

Содержание

| | |
|------------------|---|
| Задание..... | 3 |
| Выполнение | 3 |
| Выводы | 6 |

Задание

Необходимо выполнить оценку плотности образца с учетом случайной и систематической погрешностей, если производились косвенные измерения.

Данные для расчёта по номеру 14 в списке группы: Образец 7, 40 мм

| № | l_1 , мм | l_2 , мм | l_3 , мм | m , г |
|---|------------|------------|------------|---------|
| 1 | 40,00 | 34,98 | 8,84 | 96,90 |
| 2 | 39,98 | 34,98 | 8,86 | 96,90 |
| 3 | 40,00 | 34,92 | 8,84 | 96,92 |
| 4 | 39,98 | 34,92 | 8,84 | 96,90 |
| 5 | 40,02 | 34,90 | 8,88 | 96,90 |

Требуется определить зависимость плотности от массы и размеров образца $\rho = \frac{m}{l_1 l_2 l_3}$. Расчёт выполнить по требованиям.

Выполнение

1) Определим средние значения рассчитанных величин $\bar{m}, \bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$:

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^5 m_i}{5}, \quad \bar{m} = \frac{96,90 + 96,90 + 96,92 + 96,90 + 96,90}{5} = 96,9040 \text{ г}$$

$$\bar{l}_1 = \frac{\sum_{i=1}^5 l_{1i}}{5}, \quad \bar{l}_1 = \frac{40,00 + 39,98 + 40,00 + 39,98 + 40,02}{5} = 3,99960 \text{ см}$$

$$\bar{l}_2 = \frac{\sum_{i=1}^5 l_{2i}}{5}, \quad \bar{l}_2 = \frac{34,98 + 34,98 + 34,92 + 34,92 + 34,90}{5} = 3,4940 \text{ см}$$

$$\bar{l}_3 = \frac{\sum_{i=1}^5 l_{3i}}{5}, \quad \bar{l}_3 = \frac{8,84 + 8,86 + 8,84 + 8,84 + 8,88}{5} = 0,88520 \text{ см}$$

Теперь, зная средние значения этих величин, рассчитаем по формуле среднее значение плотности:

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{m}}{\bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3}, \quad \bar{\rho} = \frac{96,9040}{3,99960 \cdot 3,4940 \cdot 0,88520} = 7,8336 \text{ г/см}^3$$

2) Зависимость измеряемой величины (плотности) от аргументов нелинейна, поэтому для нахождения результата измерения и оценки его погрешностей следует воспользоваться методом линеаризации. Для начала проведём предварительные вычисления – рассчитаем средние квадратичные отклонения каждого из аргументов:

$$S(m) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}, \quad S(m) = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot ((96,90 - 96,904)^2 +$$

$$+ (96,90 - 96,904)^2 + (96,92 - 96,904)^2 + (96,90 - 96,904)^2 + (96,90 - 96,904)^2}$$

$$= 0,0089443 \text{ г}$$

$$S(l_1) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (l_{1i} - \bar{l}_1)^2}, \quad S(l_1) = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot ((4,000 - 3,9996)^2 +$$

$$+ (3,998 - 3,9996)^2 + (4,000 - 3,9996)^2 + (3,998 - 3,9996)^2 + (4,002 - 3,9996)^2}$$

$$= 0,0016733 \text{ см}$$

$$S(l_2) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (l_{2i} - \bar{l}_2)^2}, \quad S(l_2) = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot ((3,498 - 3,494)^2 +$$

$$+ (3,498 - 3,494)^2 + (3,492 - 3,494)^2 + (3,492 - 3,494)^2 + (3,490 - 3,494)^2}$$

$$= 0,0037417 \text{ см}$$

$$S(l_3) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (l_{3i} - \bar{l}_3)^2}, \quad S(l_3) = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot ((0,884 - 0,8852)^2 + (0,886$$

$$- 0,8852)^2 + (0,884 - 0,8852)^2 + (0,884 - 0,8852)^2 + (0,888 - 0,8852)^2}$$

$$= 0,0017889 \text{ см}$$

3) Теперь определим частные производные всех аргументов в точках средних значений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{\bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{3,99960 \cdot 3,4940 \cdot 0,88520} = 0,080839 \text{ г/см}^3$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial l_1} = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}_1^2 \bar{l}_2 \bar{l}_3}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial l_1} = -\frac{96,9040}{3,99960^2 \cdot 3,4940 \cdot 0,88520} = -1,9586 \text{ г/см}^3$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial l_2} = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}_1 \bar{l}_2^2 \bar{l}_3}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial l_2} = -\frac{96,9040}{3,99960 \cdot 3,4940^2 \cdot 0,88520} = -2,2420 \text{ г/см}^3$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial l_3} = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3^2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial l_3} = -\frac{96,9040}{3,99960 \cdot 3,4940 \cdot 0,88520^2} = -8,8495 \text{ г/см}^3$$

4) Рассчитываем остаточный член получающегося при линеаризации ряда Тейлора. Предварительно определяем предельные погрешности приборов.

Для штангенциркуля предел погрешности равен $\Delta l = 0,02 \text{ мм} = 0,002 \text{ см}$. Для весов предел погрешности равен $\Delta m = 0,02 \text{ г}$ (равен ϵ – поверочному интервалу).

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial l_1} \cdot \Delta m \cdot \Delta l + \frac{\partial \rho}{\partial m} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial l_2} \cdot \Delta m \cdot \Delta l + \frac{\partial \rho}{\partial m} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial l_3} \cdot \Delta m \cdot \Delta l + \frac{\partial \rho}{\partial l_1} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial l_2} \cdot \Delta l^2 + \frac{\partial \rho}{\partial l_1} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial l_3} \cdot \Delta l^2 + \frac{\partial \rho}{\partial l_2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial l_3} \cdot \Delta l^2 \right), R = \frac{1}{2} (0,080839 \cdot (-1,9586) \cdot 0,02 \cdot 0,002 + 0,080839 \cdot (-2,2420) \cdot 0,02 \cdot 0,002 + 0,080839 \cdot (-8,8495) \cdot 0,02 \cdot 0,002 + (-1,9586) \cdot (-2,2420) \cdot 0,002^2 + (-1,9586) \cdot (-8,8495) \cdot 0,002^2 + (-2,2420) \cdot (-8,8495) \cdot 0,002^2 = 6,2030 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3$$

5) Теперь определим среднее квадратичное отклонение случайной погрешности результата косвенного измерения (плотности):

$$S(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \cdot S(m) \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial l_1} \cdot S(l_1) \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial l_2} \cdot S(l_2) \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial l_3} \cdot S(l_3) \right)^2},$$

$$S(\rho) = \sqrt{0,080839^2 \cdot 0,0089443^2 + (-2,2420)^2 \cdot 0,0037417^2 + (-8,8495)^2 \cdot 0,0017889^2 + (-1,9586)^2 \cdot 0,0016733^2} = 0,018083 \text{ г/см}^3$$

Очевидно, что $R < 0,8 \cdot S(\rho)$.

6) Далее определяем оценку случайной погрешности. Для этого по выбранной доверительной вероятности $P = 95\%$ и числу наблюдений в выборке $N = 5$ находим по таблице коэффициент Стьюдента $t_{PN} = 2,776$, а затем вычисляем оценку по формуле:

$$\Delta \rho_{\text{случ}} = t_{PN} \cdot S_{\bar{\rho}} = t_{PN} \cdot \frac{S}{\sqrt{N}}, \Delta \rho_{\text{случ}} = 2,776 \cdot \frac{0,018083}{\sqrt{5}} = 0,022449 \text{ г/см}^3$$

7) Наконец, определяем приборную погрешность (в качестве коэффициента k при $P=0,95$ используем $k=1,1$):

$$\Delta \rho_{\text{приб}} = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \cdot \Delta m \right)^2 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \rho}{\partial l_i} \cdot \Delta l \right)^2}, \Delta \rho_{\text{приб}} = 1,1 \cdot \sqrt{(0,080839 \cdot 0,02)^2 + (-1,9586 \cdot 0,002)^2 + (-2,2420 \cdot 0,002)^2 + (-8,8495 \cdot 0,002)^2} = 0,020618 \text{ г/см}^3$$

8) Сравним величины $\Delta \rho_{\text{случ}}$ и $\Delta \rho_{\text{приб}}$:

$$\frac{\Delta\rho_{\text{приб}}}{\Delta\rho_{\text{случ}}} = \frac{0,020618}{0,022449} = 0,91844$$

Согласно МИ 2083-90, так как $0,8 < \frac{\Delta\rho_{\text{приб}}}{\Delta\rho_{\text{случ}}} < 8$, то доверительную границу погрешности результата косвенного измерения вычисляют по формуле (коэффициент k определяется по $P = 0,95$ и $\frac{\Delta\rho_{\text{приб}}}{\Delta\rho_{\text{случ}}} = 0,91844$ и равен 0,7498:

$$\Delta\rho = k \cdot (\Delta\rho_{\text{приб}} + \Delta\rho_{\text{случ}}), \quad \Delta\rho = 0,7544 \cdot (0,020618 + 0,022449) = 0,032292 \text{ г/см}^3$$

7) Таким образом, полная погрешность равна $\Delta\rho = 0,032490 \text{ г/см}^3$, а относительная погрешность вычисляется по формуле:

$$\delta\rho = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} \cdot 100\%, \quad \delta\rho = \frac{0,032292}{7,8341} \cdot 100\% = 0,41\%$$

Окончательный результат косвенного измерения равен:

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho, \quad \rho = (7,834 \pm 0,032) \text{ г/см}^3 = (78,34 \pm 0,32) \cdot 10^{-1} \text{ г/см}^3$$

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы № 2 была освоена методика обработки результатов косвенных измерений при нелинейной зависимости в соответствии с МИ 2083-90. Проведённый анализ показал:

- Среднее значение плотности образца № 7 составило $\bar{\rho} = 7,834 \text{ г/см}^3$
- Для расчёта погрешности ввиду нелинейной зависимости плотности от размеров образца был использован метод линеаризации.
- В результате расчётов получили, что остаточный член получившегося ряда Тейлора $R < 0,8 \cdot S(\rho)$, т. е. остаточным членом можно пренебречь, значит метод линеаризации допустим
- Случайная погрешность составила $0,022449 \text{ г/см}^3$, а приборная погрешность составила $0,020618 \text{ г/см}^3$, т. е. они оказались сопоставимы друг другу.
- Расчёт доверительного интервала при $P=95\%$ и учёт приборной погрешности (штангенциркуль $\pm 0,02 \text{ мм}$; весы $\pm 0,02 \text{ г}$) позволили определить полную абсолютную погрешность $\Delta\rho = 0,032 \text{ г/см}^3$.
- Окончательный результат представлен в виде $(7,834 \pm 0,032) \text{ г/см}^3 = (78,34 \pm 0,32) \cdot 10^{-1} \text{ г/см}^3$, что соответствует относительной погрешности $\delta\rho = 0,41\%$

Таким образом, основной вклад в общую погрешность измерения внёс разброс результатов измерения геометрических размеров образца

(особенно толщины l_2), а приборная составляющая оказалась сопоставимой со случайной (отношение приборной погрешности к случайной оказалось равно 0,91844). Для повышения точности эксперимента требуется использовать более точные средства измерения размеров и массы, либо увеличить количество наблюдений.