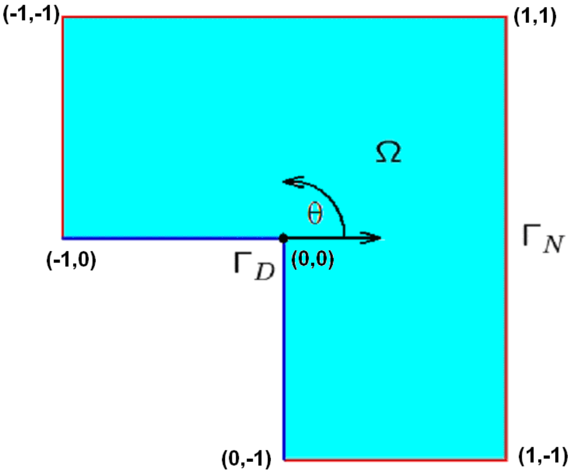
L-shape domain

Sformułowanie silne problemu



Ω to obszar [-1,1]x[-1,1] \ [-1,0]x[-1,0] (obszar w kształcie odwróconej litry L)
Brzeg Dirichleta Γ_D i brzeg Neumanna Γ_N są zaznaczone odpowiednio na ciemno niebiesko i czerwono

Problem polega na policzeniu pola temperatur
$R^2 \ni (x_1, x_2) \rightarrow u(x_1, x_2) \in R$ gdzie $u(x_1, x_2)$ oznacza temperaturę w punkcie (x_1, x_2).
W tym celu rozwiązujemy równanie transportu ciepła

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \text{ na } \Omega$$

(czyli $\Delta u = 0$)
Zadajemy następujące warunki brzegowe:
$u = 0$ na Γ_D (zerowa temperature na brzegu Dirichleta, zaznaczonym na ciemno niebiesko)
$\frac{\partial u}{\partial n} = g$ na Γ_N (pochodna w kierunku normalnym do brzegu jest zadana funkcją g)
gdzie

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \circ n = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \circ (n_1, n_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = g$$

gdzie $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)$ to gradient u natomiast (n_1, n_2) to współrzędne wektora normalnego;
na przykład na dolnym brzegu - na odcinku (0,-1)-(1,-1) mamy

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \circ n = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \circ (0,-1) = -\frac{\partial u}{\partial x_2} = g$$

oraz *g* jest funkcją daną w biegunowym układzie współrzędnych o początku w punkcie (0,0)

$$R \times (0, 2\Pi) \ni (r, \theta) \rightarrow g(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin^{\frac{2}{3}} \left(\theta + \frac{\Pi}{2} \right)$$

Sformułowanie słabe problemu
Otrzymujemy mnożąc skalarnie (w sensie normy przestrzeni L2) równanie słabe przez funkcje testujące v

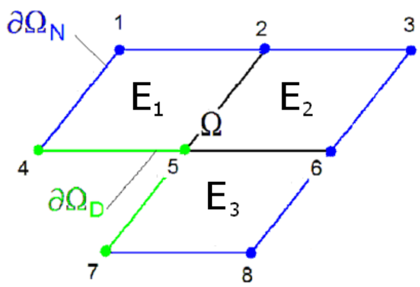
$$b(u,v)=l(v) \quad \forall v \in V$$

$$b(u,v)=\int_\Omega \nabla u \circ \nabla v \, dx \text{ (czyli } b(u,v)=\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx \text{)}$$

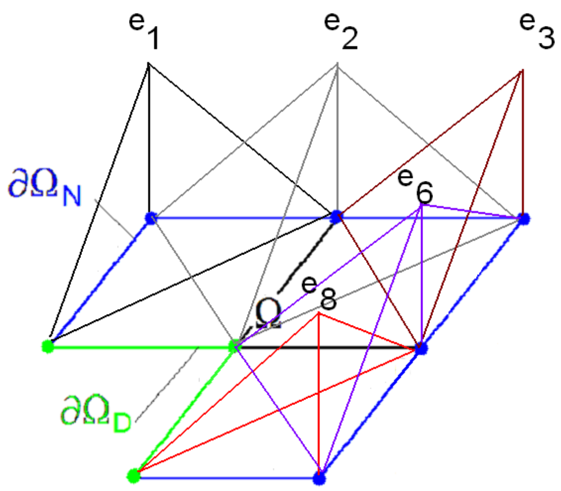
$$l(v)=\int_{\Gamma_N} g\, v\, dS$$

$$V=\left\{v \in H^1(\Omega): trv=0 \text{ on } \Gamma_D\right\}$$

Metoda elementów skończonych
Dzielimy obszar Ω na elementy skończone (najprościej na trzy elementy E1,E2,E3)



na których rozpinamy funkcje bazowe



oraz generujemy układ równań:

$$u \approx u_h = \sum_{i=1}^{N} a_i e_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i b(e_i, e_j) = l(e_j) \quad j=1,\ldots,N$$

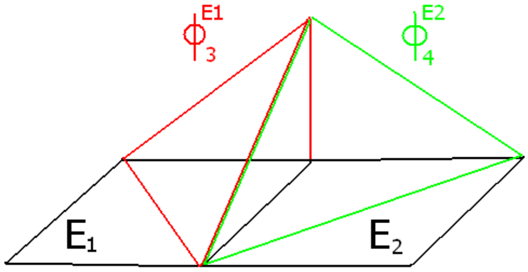
$$b(e_i,e_j)=\int_\Omega \nabla e_i \nabla e_j \, dx = \int_\Omega \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial e_i}{\partial x_k}\frac{\partial e_j}{\partial x_k} dx$$

$$l(e_j)=\int_{\Gamma_N} e_j g \, dS$$

Wymuszenie warunku Dirichleta można osiągnąć zerując wiersze i kolumny związane z węzłami 4, 5 oraz 7

Obserwacje potrzebne do opracowania efektywnego algorytmu

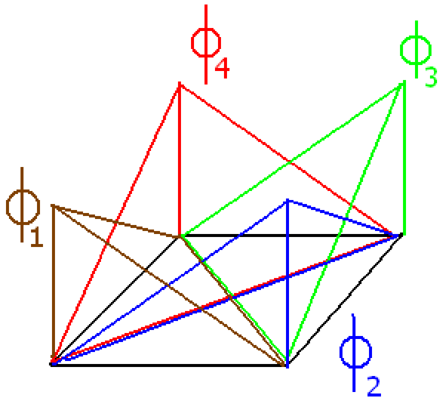
1. Każda globalna funkcja e_i składa się z jednej lub kilku lokalnych funkcji ϕ_i



$$e_2 = \phi_3^{E1} + \phi_4^{E2}$$

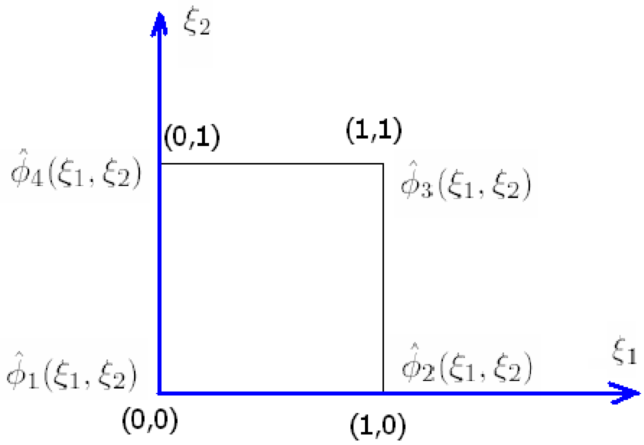
(np. funkcja e2 składa się z trzeciej lokalnej funkcji na elemencie E1, oraz z czwartej lokalnej funkcji na elemencie E2)

Czyli wprowadzamy lokalne funkcje na dowolnym elemencie
(na razie dla p=1)



2. W jaki sposób obliczyć wzór na taką dowolną funkcję ϕ_i ?

Otóż wprowadzamy tzw. element wzorcowy $\hat{E}$ = [0,1]x[0,1] i definiujemy funkcje wzorcowe na nim



$$
\begin{aligned}
\hat{\phi}_1(\xi_1,\xi_2) &= \hat{\chi}_1(\xi_1)\hat{\chi}_1(\xi_2) &&= (1-\xi_1)(1-\xi_2)\\
\hat{\phi}_2(\xi_1,\xi_2) &= \hat{\chi}_2(\xi_1)\hat{\chi}_1(\xi_2) &&= \xi_1(1-\xi_2)\\
\hat{\phi}_3(\xi_1,\xi_2) &= \hat{\chi}_2(\xi_1)\hat{\chi}_2(\xi_2) &&= \xi_1\xi_2\\
\hat{\phi}_4(\xi_1,\xi_2) &= \hat{\chi}_1(\xi_1)\hat{\chi}_2(\xi_2) &&= (1-\xi_1)\xi_2\,,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$\hat{\chi}_1(\xi) = 1-\xi$$

$$\hat{\chi}_2(\xi) = \xi$$

Następnie zauważamy, iż dowolny element prostokątny E może zostać określony przez swoje położenie (b_1,b_2) oraz swoją szerekość i wysokość (a_1,a_2)
np. trzy przykładowe elementy E1, E2, E3 mogą zostać określone przez
E1: $(b_1,b_2) = (-1,0)$; $(a_1,a_2)=(1,1)$
E2: $(b_1,b_2) = (0,0)$; $(a_1,a_2)=(1,1)$
E3: $(b_1,b_2) = (0,-1)$; $(a_1,a_2)=(1,1)$

Definiujemy odwzorowanie przerzucające element wzorcowy $\hat{E}$ na dowolny element E

$$\hat{E} \ni (\xi_1,\xi_2) \to x_E(\xi_1,\xi_2) = (b_1 + a_1\xi_1, b_2 + a_2\xi_2) = (x_1,x_2) \in E$$

oraz odwzorowanie odwrotne

$$E \ni (x_1,x_2) \to x_E^{-1}(x_1,x_2) = \left(\frac{x_1-b_1}{a_1}, \frac{x_2-b_2}{a_2}\right) = (\xi_1,\xi_2) \in \hat{E}$$

Innymi słowy

$$x_1 = b_1 + a_1\xi_1; \quad x_2 = b_2 + a_2\xi_2$$

oraz

$$\xi_1 = \frac{x_1-b_1}{a_1}; \quad \xi_2 = \frac{x_2-b_2}{a_2}$$

Teraz z pomocą x_E^{-1} możemy podać wzory na dowolne funkcje ϕ_i , i=1,2,3,4

$$\phi_1(x_1,x_2) = \hat{\phi}_1\left(x_E^{-1}(x_1,x_2)\right) = \hat{\phi}_1\left(\frac{x_1-b_1}{a_1}, \frac{x_2-b_2}{a_2}\right) =$$

$$\hat{\chi}_1\left(\frac{x_1-b_1}{a_1}\right)\hat{\chi}_1\left(\frac{x_2-b_2}{a_2}\right) = \left(1-\frac{x_1-b_1}{a_1}\right)\left(1-\frac{x_2-b_2}{a_2}\right)$$

$$\phi_2(x_1,x_2) = \hat{\phi}_2\left(x_E^{-1}(x_1,x_2)\right) = \hat{\phi}_2\left(\frac{x_1-b_1}{a_1}, \frac{x_2-b_2}{a_2}\right) =$$

$$\hat{\chi}_2\left(\frac{x_1-b_1}{a_1}\right)\hat{\chi}_1\left(\frac{x_2-b_2}{a_2}\right) = \left(\frac{x_1-b_1}{a_1}\right)\left(1-\frac{x_2-b_2}{a_2}\right)$$

$$\phi_3(x_1,x_2)=\hat{\phi}_3\left(x_E^{-1}(x_1,x_2)\right)=\hat{\phi}_3\left(\frac{x_1-b_1}{a_1},\frac{x_2-b_2}{a_2}\right)=$$

$$\hat{\chi}_2\left(\frac{x_1-b_1}{a_1}\right)\hat{\chi}_2\left(\frac{x_2-b_2}{a_2}\right)=\left(\frac{x_1-b_1}{a_1}\right)\left(\frac{x_2-b_2}{a_2}\right)$$

$$\phi_4(x_1,x_2)=\hat{\phi}_4\left(x_E^{-1}(x_1,x_2)\right)=\hat{\phi}_4\left(\frac{x_1-b_1}{a_1},\frac{x_2-b_2}{a_2}\right)=$$

$$\hat{\chi}_1\left(\frac{x_1-b_1}{a_1}\right)\hat{\chi}_2\left(\frac{x_2-b_2}{a_2}\right)=\left(1-\frac{x_1-b_1}{a_1}\right)\left(\frac{x_2-b_2}{a_2}\right)$$

3. Całki możemy rozbić na składowe po elementach, z funkcji lokalnych

$$b\left(\phi_i^k,\phi_j^k\right)=\int_{E_k}\frac{\partial\phi_i^k}{\partial x_1}(x_1,x_2)\frac{\partial\phi_j^k}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2+\int_{E_k}\frac{\partial\phi_i^k}{\partial x_2}(x_1,x_2)\frac{\partial\phi_j^k}{\partial x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

Żeby je policzyć dla aproksymacji z funkcjami pierwszego p=1, wystarczy wziąść wartość funkcji podcałkowych w środku elementu razy pole elementu (a_1*a_2)
czyli

$$b\left(\phi_i^k,\phi_j^k\right)=\left[\frac{\partial\phi_i^k}{\partial x_1}\left(b_1+\frac{a_1}{2},b_2+\frac{a_2}{2}\right)\frac{\partial\phi_j^k}{\partial x_1}\left(b_1+\frac{a_1}{2},b_2+\frac{a_2}{2}\right)\right](a_1a_2)+$$

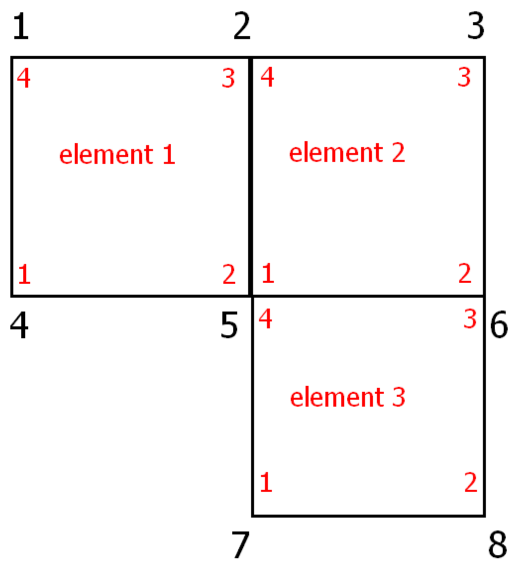
$$\left[\frac{\partial\phi_i^k}{\partial x_2}\left(b_1+\frac{a_1}{2},b_2+\frac{a_2}{2}\right)\frac{\partial\phi_j^k}{\partial x_2}\left(b_1+\frac{a_1}{2},b_2+\frac{a_2}{2}\right)\right](a_1a_2)$$

Zauważmy ponadto, że pochodne tych funkcji $\frac{\partial\phi_i^k}{\partial x_1},\frac{\partial\phi_i^k}{\partial x_2},\frac{\partial\phi_j^k}{\partial x_1},\frac{\partial\phi_j^k}{\partial x_2}$ są stałe i wynoszą +/-$\frac{1}{a_1}$ lub +/-$\frac{1}{a_2}$,
w zależności od tego którą funkcję różniczkuję i w którym kierunku.

4. Całka $b\left(\phi_i^k,\phi_j^k\right)=\int_{E_k}\frac{\partial\phi_i^k}{\partial x_1}(x_1,x_2)\frac{\partial\phi_j^k}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2+\int_{E_k}\frac{\partial\phi_i^k}{\partial x_2}(x_1,x_2)\frac{\partial\phi_j^k}{\partial x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$
jest dodawana do odpowiedniego wiersza i kolumny globalnej macierzy.

$$\texttt{B(i1,j1)+=}\int_{E_k}\frac{\partial\phi_i^k}{\partial x_1}(x_1,x_2)\frac{\partial\phi_j^k}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2+\int_{E_k}\frac{\partial\phi_i^k}{\partial x_2}(x_1,x_2)\frac{\partial\phi_j^k}{\partial x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

Jak przeliczyć i oraz j na ten wiersz i1 oraz kolumne j1?
Według schematu – każdy wiersz (kolumna) macierzy odpowiada jednemu współczynnikowi a_i jednej funkcji globalnej e_i
Innymi słowy (kolor czerwony oznacza funkcje lokalne ϕ_i^k na elementach k=1,2,3,4,
kolor czarny odpowiadające im funkcje globalne e_i = numery wiersz / kolumn w macierzy)



5. Całka po brzegu $\int_{E_k \cap \Gamma_N} g(x_1,x_2)\phi_i^k(x_1,x_2)dx_1dx_2$

Musimy sprawdzić wszystkie 4 krawędzie danego elementu E_k, czy nie leżą one na brzegu Neumanna Γ_N.

Jeśli dana krawędź elementu leży na brzegu Neumanna, to dodaje całkę po tej krawędzi do prawej strony, czyli

$\int_{edge} g(x_1,x_2)\phi_i^k(x_1,x_2)dx_1dx_2 = g(x_1^*,x_2^*)\phi_i^k(x_1^*,x_2^*)|edge|$

gdzie

(x_1^*,x_2^*) to punkt na środku krawędzi

$g(x_1^*,x_2^*)$ to wartość funkcji g w tym punkcie

$\phi_i^k(x_1^*,x_2^*)$ to wartość funkcji lokalnej ϕ_i^k w tym punkcie (zawsze równa ½ lub 0)

$|edge|$ to długość tej krawędzi

Algorytm sekwencyjny generacji układu równań

B(1:8,1:8)=0 (zerowanie macierzy)

L(1:8)=0 (zerowanie wektora prawej strony)

Pętla po elementach $E_k \in \{E_1,E_2,E_3\}$

  Pętla po funkcjach ϕ_i^k elementu E_k, $\phi_i^k \in \{\phi_1^k,\phi_2^k,\phi_3^k,\phi_4^k\}$

    i1 = wiersz macierzy związany z ϕ_i^k

    L(i1)+= $\int_{E_k \cap \Gamma_N} g(x_1,x_2)\phi_i^k(x_1,x_2)dx_1dx_2$

    Pętla po funkcjach ϕ_j^k elementu E_k, $\phi_j^k \in \{\phi_1^k,\phi_2^k,\phi_3^k,\phi_4^k\}$

      j1 = kolumna macierzy związana z ϕ_j^k

      B(i1,j1)+= $\int_{E_k} \frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_1}(x_1,x_2)\frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2 + \int_{E_k} \frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_2}(x_1,x_2)\frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$

    Koniec pętli po funkcjach ϕ_j^k

Koniec pętli po funkcjach ϕ_i^k

Koniec pętli po elementach E_k

B(4,1:8)=0 (zerowanie wierszy 4,5 i 7 macierzy)
B(5,1:8)=0 (zerowanie wierszy 4,5 i 7 macierzy)
B(7,1:8)=0 (zerowanie wierszy 4,5 i 7 macierzy)
L(4)=0 (zerowanie wiersza 4 wektora prawej strony)
L(5)=0 (zerowanie wiersza 4 wektora prawej strony)
L(7)=0 (zerowanie wiersza 4 wektora prawej strony)
B(4,4)=1 (1 na przekątnej w wierszu 4)
B(5,5)=1 (1 na przekątnej w wierszu 5)
B(7,7)=1 (1 na przekątnej w wierszu 7)

Algorytm sekwencyjny solvera

Rozwiązujemy układ równań (np. eliminacja Gaussa)
Ba=L

Rozwiązanie **a**={a1,...,a8} to współczynniki $u \approx u_h = \sum_{i=1}^{N} a_i e_i$