1 Введение

В данном отчете рассмотрена задача о линейном операторе A, действующем в трехмерном вещественном пространстве R^3, который проецирует пространство на подпространство $L1$ параллельно подпространству $L2$. Подпространства $L1$ и $L2$ заданы уравнениями $x = 0$ и $2x = 2y = -z$ соответственно.

2 Описание подпространств L1 и L2

Подпространство $L1$ определено уравнением $x = 0$. Это означает, что все точки в этом подпространстве имеют координаты вида $(0, y, z)$, где y и z - произвольные вещественные числа. Подпространство $L2$ определено уравнениями $2x = 2y = -z$. Деление обеих частей уравнения на 2 дает $x = y = -\frac{z}{2}$. Это означает, что все точки в этом подпространстве имеют координаты вида $(t, t, -2t)$, где t - произвольное вещественное число.

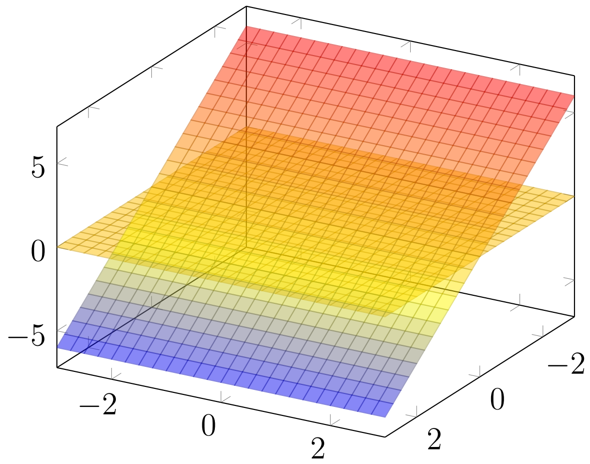

Рис. 1: Подпространства $L1$ (плоскость $x = 0$) и $L2$ (плоскость $x = y = -\frac{z}{2}$)

3 Определение линейного оператора A

Линейный оператор A определен как оператор проекции пространства R^3 на подпространство $L1$ параллельно подпространству $L2$. Он может быть выражен следующим образом:

$$A(\vec{v}) = \vec{v} - \vec{proj}_{L2}\vec{v} \tag{1}$$

Здесь $\vec{v}$ - произвольный вектор из R^3, а $\vec{proj}_{L2}\vec{v}$ - проекция $\vec{v}$ на $L2$. Проекция вектора на подпространство вычисляется по формуле:

$$\vec{proj}_{L2}\vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u} \tag{2}$$

где $\vec{u}$ - любой ненулевой вектор из $L2$. В качестве $\vec{u}$ мы можем выбрать вектор $(1, 1, -2)$.

Тогда формула для A принимает следующий вид:

$$A(\vec{v}) = \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot (1, 1, -2)}{(1, 1, -2) \cdot (1, 1, -2)}(1, 1, -2) \tag{3}$$

4 Матрица линейного оператора A

Матрица линейного оператора A в стандартном базисе R^3 ($\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$) может быть получена путем применения оператора к каждому из базисных векторов и записи результатов в столбцы матрицы.

$$
\begin{aligned}
A(\vec{i}) &= (1,0,0) - \frac{(1,0,0)\cdot(1,1,-2)}{(1,1,-2)\cdot(1,1,-2)}(1,1,-2) = (1,0,0),\\
A(\vec{j}) &= (0,1,0) - \frac{(0,1,0)\cdot(1,1,-2)}{(1,1,-2)\cdot(1,1,-2)}(1,1,-2) = (0,1,-1),\\
A(\vec{k}) &= (0,0,1) - \frac{(0,0,1)\cdot(1,1,-2)}{(1,1,-2)\cdot(1,1,-2)}(1,1,-2) = (0,-1,1).
\end{aligned}
$$

Поэтому, матрица оператора A:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}
$$

5 Спектральный анализ и диагонализация матрицы

Спектральный анализ используется для диагонализации матрицы оператора A. Для диагонализации матрицы, сначала нужно найти ее собственные значения и собственные векторы. Собственные значения матрицы A — это корни характеристического полинома $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$
\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\\
&= (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\\
&= (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda)\\
&= \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda,
\end{aligned}
$$

следовательно, корни этого полинома являются собственными значениями матрицы A.

Собственные векторы находятся из уравнения $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$ для каждого собственного значения λ.

6 Базис, в котором матрица линейного оператора A имеет диагональный вид

Для каждого собственного значения мы найдем собственный вектор и составим из этих векторов базис. В этом базисе матрица оператора A будет иметь диагональный вид с собственными значениями на диагонали.

$$\begin{aligned} \text{Для } \lambda_1 :& (A - \lambda_1 I)\vec{v} = 0, \\ \text{Для } \lambda_2 :& (A - \lambda_2 I)\vec{v} = 0, \\ \text{Для } \lambda_3 :& (A - \lambda_3 I)\vec{v} = 0. \end{aligned}$$

Для $\lambda_1 = 1$ мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 0x + 0y + 0z &= 0, \\ 0x + 0y + z &= 0, \\ 0x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет решение $v_1 = (1, 0, 0)$.

Аналогично, для $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 0$ получаем системы:

$$\begin{aligned} x + 0y + 0z &= 0, \\ 0x - y + z &= 0, \\ 0x - y + z &= 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} -x + 0y + 0z &= 0, \\ 0x - 1y + 1z &= 0, \\ 0x - 1y + 1z &= 0. \end{aligned}$$

Они имеют решения $v_2 = (0, 1, -1)$ и $v_3 = (0, 1, 1)$ соответственно.
Таким образом, собственные векторы матрицы оператора A равны:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0), \\ v_2 &= (0, 1, -1), \\ v_3 &= (0, 1, 1). \end{aligned}$$

Базис в котором матрица оператора A имеет диагональный вид — это базис из собственных векторов. Базис можно использовать для перехода к другому представлению пространства, где оператор действует более простым образом.

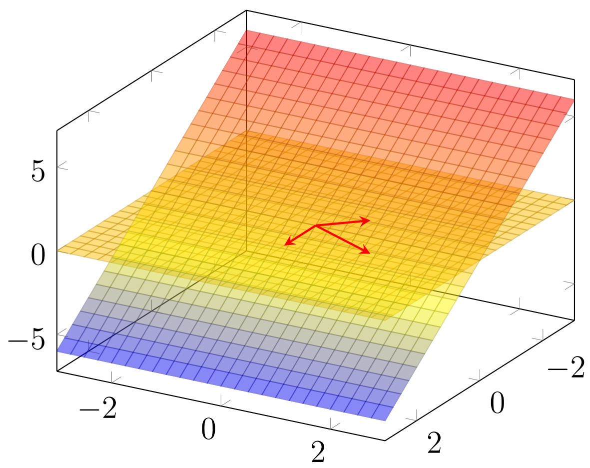

Рис. 2: Подпространства $L1$ и $L2$ с базисом, состоящим из собственных векторов матрицы A