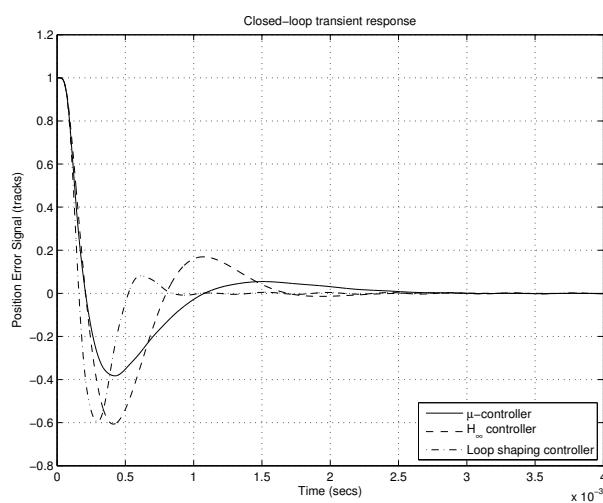
Фигура 11.28: Изходна чувствителност към шума

режим е практически равна на нула.

Изходната реакция към шума при измерване на положението на главите се симулира за шум с амплитуда, която не превиши 60 mV (5% от разстоянието

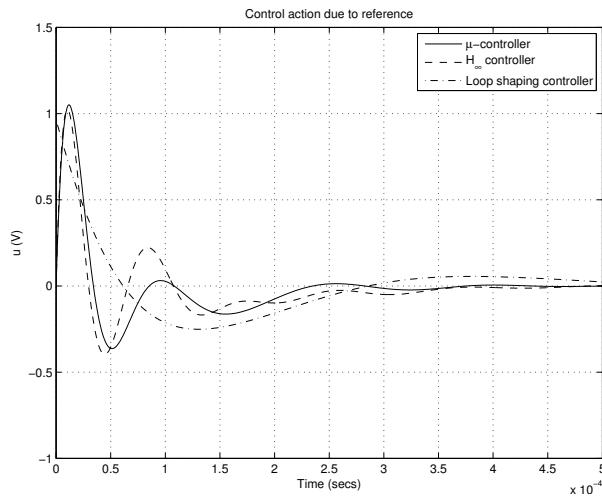


Фигура 11.29: Честотни характеристики на трите управляващи устройства

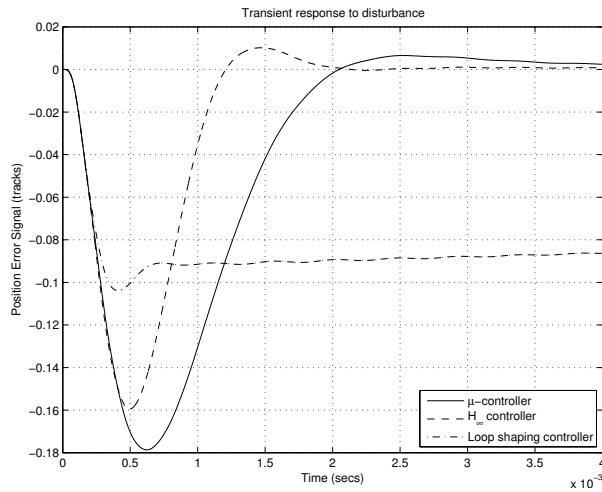


Фигура 11.30: Преходни процеси за трите управляващи устройства

между 2 пътчетки). Този сигнал се получава на изхода на формиращ филтър, чийто вход е избран като последователност от равномерно разпределени в интер-



Фигура 11.31: Управляващи въздействия за трите управляващи устройства



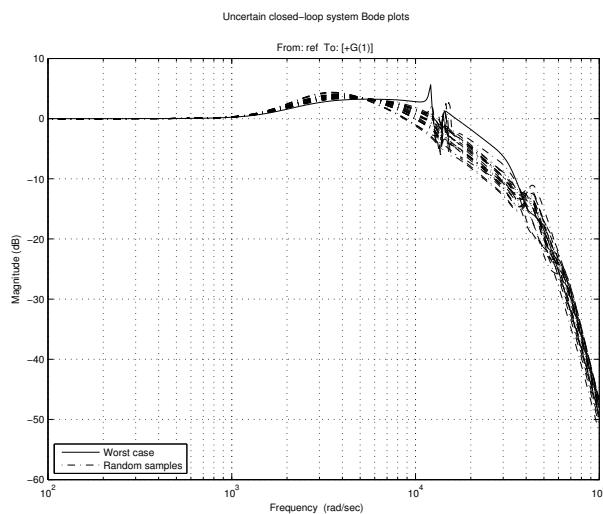
Фигура 11.32: Преходни процеси по смущение за трите управляващи устройства

вала $[-1, 1]$ случайни числа. В случая на μ -управляващото устройство изходът, дължащ се на шума, е по-малък от 0.6% от разстоянието между 2 съседни пътечки. Най-големият изход, дължащ се на шума (1% от разстоянието между 2 пътечки), се получава при \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващото устройство поради най-

широката честотна лента на затворената система в този случай.

Сравнението на робастната устойчивост и робастното качество за трите управляващи устройства, както и сравнението на съответните честотни характеристики и переходни процеси показва, че е целесъобразно да се предпочтете μ управляващото устройство.

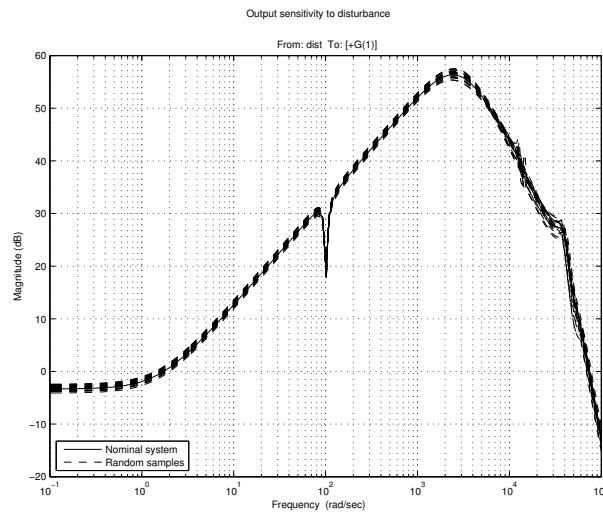
Нека разгледаме свойствата на затворената система с μ -управляващото устройство при изменение на параметрите на обекта.



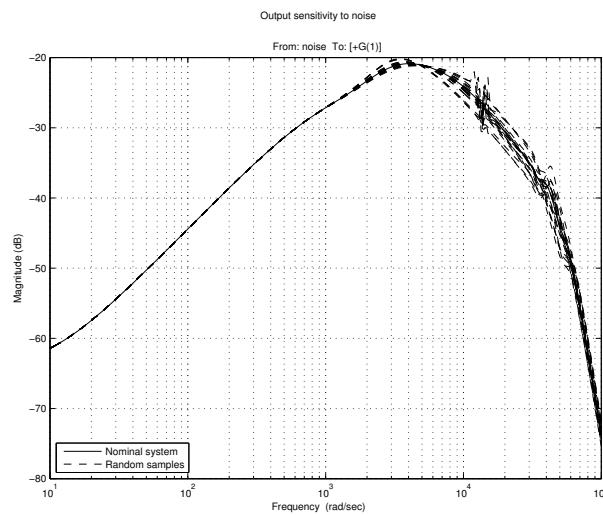
Фигура 11.33: Амплитудно-честотни характеристики при случайни параметри на обекта

На фиг. 11.33 са показани амплитудно-честотните характеристики на затворената система при случайни параметри на обекта. С непрекъсната линия е дадена амплитудно-честотната характеристика, която отговаря на максималното усилване при изменение на параметрите (определена с използване на команда `wcgain`).

На фиг. 11.34 е показана изходната чувствителност, а на фиг. 11.35 – чувствителността към шума за 20 случайни съвкупности на неопределенните параметри на обекта.



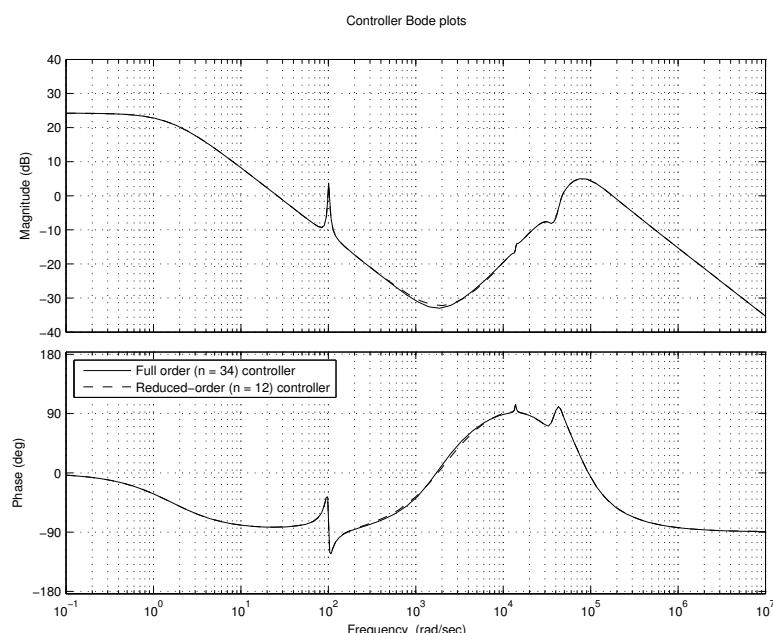
Фигура 11.34: Изходна чувствителност към смущения при случайни параметри на обекта



Фигура 11.35: Изходна чувствителност към шума при случайни параметри на обекта

11.7 Понижаване реда на управляващото устройство

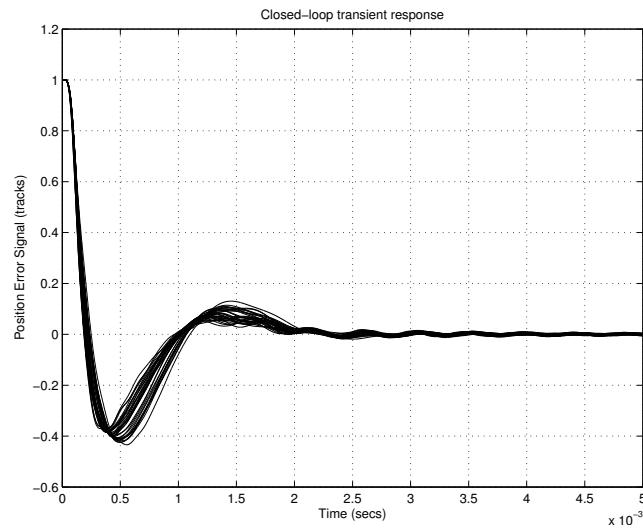
Управляващото устройство, получено при μ -синтеза е първоначално от 34ти ред. Целесъобразно е редът на управляващото устройство максимално да се намали, което ще опрости неговото приложение. За целта се използва команда `reduce`. Експериментите с различни управляващи устройства показват, че редът може да се намали до 12. По-нататъшното намаляване на реда води до влошаване на качеството на затворената система.



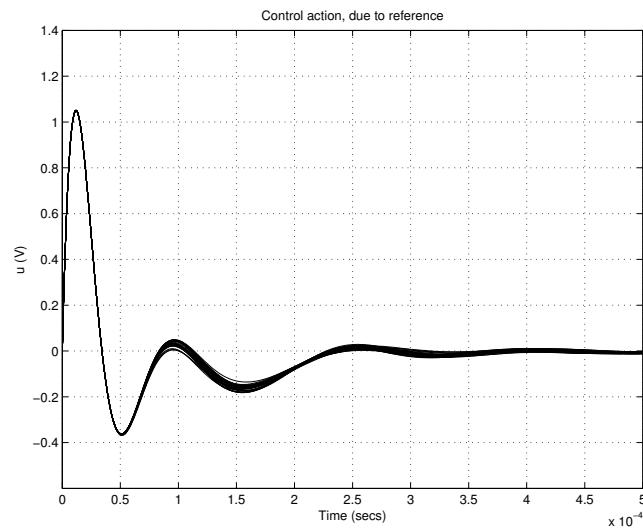
Фигура 11.36: Честотни характеристики на μ -управляващите устройства от пълен и понижен ред

На фиг. 11.36 са сравнени честотните характеристики на управляващите устройства от пълен и понижен ред. Съответните характеристики на практика съвпадат, което показва, че затворените системи имат близки свойства.

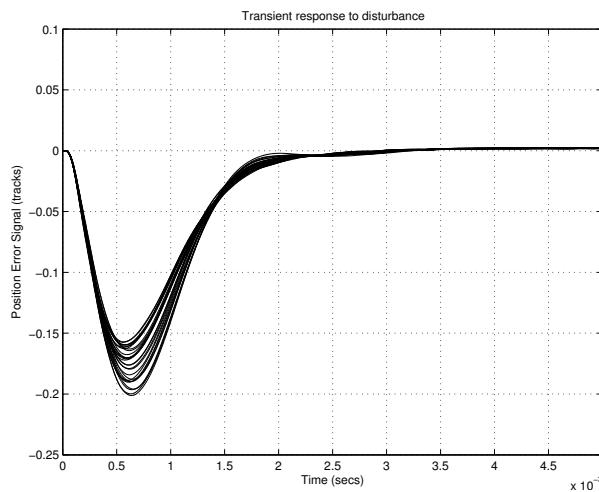
На фиг. 11.37 са показани преходните процеси на затворената система с μ -управляващото устройство от понижен ред за 30 случаини съвкупности на неопределенните параметри, а на фиг. 11.38 и 11.39 са показани съответно управляващото въздействие и преходните процеси по смущение за същите стойности на неопределенните параметри. Преходните процеси са получени с M-файла `mcs_hdd`.



Фигура 11.37: Преходни процеси за μ -управляващото устройство при случайни параметри



Фигура 11.38: Управляващо въздействие на μ -управляващото устройство при случайни параметри



Фигура 11.39: Преходни процеси по смущение за μ -управляващото устройство при случайни параметри

11.8 Синтез на дискретно управляващо устройство

Синтезът на дискретно управляващо устройство може да се извърши по два начина.

При първия подход се дискретизира вече синтезираното управляващо устройство за дадена честота на дискретизацията $f_s = 1/T_s$. Това може да се извърши с M-файла `dcl_hdd.m`, който използва функцията `c2d`. Получената цифрова затворена система се симулира използвайки функцията `sdlsim`. Този подход дава задоволителни резултати при достатъчно висока честота на дискретизацията (например 100 kHz в дадения случай).

При втория подход се дискретизира непрекъснатата отворена система (включително тегловните функции) и се синтезира направо дискретно управляващо устройство, използвайки \mathcal{H}_∞ оптимизация (прилагайки функцията `hinfsyn`) или μ -синтез (прилагайки функцията `dksyn`).

Изборът на честота на дискретизацията в дискретния случай има силно влияние върху качеството на затворената система. Ниска честота на дискретизацията ограничава ширината на честотната лента и влошава динамичните характеристики, такива като потискането на смущенията. От друга страна, увеличаването на честотата на дискретизацията усложнява приложението на управляващото устройство и цената на твърдия диск.

По-нататък се разглежда μ -синтезът на дискретно управляващо устройство

при две честоти на дискретизацията – 24 kHz и 36 kHz. В двата случая се използва една и съща тегловна функция на качеството

$$W_{p2}(s) = 10^{-4} \frac{s^2 + 4 \times 10^5 s + 2.5 \times 10^9}{s^2 + 3.9 \times 10^5 s + 6.25 \times 10^5},$$

която е използвана и при синтеза на непрекъснато управляващо устройство. В зависимост от честотата на дискретизацията се използват тегловни функции на управлението

$$W_{u1}(s) = 10^{-7} \frac{4s^2 + 2s + 1}{2 \times 10^{-3}s^2 + 2 \times 10^{-3}s + 1}$$

(при $f_s = 24$ kHz) и

$$W_{u2}(s) = 10^{-7} \frac{1.04s^2 + 2s + 1}{7.5 \times 10^{-5}s^2 + 2 \times 10^{-3}s + 1}.$$

(при $f_s = 36$ kHz). Това позволява и в двата случая да се получат управляващи сигнали с амплитуда по-малка от 1.2 V.

Формиращият филтър на шума е същият, както в непрекъснатия случай.

Дискретизацията на разширена отворена система при дадената честота на дискретизацията се извършва с M-файла `d1p_hdd.m`.

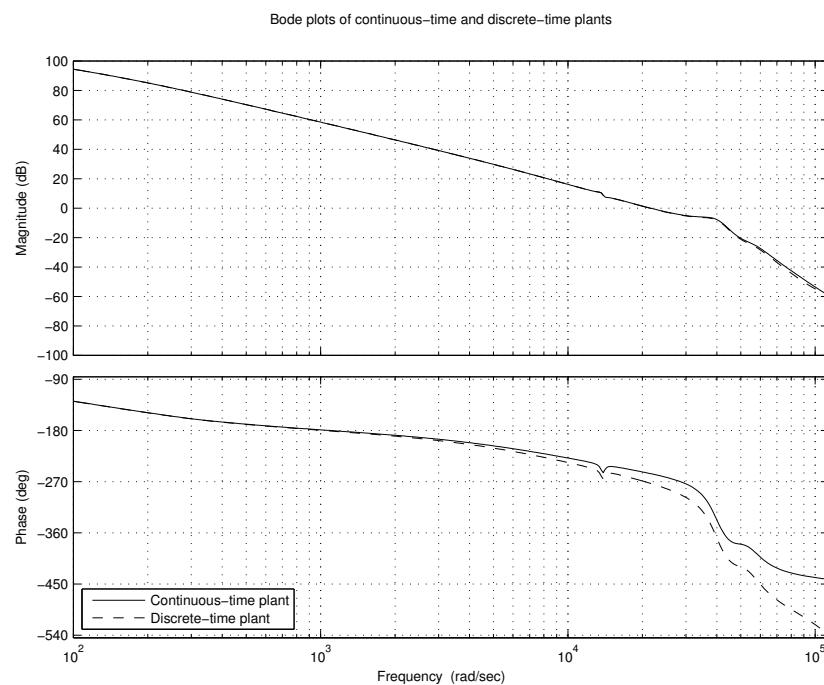
На фиг. 11.40 са показани честотните характеристики на непрекъснатия и дискретизирания при честота $f_s = 36$ kHz обект.

Дискретният μ -синтез се извършва с файла `dms_hdd.m`. Както и в непрекъснатия случай, се вземат предвид само неопределеностите в модела на твърдото тяло.

Резултатите от μ -синтеза при $f_s = 24$ kHz показват, че за избраните тегловни функции затворената система почти постига робастно качество на шестата $D - K$ итерация ($\mu_{\max} = 1.125$) но преходният процес на затворената система е относително бавен и пререгулирането е голямо (60%). За да се получат по-добри резултати е необходимо да се увеличи честотата на дискретизация.

По-долу са представени в повече подробности резултатите от μ -синтеза при $f_s = 36$ kHz. В този случай подходящо управляващо устройство се получава след 6 $D - K$ итерации и максимумът на постигнатото робастно качество μ_{\max} е почти равен на 1. На фигури 11.41 и 11.42 са показани честотните характеристики на μ , получени с M-файла `dmu_hdd.m`, съответно за случая на анализ на робастната устойчивост и анализ на робастното качество. И в двата случая най-лошите резултати се получават около честотата на първия резонанс на усукване 2.2 kHz.

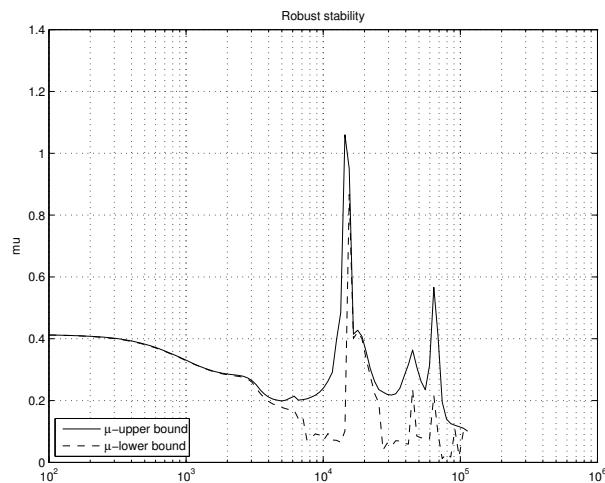
Преходните процеси на затворената система за 30 случаи съвкупности на неопределените параметри се получават с файла `dsl_hdd.m`, в който се използва



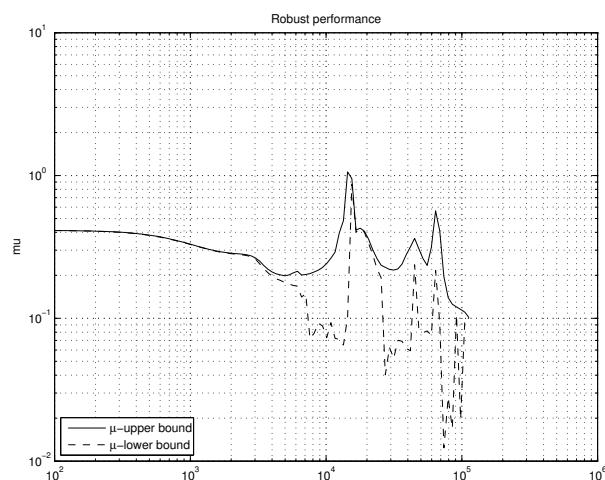
Фигура 11.40: Честотни характеристики на непрекъснатия и дискретизирания при $f_s = 36$ kHz обект

функцията **sdlsim**. Функцията **sdlsim** също така изчислява управляващия сигнал, получен на изхода на цифро-аналоговия преобразувател. Преходният процес на затворената система е показан на фиг. 11.43, а съответното управляващо въздействие – на фиг. 11.44. Пререгулирането за всички стойности на параметрите е по-малко от 50%, а максималната амплитуда на управляващия сигнал е 1 V.

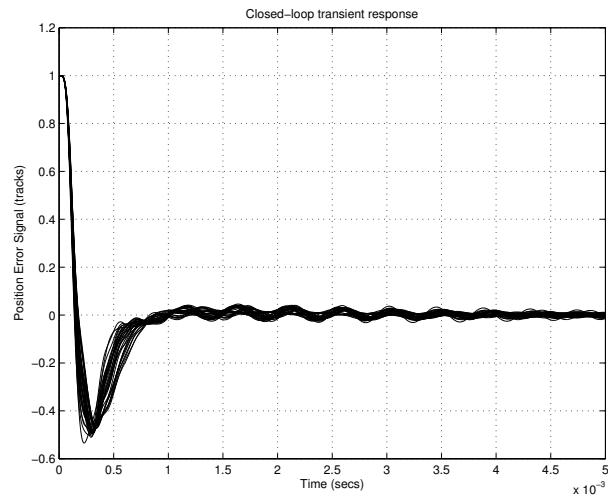
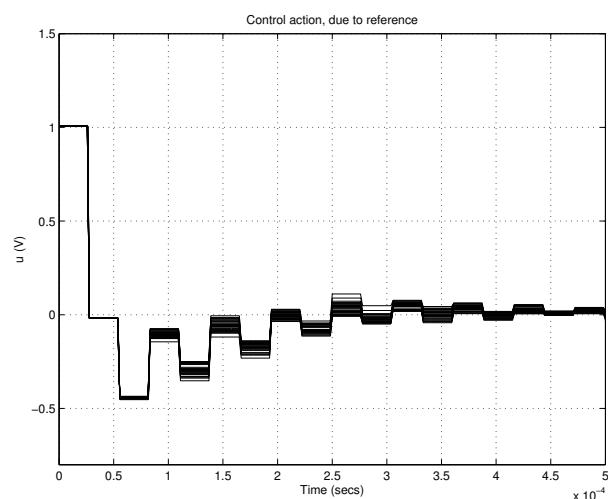
Преходният процес по смущение е показан на фиг. 11.45. Като цяло получението при синтеза резултати са почти толкова добри, колкото резултатите получени с непрекъснатото μ -управляващо устройство.

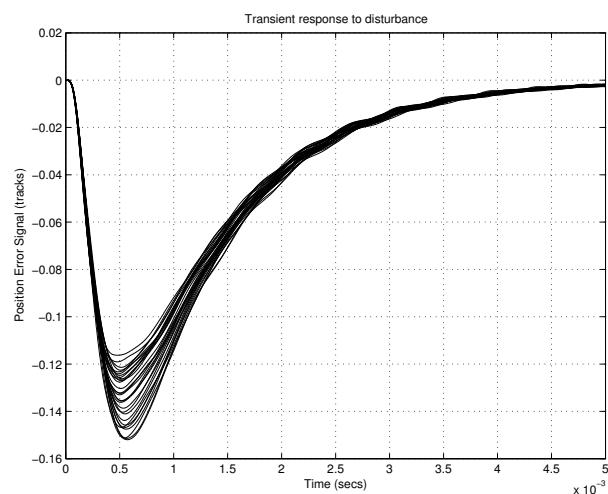


Фигура 11.41: Робастна устойчивост при $f_s = 36$ kHz



Фигура 11.42: Робастно качество при $f_s = 36$ kHz

Фигура 11.43: Преходни процеси при $f_s = 36$ kHzФигура 11.44: Управляващо въздействие при $f_s = 36$ kHz



Фигура 11.45: Преходен процес по смущение при $f_s = 36$ kHz

11.9 Симулиране на нелинейната система

За да се получи реалистична представа за поведението на синтезираната система, нелинейната затворена следяща система се симулира с помощта на Simulink®. За тази цел са разработени два модела, `c_hdd.mdl` за непрекъснатата система и `d_hdd.mdl` за импулсната система. При симулирането се взема предвид насищането на усилвателя, което е пребрегнато при синтеза. И двата модела позволяват да се симулира затворената система за различни задания, смущения и шумове при различни стойности на неопределенните параметри.

Преди да се симулира непрекъснатата система е необходимо да се зададат параметрите на модела използвайки M-файла `init_c_hdd.m`.

Импулсният модел на системата включва дискретното управляващо устройство, 16-битов аналого-цифров преобразувател с максимално входно напрежение 2.5 V и 16-битов цифро-аналогов преобразувател с максимално изходно напрежение 10 V. Предполага се, че дискретното управляващо устройство се прилага върху цифров *сигнален процесор (ЦСП)* с дължина на думата 64 бита. Тези параметри се задават преди симулирането с M-файла `init_d_hdd.m`. Предполага се, че изчисляването на управляващото въздействие изисква един такт на дискретизация T_s .

На фиг. 11.46 е показан Simulink® модела `d_hdd.mdl` на нелинейната импулсна затворена система.

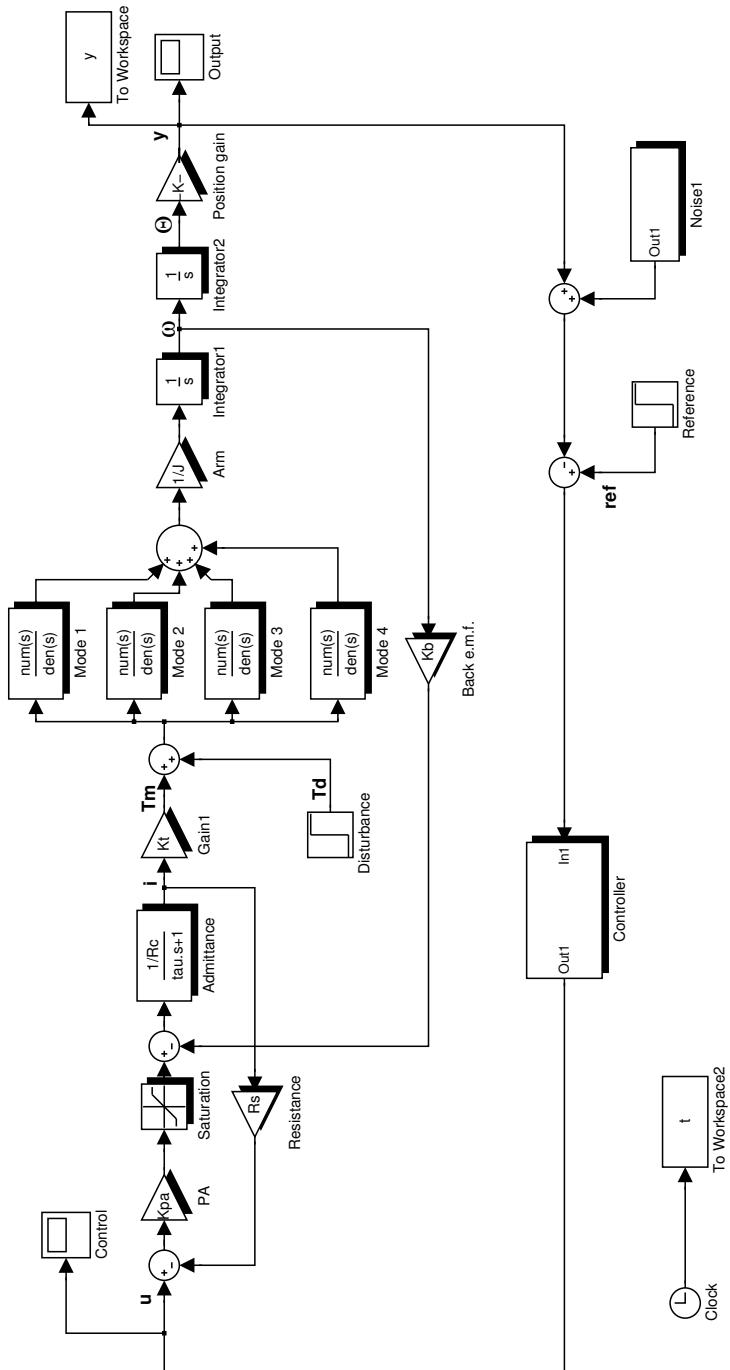
Както в линейния случай, преодните процеси на нелинейната затворена система се получават за симулирано отклонение, равно на разстоянието между 2 съседни пътечки ($1\mu m$) и смущение по момент $t_d = 0.0005$ N m.

На фигури 11.47 и 11.48 са сравнени резултатите от симулирането на непрекъснатата и импулсната системи. Непрекъснатото управляващо устройство е μ -управляващото устройство от понижен ред, получено в т. 11.7, а дискретното управляващо устройство е устройството, синтезирано при честота на дискретизацията 36 kHz.

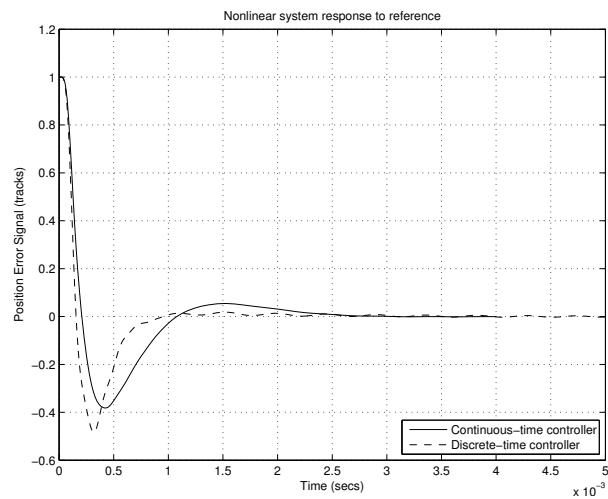
Преодните процеси на нелинейната система са близки до съответните преодни процеси на линейната система вследствие на малките входни сигнали (амплитуда по-малка от 1.2 V).

Необходимо е да се има предвид, че синтезираните управляващи устройства са подходящи за малки задаващи сигнали (еквивалентни на разстоянието между 2 пътечки). При по-големи задания усилвателят се насища и трябва да се приложи подходящ алгоритъм за търсене.

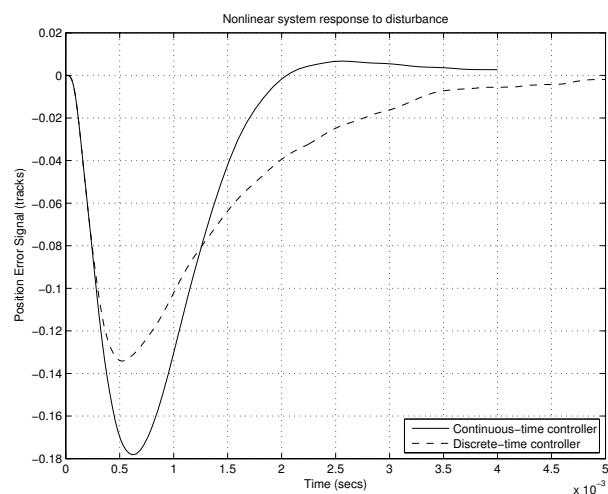
SIMULINK model of the nonlinear sample-data Hard Disk Drive Servo System



Фигура 11.46: Симулационен модел на нелинейната импулсна система



Фигура 11.47: Преходни процеси на нелинейната система



Фигура 11.48: Преходни процеси по смущение на нелинейната система

11.10 Изводи

Опитът, получен при синтеза на следящата система на твърд диск, дава възможност да се направят следните изводи.

- Използването на синтезираните μ , \mathcal{H}_∞ и \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващи устройства дава удовлетворителни резултати по отношение на робастността и качеството. И трите управляващи устройства осигуряват робастна устойчивост. Най-добро робастно качество се постига с помощта на μ и \mathcal{H}_∞ управляващите устройства. Използването на \mathcal{H}_∞ СЖЧХ управляващо устройство дава най-бърз преходен процес и устройството е сравнително най-просто. Това управляващо устройство, обаче, се характеризира с най-лошо качество в нискочестотния диапазон, което води до голяма грешка в установлен режим. В дадения случай най-добър компромис между робастността и изискванията към преходния процес се постига с използване на μ -управляващо устройство, което до известна степен се дължи на специално подбрани тегловни функции.
- Броят на първоначалните неопределени параметри е много голям (повече от 25 в дадения случай). Това усложнява синтеза и увеличава обема на изчисленията. Ето защо е необходимо да се изследва важността на параметрите по отношение на робастността и качеството, за да се намали техния брой до допустима стойност. При анализа на свойствата на затворената система, обаче, е необходимо да се вземат предвид всички неопределеноности, за да се гарантира робастността и качеството на реалната система.
- Редът на полученото при μ -синтеза управляващо устройство зависи от реда на обекта, на тегловните функции и на мащабиращите диагонални матрици. Синтезираното управляващо устройство обикновено е от висок ред, което усложнява приложението му. Ето защо след синтеза е необходимо да се използва понижаване на реда на управляващото устройство. Повечето управляващи устройства, използвани при синтеза на следящите системи на твърди дискове, са от 8-ми до 15-ти ред.
- Доброто потискане на смущенията изисква достатъчно широка лента на пропускане. Това обаче може да доведе до трудности при постигането на робастна устойчивост и робастно качество при наличието на резонанси. Даже резонанси, чиято честота е извън лентата на пропускане, могат да разрушат робастната устойчивост на системата. В такива случаи е необходимо да се увеличи затихването на резонансите, използвайки различни техники за пасивно и активно демпфиране.

- Присъствието на резонанси може да изисква достатъчно високи честоти на дискретизация при използването на дискретно управляващо устройство.
- Необходимо е да се подчертава, че получаването на по-добри резултати по отношение показателите на преходния процес е трудно да се извърши при настоящите параметри на обекти. Ако се поставят по-високи изисквания по отношение на качеството, трябва да се променят конструктивните параметри на твърдия диск, например да се увеличи моментната константа на ДЗМ.

11.11 Задачи

1. Извършете \mathcal{H}_∞ синтез и μ -синтез на непрекъснатата следяща система за управление на твърд диск при зададена предавателна функция на модела

$$M = \frac{1}{3.6 \times 10^{-9}s^2 + 1.0 \times 10^{-4}s + 1}.$$

Извършете сравнение с получените в тази глава резултати по отношение на качеството и робастността на затворената система.

2. За същата предавателна функция на модела извършете μ -синтез на дискретната следяща система. Извършете анализ на качеството и робастността.
3. Извършете синтез на дискретната система при честота на дискретизацията 75 kHz.

Глава 12

РОБАСТНО УПРАВЛЕНИЕ НА МАНИПУЛАТОР С ЕЛАСТИЧНО ЗВЕНО

Манипуляторите с олекотена конструкция притежават редица предимства пред традиционните масивни манипулятори. При извършване на бързи движения, обаче, повишенната еластичност на звената е причина за появя на нежелани механични трептения. Това налага при синтеза на системата за управление да се отчита влиянието на еластичността. Динамичният модел на манипуляторите с еластично звено се характеризира с наличие на слабо демпфирани собствени честоти, неминималнофазовост, неопределеност в параметрите и нелинейност. Тези особености на модела съществено затрудняват потискането на механичните трептения при бързи движения на манипуляторите. Поради силното влияние на неопределеността в модела върху качеството на преходните процеси, за синтеза на управляващи устройства на манипулятори с еластично звено е подходящо да се използват методи от теорията на робастното управление.

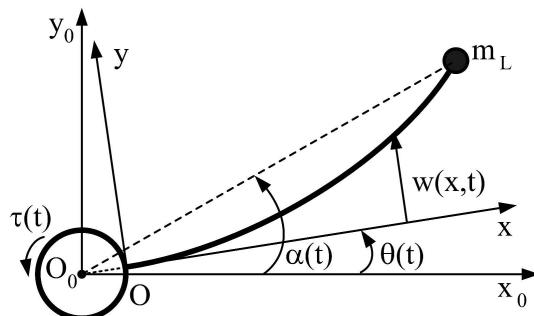
В зависимост от използваните сензори, методите за управление на манипулятори с еластично звено се разделят на две групи: съсредоточено управление и разсредоточено управление. Както при управление на манипулятори с твърди звена, съсредоточените управляващи устройства използват информация от сензори за ставното положение и евентуално за ставната скорост, т.е., за величини, "съсредоточени" в точката, където се прилага двигателният момент. За разлика от тях, в разсредоточените управляващи устройства се използват и обратни връзки по величини, характеризиращи движението на други точки от звеното – например еластичното отклонение на свободния край на звеното, ускорението му и др. За сметка на усложняване на техническата реализация въвеждането на

тези допълнителни обратни връзки дава възможност да се подобри качеството на преходните процеси.

В тази глава методите за анализ и синтез на робастни системи за управление са приложени при проектиране на управляващо устройство на манипулятор с еластично звено. Нелинеен динамичен модел на манипулятора, съставен с използване на подхода, съчетаващ метода на собствените форми и метода на Лагранж, е даден в т. 12.1. В т. 12.2 е изведен модел с неопределени параметри на манипулятора, необходим за целите на робастния анализ и синтез. С помощта на μ -синтеза в т. 12.3 е получено съсредоточено управляващо устройство, използващо обратна връзка по ставното положение. В т. 12.4 са представени резултати от анализа, показващи значителните предимства на синтезираното управляващо устройство пред конвенционалните регулятори. В т. 12.5 е синтезирано разсредоточено μ -управляващо устройство, използващо обратни връзки по ставното положение и ускорението на свободния край на манипулятора, и са сравнени възможностите на съсредоточеното и разсредоточеното μ -управляващи устройства за постигане на желано качество на затворената система. Накрая, в т. 12.6, е дадена задача за синтез на разсредоточено μ -управляващо устройство, използващо обратни връзки по ставното положение и еластичното отклонение на свободния край на манипулятора.

12.1 Динамичен модел на манипулятор с еластично звено

Разглеждаме манипулятор с еластична еднозвенна регионална структура, схематично представен на фиг. 12.1.



Фигура 12.1: Схема на манипулятора

Движението на манипулятора се извършва в хоризонтална равнина. Еластич-

ното звено представлява тънък праволинеен хомогенен прът с постоянно напречно сечение, дължина L , линейна плътност m , модул на линейните деформации E и инерционен момент на напречното сечение I . Полезната товар, хващащта и модулят за локалните движения се моделират като материална точка с маса m_L . Разстоянието от оста на въртене O_0 до точката на закрепване O на еластичното звено към задвижващата част е означено с R . Двигателният момент и масовият инерционен момент на задвижването, приведени към оста O_0 , са съответно $\tau(t)$ и J_a . Въведени са неподвижна $O_0x_0y_0$ и подвижна Oxy координатни системи. Оста Ox на подвижната система съвпада с недеформираната ос на еластичното звено. Приема се, че еластичните отклонения на отделните точки на звеното са перпендикуляри на Ox , лежат в хоризонталната равнина и са малки в сравнение с L . Положението на оста Ox в координатната система $O_0x_0y_0$ се определя с ъгъла $\theta(t)$ (ставния ъгъл), а положението на товара (свободният край на манипулатора) - с ъгъла $\alpha(t)$. Еластичното отклонение на точка от звеното с абсциса x в момента t се означава с $w(x, t)$.

Манипуляторите с еластично звено могат да се разглеждат като механични системи, съставени от идеално твърди тела и тяло с непрекъснато разпределени масови и еластични характеристики, чиито трептения се описват с частно диференциално уравнение. При синтеза на системата за управление е необходимо да се разполага с математичен модел, състоящ се от краен брой обикновени диференциални уравнения. За съставяне на такъв крайномерен модел най-често се използва подходът, съчетаващ метода на собствените форми и метода на Лагранж [5].

Съгласно метода на собствените форми, еластичните премествания се представят чрез крайна сума във вида

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \eta_i(t), \quad (12.1)$$

където с $\varphi_i(x)$ са означени собствените функции (форми), а с $\eta_i(t)$ - обобщените координати. Броят n на включените в сумата обобщени координати и собствени функции се избира така, че да се осигури достатъчна точност на динамичния модел в интересувация ни честотен диапазон.

Собствените честоти ω_i , $i = 1, \dots, n$, на еластичното звено се определят чрез зависимостта

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (12.2)$$

където с β_i , $i = 1, \dots, n$, са означени подредените по големина положителни корени на честотното уравнение

$$1 + \cosh(\beta L) \cos(\beta L)$$

$$+ \frac{m_L}{mL}(\beta L) [\sinh(\beta L) \cos(\beta L) - \cosh(\beta L) \sin(\beta L)] = 0. \quad (12.3)$$

Собствените форми $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, могат да се представят във вида

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \lambda_i \{ [\cosh(\beta_i x) - \cos(\beta_i x)] \\ &- \frac{\cosh(\beta_i L) + \cos(\beta_i L)}{\sinh(\beta_i L) + \sin(\beta_i L)} [\sinh(\beta_i x) - \sin(\beta_i x)] \}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Те удовлетворяват условията за ортогоналност

$$m \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + m_L \varphi_i(L) \varphi_j(L) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

За съставяне на модел с неопределеност на манипулатора е удобно произволните константи λ_i в (12.4) да се изчислят от нормиращата зависимост

$$m \int_0^L \varphi_i^2(x) dx + m_L \varphi_i^2(L) = 1.$$

При извеждане на уравненията на движение на еластичния манипулатор чрез метода на Лагранж като обобщени координати се използват ъгълът θ и величините η_i , $i = 1, \dots, n$. В резултат от прилагане на процедурата на Лагранж се получава следният нелинеен динамичен модел на манипулатора:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_r(\eta) & m_{rf}^T \\ m_{rf} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_r & 0_n^T \\ 0_n & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0_n^T \\ 0_n & C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \eta \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} h_r(\dot{\theta}, \eta, \dot{\eta}) \\ h_f(\dot{\theta}, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_n \end{bmatrix} \tau, \end{aligned} \quad (12.5)$$

където

$$\eta = [\eta_1 \ \cdots \ \eta_n]^T,$$

$$\begin{aligned} m_r(\eta) &= a_0 + \sum_{i=1}^n \eta_i^2, \quad a_0 = J_a + \frac{1}{3}m [(L+R)^3 - R^3] + m_L(L+R)^2, \\ m_{rf} &= [a_1 \ \cdots \ a_n]^T, \\ a_i &= m \int_0^L (x+R) \varphi_i(x) dx + m_L(L+R) \varphi_i(L), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (12.6)$$

$$C_f = diag(c_1, \dots, c_n), \quad c_i = \omega_i^2, \quad i = 1, \dots, n, \quad D_f = diag(d_1, \dots, d_n),$$

$$h_r(\dot{\theta}, \eta, \dot{\eta}) = \sum_{i=1}^n 2\dot{\theta}\dot{\eta}_i\eta_i, \quad h_f(\dot{\theta}, \eta) = [-\dot{\theta}^2\eta_1 \ \cdots \ -\dot{\theta}^2\eta_n]^T,$$

I_n е $n \times n$ единична матрица, 0_n е $n \times 1$ нулев вектор, а членовете $d_r\dot{\theta}$ и $D_f\dot{\eta}$ са въведени за отчитане съответно на вискозното триене в съчленението и на вътрешното триене в еластичната структура.

Ъгловото положение на свободния край на манипулатора се определя чрез зависимостта

$$\alpha = \theta + \arctan \frac{w(L, t)}{L + R}. \quad (12.7)$$

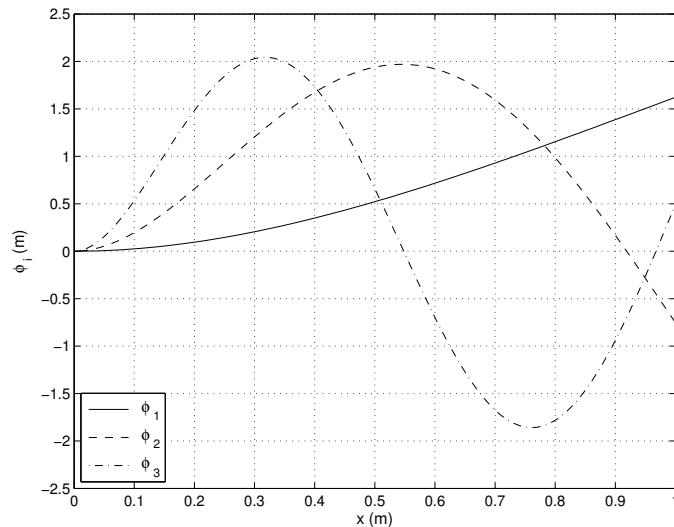
Числените стойности на параметрите на манипулатора са:

$$L = 1 \text{ m}, \quad R = 0.04 \text{ m}, \quad J_a = 0.1 \text{ kg m}^2,$$

$$m = 0.54 \text{ kg/m}, \quad E = 6.9 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad I = 2.67 \times 10^{-10} \text{ m}^4.$$

Стойностите на m , E и I съответстват на звено, направено от алуминий с плътност $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ и правоъгълно напречно сечение с размери $s_1 = 0.05 \text{ m}$ и $s_2 = 0.004 \text{ m}$, като s_2 е в равнината на движение.

Предполага се, че при извършване на дадено движение масата на товара има постоянна, но неизвестна стойност в интервала от 0.15 kg до 0.35 kg , т.e., масата на товара е неопределен параметър с номинална стойност $m_L = 0.25 \text{ kg}$ и максимална относителна неопределеност 40% .



Фигура 12.2: Собствени форми на еластичното звено за $m_L = 0.25 \text{ kg}$

Първите три собствени честоти на еластичното звено, изчислени за номиналната стойност на масата на товара, са $\omega_1 = 12.1 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 99.2 \text{ rad/s}$ и

$\omega_3 = 302.5 \text{ rad/s}$. Графиките на съответните собствени функции, определящи формата на трептене на звеното, са показани на фиг. 12.2. Тъй като третата и останалите собствени честоти имат стойности, много по-високи от честотната лента на затворената система, при синтеза на управляващо устройство ще използваме динамичен модел, в който са включени само първите две обобщени координати $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ на еластичното звено.

Обикновено коефициентите на триене не могат да се определят точно и освен това с течение на времето са възможни промени в стойностите им. Приема се, че коефициентът на триене в съчленението има номинална стойност $d_r = 0.15 \text{ kg m}^2/\text{s}$ и относителна неопределеност 20%, а коефициентите на вътрешно триене за първите две обобщени координати на еластичното звено имат номинални стойности $d_1 = 0.4 \text{ kg m}^2/\text{s}$ и $d_2 = 10 \text{ kg m}^2/\text{s}$ и относителна неопределеност 40%.

При пренебрегване във векторно-матричното уравнение (12.5) на нелинейните членове $\sum_{i=1}^n \eta_i^2$, $h_r(\dot{\theta}, \eta, \dot{\eta})$ и $h_f(\dot{\theta}, \eta)$, чието влияние е сравнително слабо, и полагане $\arctan(z) = z$ в (12.7), тъй като $w(L, t) \ll L$, се получава линеен модел на манипулатора. Предавателните функции на манипулатора с вход двигателния момент τ и изход ставния ъгъл θ и ъгловата координата α , определени за $n = 2$, $m_L = 0.25 \text{ kg}$, $d_r = 0.12 \text{ kg m}^2/\text{s}$, $d_1 = 0.24 \text{ kg m}^2/\text{s}$ и $d_2 = 6 \text{ kg m}^2/\text{s}$, могат да се запишат съответно във вида

$$W_{\theta\tau} = \frac{9.793(s^2 + 0.24s + 145.8)(s^2 + 6s + 9839)}{s(s + 0.2095)(s^2 + 2.067s + 741.9)(s^2 + 6.799s + 10850)}$$

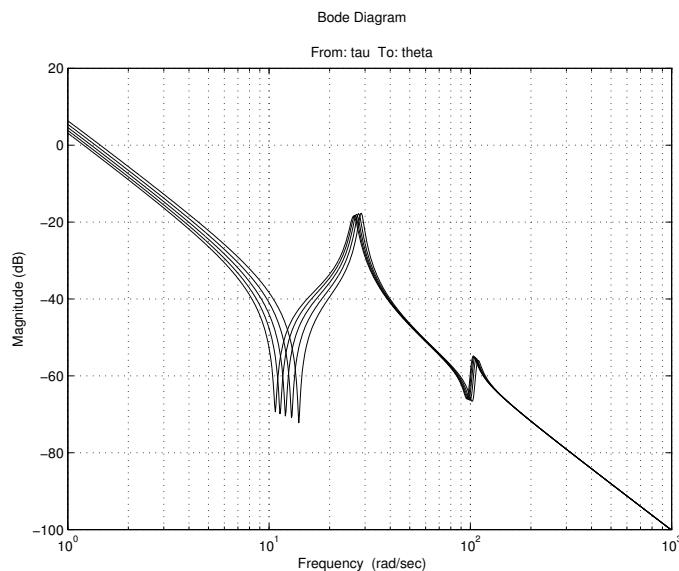
и

$$W_{\alpha\tau} = \frac{0.1239(s - 172.1)(s - 66.2)(s + 173.1)(s + 57.5)}{s(s + 0.2095)(s^2 + 2.067s + 741.9)(s^2 + 6.799s + 10850)} .$$

Предавателната функция $W_{\alpha\tau}$ има положителни нули и следователно манипулаторът, разглеждан с изходна величина положението на свободния му край, представлява неминималнофазов обект на управление. Известно е, че за такива обекти осигуряването на високо качество на преходните процеси е трудна задача.

Полиномите от втора степен в предавателните функции $W_{\theta\tau}$ и $W_{\alpha\tau}$ имат много ниски коефициенти на затихване (между 0.01 и 0.04), което е причина за появя на интензивни трептения на еластичното звено при извършване на бързи движения. Недемпфиряните собствени честоти на полиномите в числителя на $W_{\theta\tau}$ са равни на собствените честоти ω_1 и ω_2 на еластичното звено. Ненулевите собствени честоти на манипулатора (включващ еластичното звено и задвижващата част) се определят от полиномите от втора степен в знаменателя на предавателните функции и при дадените числени стойности на параметрите са равни на 27.2 rad/s и 104.2 rad/s.

За илюстриране на влиянието на неопределеността, на фигури 12.3 и 12.4 са показани логаритмичните амплитудно-честотни характеристики на еластичния манипулатор с вход двигателния момент τ и изход ставния ъгъл θ и ъгловото положение α , определени за няколко стойности на масата на товара в интервала от 0.15 kg до 0.35 kg.

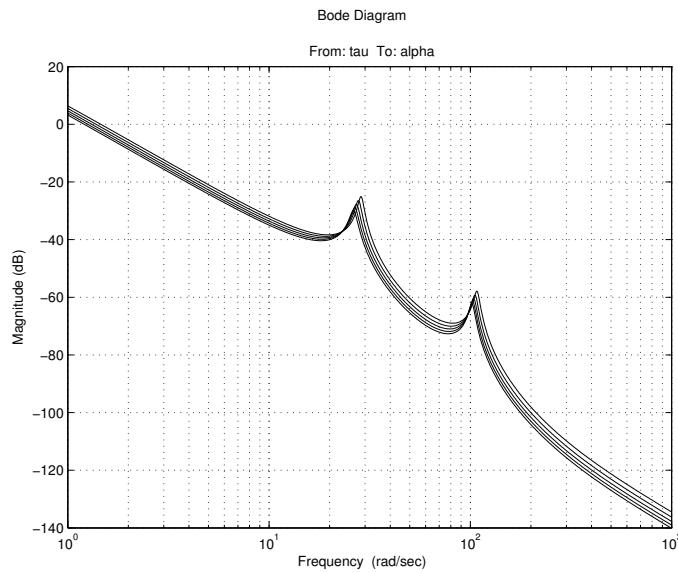


Фигура 12.3: Амплитудно-честотни характеристики на манипулатора с вход τ и изход θ

12.2 Получаване на модел с неопределени параметри

Като неопределени параметри при получаване на модела разглеждаме масата на товара m_L , коефициента на триене в съчленението d_r и коефициентите на вътрешно триене d_1 и d_2 за първите две обобщени координати на еластичното звено. Трябва да се отбележи, че тези параметри са основният източник на неопределеност при описание на динамичното поведение на манипулатори с еластично звено.

Входна величина на обекта е двигателният момент τ . Управляема величина е ъгловото положение α на свободния край на манипулатора. Освен α , в изходните величини на модела ще включим ставния ъгъл θ , ускорението $\ddot{\alpha}$ и еластичното отклонение $w(L, t)$ на свободния край, които са необходими за осъществяване на



Фигура 12.4: Амплитудно-честотни характеристики на манипулатора с вход τ и изход α

обратни връзки за разглежданите по-нататък управляващи устройства от съсредоточен и разсредоточен вид.

Построяването на модела с неопределеност се извършва на основата на линейния модел на еластичния манипулатор, до който се достига след пренебрегване на нелинейните членове в уравнение (12.5) и полагане $\arctan(z) = z$ в (12.7). Така се получават уравненията

$$\begin{aligned} a_0 \ddot{\theta} + d_r \dot{\theta} + a_1 \ddot{\eta}_1 + a_2 \ddot{\eta}_2 &= \tau, \\ \ddot{\eta}_i + d_i \dot{\eta}_i + c_i \eta_i + a_i \ddot{\theta} &= 0, \quad i = 1, 2, \\ \alpha &= \theta + b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2, \\ \ddot{\alpha} &= \ddot{\theta} + b_1 \ddot{\eta}_1 + b_2 \ddot{\eta}_2, \\ w_L &= (L + R)b_1 \eta_1 + (L + R)b_2 \eta_2, \end{aligned} \tag{12.8}$$

където са използвани означенията

$$w_L = w(L, t),$$

$$b_i = \frac{\varphi_i(L)}{L + R}, \quad i = 1, 2.$$

Характерно в случая е, че коефициентите $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1$ и c_2 в уравнения (12.8) са функции на неопределения реален параметър m_L . Съгласно (12.6), коефициентът a_0 зависи афинно от m_L и при съставяне на модела може да се представи във вида

$$a_0 = a_{01} + a_{02}m_L \quad (12.9)$$

с

$$a_{01} = J_a + \frac{1}{3}m [(L + R)^3 - R^3], \quad a_{02} = (L + R)^2.$$

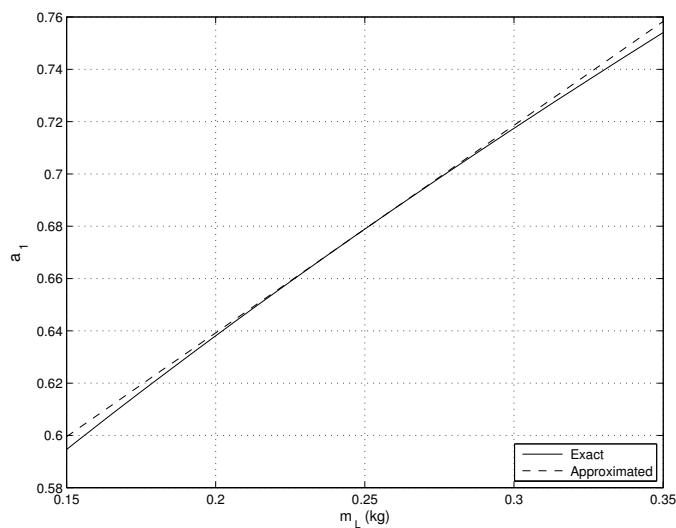
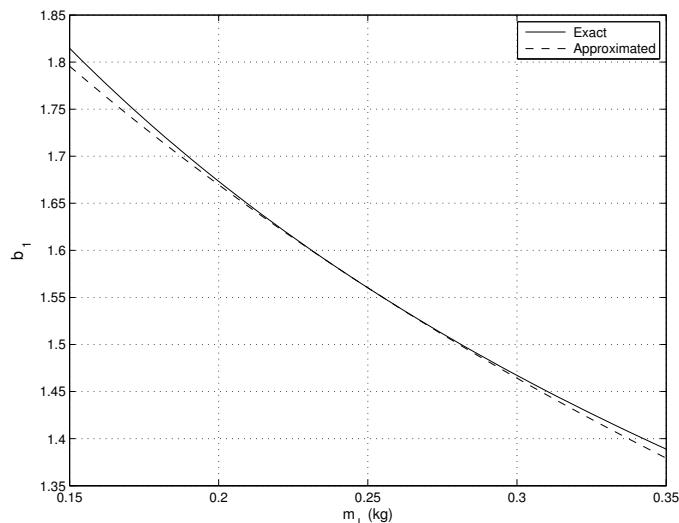
За разлика от a_0 , останалите коефициенти зависят нелинейно и неявно от m_L по доста сложни зависимости, които не могат да се използват за получаване на модел на неопределеността. Изследването на тези зависимости обаче показва, че достатъчно висока точност за целите на робастния анализ и синтез се постига при апроксимиране на коефициентите a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 и c_2 със следните, подходящи за съставяне на модел с неопределеност, рационални функции на m_L :

$$\begin{aligned} a_i &\approx a_{i1} + a_{i2}m_L, \\ b_i &\approx \frac{1}{b_{i1} + b_{i2}m_L}, \\ c_i &\approx \frac{1}{c_{i1} + c_{i2}m_L}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Константите $a_{i1}, a_{i2}, b_{i1}, b_{i2}, c_{i1}, c_{i2}$, $i = 1, 2$, в (12.10) се определят чрез апроксимация по метода на най-малките квадрати, която се извършва така, че за $m_L = 0.25$ kg съответните зависимости да се изпълняват точно. Следователно за номиналната стойност на масата на товара моделът на манипулатора ще бъде точен.

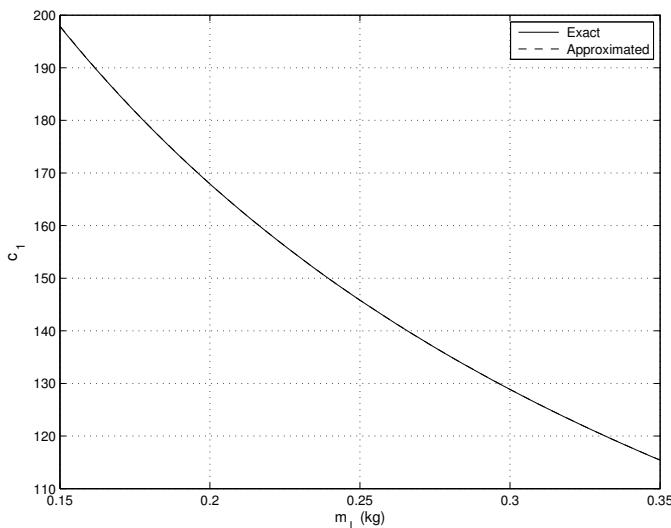
Графиките на точните и на определените по описания начин приблизителни зависимости на коефициентите a_1, b_1 и c_1 от масата на товара са показани на фигури 12.5, 12.6 и 12.7. Подобни резултати се получават и за a_2, b_2 и c_2 . Относителната грешка от апроксимация за всяка от зависимостите е най-голяма за $m_L = 0.15$ kg.

В зависимостите (12.9) и (12.10) неопределеният параметър m_L участва по един път. Тъй като в уравнения (12.8) коефициентите a_1 и a_2 се повтарят по два пъти, а b_1 и b_2 – по три пъти, общо се получава, че в (12.8) m_L участва 13 пъти. В модела на манипулатора обаче, построен на основата на представяне в пространството на състоянията на уравненията (12.8), неопределеният параметър m_L се повтаря 32 пъти, което затруднява робастния анализ и синтез на системата. Този брой може да се намали съществено, като моделът на манипулатора се състави с помощта на команда `sysic` при подходящо представяне на уравнения (12.8).

Фигура 12.5: Точна и приблизителна зависимости на a_1 от m_L Фигура 12.6: Точна и приблизителна зависимости на b_1 от m_L

За тази цел уравненията на манипулатора (12.8) се записват във вида

$$M\ddot{y} + N_1\dot{y} + N_2y = T\tau ,$$

Фигура 12.7: Точна и приблизителна зависимости на c_1 от m_L

$$z = P_1 y , \quad (12.11)$$

$$\ddot{\alpha} = P_2 \ddot{y} ,$$

където:

$$y = [\theta \quad \eta_1 \quad \eta_2]^T , \quad z = [\alpha \quad w_L]^T ,$$

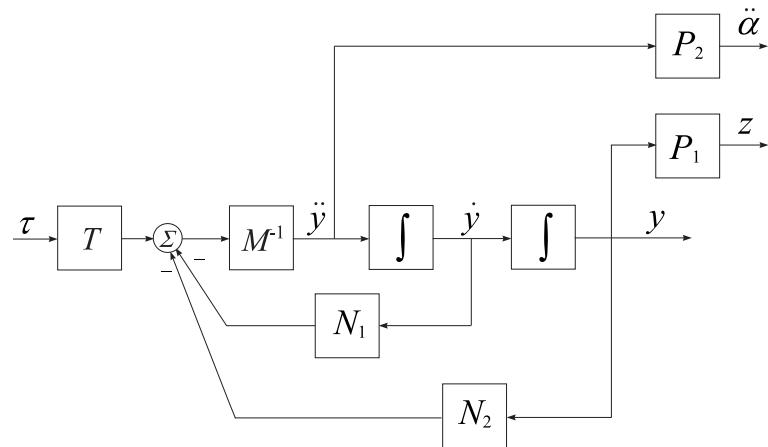
$$M = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad N_1 = \begin{bmatrix} d_r & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{bmatrix} , \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} , \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ 0 & (L+R)b_1 & (L+R)b_2 \end{bmatrix} , \quad P_2 = [1 \quad b_1 \quad b_2] .$$

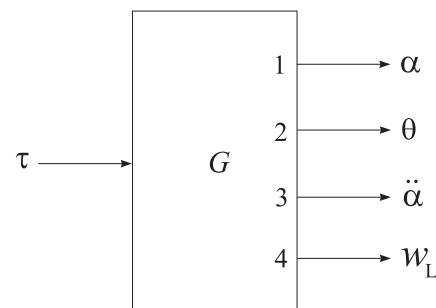
Блок-схема, съответстваща на векторно-матричните уравнения (12.11), е показана на фиг. 12.8.

Моделът с неопределени параметри се получава на основата на дадената блок-схема чрез M-файла `mod_fm.m` и се запаметява в променливата `G`. Константите a_{01} , a_{02} , a_{i1} , a_{i2} , b_{i1} , b_{i2} , c_{i1} , c_{i2} , $i = 1, 2$, се определят с M-файла `par_fm.m`. С цел по-бързо изпълнение на файловете за анализ и синтез, стойностите им за записани във файла `par_fm.mat`. Начинът на подреждане на изходите на модела е показан на фиг. 12.9.

В резултат от изпълнението на `mod_fm.m` се получава:



Фигура 12.8: Блок-схема на модела на манипулатора



Фигура 12.9: Входно-изходно представяне на модела на манипулатора

 G

USS: 6 States, 4 Outputs, 1 Input, Continuous System

```

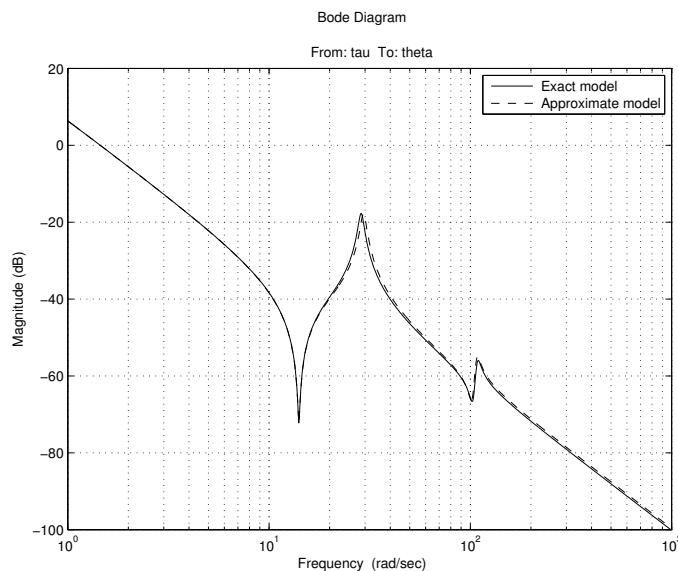
d_1: real, nominal = 0.4, variability = [-40 40]%, 1 occurrence
d_2: real, nominal = 10, variability = [-40 40]%, 1 occurrence
d_r: real, nominal = 0.15, variability = [-20 20]%, 1 occurrence
m_L: real, nominal = 0.25, variability = [-40 40]%, 10 occurrences

```

G е неопределенна система от клас `uss`, зависеща от четири неопределени реални параметри, от които m_L се повтаря десет пъти.

Точността на съставения модел се потвърждава от близостта на показаните на фигури 12.10 и 12.11 "точни" и "приблизителни" амплитудно-частотни характеристики на манипулатора с вход двигателния момент τ и изход ставния ъгъл

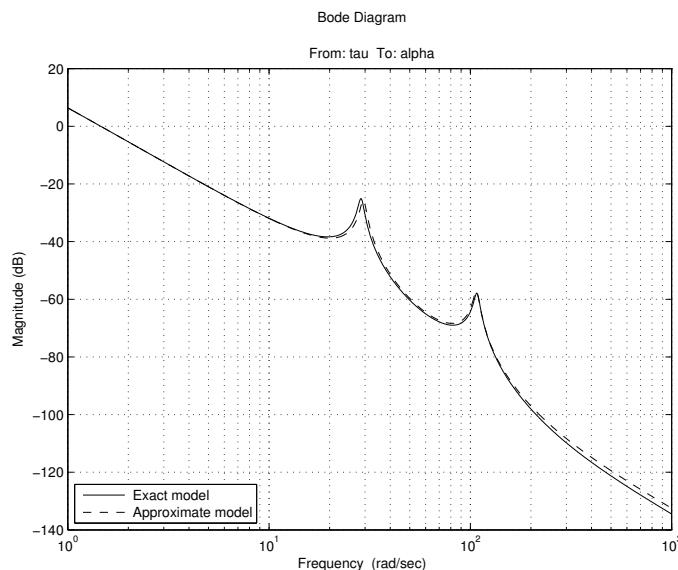
θ и ъгловото положение α за най-неблагоприятния случай $m_L = 0.15 \text{ kg}$. Точните характеристики са изчислени от уравнения (12.8) като са използвани точните стойности на коефициентите, а приблизителните – от модела с неопределени параметри.



Фигура 12.10: Точна и приблизителна амплитудно-честотни характеристики на манипулатора с вход τ и изход θ за $m_L = 0.15 \text{ kg}$

За анализа и синтеза на разглежданите управляващи устройства се вземат част от изходите на съставения модел на манипулатора: за съсредоточеното управляващо устройство в т. 12.3 – първите два изхода, като при това неопределените параметър m_L се повтаря 6 пъти; за разсредоточеното управляващо устройство в т. 12.5 – първите три изхода, при което m_L се повтаря 8 пъти; за решаване на дадената накрая задача – първият, вторият и четвъртият изходи, като и в този случай m_L се повтаря 8 пъти.

Представлява интерес да се отбележи, че при използване на опцията 'full', вместо 'basic' в `ureal` или на командата `simplify` не се достига до положителен резултат за отделните варианти на модела с различни изходи: за някои варианти повтаряемостта на неопределенния параметър m_L остава същата, а за други намалява, но при това моделът на манипулатора коренно се променя.

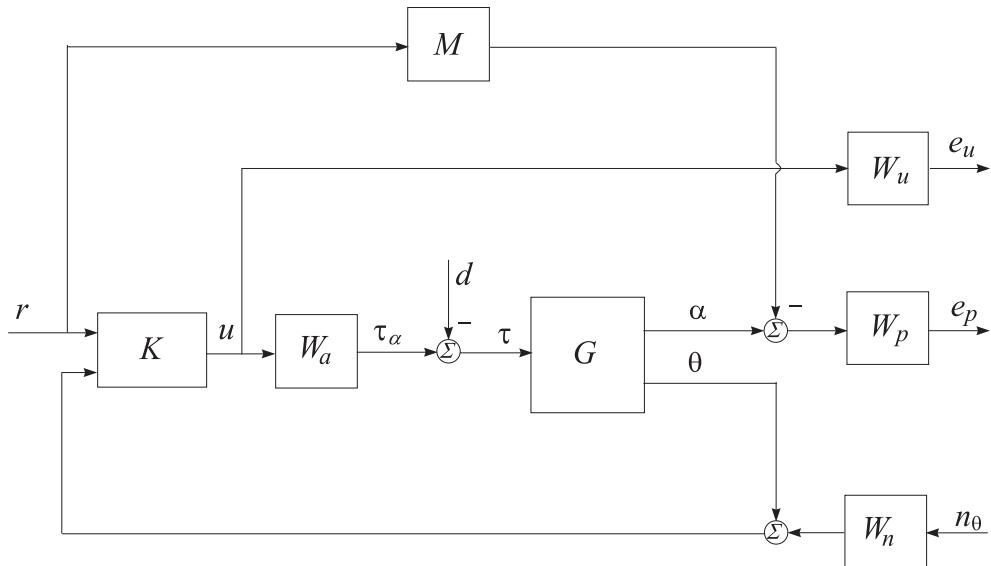


Фигура 12.11: Точна и приблизителна амплитудно-честотни характеристики на манипулатора с вход τ и изход α за $m_L = 0.15 \text{ kg}$

12.3 Синтез на съсредоточено управляващо устройство

Разглеждаме задачата за позициониране на товара (свободния край на еластичния манипулатор) в желано положение. Целта на синтеза е да се намери съсредоточено управляващо устройство, използващо обратна връзка само по ставния ъгъл, което за всички допустими стойности на неопределенните параметри в модела на манипулатора осигурява потискане на трептенията на еластичното звено при извършване на бързи движения. Тъй като неопределеността е структурирана, за определяне на управляващо устройство е подходящо да се използва μ -синтезът.

Блок-схемата на затворената система, включваща елементите, с чиято помощ се формулират изискванията към качеството, е показана на фиг. 12.12. Управляема величина е ъгловото положение α на свободния край на манипулатора. Измерва се ставният ъгъл θ . Задаващата величина, управляващата величина и моментът, създаван от двигателя, са означени съответно с r , u и τ_a . Входно смущаващо въздействие е съпротивителният момент d . Сигналът n_θ се използва за формиране на измерителния шум, а e_p и e_u са изходни величини, характеризиращи качеството. Манипулаторът е представен с изведенния в т. 12.2 модел с неопределени параметри G . С W_a е означена предавателната функция на токо-



Фигура 12.12: Блок-схема на затворената система с изисквания към качеството

ния контур на електrozадвижването, който е моделиран с апериодично звено с времеконстанта 0.004 s и коефициент на пропорционалност равен на 1. Управляващото устройство K е с две степени на свобода. На единия му вход постъпва задаващата величина, а на другия – измерваната величина. Формулирането на изискванията към качеството на затворената система се извършва с помощта на блоковете M , W_p , W_u и W_n , които не участват в техническата реализация на системата. Блокът M е идеалният модел, към който трябва да се доближава затворената система с вход r и изход α . Тегловните предавателни функции W_p и W_u се използват за отразяване на относителното значение на различните честотни диапазони, за които се изисква качеството. Измерителният шум се получава при преминаване на сигнала с единична норма n_θ през формирация филтър W_n .

Предавателните матрици на обекта и управляващото устройство могат да се представят във вида

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_\alpha(s) \\ G_\theta(s) \end{bmatrix}, \quad K(s) = [K_r(s) \quad K_\theta(s)],$$

където $G_\alpha(s)$ и $G_\theta(s)$ са предавателните функции на манипулатора с вход момента τ и изход съответно α и θ , а $K_r(s)$ и $K_\theta(s)$ са предавателните функции на управляващото устройство по отношение на първия и втория вход.

Нека с $\Phi(s)$ означим предавателната матрица на системата (фиг. 12.12) с входове r , d и n_θ и изходи e_p и e_u :

$$\begin{bmatrix} e_p \\ e_u \end{bmatrix} = \Phi(s) \begin{bmatrix} r \\ d \\ n_\theta \end{bmatrix}.$$

Лесно може да се покаже, че

$$\Phi = \begin{bmatrix} W_p(SG_\alpha W_a K_r - M) & -W_p SG_\alpha & W_p SG_\alpha W_a K_\theta W_n \\ W_u S K_r & -W_u SG_\theta K_\theta & W_u S K_\theta W_n \end{bmatrix}, \quad (12.12)$$

където

$$S = \frac{1}{1 - G_\theta W_a K_\theta}.$$

Критерият за качество на затворената система за управление е изпълнение на неравенството

$$\|\Phi(s)\|_\infty < 1. \quad (12.13)$$

Този критерий е подобен на задачата за оптимизиране на смесената S/KS чувствителност, като за по-лесно формулиране на изискванията към качеството се използва модел, задаващ желаната динамика на системата за управление. В предавателната матрица $\Phi(s)$, чиято \mathcal{H}_∞ норма подлежи на минимизиране, участват следните скаларни функции:

$W_p(SG_\alpha W_a K_r - M)$ – претеглена разлика между модела и затворената система с вход задаващата величина и изход тъгловото положение на свободния край на манипулатора;

$W_p SG_\alpha$ – претеглена чувствителност към смущаващото въздействие;

$W_p SG_\alpha W_a K_\theta W_n$ – претеглена чувствителност към измерителния шум;

$W_u S K_r$ – претеглено управляващо въздействие, дължащо се на заданието;

$W_u SG_\theta K_\theta$ – претеглено управляващо въздействие, дължащо се на смущението;

$W_u S K_\theta W_n$ – претеглено управляващо въздействие, дължащо се на шума.

Моделът M и тегловните предавателни функции W_p и W_u са избират така, че при изпълнение на условието (12.13) системата за управление на еластичния манипулатор да има желаното качество.

За постигане на желаната динамика на затворената система за модел е взето звено от втори ред

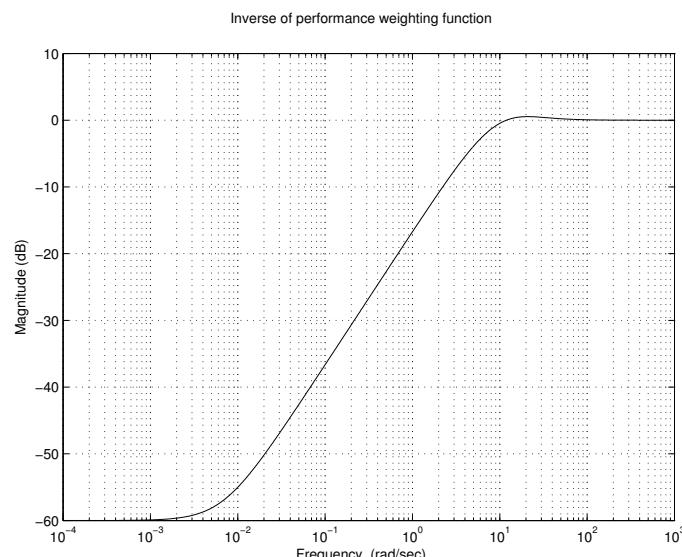
$$M = \frac{625}{s^2 + 50s + 625} \quad (12.14)$$

с коефициент на затихване равен на 1 и преходна функция с времетраене около 0.19 s.

Избрани са следните тегловни предавателни функции на качеството:

$$W_p = \frac{s^2 + 25s + 150}{s^2 + 22s + 0.15} , \quad W_u = 0.001 . \quad (12.15)$$

Амплитудно-частотната характеристика на обратната тегловна функция W_p^{-1} е показана на фиг. 12.13. Предавателните функции W_p и W_u са получени по итеративен път. Тегловната функция W_p е избрана с цел осигуряване в нискочастотната област на малка разлика между изходите на затворената система и модела и на слабо влияние на смущаващото въздействие. Така се постига добро следене на заданието и малка грешка вследствие на нискочастотни смущения. Изборът на W_u е направен с оглед подходящо ограничаване на големината на управляващото въздействие.



Фигура 12.13: Честотна характеристика на обратната тегловна функция W_p^{-1}

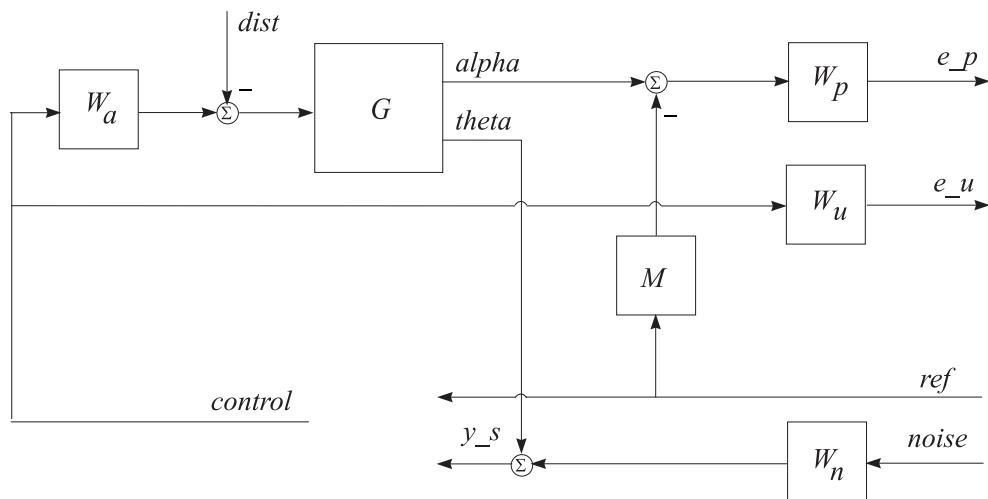
Формиращият филтър на шума

$$W_n = 10^{-5} \frac{0.5s + 1}{0.005s + 1} \quad (12.16)$$

е определен в съответствие с характеристиките на photoелектрическия растерен преобразувател, чрез който се измерва ставният ъгъл. Той представлява високо-

честотен филтър, с което се отчита, че в областта на високите честоти грешката на измерване е по-голяма.

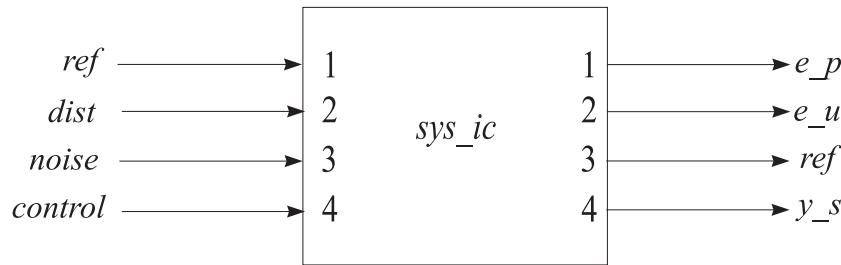
Задачата за синтез на системата за управление на манипулатора с еластично звено е да се намери линейно управляващо устройство $K(s)$, което стабилизира затворената система и осигурява изпълнение на критерия за качество (12.13) за всички допустими стойности на неопределенните параметри в модела на манипулатора. При μ -синтеза задачата се решава като се търси стабилизиращо управляващо устройство, което минимизира максимума на структурираната сингуларна стойност за случая на робастно качество на системата.



Фигура 12.14: Структура на отворената система с изисквания към качеството

Вътрешната структура на отворената система, която се използва при синтеза, е показана на фиг. 12.14. Моделът на отворената система се получава с помощта на командата `sysic` чрез M-файла `olp_1_fm.m` и се записва в променливата `sys_ic`. Въвеждането на модела M и тегловните функции W_p , W_u и W_n става с файла `wts_1_fm.m`. С файла `mod_fm.m` се формира моделът на манипулатора G , от който се вземат първите два изхода (спомагателните файлове `mod_fm.m` и `wts_1_fm.m` се извикват от `olp_1_fm.m`). Задаващото въздействие е означено с `ref`, смущението – с `dist`, шумът на входа на формирания филтър W_n – с `noise`, сигналът от сензора, измерващ ставния ъгъл – с `y_s`, управляващото въздействие – с `control`. Начинът на подреждане на входовете и изходите на променливата `sys_ic` е показан на фиг. 12.15.

При синтеза неопределеният параметър m_L се замества с номиналната си стойност и се взема предвид само неопределеността в коефициента на триене в



Фигура 12.15: Входове и изходи на отворената система с изисквания към качеството

съчленението d_r и в коефициентите на вътрешно триене d_1 и d_2 . Това се налага, тъй като при отчитане на неопределеността в m_L се получава много лошо номинално качество на затворената система и е невъзможно да се осигури желаното робастно качество.

μ -синтезът се осъществява с M-файла `ms_1_fm.m`, като се използва командата `dksyn`. Подходящо управляващо устройство се получава след три D-K итерации, обобщените резултати от които са дадени по-долу:

Iteration Summary

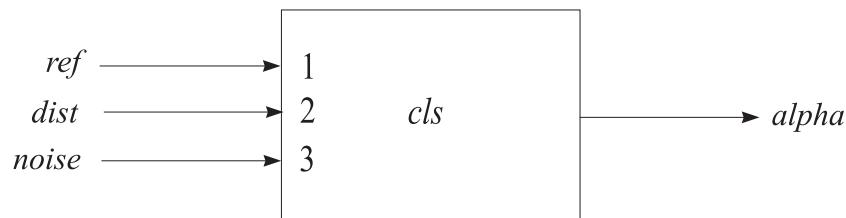
Iteration #	1	2	3
Controller Order	12	14	20
Total D-Scale Order	0	2	8
Gamma Achieved	4.381	1.789	0.604
Peak mu-Value	2.035	1.036	0.604

Полученото управляващо устройство е от 20-ти ред, като проверката показва, че то е устойчиво.

Намаляването на реда на управляващото устройство става с файла `red_fm.m` с помощта на команда `reduce`. В резултат се достига до управляващо устройство от 12-ти ред, чиято реализация не представлява трудност. При това честотните характеристики на управляващите устройства от пълен и понижен ред практически съвпадат. Изследването показва, че по-нататъшно намаляване на реда на управляващото устройство води до влошаване на динамиката на затворената система.

μ -анализът на затворената система се извършва за управляващото устройство от понижен ред, като за разлика от синтеза се отчита неопределеността, както в коефициентите на триене, така и в масата на товара.

Модел с неопределеност на затворената система, необходим за анализа на робастната устойчивост, се получава с файла `cls_1_fm.m` и се запаметява в променливата `cls`. Блок-схемата на системата е като показаната на фиг. 12.12, с тази разлика, че са премахнати блоковете M , W_p и W_u . Начинът на подреждане на входовете на `cls` е даден на фиг. 12.16.



Фигура 12.16: Входно-изходно представяне на затворената система

Анализът на робастната устойчивост се извършва с командата `robuststab` с М-файла `rbs_fm.m`. Преди стартирането му е необходимо да се изпълни файлът `cls_1_fm.m`. За запаса по устойчивост се получава:

```

stabilitymarg =
UpperBound: 3.4212
LowerBound: 3.3164
  
```

Честотните характеристики на горната и долната граници на структурираната сингулярна стойност са показани на фиг. 12.17 (за краткост тук и по-нататък съсредоточеното μ -управляващо устройство се означава с K_{mu1}). От анализа следва, че за допустимата неопределеност в параметрите m_L , d_r , d_1 и d_2 затворената система е робастно устойчива, като устойчивостта се запазва за нива на неопределеност, по-малки от 331% от зададеното.

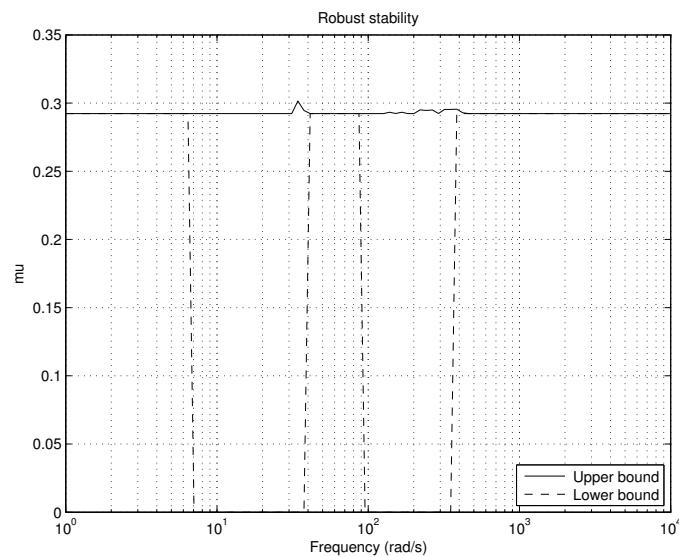
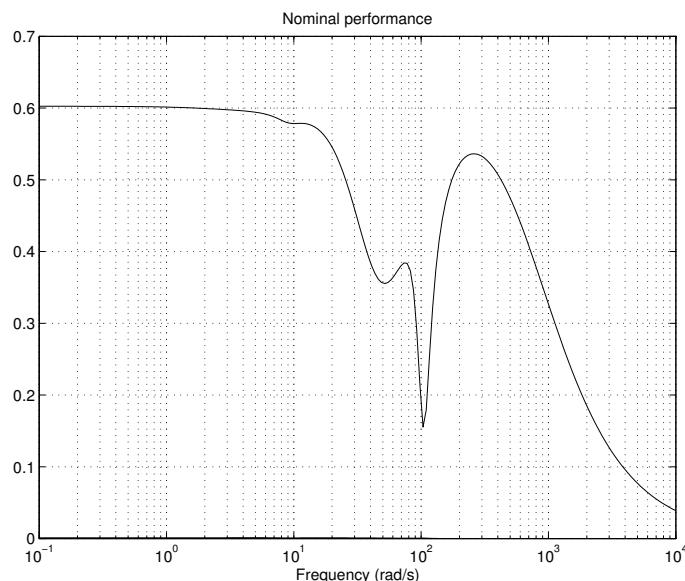
Номиналното и робастното качество на затворената система се изследват с помощта на М-файла `rbp_fm.m`.

От честотните характеристики на сингулярните стойности, представени на фиг. 12.18, може да се направи изводът, че критерият за качество (12.13) се удовлетворява за номиналните стойности на неопределените параметри, т.е. системата постига номинално качество (по отношение на въведените тегловни функции на качеството).

За анализа на робастното качество се използва командата `robustperf`. За запаса по качество се получава:

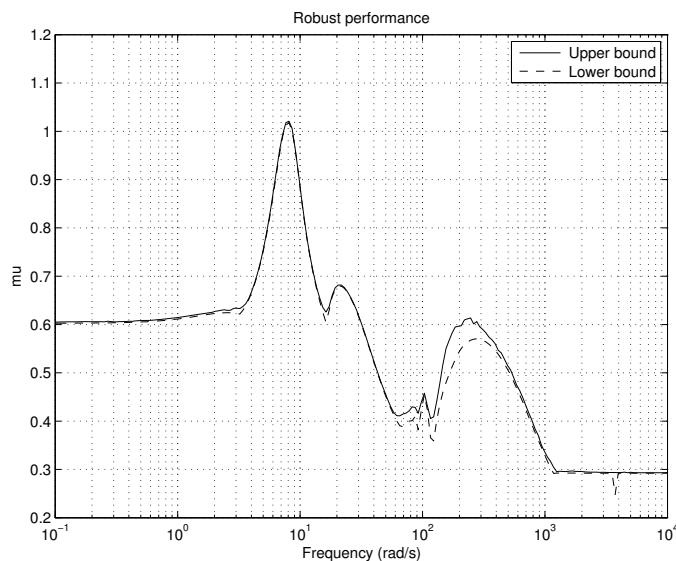
```

perfmargin =
UpperBound: 0.9824
  
```

Фигура 12.17: Робастна устойчивост на затворената система с K_{mu1} Фигура 12.18: Номинално качество на затворената система с K_{mu1}

LowerBound: 0.9794

Честотните характеристики на горната и долната граници на структурираната сингулярна стойност за случая на робастно качество са показани на фиг. 12.19. Максималната стойност на μ е незначително по-голяма от 1 (долната граница на запаса е незначително по-малка от 1), което означава, че затворената система е много близо до постигането на робастно качество.



Фигура 12.19: Робастно качество на затворената система с K_{mu1}

Резултатите от μ -анализа показват, че синтезираното съсредоточено управляващо устройство, използващо обратна връзка само по ставния ъгъл, осигурява робастна устойчивост и приемливо робастно качество на затворената система за всички допустими стойности на неопределенните параметри в модела на манипулатора.

12.4 Сравнение на μ - и ПД управляващи устройства

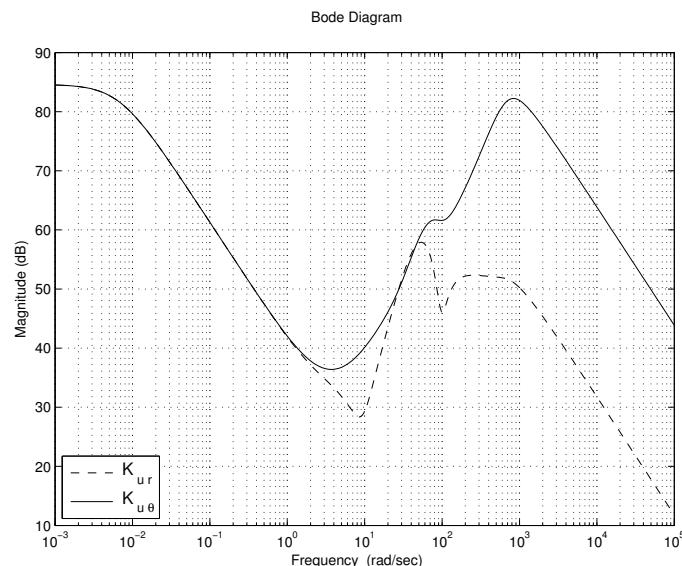
Представлява интерес качеството на системата за управление на еластичният манипулатор със синтезираното съсредоточено μ -управляващо устройство да се сравни с това на система за управление с конвенционален регулатор. От тези регулатори в случая е подходящо прилагането на ПД регулатор, който е взет във

вида

$$u(s) = k_p [r(s) - \theta(s)] - \frac{k_D s}{T_b s + 1} \theta(s). \quad (12.17)$$

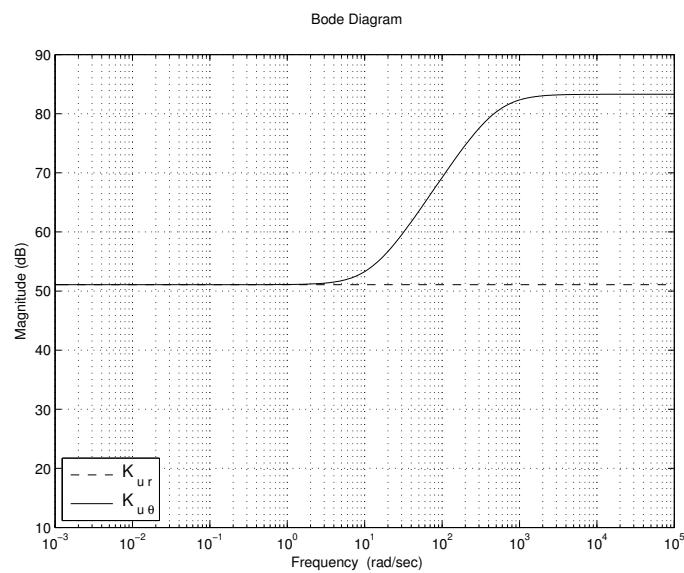
Както за μ -управляващото устройство, входни сигнали на ПД регулатора са задаващата величина r и измерваната величина θ . Информация за ставната скорост се получава чрез приблизително диференциране на θ . Производната на r не се използва в регулатора с цел намаляване колебателността на преходните процеси. Коефициентите k_p и k_D на регулатора са определени така, че при пренебрежване на еластичността на звеното и малките времеконстанти T_a в $W_a(s)$ и T_b предавателната функция на затворената система за $m_L = 0.25$ kg да съвпада с тази на модела M . При това се получават $k_p = 358$ Nm/rad и $k_D = 28.5$ Nm/(rad/s) (за удобство управляващото въздействие u е в единици Nm както двигателния момент). Времеконстантата T_b е взета равна на 0.002 s. ПД регулаторът се формира с M-файла pd_f.m.m.

Логаритмичните амплитудно-честотни характеристики на μ -управляващото устройство от понижен ред K_{mu1} и на ПД регулатора са показани съответно на фиг. 12.20 и фиг. 12.21.

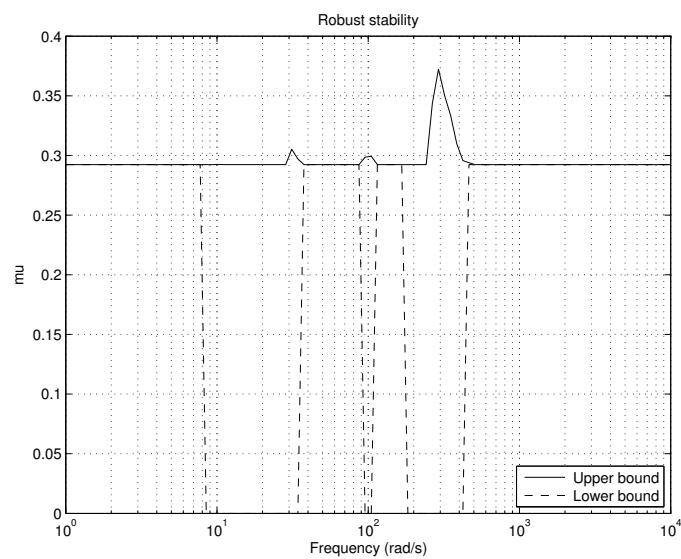


Фигура 12.20: Амплитудно-честотни характеристики на управляващото устройство K_{mu1}

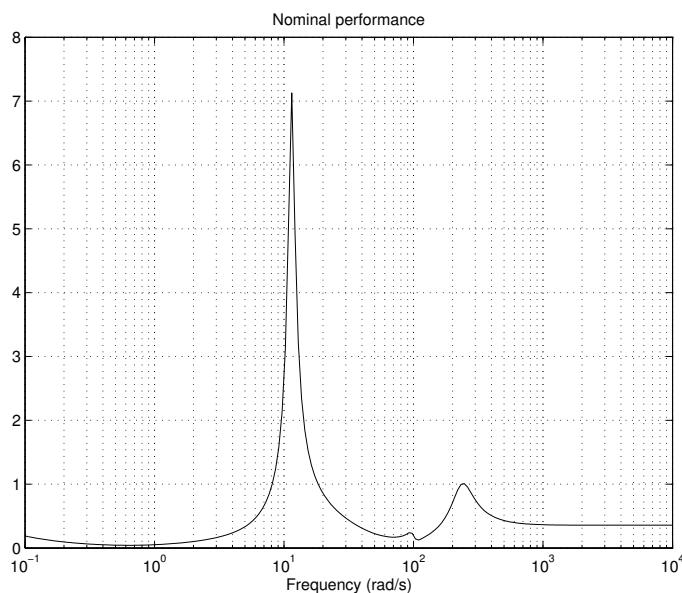
μ -анализът на затворената система с ПД регулатор е извършен при същите условия, както на системата с μ -управляващо устройство в т. 12.3.



Фигура 12.21: Амплитудно-частотни характеристики на ПД регулатора



Фигура 12.22: Робастна устойчивост на затворената система с ПД регулатор

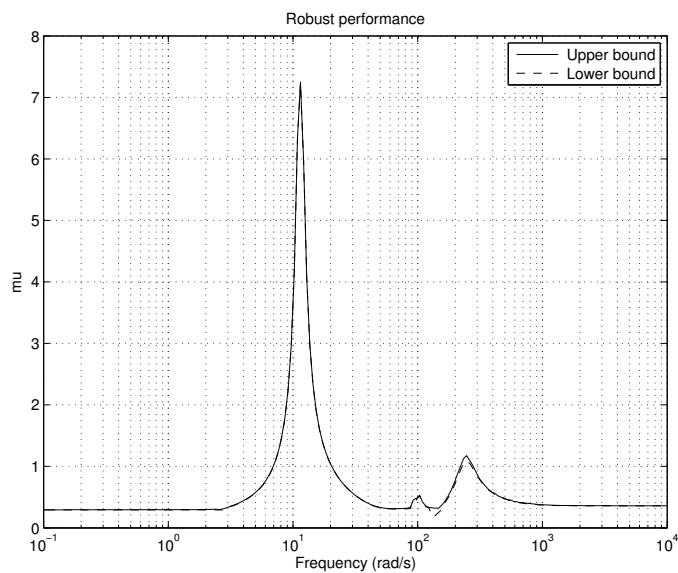


Фигура 12.23: Номинално качество на затворената система с ПД регулатор

Честотните характеристики за случаите на робастна устойчивост, номинално качество и робастно качество на системата с ПД регулатор са показани на фигури 12.22, 12.23 и 12.24 (съответните графики за μ -управляващото устройство са представени на фигури 12.17, 12.18 и 12.19). Долните граници на запасите по устойчивост и качество, получени при μ -анализа на затворената система с двете управляващи устройства, са дадени в табл. 12.1. Съпоставянето на резултатите показва, че затворената система с ПД регулатор притежава много по-лошо номинално и робастно качество. Резултатите за робастна устойчивост са близки. Прави впечатление, че честотните характеристики за номинално и робастно качество на системата с ПД регулатор имат силно изразен максимум около първата

Таблица 12.1: Запас по устойчивост и запас по качество за $K_{\mu 1}$ и ПД управляващи устройства

Управляващо устройство	Запас по устойчивост <code>stabmarg</code>	Запас по качество <code>perfmarg</code>
$K_{\mu 1}$	3.32	0.979
ПД	2.69	0.138

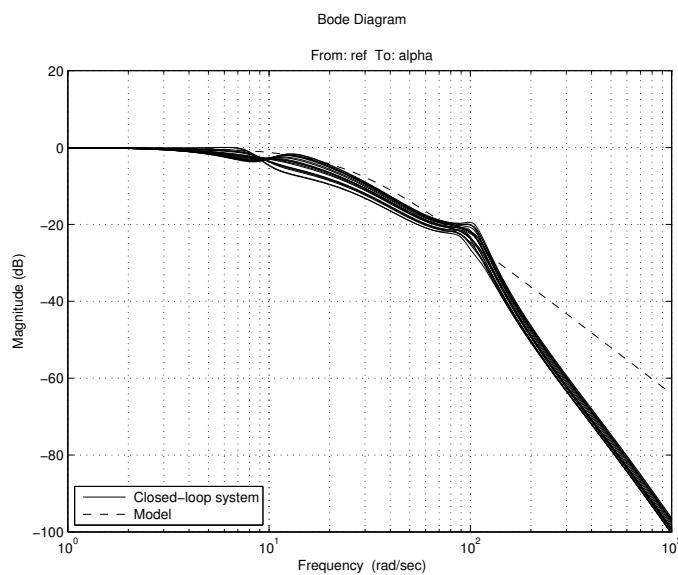


Фигура 12.24: Робастно качество на затворената система с ПД регулатор

собствена честота на еластичното звено, което показва силното влияние на първата обобщена координата на звеното върху качеството на системата за управление.

Амплитудно-честотните характеристики на затворената система с μ - и ПД управляващи устройства за 20 случайни комбинации от стойности на неопределенните параметри са показани съответно на фиг. 12.25 и фиг. 12.26. Входна величина на системата е задаващото въздействие r , изходна – ъгловото положение α на свободния край на манипулатора. С прекъсната линия е дадена честотната характеристика на идеалния модел M . Вижда се, че μ -управляващото устройство успява да потисне резонансните пикове и да осигури близки до модела честотни характеристики на системата в достатъчно широк честотен диапазон (честотната лента на модела е 16 rad/s). Съществено различен е видът на честотните характеристики на затворената система с ПД регулатор, като много високият им максимум за първата собствена честота на звеното, лежаща в честотната лента на системата, е причина за получаване на силно колебателни преходни процеси.

Амплитудно-честотните характеристики на затворената система с двете управляващи устройства по отношение на смущението d и шума n_θ са показани съответно на фиг. 12.27 и фиг. 12.28. Характеристиките са получени за номиналните стойности на неопределенните параметри. Те имат максимуми в близост



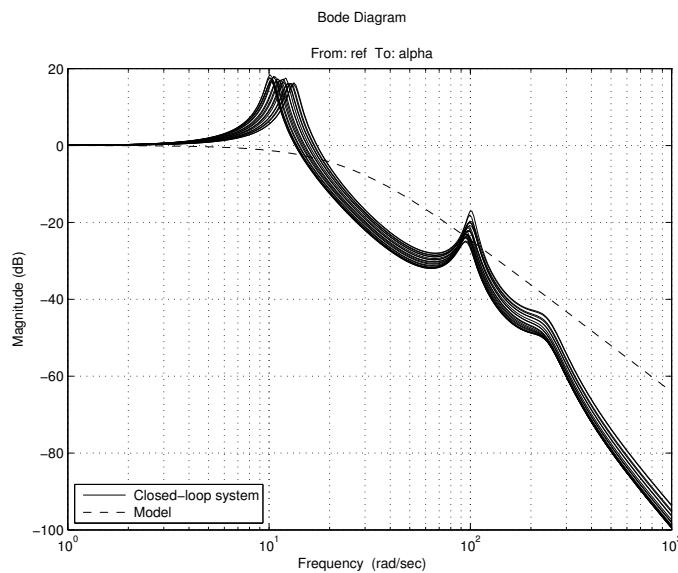
Фигура 12.25: Амплитудно-честотни характеристики на затворената система с K_{mu1}

до първата и втората собствени честоти на еластичното звено. Вижда се, че μ -управляващото устройство осигурява по-добро потискане на нискочестотни смущаващи въздействия и по-ниска чувствителност към измерителния шум.

Системата за управление на еластичния манипулатор е симулирана с помощта на Simulink®. За разлика от робастния анализ и синтез, който се извършва на основата на линеен модел на манипулатора, при симулирането се използва нелинейният динамичен модел (12.5) на манипулатора и нелинейното уравнение (12.7) за ъгловото положение α .

За симулиране на системата за управление със съсредоточено μ -управляващо устройство и с ПД регулатор се използва SIMULINK-моделът `nls_1_fm.mdl`. Манипулаторът се моделира с S -функцията `s_1_fm.m`. Задаващата величина се формира с S -функцията `refer_fm.m`. Смущаващото въздействие и измерителния шум не са включени в SIMULINK-модела поради относително слабото им влияние върху качеството на системата.

В нелинейния модел на манипулатора са включени първите две обобщени координати на еластичното звено. Тъй като спомагателните M-файлове, използвани от S -функцията `s_1_fm.m`, са разработени за произволен брой обобщени координати чрез незначителни промени в `s_1_fm.m` в модела могат да се включат друг



Фигура 12.26: Амплитудно-честотни характеристики на затворената система с ПД регулатор

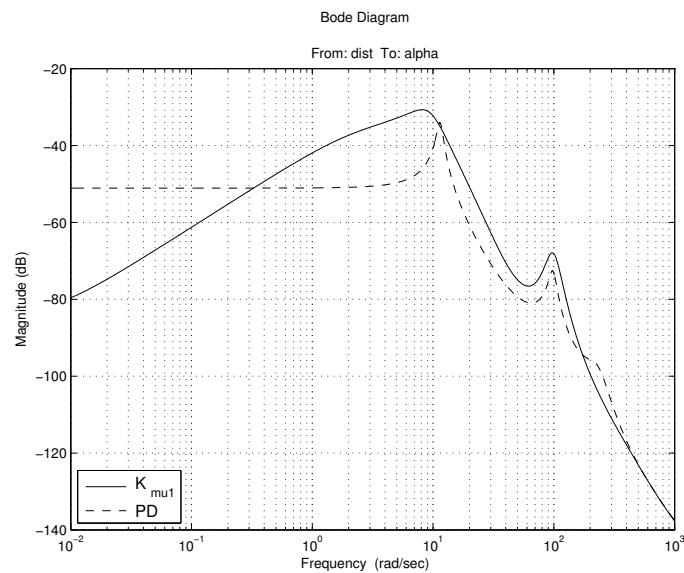
брой обобщени координати.

Задаващата величина се формира по зависимостта

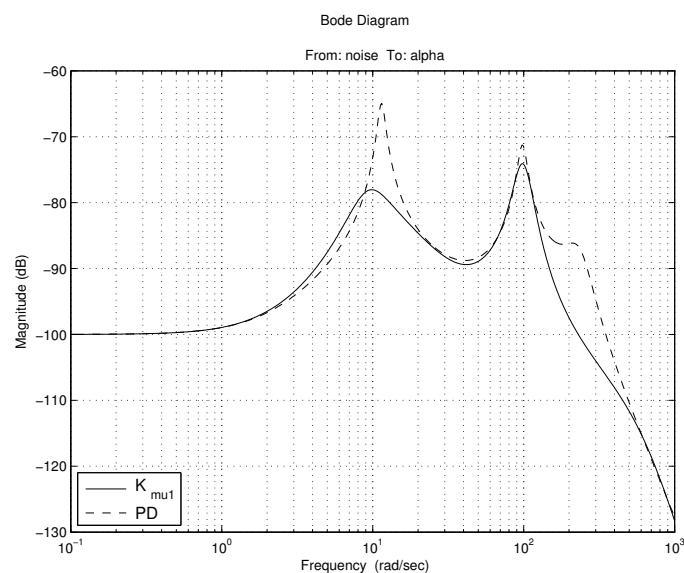
$$r = \begin{cases} art - (ar/\omega_r) \sin(\omega_r t) + r_0, & 0 \leq t \leq t_m \\ r(t_m) & t_m < t \leq t_f \end{cases}. \quad (12.18)$$

При симулирането са взети следните числени стойности на параметрите: $a_r = 0.1\pi$ rad/s; $\omega_r = 2.5\pi s^{-1}$; $r_0 = 0$ rad; $t_m = 0.8$ s; $t_f = 3$ s. Те са избрани така, че да се получи бързоизменяще се задаващо въздействие, което се установява в желаното крайно положение $\pi/12.5$ rad за 0.8 s. Графиките на задаващата величина $r(t)$, скорост и ускорение са показани на фиг. 12.29. Трябва да се отбележи, че подобни на (12.18) зависимости се прилагат в роботите при извършване на движения “от точка в точка”.

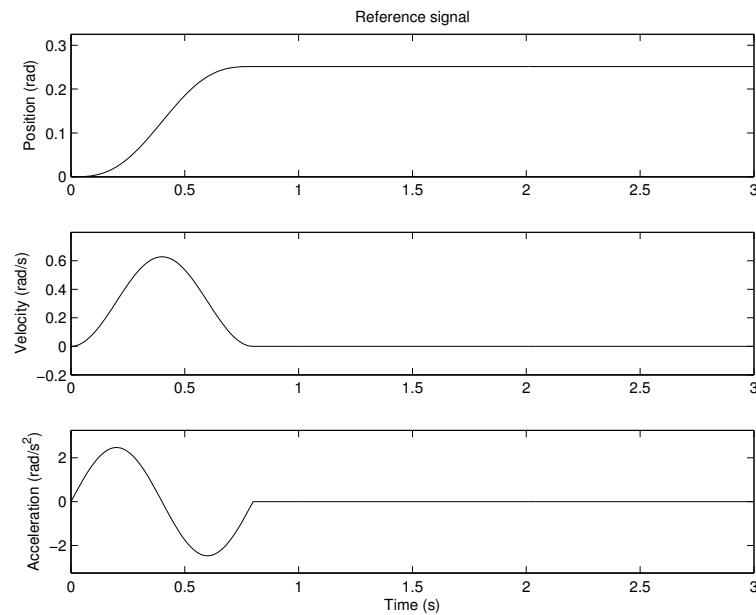
Симулирането е проведено за редица стойности на масата на товара в интервала от 0.15 kg до 0.35 kg. Стойностите на неопределенните коефициенти на триене в съчленението и на вътрешно триене в еластичната структура са взети равни на долните им граници, отговарящи на възможно най-слабото демпфиране на механичната система. Численото интегриране е извършено с функцията `ode23tb`.



Фигура 12.27: Чувствителност към смущаващото въздействие



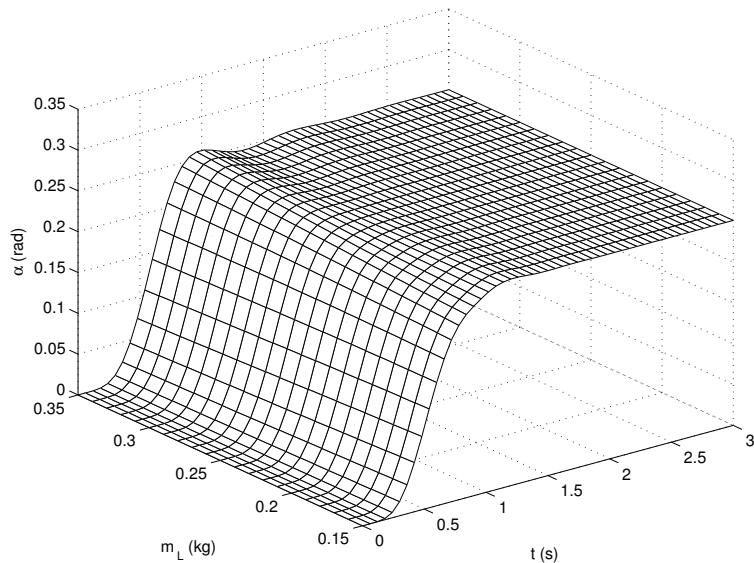
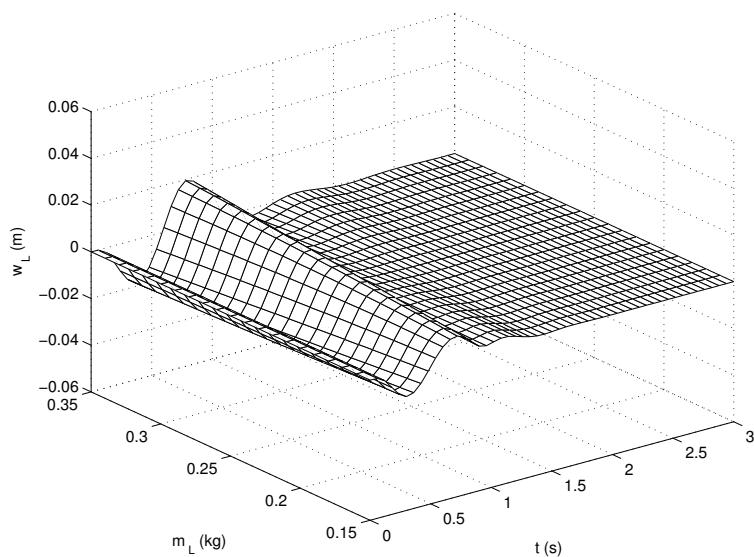
Фигура 12.28: Чувствителност към шума

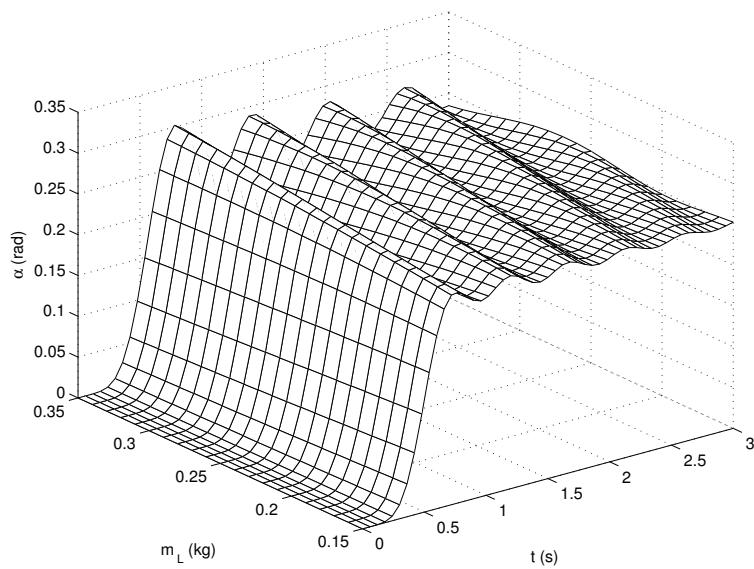


Фигура 12.29: Задаваща величина $r(t)$, скорост и ускорение

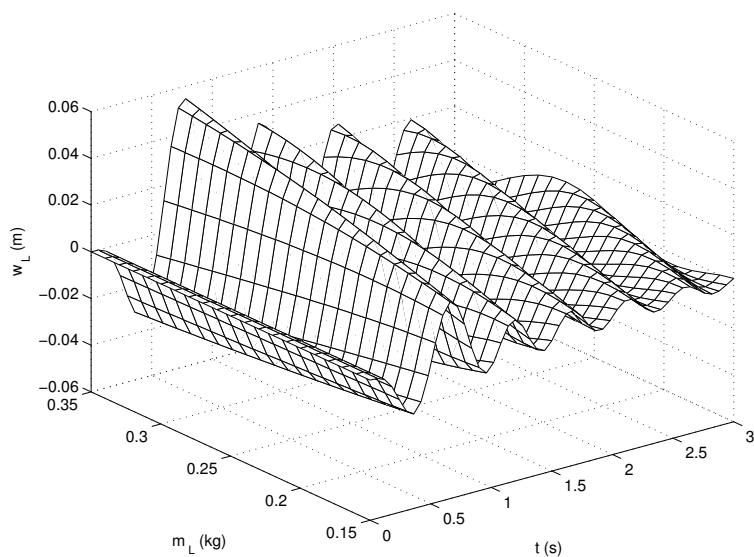
Преходните процеси на ъгловото положение $\alpha(t)$ и еластичното отклонение $w_L(t)$ на свободния край на манипулатора, получени при симулиране на затворената система с μ -управляващото устройство от понижен ред, са показани на фигури 12.30 и 12.31. Съответните резултати за системата с ПД регулатор са представени на фигури 12.32 и 12.33.

Съпоставянето на резултатите от симулиране показва съществената разлика между преходните процеси за двете управляващи устройства. Както се вижда от фигурите, при използване на ПД регулатор се получават продължителни трептения на свободния край на манипулатора в околността на точката на позициониране, като с увеличаване на масата на товара амплитудата им силно нараства. В същото време μ -управляващото устройство осигурява много добро потискане на трептенията на еластичното звено за стойности на масата на товара в широк интервал, като най-добри преходни процеси се получават за номиналната стойност на m_L . Трябва да се отбележи, че тези значителни предимства на μ -управляващото устройство пред конвенционалния ПД регулатор се постигат при съизмерима сложност на техническа реализация на системата.

Фигура 12.30: Ъглово положение $\alpha(t)$ за K_{mu1} Фигура 12.31: Еластично отклонение $w_L(t)$ за K_{mu1}



Фигура 12.32: Щглово положение $\alpha(t)$ за ПД регулатор

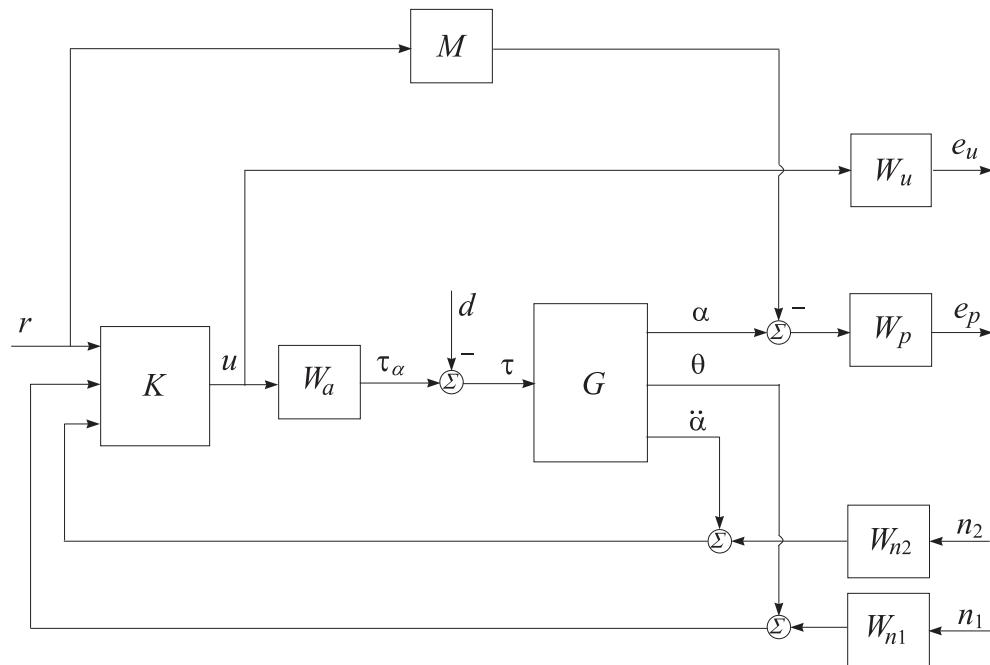


Фигура 12.33: Еластично отклонение $w_L(t)$ за ПД регулатор

12.5 Синтез на разредоточено управляващо устройство

В тази точка е синтезирано разредоточено μ -управляващо устройство, което освен обратна връзка по ставното положение използва и информация от сензор, измерващ ускорението на свободния край на манипулатора. За сметка на усложняване на техническата реализация на системата, въвеждането на тази допълнителна обратна връзка дава възможност да се постигне по-добро качество на преходните процеси.

За краткост ще акцентираме само на различията, съществуващи при анализа и синтеза на разредоточено μ -управляващо устройство, като пропуснем общите моменти със съсредоточеното управляващо устройство, разгледано в точки 12.3 и 12.4.



Фигура 12.34: Блок-схема на затворената система с изисквания към качеството

Блок-схемата на затворената система с елементите, чрез които се задават изискванията към качеството, в случая има вида, показан на фиг. 12.34. Измерват се ставният ъгъл θ и ускорението $\ddot{\alpha}$ на свободния край на манипулатора. Управляващото устройство K има три входа, на които постъпват задаващата величина

и двете измервани величини. С помощта на сигналите n_1 и n_2 и формиращите филтри W_{n1} и W_{n2} се отчита влиянието на шума, съпътстващ измерванията на θ и $\ddot{\alpha}$.

Моделът M и тегловните функции W_p и W_u са взети същите както при синтеза на съсредоточеното μ -управляващо устройство (съответно (12.14) и (12.15)). W_{n1} съвпада с W_n (12.16), а формиращият филтър

$$W_{n2} = 10^{-3} \frac{s+1}{0.01s+1}$$

е определен в съответствие с техническите характеристики на акселерометъра, чрез който се измерва ускорението $\ddot{\alpha}$.

Предавателните матрици на обекта и управляващото устройство могат да се представят във вида

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_\alpha(s) \\ G_\theta(s) \\ G_{\ddot{\alpha}}(s) \end{bmatrix}, \quad K(s) = \begin{bmatrix} K_r(s) & K_\theta(s) & K_{\ddot{\alpha}}(s) \end{bmatrix},$$

където $G_\alpha(s)$, $G_\theta(s)$ и $G_{\ddot{\alpha}}(s)$ са предавателните функции на манипулатора с вход момента τ и изход съответно α , θ и $\ddot{\alpha}$, а $K_r(s)$, $K_\theta(s)$ и $K_{\ddot{\alpha}}(s)$ са предавателните функции на управляващото устройство по отношение на отделните му входове.

За предавателната матрица на системата на фиг. 12.34 с входове r , d , n_1 и n_2 и изходи e_p и e_u се получава:

$$\Phi = \begin{bmatrix} W_p(SG_\alpha W_a K_r - M) & -W_p SG_\alpha \\ W_u SK_r & -W_u S(G_\theta K_\theta + G_{\ddot{\alpha}} K_{\ddot{\alpha}}) \\ W_p SG_\alpha W_a K_\theta W_{n1} & W_p SG_\alpha W_a K_{\ddot{\alpha}} W_{n2} \\ W_u SK_\theta W_{n1} & W_u SK_{\ddot{\alpha}} W_{n2} \end{bmatrix}, \quad (12.19)$$

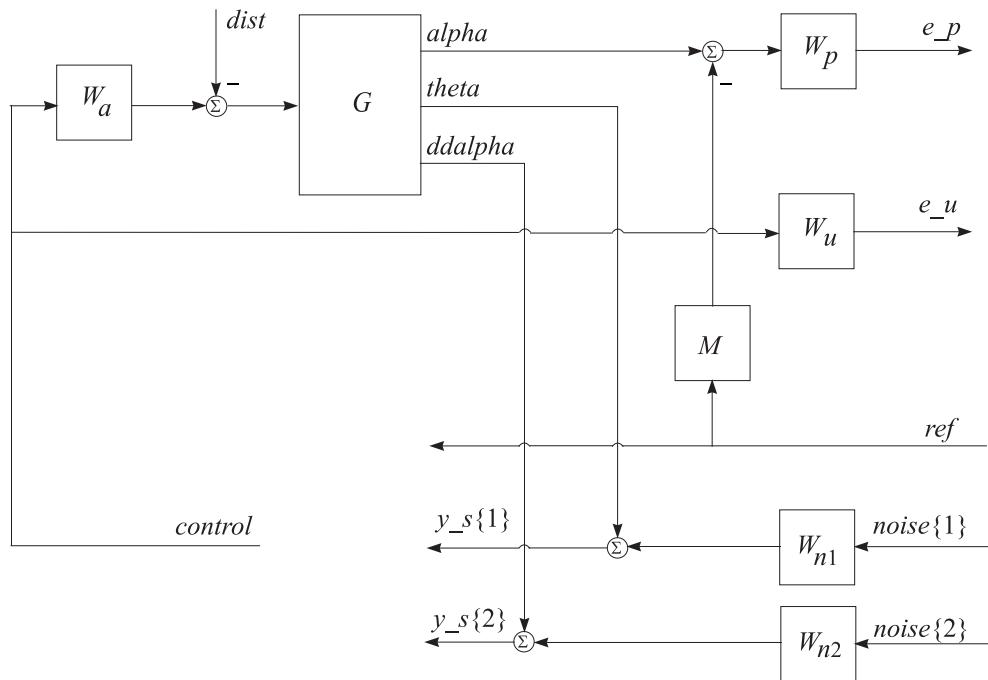
където

$$S = \frac{1}{1 - G_\theta W_a K_\theta - G_{\ddot{\alpha}} W_a K_{\ddot{\alpha}}}.$$

Критерият за качество на затворената система за управление е изпълнение на неравенството (12.13), в което предавателната матрица $\Phi(s)$ има вида (12.19).

Целта на синтеза е да се намери линейно управляващо устройство $K(s)$, използващо обратни връзки по ставния ъгъл и ускорението на свободния край на еластичния манипулатор, което стабилизира затворената система и осигурява изпълнение на критерия за качество (12.13) за всички допустими стойности на неопределенните параметри в модела на манипулатора.

Вътрешната структура на отворената система, която се използва при синтеза, е показана на фиг. 12.35. Моделът ѝ се получава с M-файла `olp_2_fm.m` и се



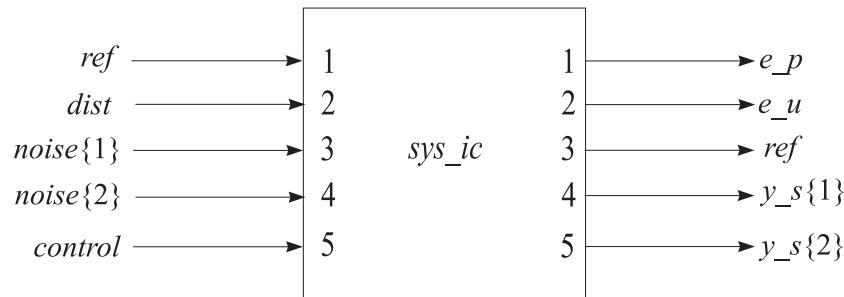
Фигура 12.35: Структура на отворената система с изисквания към качеството

записва в променливата `sys_ic`. Моделът M и тегловните функции W_p , W_u , W_{n1} и W_{n2} се въвеждат със спомагателния файл `wts_2_fm.m`. С файла `mod_fm.m` се формира моделът на манипулатора G , от който се вземат първите три изхода. Ускорението $\ddot{\alpha}$ е означено с $ddalpha$. Начинът на подреждане на входовете и изходите на променливата `sys_ic` е показан на фиг. 12.36.

μ -синтезът се извършва с M-файла `ms_2_fm.m`. При синтеза неопределеният параметър m_L се замества с номиналната си стойност. Подходящо управляващо устройство се получава след три D-K итерации, резюме на резултатите от които е дадено по-долу:

Iteration Summary

Iteration #	1	2	3
Controller Order	13	15	17
Total D-Scale Order	0	2	4
Gamma Acheived	4.381	1.187	0.586
Peak mu-Value	2.035	0.970	0.585

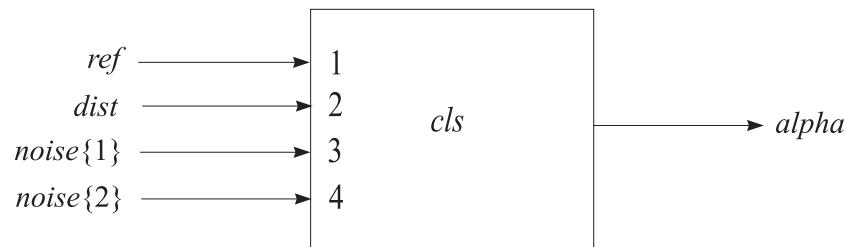


Фигура 12.36: Входове и изходи на отворената система с изисквания към качеството

Редът на управляващото устройство е намален до 12-ти с файла `red_fm.m`, при което честотните характеристики на управляващите устройства от пълен и понижен ред практически съвпадат.

μ -анализът на затворената система е извършен за управляващото устройство от понижен ред, като освен неопределенността в коефициентите на триене е взета предвид и неопределенността в масата на товара.

Необходимият за анализа на робастната устойчивост модел на затворената система се получава с M-файла `cls_2_fm.m` и се запаметява в променливата `cls`. Блок-схемата на системата е както показаната на фиг. 12.34, с тази разлика, че са премахнати блоковете M , W_p и W_u . Начинът на подреждане на входовете на `cls` е даден на фиг. 12.37.

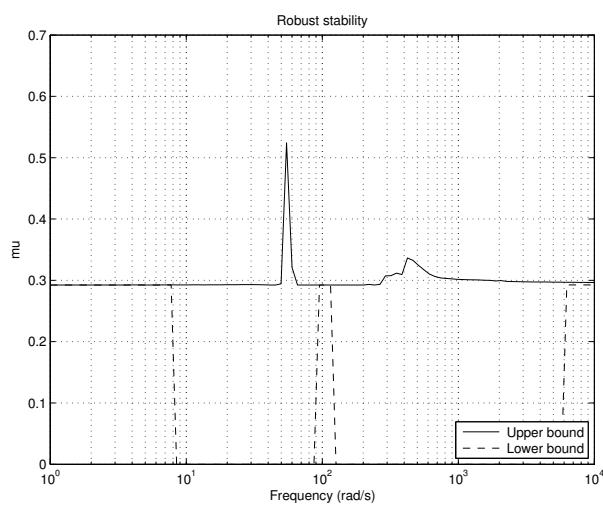


Фигура 12.37: Входно-изходно представяне на затворената система

Робастната устойчивост на затворената система за управление се изследва с M-файла `rbs_fm.m`, а номиналното и робастното качество – с `rbp_fm.m`. Преди стаптиране на `rbs_fm.m` е необходимо да се изпълни файлът `cls_2_fm.m`.

Честотните характеристики, получени при μ -анализа, са показани на фигу-

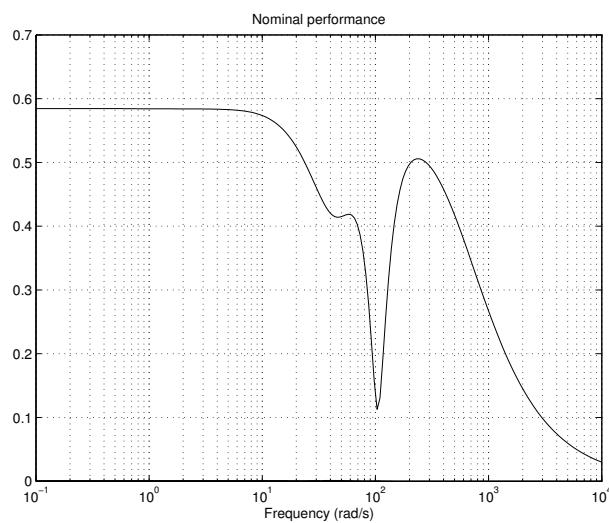
ри 12.38, 12.39 и 12.40 (разредоточеното μ -управляващо устройство е означено с K_{mu2}). Максимумите на горните граници на структурираните сингуларни стойности за случаите на робастна устойчивост и робастно качество са съответно 0.524 и 0.803, от което следва, че синтезираното разредоточено μ -управляващо устройство осигурява, както робастна устойчивост, така и робастно качество на затворената система.



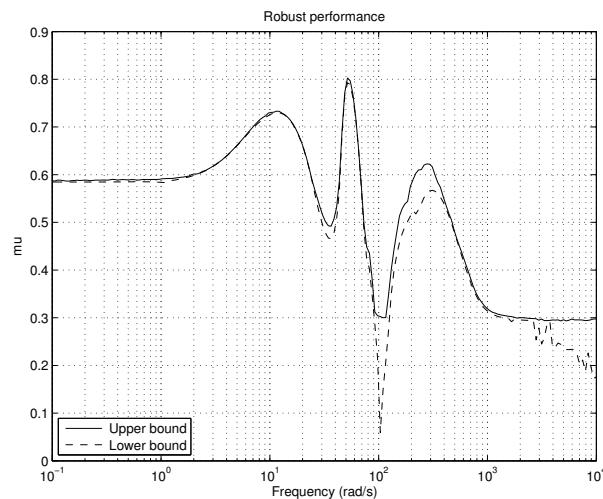
Фигура 12.38: Робастна устойчивост на затворената система с K_{mu2}

Максимумите на структурираните сингуларни стойности за случаите на робастна устойчивост и робастно качество и на сингуларните стойности за случая на номинално качество, получени при анализа на затворената система със синтезираните съсредоточено и разредоточено μ -управляващи устройства, са дадени в табл. 12.2 (както в точки 12.3 и 12.4, съсредоточеното μ -управляващо устройство е означено с K_{mu1}). Резултатите показват, че затворената система със съсредоточеното управляващо устройство се характеризира с по-добра робастна устойчивост. Резултатите за номинално качество са близки. Предимството на разредоточеното управляващо устройство е, че то осигурява по-добро робастно качество.

За симулиране на системата за управление с разредоточеното μ -управляващо устройство се използва SIMULINK-моделът `nls_2_fm.mdl`. Нелинейният динамичен модел на манипулатора се формира с S -функцията `s_2_fm.m`. Симулирането е извършено при същите условия както за съсредоточеното μ -управляващо устройство.



Фигура 12.39: Номинално качество на затворената система с K_{mu2}

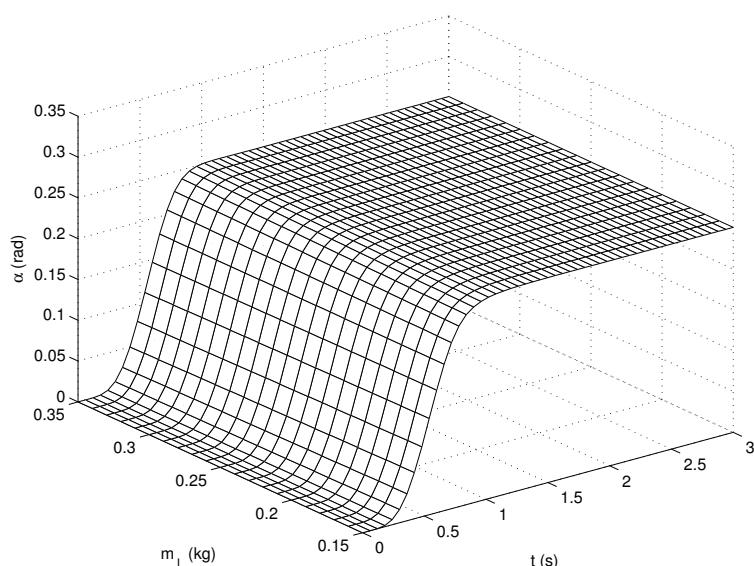


Фигура 12.40: Робастно качество на затворената система с K_{mu2}

Преходните процеси на ъгловото положение $\alpha(t)$ и еластичното отклонение $w_L(t)$ на свободния край на манипулатора, получени при симулиране на затворената система с разредоточеното μ -управляващо устройство от понижен ред,

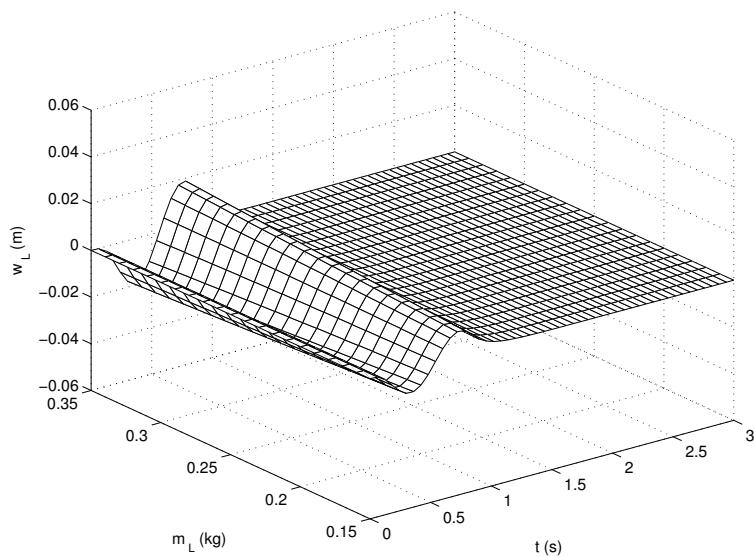
Таблица 12.2: Максимални стойности на μ за K_{mu1} и K_{mu2}

	робастна устойчивост	номинално качество	робастно качество
K_{mu1}	0.302	0.605	1.02
K_{mu2}	0.524	0.585	0.803

Фигура 12.41: Ъглово положение $\alpha(t)$ за K_{mu2}

са показани на фигури 12.41 и 12.42. Както се вижда от фигурите, за всички стойности на масата на товара в интервала от 0.15 kg до 0.35 kg качеството на преходните процеси е много добро, като управляващото устройство успява да потисне трептенията на еластичното звено въпреки бързото движение на манипулатора. Най-добри преходни процеси се получават за номиналната стойност на масата на товара $m_L = 0.25$ kg.

Сравняването на резултатите от симулирането за разредоточеното μ -управляващо устройство с тези за съредоточеното μ -управляващо устройство (фигури 12.30 и 12.31) показва, че за стойности на масата на товара в тесен интервал около номиналната стойност преходните процеси за двете управляващи устройства практически съвпадат. Предимството на разредоточеното управляващо устройство е, че то осигурява ефикасно потискане на еластичните трептения за



Фигура 12.42: Еластично отклонение $w_L(t)$ за K_{mu2}

по-широк интервал на неопределеност в масата на товара, което е резултат от по-доброто робастно качество на затворената система в този случай.

12.6 Задачи

1. За дадения модел с неопределени параметри на манипулатор с еластично звено извършете следните изследвания:
 - а) Синтезирайте разсредоточено μ -управляващо устройство, използващо обратни връзки по ставния ъгъл θ и еластичното отклонение w_L на свободния край на манипулатора;
 - б) Намалете реда на управляващото устройство;
 - в) Анализирайте робастната устойчивост на затворената система;
 - г) Изследвайте номиналното и робастното качество на затворената система;
 - д) Получете преходните процеси на затворената система с нелинейния модел на манипулатора за номиналната стойност на масата на товара $m_L = 0.25$ kg и за граничните ѝ стойности $m_L = 0.15$ kg и $m_L = 0.35$ kg;
 - е) Сравнете получените резултати с тези за разгледаното в т. 12.5 разсредоточено μ -управляващо устройство, използващо обратни връзки по ставния

ъгъл и ускорението на свободния край на манипулатора.

Блок-схемата на затворената система с елементите, чрез които се задават изискванията към качеството, е както показаната на фиг. 12.34, с тази разлика, че вместо ускорението $\ddot{\alpha}$ се измерва еластичното отклонение w_L .

Моделът M , тегловните предавателни функции W_p и W_u и формирацият филтър W_{n1} вземете същите както в точка 12.5, а формирацият филтър W_{n2} - във вида

$$W_{n2} = 5 \times 10^{-5} \frac{s + 1}{0.01s + 1} .$$

Изследванията извършете при условията за разсредоточеното μ -управляващо устройство от т. 12.5, като използвате съответните файлове, от които е необходимо да се модифицират само M-файловете `wts_2_fm.m` и `olp_2_fm.m` и SIMULINK-моделът `nls_2_fm.mdl`.

Приложение

ФУНКЦИИ В ROBUST CONTROL TOOLBOX

В това приложение се дава списък на най-често използваните функции в Robust Control Toolbox. По-подробно описание на използваните в Robust Control Toolbox функции може да се намери в [1].

Неопределени елементи	
icomplex	Създаване на неопределен комплексен параметър
icomplexm	Създаване на неопределен комплексна матрица
udyn	Създаване на обект неструктуррирана неопределенна динамична система
ultydin	Създаване на неопределен линеен стационарен обект
ureal	Създаване на неопределен реален параметър

Неопределени матрици и системи	
diag	Диагонализира вектор от неопределени матрици и системи
randatom	Генерира обекти случаини неопределени атоми
randumat	Генерира случаина неопределенна матрица
randuss	Генерира случаен неопределен модел в пространство на състоянията
ufrd	Създава обект неопределенна честотна характеристика или преобразува друг модел в ufrd модел
umat	Създава неопределенна матрица
uss	Задава неопределени модели в пространство на състоянията или преобразува линейни стационарни модели в неопределени модели в пространство на състоянията

Обработване на неопределени модели

actual2normalized	Изчислява нормализираното разстояние между номиналната стойност и дадена стойност на неопределен атом
gridureal	Задава равномерно в интервал стойности на ureal параметри
isuncertain	Истинна стойност за неопределени системи
lftdata	Декомпозира неопределен обект във фиксирана нормализирана и фиксирана неопределенна части
normalized2actual	Преобразува стойността на атом в нормализирани координати в съответната действителна стойност
repmat	Повтаря и размножава неопределенна матрица
simplify	Опростява представянето на неопределен обект
squeeze	Отстранява единичните размерности на umat обекти
usample	Генерира случаини образци на неопределен обект
usubs	Замества стойности на неопределените елементи на неопределен обект
uss/ssbal	Машабира състоянието/неопределеността на неопределенена система

Свързване на неопределени модели

iconnect	Създава празен обект на съединение
icsignal	Създава icsignal обект
imp2ex	Преобразува неявна линейна зависимост в явна входно-изходна зависимост
stack	Конструира масив чрез наставяне на неопределени матрици, модели или масиви
sysic	Построява съединения на определени и неопределени матрици и системи

Робастност и анализ на най-лошия случай	
cpmargin	Устойчивост на взаимно-простите множители на контура с обратна връзка обект-управляващо устройство
gapmetric	Изчислява горни граници на gap и пугар разстоянията между две системи
loopmargin	Анализира контура с обратна връзка
loopsens	Анализира чувствителността на контура с обратна връзка обект-управляващо устройство
mussv	Изчислява граници на структурираната сингулярна стойност (μ)
mussvextract	Извлича muinfo структурата, върната от mussv
ncfmargin	Изчислява запаса по устойчивост на взимно-простите множители на контура с обратна вързка
popov	Извършва теста за робастна устойчивост на Попов
robopt	Създава обект на възможностите за използване с robuststab или robustperf
robustperf	Изчислява запаса на робастно качество на неопределенена многомерна система
robuststab	Изчислява запаса на робастна устойчивост на неопределенена многомерна система
wcgain	Изчислява граници на най-лошото усилване на неопределенена система
wcgopt	Създава обект на възможностите за използване с wcgain , wcsens и wcmargin
wcmargin	Изчислява най-лошите запаси по амплитуда и фаза за контури с обратна връзка
wcnorm	Изчилиява нормата на неопределенена матрица в най-лошия случай
wcsens	Изчислява функциите на чувствителността и допълнителната чувствителност в най-лошия случай

Синтез на управляващи устройства	
augw	Създава разширен модел на обекта за претегления синтез при смесена чувствителност
h2hinfsyn	Смесен $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ синтез при ограничения върху разположението на полюсите
h2syn	Синтез на \mathcal{H}_2 управляващо устройство за линейна стационарна система
hinfsyn	\mathcal{H}_∞ оптимален синтез на управляващо устройство за линейна стационарна система
loopsyn	\mathcal{H}_∞ синтез на управляващо устройство при желани честотни характеристики
ltrsyn	Синтез на линейно-квадратично управляващо устройство с възстановяване на контура
mkfilter	Генерира филтри на Бесел, Бътъруърт, Чебишев или RC филтър
mixsyn	\mathcal{H}_∞ синтез на управляващо устройство при смесена чувствителност
ncfsyn	\mathcal{H}_∞ синтез на управляващо устройство при нормализирани взаимно прости множители
Намаляване реда на модела	
balancmr	Балансирано прекъсване на модела чрез метода на квадратния корен
bstmr	Балансирано стохастично прекъсване на модела чрез метода на Шур
hankelmr	Ханkelова апроксимация от минимална степен без балансиране
imp2ss	Преобразува импулсна реакция в приближена реализация в пространство на състоянията
modreal	Реализация в модална форма и проекция
ncfmr	Балансирано намаляване реда на модел с нормализирани взаимно-прости множители
reduce	Намаляване реда на модела основано на Ханkelовите сингуларни стойности
schurmr	Балансирано прекъсване чрез метода на Шур
slowfast	Декомпозиране на бърза и бавна част в пространство на състоянията
stabproj	Декомпозиция в пространство на състоянията на устойчива и антиустойчива част

Библиография

- [1] G. Balas, R. Chiang, A. Packard, and M. Safonov. *Robust Control Toolbox: User's Guide*. The Mathworks, Inc., Natick, MA, 2006.
- [2] П. Петков и М. Константинов. *Робастни системи за управление. Анализ и синтез с MATLAB[®]*. ABC Техника, София, 2002.
- [3] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.
- [4] G.C. Goodwin, S.F. Graebe, and M.E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
- [5] L. Meirovitch. *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [6] D. Abramovitch and G. Franklin. A brief history of disk drive control. *IEEE Control Systems Magazine*, 22:28–42, 2002.
- [7] J.C. Doyle, B.A. Francis, and A.R. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Co., New York, 1992.
- [8] G. Lehouv and P. Petkov. Uncertainty modelling and robust control of a flexible-link manipulator. *Information Technologies and Control*, 2:17–23, 2004.
- [9] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

Азбучен указател

- адитивно смущение, 48
взаимно прости множители, 3
входна предавателна матрица на отворената система, 16
входно мултипликативно смущение, 48
вътрешно устойчива система, 16
двигател със звукова намотка, 207
декомпозиция по сингулярни стойности, 4
дисков запас по устойчивост, 68
дискови пътчетки, 206
дискови сектори, 206
глави за четене/запис, 205
грамиан на наблюдаемостта, 2
грамиан на упраляемостта, 2
инвариантна нула, 3
изходна предавателна матрица на отворената система, 16
изходно мултипликативно смущение, 48
комплексна неопределеност, 50
линейно дробно преобразувание (ЛДП), 29
матрица на изходната чувствителност, 16
матрица на изходната допълнителна чувствителност, 16
матрица на изходната възвратна разлика, 16
матрица на неопределеността, 30
матрица на входната чувствителността, 16
матрица на входната допълнителна чувствителност, 16
матрица на входната възвратна разлика, 16
механични резонанси, 208
минимална реализация, 2
многомерен запас по устойчивост, 69
мултипликативно смущение, 48
немоделирана динамика, 56
неструктуррирана неопределеност, 48
параметрична неопределеност, 27
плъзгачи, 206
полиномиална матрица, 3
полюси на реализацията, 2
правилна предавателна матрица, 2
предавателна матрица, 1
предавателна нула, 3
претеглена норма, 150
произведение на Редхефер, 35
разсредоточено управление, 251
режим на следене на пътчетката, 207
режим на търсене, 207
робастна устойчивост
неструктурирана, 63
следяща система на запаметяващо устройство с твърди дискове, 207
спектрален радиус, 171
строго правилна предавателна матрица, 2

- структуррирана неопределеност, 27
съсредоточено управление, 251
теорема за малкия коефициент на усиление, 64
устройство с твърди дискове, 205
Ханкелови сингулярни стойности, 192
- \mathcal{H}_∞ синтез при смесена чувствителност, 141
 \mathcal{H}_∞ синтез при желани честотни характеристики, 133
MIMO система, 1
SISO система, 1