Quantum vortex dynamics

Aim of this text is to summarize foundations and known tools for purpose of vortex dynamics simulations. Since it is main part of my diploma thesis, I decided to write a few pages about this topic, inspired by the book of J.Donnelly: *Quantized Vortices in Helium II.*

Background on hydrodynamics

Conservation of mass:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

If we consider fluid as incompressible ($\nabla \cdot v = 0$), the motion equation (Navier-Stokes), including kinematic viscosity[1] κ takes the form:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \kappa \nabla^2 \mathbf{v}$$

It is often said that near the boundaries, the N-S equation holds in its full form, but far away from the boundaries, the Euler equation (N-S without the viscosity term) is sufficient.

In the case of stationary flow ($\partial \mathbf{v}/\partial t = \mathbf{0}$) it is often useful to transform N-S equation into dimensionless form. This can be done, introducing characteristic length L and velocity v_0 and obtaining Reynolds number

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v_0 L}{\eta}$$

Two geometrically similar viscous flows with identical Reynolds number are dynamically similar. Vorticity is defined as:

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v}$$

A curve drawn from point to point in the fluid so that it goes always along the ω vectors, is called *vortex line*. Due to identity from vector calculus $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, we can write the incompressibility law for vorticity field:

$$\nabla \cdot \omega = 0$$

Circulation of flow along closed loop $\mathcal{C}$ can be calculated as:

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_S \omega \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Simple example of vorticity generation is in the case of oscillating xy-plane. For simplicity, the boundary condition here is $v_x \propto e^{i\omega_0 t}$. The solution of reduced N-S equation yields

$$\mathbf{v} \propto e^{i(z/\delta - \omega_0 t)} e^{-z/\delta} \hat{\mathbf{e}}_x \,,$$

where $\delta = \sqrt{2\eta/\rho\omega_0}$ is *penetration depth*, typical distance up to which the fluid is oscillating.

Iw we combine the rotational flow of circulation Γ with background steady flow $\mathbf{v}_\infty$, Magnus drag force (per unit length of vortex line) arises:

$$\mathbf{f}_M = \rho \mathbf{v}_\infty \times \mathbf{\Gamma}$$

For example, if we let $\mathbf{\Gamma} = \Gamma \hat{\mathbf{e}}_z$ and $\mathbf{v}_\infty = (v_x - v_S, v_y, 0)$, the motion equation would look like:

$$M\dot{v_x} = \rho \Gamma v_y, \qquad M\dot{v_y} = -\rho\Gamma(v_x - v_S)$$

with cycloidal solution. Here, $M = \pi a^2 \rho$ is mass per unit length of vortex line.

[1] Dynamical viscosity can be obtained as: $\eta = \rho\kappa$.

Dynamics of classical vortex lines

By the analogy of $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ with Maxwell's equations one can write Biot-Savart law for the velocity field induced by the presence of vortex line, described as curve $\mathbf{s}(\xi, t)$, as:

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\mathbf{s}_1}^{\mathbf{s}_2} \frac{(\mathbf{s}-\mathbf{r}) \times \mathrm{d}\mathbf{s}}{|\mathbf{s}-\mathbf{r}|^3}$$

The integral is over entire relevant line segments of vortex line. Note that vectors $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}'$ and $\mathbf{s}' \times \mathbf{s}''$ are perpendicular to each others. We can simplify the integral using Taylor series about $\mathbf{s_1}$: $\mathbf{s} \approx \mathbf{s_1} + \mathbf{s}'\xi + \frac{1}{2}\mathbf{s}''\xi^2$:

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{r}) \approx \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\mathbf{s}_1}^{\mathbf{s}_2} \mathrm{d}\xi \frac{\mathbf{s}' \times \mathbf{s}''}{2\xi} \approx \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(L/a)\, \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \equiv \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \,,$$

where $L = 1/|\mathbf{s}''|$ is local radius curvature, a is core radius and $\mathbf{s}' \times \mathbf{s}''$ is binormal. The last form of induced velocity is called Local Induction Approximation (LIA). When using (???) $\mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' = 1/R$ and $L = R$ we immediately obtain the situation of classical vortex ring moving through the fluid with velocity

$$v_i \approx \frac{\Gamma}{4\pi R} \ln(R/a)$$

Superfluidity basics - microsocopic model

Two-fluid theory of Tisza and Landau assumes normal viscous component $\mathbf{v}_n, \rho_n$ and superfluid component $\mathbf{v}_s, \rho_s$ with zero viscosity and entropy, such that total density $\rho = \rho_n + \rho_s$. Since the superfluid part is irrotational, it can be described as classical Euler fluid. With this, *second sound*, *counter-flow* and many other effects can be explained.

Superfluid vortex lines appear when helium moves faster than a critical velocity. The circulation is quantised: $\Gamma_s = h/m_{\mathrm{He}} \equiv \kappa \approx 10^{-7}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$. Velocity distribution around the core is $v \propto 1/r$. The simplest experiment with rotating cylinder has been done by Osborne and resulted in areal density of vortex lines about $n = 2\Omega/\kappa$.

To understand, what is happening near the core $r \to 0$ one has to writ NLSE with delta-repulsive potential:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - m\varepsilon\psi + V|\psi|^2\psi \,,$$

where ε is energy per unit mass. Ansatz for this non-linear diff. eq. is written as $\psi = Ae^{i\Phi}$ in terms of amplitude A and phase Φ. From this we can obtain the condensate's density $\rho_s = mA^2$ and velocity field: $\mathbf{v} = (\hbar/m)\nabla\Phi$. This also confirms the irrotational behaviour of superfluid part. If Φ is viewed as azimuthal angle ϕ, NLSE yields diff. eq. for the density ρ_s with solution tending to: $\rho_s(r \to \infty) \to m^2\varepsilon/V_0$ and $\rho_s(r \to 0) \to 0$. Characteristic distance at which is ρ_s dropping is about $a_0 \approx 10^{-10}\,\mathrm{m}$.

With large number of vortex lines, NLSE is an useful tool for investigation of nucleation or reconnections, however not for the dynamics (waste of computational resources). It is more appropriate to use the classical model.

Vortex motion - mesoscopic model

Two forces are acting upon the vortex line: Magnus $\mathbf{f}_M$ and drag $\mathbf{f}_D$ force. Taking $\mathbf{v}_L = \mathrm{d}\mathbf{s}/\mathrm{d}t$ as line velocity and $\mathbf{v}_s$ as superfluid velocity in laboratory frame, the $\mathbf{f}_M$ can be written as:

$$\mathbf{f}_M = \rho_s \mathbf{v}_\infty \times \boldsymbol{\Gamma} = \rho_s \Gamma \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_{\mathrm{tot}})$$

Although, $\mathbf{v}_{\mathrm{tot}}$ consists of two velocities - external background $\mathbf{v}_s$ and self-induced $\mathbf{v}_i$, which can be computed using classical vortex dynamics.

The drag force $\mathbf{f}_D$ arises from the *mutual friction* between the superfluid vortices and normal component $\mathbf{v}_n$. The unit length of vortex core exerts a frictional force on the superfluid component of magnitude:

$$\mathbf{f}_D = -\alpha\rho_s\Gamma\mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{\text{tot}})] - \alpha'\rho_s\Gamma\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{\text{tot}}),$$

where coefficients $\alpha = \rho_n B/(2\rho), \alpha' = \rho_n B'/(2\rho)$ are temperature dependent and B, B' are known from experiments. At high temperatures, friction arises from the scattering of rotons. The exact dependence $B(T), B'(T)$ is still an open problem. Due to friction, there is possibility to calculate vortex line density L via measuring an attenuation of second sound.

Sum of Magnus and drag force is zero: $\mathbf{f}_M + \mathbf{f}_D = \mathbf{0}$. From this we obtain Schwarz's equation:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_i + \alpha\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_i) + \alpha'(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_i)$$

From numerical point of view, an initial vortex config is discretized into N points. Time evolution is given by Schwarz's eq. with given external fields $\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_s$ and temperature T, which determines $\rho_n, \rho_s, \alpha, \alpha'$. Sometimes the term with α' is neglected due to its smallness. Number N and time step δ must vary during evolution due to appearance of high/low curvatures. Computational time is $\sim N$ with LIA and $\sim N^2$ with Biot-Savart. Additionally, the simulation must take into account the reconnections of vortex lines and there are many ways how to do this.

Superfluid continuum - macroscopic model

Here we are consider all vortices are spatially organized as one continuous flow.

Lablog

O čo nám ide

Chceme zrekonštruovať experimenty z bakalárky. Poriadne a lepšie. Kvalitnejšie a systematicky. Použijeme menší rezonátor a zamedzíme, aby transfer urobil problémy (nesystematickosť turbulencií). Plán je vyrobiť celu, v ktorej sa bude nachádzať menší rezonátor. Cela bude v kryostate a pri transfere sa najskôr naplní kryostat. Po naplnení sa do cely pustia héliové pary a tie sa prirodzene ochladia na supratekuté hélium. Je to neinvazívny spôsob, ako zamedzíme, aby sa na forkoch vytvorili nadbytočnév kvant víry, alebo aby sa na ne dostal bordel.

Výsledkov chceme viac, preto teplotný step v experimentoch bude menší, možno 0.05K. Použijeme nie freq sweepy, ale amp sweepy s algoritmom a bude to rýchlejšie. Na ustálenie teploty sa asi použije PID. Záverom by sme mali mať presvedčivý phase-flow diagram.

Engineering 1 - Sat, 15

Po dlhej porade o plánoch som prvýkrát videl celu. Asi 25cm dlhá dutá kovová trubka o priemere asi 10cm, zdola uzavretá strieborným tesnením. Tlaková skúška ukázala, že tesnenie je zlé a urobili sme rozhodnutie, že namiesto čakania do pondelka na inžiniera to vyriešime *stéhkástom*. Ide o čierne blato, ktoré sa v pomere 100:7.5 mieša s nejakou kyselinou a vznikne tekutejšie blato, ktoré sa po pár hodinách stáva tvrdým plastom. Nevýhoda postupu je, že plast sa môže zmrštiť pri nízkych teplotách. Riskneme to.

Namiešal som asi 40 g blata a a zaliali sme spodok, do ktorého sme ešte hodili kovový krúžok, nech má potenciálne zmršťovanie bariéru. Na vrch cely dávame klasický kúpelňový biely silikón (lebo vo FRA to vraj funguje) tak, aby zašiel do všetkých závitov. Na druhý deň, keď zaschne blato, urobíme tlakový test.

Do cely nejako treba dostať káble k rezonátoru, takže vŕtame do výstupného kolečka tri diery a vyrobíme závity - hélium a káble. Káblov treba dokopy 4 na TF a 3 na SS + 4 na teplomer = 11 káblov = 16 káblov pre istotu. Do strednej diery vypocháme trubku, ktorá sa zrazu odniekiaľ zjavila. do krajných dávame tenké tyčky, ktoré ohýbame na 90 stupňov, nech si to nezavadzá.

Nastriháme 8x50cm medených a 8x50cm supravodivých káblov. Vŕtačkou domotáme káble do seba, prestrčíme potom cez zahnuté trubky, ktoré už sú našróbované v kolečku. Následne pomocou injekcie zalievame blatom, ktoré je ale žiaľ už trochu zhustnuté, takže to ide ťažko a trčíme v labe do 19:00.. Nakoniec kašleme na prietok a picháme to tam z druhej strany, nasadíme nádobky s blatom a ideme preč.

Engineering 2 - Sun, 16

Ráno sa robila tlaková skúška cely. Keď sme na ňu zvonka začali fúkať hélium, v okolí ventilu sa zvýšil prietok, čo znamenalo dieru. Celu sme otvorili, kefkou a acetónom očistili od silikónu a blata. Namiešali sme ďalších dokopy 100g blata, zaliali sme okolie ventilu a doliali sme aj spodok cely. Na ďalší deň ráno by to malo byť všetko stvrdnuté a pripravené na tlakový test.

Poobede som robil ektrickú skúšku 8 medených a 8 supravodivých káblov. všetkým som pripájkoval *male*[2] konektory a popároval. Elektrická skúška prešla na prvý pokus pre všetky konektory.

Engineering 3 - Mon, 17

Tlaková skúška cely dopadla dobre, čiže môžeme do nej vložiť rezonátor. Mali sme pokec s Láďom, ktorý uznal, že to robíme dobre a vyjadril smútok nad Samovým a mojim potenciálnym odchodom. Označili sme všetky káble, ktoré viedli z ventilu a pripájkovali sme *male* konektory na insert. Overili sme kapacitu SS kondenzátorov ($\sim 70\,\mathrm{pF}$). Elektricky sme veľakrát všetko overili. Na konci dňa sme zistili, že polomer otvoru ventilu je príliš malý a treba to dať zrezať.

[2]Existujú *male* a *female* konektory. Je zjavné, čo sa tým myslí.

Utorok, 18 až piatok, 21

Stalo sa toho veľa. Najpodstatnejšie je ale to, že supravodivé káble po zapojení všetkého na insert nefungujú. Všimli sme si ich 90 stupňové zahnutie na jednom mieste, čo neveštilo nič dobré. V zásade sme sa rozhodli postaviť nový ventil. To znamená, že sme opäť spravili všetky kroky, ktoré som popisoval vyššie, ale mali sme už lepší skill, tak nám to išlo rýchlejšie. Martin to počas toho aj fotil, tak si od neho ešte časom vypýtam fotky. Týždeň ukončujeme tým, že cela je opäť v inserte a všetky testy fungujú.

Mon, 24

Po víkende, kedy David odčerpával kryostat aj celu sa stretávame všetci v labáku a transferujeme helium. Sifón drží a ja 2 hodiny stláčam gumový vankúš, nech sa tam dostane LHe. Poobede a večer meriame prvé veci. Tlak sme držali na 415 Torr (okolo 700 Torr je atmosféra) a robili sme f-sweepy oboch forkov pre fundamental aj overtone so vzrastajúcou amplitúdou DC. Na konci dňa necháme tlak vyletieť na 700.

Tue, 25

Mám meniny. Ale to je všetkým jedno (aj mne). Zhruba od 10:30 znižujeme tlak, chceme dosiahnuť 180 Torr (3K) a spraviť tie isté merania. 180 Torr dosahujeme a meráme. Keďže je to stále nad lambdou, druhý zvuk ešte neexistuje a môžeme si robiť akurát tak f-sweepy na vidličke. Robíme to pre fundamental aj overtone, aj na 0dB aj na zosilnenom -30dB.

Wed, 26

Nachádzame sa tesne pod lambdou na nejakých 85 Torr. Robíme všetk vydličkové f-sweepy a prvýkrát meriame aj druhý zvuk (SS). Trvá to dlho a hľadáme vhodné SS módy. Nakoniec ten najvhodnejší mód nachádzame v okolí 1500 Hz. Náhodne testujeme, či sa signál utlmuje, vyzerá že áno a všetko je teda v poriadku. Robíme teda systematické experimenty, ktoré vyzerajú tak, že SS robí f-sweepy a do toho púšťame vidličky na ich rezonančných frekvenciach pre rôzne drajvy. Jeden SS sweep vidlička nebeží, počas ďalšieho áno, atď… Dnes sme stihli uzavrieť teplotu pod lambdou.

Thu, 27

Dnes mám poobednú smenu, tak doobeda robím niečo zmysluplné. David asi 2 hodiny debugguje ten program na Amp-sweep a nakoniec sa mu to ako-tak podarí. Výsledok je, že merania vieme robiť rýchlejšie, pokiaľ na forkoch nie je transfomrátor.

Fri, 28

Celý deň meriame jednu teplotu (20.5 Torr). Je to nuda. Večer dopĺňame hélium.

Sat, 29

Spustil som nejaké f-sweepy a nejaké amp-sweepy pri tlaku 8.77 Torru. Išli sme na obed a konečne na vlak. Po čase dostanem dáta, kde zistíme, či transfer systém pokazil alebo nie. Po dlhšom čase dostanem všetky dáta.

Overall

Najdôležitejšie je si pamätať, že experimenty sa delia na dve skupiny - s forkami a s SS. Forky meriame f-sweepami pre rôzne drajvy (0.0071 - 7V) okolo ich rezonancií (ktoré sa menia s tlakom a teplotou) pre fundamental a overtone mód, lebo chcem tým ukázať geometrickú podobnosť. Vidličky máme dve, no na jednej sa na overtone ukazuje akási dodatočná rezonancia (cross-talk?), takže tento mód nepoužívame. Následne urobíme to isté, ale s transfomrátorom, nech vieme ísť na veľké rýchlosti. Výsledkom týchto meraní by mali byť grafy drag koeficientu oproti amplitúde rýchlosti a oproti Reynoldsovým číslam.

Experimenty so SS sú o tom, že ich rezonancie sa so zapnutím forku utlmujú. Rezonancia SS sa prudko mení s tlakom (kvôli tomu, lebo sa mení rýchlosť SS), preto je dôležité čo najpresnejšie držať tlak. Pointa je odmerať, o koľko percent klesne amplitúda rezonancie SS pri bežiacej vidličke na nejakom drajve (pri nejakej rýchlosti). Na bakalárke sme to robili tak, že sa našli rezonancie forku aj SS a pustil sa OFF-ON-OFF mód na forke a ON mód na druhom zvuku, uvideli sme schodík a merali jeho hĺbku. Teraz to ideme robiť tak, že bežia SS f-sweepy a do každého druhého pustíme forku. Teda každý nepárny SS sweep bude normálne vysoký a každý nepárny utlmený. Výhoda je v tom, že nám experiment nekazí elektrické pozadie (???) a budeme vedieť určiť presnejšie, pri akých drajvoch sa SS začína utlmovať.

Veľký záver tohto celého je porovnať tieto dva experimenty a ukázať, že sú konzistentné. Čiže PRÁVE vtedy, keď sa začína objavovať útlm SS signálu, TAK zároveň prechádza dynamika forku do nelineárneho módu. Samozrejme, táto nelinearita môže nastať skôr, ak sa spustí klasická turbulencia, lenže vtedy je to veľmi KONKRÉTNA nelinearita a odhalíme ju. V klasickej hydrodynamike totiž klasická turbulencia nastáva po prekonaní určitého oscilačného Reynoldsa. Môže sa stať, že QT nastane skôr a spustí sa INÁ nelinearita. Otázne je, či táto nelinearita nespúšťa aj tú klasickú. A to isté naopak. Ale to *naopak* by sme mali vedieť odhaliť. Záverečným finále by mal byť kvalitnejší flow-phase diagram.

Mystickou ostáva otázka, či odhalíme aj tzv *druhú a tretie kritickú rýchlosť*, nech už je to čokoľvek.