Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
образования национальный исследовательский
университет ИТМО

Расчетно графическая работа по теме "Производная и дифференциал"

Студент:
Нодири Хисравхон
группа: P3133

Санкт-Петербург,
2022

2. Наибольшее и наименьшее значения функции

Из куска металла, ограниченного линиями , , требуется выпилить деталь прямоугольной формы с наибольшей площадью.

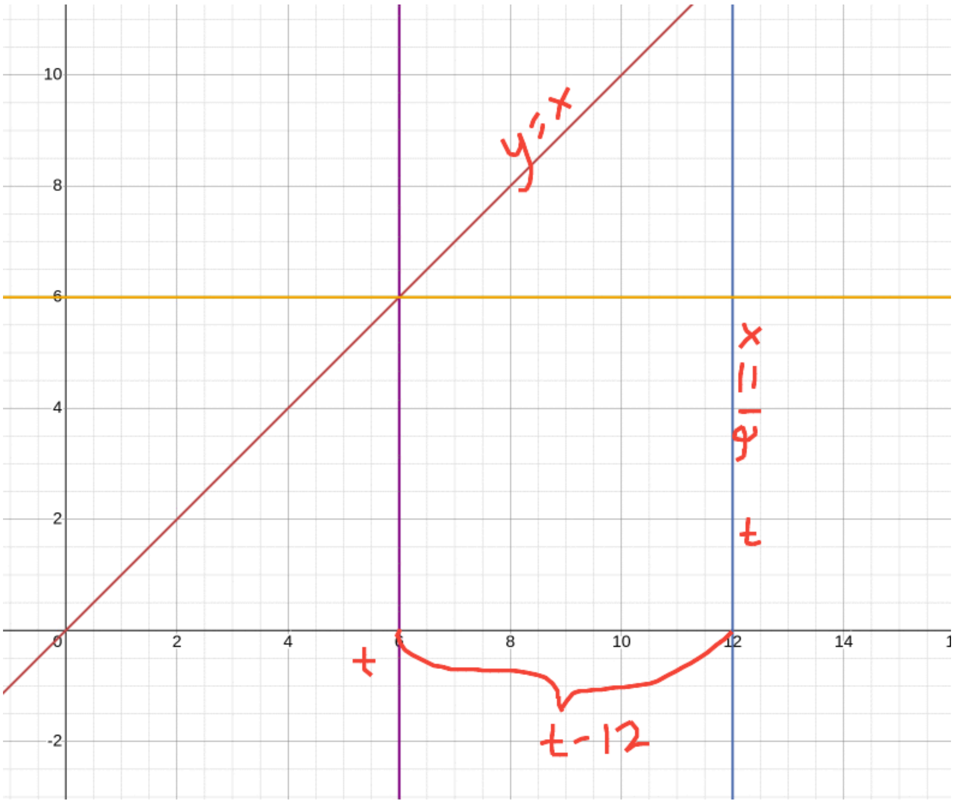
2.1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.

$$\{y = x, y = 0, x = 12\}$$

2.2) Решите задачу аналитически, применяя необходимое и достаточное условия экстремума.

$$S = t(12 - t) = 12t - 12^2$$
$$S = 12 - 2t = 0$$
$$t = 6 \Rightarrow S = t(12 - t) = 6 * 6 = 36$$

2.3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Сверьтесь с аналитическим решением.



2.4) Запишите ответ.

Ответ: 36

3. Исследование функции

Даны функции f(x) и g(x). Проведите поочерёдно их полные исследования:

3.1) Найдите область определения функции.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}; g(x) = \sqrt[3]{1 - cos(x)}$$

$$f(x)=\frac{x+1}{(x-1)(x+3)} \Rightarrow (x-1)(x+3)\neq 0; x\in(-\infty;+\infty)$$

$$x_1=1; x_2=-3; x\neq 1,-3$$

3.2) Проверьте, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и укажите, как эти свойства влияют на вид графика функции.

$$f(-x)=\frac{-x+1}{(-x)^2+2(-x)-3}$$

$$f(-x)=\frac{1-x}{x^2-2x-3}; f(x)\neq f(-x), f(x)\neq -f(x)$$

$$g(x)=\sqrt[3]{1-cos(x)}; g(-x)=\sqrt[3]{1-cos(x)}$$

$$g(x)=g(-x)\Rightarrow$$

Фун. чётная т.к $cos(x)$ период., то и $g(x)$ периодична.

$$g(x)=\sqrt[3]{1-cos(x)}=0$$

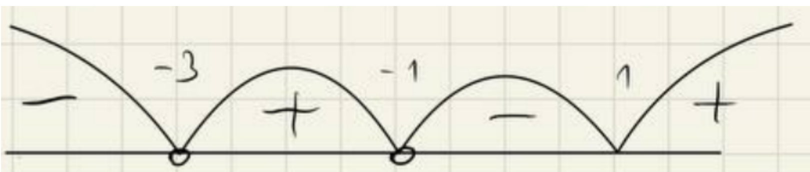
$$f(x)=\frac{x+1}{(x-1)(x+3)}=0$$

$$cos(x)=1; x=2\pi k$$

$$g(x)\geq 0; \forall x\in(-\infty;+\infty)$$

3.3) Проверьте, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и укажите, как эти свойства влияют на вид графика функции.

$$f(x)=\frac{x+1}{(x-1)(x+3)=0}$$



3.4) Исследуйте функцию с помощью первой производной: найдите интервалы монотонности и экстремумы функции.

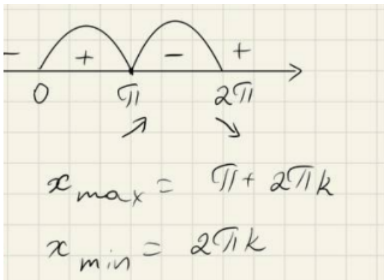
$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x - 5}{(x^2 + 2x - 3)^3}$$

$$f'(x) = 0; x \notin R \Rightarrow \text{Фун. монотонная}$$

$$g'(x) = \frac{sin(x)}{3\sqrt[3]{(1 - cos(x)^2}}$$

$$\frac{sin(x)}{3\sqrt[3]{(1 - cos(x))^2}} = 0$$

$$x = \pi + 2\pi k$$



3.5) Исследуйте функцию с помощью второй производной: найдите интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.

$$f''(x) = \frac{2 * (x^2 + 2x - 3) - (x + 1)(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{4x + 2}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

Чтобы найти точки перегиба функции, нужно решить уравнение f(x) = 0. Это уравнение имеет решение x = -1/2. Следовательно, функция f(x) имеет одну точку перегиба при x = -1/2.

Чтобы найти интервалы выпуклости (вогнутости) функции f(x), нужно определить значение f”(x) в этой точке. Подставив x = -1/2 в уравнение для f”(x), получим f”(-1/2) = -1/16. Следовательно, функция f(x) при x = -1/2 имеет выпуклый (вогнутый) характер.

Чтобы найти интервалы выпуклости (вогнутости) функции f(x), нужно проверить значение f”(x) в других точках. Если f”(x) > 0, то функция f(x) выпуклая. Если f”(x) < 0, то функция f(x) вогнутая. Если f”(x) = 0, то функция f(x) не является ни выпуклой, ни вогнутой.

$$g''(x) = \frac{-sin(x)}{3}\sqrt[3]{(1 - cos(x))^2}$$

Чтобы найти точки перегиба функции, нужно решить уравнение g"(x) = 0. Это уравнение не имеет вещественных решений, поэтому функция g(x) не имеет точек перегиба.

Чтобы найти интервалы выпуклости (вогнутости) функции g(x), нужно проверить значение g"(x) в разных точках. Если g"(x) > 0, то функция g(x) выпуклая. Если g"(x) < 0, то функция g(x) вогнутая. Если g"(x) = 0, то функция g(x) не является ни выпуклой, ни вогнутой.

3.6) Проверьте наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.

Чтобы найти вертикальные асимптоты рациональной функции, нужно найти значения x, при которых знаменатель функции равен нулю, а числитель не равен нулю. Для первой функции, f(x), знаменатель равен $x\hat{2}$ + 2x - 3, поэтому вертикальные асимптоты находятся при x = -3 и x = 1.

Чтобы найти горизонтальные асимптоты рациональной функции, нужно посмотреть на ведущие члены числителя и знаменателя. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то горизонтальной асимптотой является y = 0. Если степень числителя больше степени знаменателя, то горизонтальной асимптоты нет. Если степень числителя равна степени знаменателя, то горизонтальной асимптотой является отношение ведущих коэффициентов числителя и знаменателя. В случае f(x) степень числителя равна 1, а степень знаменателя - 2, поэтому горизонтальная асимптота равна y = 0.

Чтобы найти наклонные асимптоты рациональной функции, нужно найти ведущие члены числителя и знаменателя и разделить их. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то наклонной асимптоты нет. Если степень числителя больше степени знаменателя, то наклонная асимптота является уравнением прямой вида y = mx + b, где m - отношение ведущих коэффициентов числителя и знаменателя, а b - y-пересечение. Если степень числителя равна степени знаменателя, нужно разделить многочлены и посмотреть на полученный коэффициент. Если коэффициент является многочленом, то наклонная асимптота - это уравнение линии, заданной главным членом коэффициента. Если коэффициент не является многочленом, то косой асимптоты не существует. В случае f(x) степень числителя равна 1, а степень знаменателя - 2, поэтому косой асимптоты нет.

3.7) Найдите точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найдите значения функции в некоторых дополнительных точках.

Для первой функции f(x) мы можем найти точки пересечения с координатными осями, задав значение x равным 0 или значение функции равным 0.

Задание x = 0 дает нам f(0) = (0 + 1) / ($0\hat{2}$ + 2*0 - 3) = 1/-3, которая не пересекает ось x.

Уравнение f(x) = 0 дает нам (x + 1) / ($x\hat{2}$ + 2x - 3) = 0. Умножение обеих сторон уравнения на ($x\hat{2}$ + 2x - 3) дает нам x + 1 = 0, поэтому x = -1. Это пересекает ось y в точке (0, -1).

Чтобы найти значения функции в некоторых дополнительных точках, мы можем подставить эти значения вместо x в уравнение для f(x). Например, f(1) = (1 + 1) / ($1\hat{2}$ + 2*1 - 3) = 2 / 0, что является неопределенным.

Для второй функции g(x) мы можем найти точки пересечения с координатными осями аналогичным образом. Задавая x = 0, мы получаем g(0) = (1 - cos(0)) = (1 - 1) = (0) = 0, которая пересекает ось x в точке (0, 0).

Задавая g(x) = 0, получаем (1 - cos(x)) = 0, что означает, что 1 - cos(x) = 0. Решение для x дает нам x = 2pi/3 и x = 4pi/3. Они пересекают ось y в точках (2pi/3, 0) и (4pi/3, 0).