

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №5

По «Методы Оптимизации»

Выполнил:

Студент группы Р3231

Нодири. Х

Преподаватель:

Селина Е.Г.

г. Санкт-Петербург

2024

Оглавление

| | |
|--|---|
| Условие | 3 |
| Первые три итерации методом градиентного спуска | 4 |
| Первые три итерации методом наискорейшего спуска | 5 |
| Листинг программы | 6 |
| Вывод | 8 |

Условие

Решить задачу безусловной минимизации функции двух переменных $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 16x_1 - 4x_2$ двумя градиентными методами:

1. Методом градиентного спуска
2. Методом наискорейшего спуска

Реализовать программу на одном из языков программирования и выполнить первые три итерации вручную.

Первые три итерации методом градиентного спуска

В качестве начального приближения возьмем $(x_{10}, x_{20}) = (0, 0)$

$$\text{grad}(f) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}; \frac{\delta f}{\delta x_2} \right) = (8x_1 + 16; 6x_2 - 4)$$

Итерация 1:

Посчитаем следующее приближение:

$$x_{11} = x_{10} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1}$$
$$x_{21} = x_{20} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2}$$

Подставим в исходную функцию:

$$f(x_{11}, x_{21}) = 4(x_{10} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1})^2 + 3(x_{20} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2})^2 + 16(x_{10} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1}) - 4(x_{20} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2})$$

Возьмем $\lambda = 0.1$:

$$x_{11} = 0 - 0.1(8 \cdot 0 + 16) = -1.6$$
$$x_{21} = 0 - 0.1(6 \cdot 0 - 4) = 0.4$$
$$f(x_{10}, x_{20}) = 0; f(x_{11}, x_{21}) = -16.48$$
$$f(x_{10}, x_{20}) > f(x_{11}, x_{21}) \Rightarrow \text{переход к следующей итерации}$$

Итерация 2:

Посчитаем следующее приближение:

$$x_{12} = x_{11} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1}$$
$$x_{22} = x_{21} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2}$$

Возьмем $\lambda = 0.1$:

$$x_{12} = 0 - 0.1(8 \cdot (-1.6) + 16) = -1.92$$
$$x_{22} = 0 - 0.1(6 \cdot 0.4 - 4) = 0.56$$
$$f(x_{11}, x_{21}) = -16.48; f(x_{12}, x_{22}) = -17.2736$$
$$f(x_{11}, x_{21}) > f(x_{12}, x_{22}) \Rightarrow \text{переход к следующей итерации}$$

Итерация 3:

Посчитаем следующее приближение:

$$x_{13} = x_{12} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1}$$
$$x_{23} = x_{22} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2}$$

Возьмем $\lambda = 0.1$:

$$x_{13} = 0 - 0.1(8 \cdot (-1.92) + 16) = -1.984$$

$$x_{23} = 0 - 0.1(6 \cdot 0.56 - 4) = 0.624$$

$$f(x_{12}, x_{22}) = -17.2736; f(x_{13}, x_{23}) = -17.326848$$

$$f(x_{12}, x_{22}) > f(x_{13}, x_{23}) \Rightarrow \text{переход к следующей итерации}$$

Первые три итерации методом наискорейшего спуска

В качестве начального приближения возьмем $(x_{10}, x_{20}) = (0, 0)$

$$\text{grad}(f) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}; \frac{\delta f}{\delta x_2} \right) = (8x_1 + 16; 6x_2 - 4)$$

Итерация 1:

Посчитаем следующее приближение:

$$x_{11} = x_{10} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1}$$

$$x_{21} = x_{20} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2}$$

Подставим в исходную функцию:

$$f(x_{11}, x_{21}) = 4(x_{10} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1})^2 + 3(x_{20} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2})^2 + 16(x_{10} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1}) - 4(x_{20} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2})$$

$$f'_\lambda(x_{11}, x_{21}) = -8x_{10} \frac{\delta f}{\delta x_1} + 8\lambda \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \right)^2 - 6x_{20} \frac{\delta f}{\delta x_2} + 6\lambda \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} \right)^2 - 16 \frac{\delta f}{\delta x_1} + 4 \frac{\delta f}{\delta x_2}$$

$$f'_\lambda(x_{11}, x_{21}) = 0$$

$$\lambda = \frac{8x_{10} \frac{\delta f}{\delta x_1} + 6x_{20} \frac{\delta f}{\delta x_2} + 16 \frac{\delta f}{\delta x_1} - 4 \frac{\delta f}{\delta x_2}}{8 \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \right)^2 + 6 \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} \right)^2}$$

$$\lambda = 0.12686567164179105$$

$$x_{11} = -2.029850746268657$$

$$x_{21} = 0.5074626865671642$$

Итерация 2:

Посчитаем следующее приближение:

$$x_{12} = x_{11} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1}$$

$$x_{22} = x_{21} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2}$$

Подставим в исходную функцию:

$$f(x_{12}, x_{22}) = 4(x_{11} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1})^2 + 3(x_{21} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2})^2 + 16(x_{11} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1}) - 4(x_{21} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2})$$

$$f'_\lambda(x_{12}, x_{22}) = -8x_{11} \frac{\delta f}{\delta x_1} + 8\lambda \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \right)^2 - 6x_{21} \frac{\delta f}{\delta x_2} + 6\lambda \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} \right)^2 - 16 \frac{\delta f}{\delta x_1} + 4 \frac{\delta f}{\delta x_2}$$

$$f'_\lambda(x_{12}, x_{22}) = 0$$

$$\lambda = \frac{8x_{11} \frac{\delta f}{\delta x_1} + 6x_{21} \frac{\delta f}{\delta x_2} + 16 \frac{\delta f}{\delta x_1} - 4 \frac{\delta f}{\delta x_2}}{8 \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \right)^2 + 6 \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} \right)^2}$$

$$\lambda = 0.1634615384615385$$

$$x_{11} = -1.9908151549942594$$

$$x_{21} = 0.6636050516647533$$

Итерация 3:

Посчитаем следующее приближение:

$$x_{13} = x_{12} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1}$$

$$x_{23} = x_{22} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2}$$

Подставим в исходную функцию:

$$f(x_{13}, x_{23}) = 4(x_{12} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1})^2 + 3(x_{22} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2})^2 + 16(x_{12} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_1}) - 4(x_{22} - \lambda \frac{\delta f}{\delta x_2})$$

$$f'_\lambda(x_{13}, x_{23}) = -8x_{12} \frac{\delta f}{\delta x_1} + 8\lambda \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \right)^2 - 6x_{22} \frac{\delta f}{\delta x_2} + 6\lambda \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} \right)^2 - 16 \frac{\delta f}{\delta x_1} + 4 \frac{\delta f}{\delta x_2}$$

$$f'_\lambda(x_{13}, x_{23}) = 0$$

$$\lambda = \frac{8x_{12} \frac{\delta f}{\delta x_1} + 6x_{22} \frac{\delta f}{\delta x_2} + 16 \frac{\delta f}{\delta x_1} - 4 \frac{\delta f}{\delta x_2}}{8 \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \right)^2 + 6 \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} \right)^2}$$

$$\lambda = 0.12686567164178675$$

$$x_{11} = -2.0001370872388913$$

$$x_{21} = 0.6659355347259112$$

Листинг программы

Метод градиентного спуска:

```
def f(x1, x2):
    return 4 * x1 ** 2 + 3 * x2 ** 2 + 16 * x1 - 4 * x2

def gradient(x1, x2):
    return [8 * x1 + 16, 6 * x2 - 4]
```

```

def gradient_module(x1, x2):
    dx1, dx2 = gradient(x1, x2)
    return (dx1 ** 2 + dx2 ** 2) ** 0.5

x1 = 0
x2 = 0
step_value = 0.1
accuracy = 0.05

while True:
    f_current = f(x1, x2)
    if gradient_module(x1, x2) <= accuracy:
        break
    step = step_value
    while True:
        dx1, dx2 = gradient(x1, x2)
        x1_new = x1 - step * dx1
        x2_new = x2 - step * dx2
        f_new = f(x1_new, x2_new)
        print(f_current, x1_new, x2_new, f_new, step)
        if f_new < f_current:
            break
        step /= 2
    x1 = x1_new
    x2 = x2_new

print(x1, x2)

```

Метод наискорейшего спуска:

```

def f(x1, x2):
    return 4 * x1 ** 2 + 3 * x2 ** 2 + 16 * x1 - 4 * x2

def gradient(x1, x2):
    return [8 * x1 + 16, 6 * x2 - 4]

def gradient_module(x1, x2):
    dx1, dx2 = gradient(x1, x2)
    return (dx1 ** 2 + dx2 ** 2) ** 0.5

# f = 4(x1 - hdx1)^2 + 3(x2 - hdx2)^2 + 16(x1 - hdx1) - 4(x2 - hdx2)
# f' = -8dx1(x1 - hdx1) - 6dx2(x2 - hdx2) - 16dx1 + 4dx2 = -8x1dx1 +
8h(dx1)^2 - 6x2dx2 + 6h(dx2)^2 - 16dx1 + 4dx2
# f' = 0 => h = (8x1dx1 + 6x2dx2 + 16dx1 - 4dx2) / (8(dx1)^2 + 6(dx2)^2)
def calculate_step(x1, x2):
    dx1, dx2 = gradient(x1, x2)
    return (8 * x1 * dx1 + 6 * x2 * dx2 + 16 * dx1 - 4 * dx2) / (8 * dx1 ** 2
+ 6 * dx2 ** 2)

x1 = 0
x2 = 0

```

```
accuracy = 0.05

while True:
    if gradient_module(x1, x2) <= accuracy:
        break
    step = calculate_step(x1, x2)

    dx1, dx2 = gradient(x1, x2)
    x1 = x1 - step * dx1
    x2 = x2 - step * dx2

print(x1, x2)
```

Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы я ознакомился с градиентными методами: градиентного и наискорейшего спусков.

Результат работы программы:

```
C:\Users\Kuchizu\Desktop>py gradient-descent.py
```

```
Иттерация: 1  
x1 = -1.2000000000000002  
x2 = 1.2  
f = -13.920000000000002
```

```
Иттерация: 2  
x1 = -1.84  
x2 = 0.88  
f = -17.0944
```

```
Иттерация: 3  
x1 = -1.968  
x2 = 0.752  
f = -17.307392
```

```
Иттерация: 4  
x1 = -1.9936  
x2 = 0.7008  
f = -17.32967424
```

```
Иттерация: 5  
x1 = -1.99872  
x2 = 0.68032  
f = -17.3327675392
```

```
Иттерация: 6  
x1 = -1.999744  
x2 = 0.6721280000000001  
f = -17.333243592703997
```

```
C:\Users\Kuchizu\Desktop>py fastest-descent.py
```

```
Иттеация: 1  
x1 = -2.029850746268657  
x2 = 0.5074626865671642  
Шаг = 0.12686567164179105  
f = -17.253731343283583
```

```
Иттеация: 2  
x1 = -1.9908151549942594  
x2 = 0.6636050516647533  
Шаг = 0.1634615384615385  
f = -17.332967767362955
```

```
Иттеация: 3  
x1 = -2.0001370872388913  
x2 = 0.6659355347259112  
Шаг = 0.12686567164178675  
f = -17.333331654499943
```