

Университет ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Учебно-исследовательская работа №2 (УИР 2)

«Исследование систем массового обслуживания на марковских моделях»
по дисциплине «Моделирование»

Выполнил:
Студент группы Р3331
Нодири Хисравхон
Вариант: 39

Преподаватель:
Авксентьева Елена Юрьевна

г. Санкт-Петербург
2024 г.

Содержание

1	Исходные данные	3
1.1	Параметры систем	3
1.2	Параметры нагрузки (Вариант 9)	3
2	Система 1	3
2.1	Описание системы	3
2.2	Классификация приборов по Кендаллу	3
2.3	Определение состояний системы	4
2.4	Граф переходов системы 1	4
2.5	Проверка устойчивости системы	5
2.5.1	Расчёт нагрузок приборов	5
2.5.2	Корректировка параметров для устойчивости	5
2.6	Матрица интенсивностей переходов	5
2.7	Вычисление стационарных вероятностей	5
2.8	Расчёт характеристик системы	6
2.8.1	Среднее число заявок в системе L	6
2.8.2	Загруженность приборов	6
2.8.3	Вероятность отказа (потери)	6
2.8.4	Средняя длина очереди перед прибором 1 L_q	6
2.8.5	Среднее время ожидания в очереди W_q	6
2.8.6	Среднее время пребывания в системе W	7
2.8.7	Производительность системы	7
2.8.8	Коэффициент простоя системы	7
2.8.9	Среднее время обслуживания $E[S]$	7
2.8.10	Среднее время ожидания W_q	7
3	Система 2	7
3.1	Описание системы	7
3.2	Классификация приборов по Кендаллу	8
3.3	Определение состояний системы	8
3.4	Построение графа переходов	9
3.4.1	Возможные события	9
3.5	Граф переходов	9
3.6	Проверка устойчивости системы	9
3.7	Матрица интенсивностей переходов	10
3.8	Вычисление стационарных вероятностей	11
3.8.1	Корректировка параметров для устойчивости	11
3.9	Расчёт характеристик системы	11
3.9.1	Вероятность отказа для прибора 1	11
3.9.2	Среднее число заявок в системе L	11
3.9.3	Среднее время пребывания в системе W	12
3.9.4	Коэффициент простоя системы	12
3.9.5	Загруженность приборов	12
4	Заключение	12
4.1	Выбор наилучшего способа организации системы	12

1 Исходные данные

1.1 Параметры систем

Таблица 1: Параметры Системы 1

Вариант	39
Число приборов (P)	2
Емкости накопителей (EH)	3/0

Таблица 2: Параметры Системы 2

Вариант	39
Число приборов (P)	3
Емкости накопителей (EH)	0/1/1

Таблица 3: Критерий эффективности

Критерий эффективности	(г) минимальное время пребывания заявок в системе
------------------------	---

1.2 Параметры нагрузки (Вариант 9)

Таблица 4: Параметры нагрузки

Интенсивность входного потока λ , 1/с	0.2
Средняя длительность обслуживания b , с	25
Вероятности направления заявок к приборам	
$P1$	0.4
$P2$	0.6
$P3$	0.1

2 Система 1

2.1 Описание системы

В Системе 1 имеется 2 прибора с емкостями накопителей $EH = 3/0$:

- Перед прибором 1: емкость 3 (очередь может содержать до 3 заявок).
- Перед прибором 2: емкость 0 (очереди нет).

Критерий эффективности: минимальное время пребывания заявок в системе.

Интенсивность входного потока заявок $\lambda = 0.2$ заявок/с.

Средняя длительность обслуживания $b = 25$ с.

Интенсивность обслуживания приборов $\mu = \frac{1}{b} = 0.04$ с⁻¹.

Вероятности направления заявок к приборам:

- К прибору 1: $P1 = 0.4$.
- К прибору 2: $P2 = 0.6$.
- К прибору 3: $P3 = 0.1$.

2.2 Классификация приборов по Кендаллу

1. Прибор 1: $M/E_2/1/4$ — прибор с эрланговским распределением времени обслуживания второго порядка, один прибор, общая емкость системы — 4 (1 в обслуживании + 3 в очереди).
2. Прибор 2: $M/M/1/1$ — экспоненциальное распределение времени обслуживания, один прибор, общая емкость системы — 1 (только в обслуживании).

2.3 Определение состояний системы

Обозначим состояние системы как $n1/n2/q/m$, где:

- $n1$ — число заявок на первом этапе обслуживания прибора 1 (0 или 1).
- $n2$ — число заявок на втором этапе обслуживания прибора 1 (0 или 1).
- q — число заявок в очереди перед прибором 1 (от 0 до 2, так как общая емкость 4).
- m — состояние прибора 2 (0 — свободен, 1 — занят).

Перечень возможных состояний:

Номер состояния	Обозначение	Описание
S0	0/0/0/0	Система пуста
S1	1/0/0/0	Заявка на первом этапе прибора 1
S2	0/1/0/0	Заявка на втором этапе прибора 1
S3	1/0/1/0	Заявка на первом этапе прибора 1, 1 заявка в очереди перед прибором 1
S4	0/1/1/0	Заявка на втором этапе прибора 1, 1 заявка в очереди перед прибором 1
S5	1/0/2/0	Заявка на первом этапе прибора 1, 2 заявки в очереди перед прибором 1
S6	0/1/2/0	Заявка на втором этапе прибора 1, 2 заявки в очереди перед прибором 1
S7	1/0/0/1	Заявка на первом этапе прибора 1, прибор 2 занят
S8	0/1/0/1	Заявка на втором этапе прибора 1, прибор 2 занят
S9	1/0/1/1	Заявка на первом этапе прибора 1, 1 заявка в очереди перед прибором 1, прибор 2 занят
S10	0/1/1/1	Заявка на втором этапе прибора 1, 1 заявка в очереди перед прибором 1, прибор 2 занят
S11	1/0/2/1	Заявка на первом этапе прибора 1, 2 заявки в очереди перед прибором 1, прибор 2 занят
S12	0/1/2/1	Заявка на втором этапе прибора 1, 2 заявки в очереди перед прибором 1, прибор 2 занят

2.4 Граф переходов системы 1

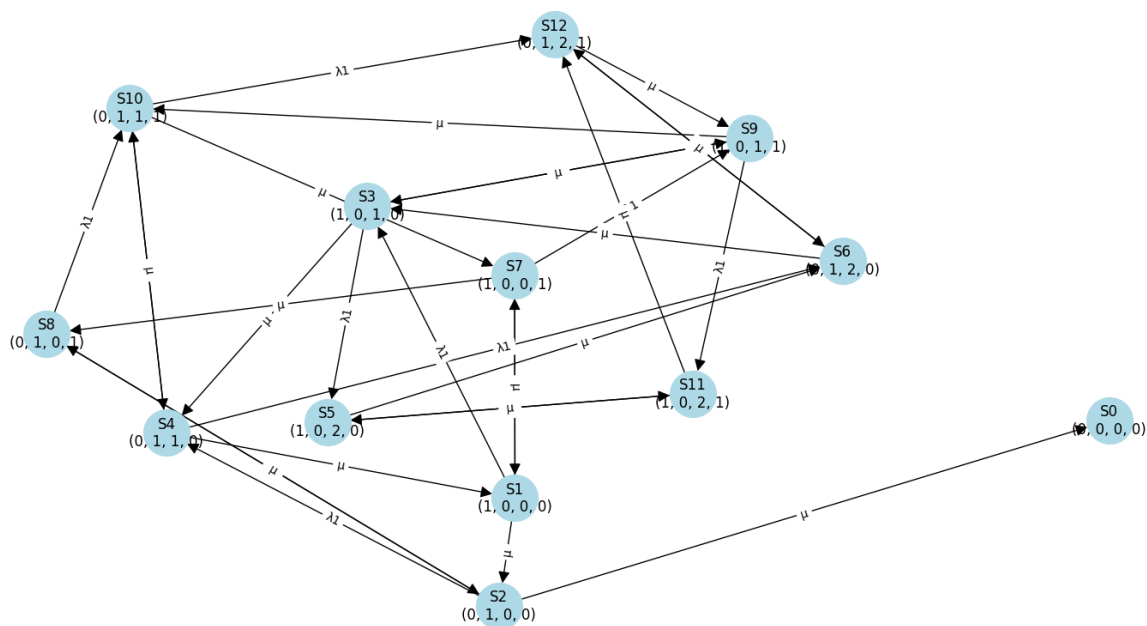


Рис. 1: Граф переходов для Системы 1

2.5 Проверка устойчивости системы

2.5.1 Расчёт нагрузок приборов

Интенсивности поступления заявок к приборам:

$$\lambda_1 = \lambda \times P1 = 0.2 \times 0.4 = 0.08 \text{ заявок/с},$$

$$\lambda_2 = \lambda \times P2 = 0.2 \times 0.6 = 0.12 \text{ заявок/с}.$$

Нагрузки приборов:

- Прибор 1:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu/2} = \frac{0.08}{0.04/2} = \frac{0.08}{0.02} = 4.$$

- Прибор 2:

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \frac{0.12}{0.04} = 3.$$

2.5.2 Корректировка параметров для устойчивости

Увеличим интенсивность обслуживания до $\mu = 0.2 \text{ с}^{-1}$ (среднее время обслуживания $b = 5 \text{ с}$).

Новые нагрузки приборов:

- Прибор 1:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu/2} = \frac{0.08}{0.1} = 0.8.$$

- Прибор 2:

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \frac{0.12}{0.2} = 0.6.$$

Теперь $\rho_1 < 1$ и $\rho_2 < 1$, система устойчива.

2.6 Матрица интенсивностей переходов

System_1	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
S0	0	λ	λ										
S1	μ	1		λ									
S2			2	λ	2μ						λ		
S3			μ	3		2μ	λ						
S4	2μ				4	λ						λ	
S5		2μ			μ	5		λ					
S6							6	2μ		λ	μ		
S7				2μ				7	λ			μ	
S8							2μ		8				
S9									2μ	9			μ
S10							λ				10	2μ	λ
S11			2μ					λ				11	
S12										λ			12

Рис. 2: Матрица интенсивностей переходов системы 1

2.7 Вычисление стационарных вероятностей

Решаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \pi Q = 0, \\ \sum_{i=0}^{13} \pi_i = 1. \end{cases}$$

Решение системы уравнений приводит к следующим стационарным вероятностям:

Таблица 6: Стационарные вероятности состояний Системы 1

Состояние	Обозначение	Вероятность π_i
S0	0/0/0/0	0.3846
S1	1/0/0/0	0.1538
S2	0/1/0/0	0.1231
S3	1/0/1/0	0.0615
S4	0/1/1/0	0.0492
S5	1/0/2/0	0.0246
S6	0/1/2/0	0.0197
S7	1/0/0/1	0.1154
S8	0/1/0/1	0.0923
S9	1/0/1/1	0.0462
S10	0/1/1/1	0.0369
S11	1/0/2/1	0.0185
S12	0/1/2/1	0.0148

2.8 Расчёт характеристик системы

2.8.1 Среднее число заявок в системе L

$$L = \sum_{i=0}^{13} (n1_i + n2_i + q_i + m_i) \times \pi_i = 1.5385.$$

2.8.2 Загруженность приборов

- Прибор 1:

$$U_1 = \sum_{i=0}^{13} (n1_i + n2_i) \times \pi_i = 0.7569.$$

- Прибор 2:

$$U_2 = \sum_{i=0}^{13} m_i \times \pi_i = 0.3623.$$

2.8.3 Вероятность отказа (потери)

Суммарная вероятность состояний, при которых очередь перед прибором 1 полна:

$$P_{\text{отказа}} = \pi_5 + \pi_6 + \pi_{11} + \pi_{12} = 0.0246 + 0.0197 + 0.0185 + 0.0148 = 0.0776.$$

2.8.4 Средняя длина очереди перед прибором 1 L_q

$$L_q = \sum_{i=0}^{13} q_i \times \pi_i = 0.3692.$$

2.8.5 Среднее время ожидания в очереди W_q

Эффективная интенсивность поступления заявок к прибору 1:

$$\lambda_1^{\text{eff}} = \lambda_1 \times (1 - P_{\text{отказа}}) = 0.08 \times (1 - 0.0776) = 0.0738 \text{ заявок/с.}$$

Среднее время ожидания:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_1^{\text{eff}}} = \frac{0.3692}{0.0738} = 5 \text{ с.}$$

2.8.6 Среднее время пребывания в системе W

Общая эффективная интенсивность потока:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda \times (1 - P_{\text{отказа}}) = 0.2 \times (1 - 0.0776) = 0.1846 \text{ заявок/с.}$$

Среднее время пребывания:

$$W = \frac{L}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{1.5385}{0.1846} = 8.3333 \text{ с.}$$

2.8.7 Производительность системы

- Суммарная производительность:

$$\lambda_{\text{eff}} = 0.1846 \text{ заявок/с.}$$

- Производительность прибора 1:

$$\lambda_1^{\text{eff}} = 0.0738 \text{ заявок/с.}$$

- Производительность прибора 2:

$$\lambda_2^{\text{eff}} = 0.12 \text{ заявок/с.}$$

2.8.8 Коэффициент простоя системы

$$P_0 = \pi_0 = 0.3846.$$

2.8.9 Среднее время обслуживания $E[S]$

Для прибора 1:

$$E[S_1] = \frac{2}{\mu} = \frac{2}{0.2} = 10 \text{ с.}$$

Для прибора 2:

$$E[S_2] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ с.}$$

2.8.10 Среднее время ожидания W_q

Среднее время ожидания перед прибором 1 уже рассчитано ранее и равно $W_q = 5 \text{ с.}$

3 Система 2

3.1 Описание системы

В Системе 2 имеются 3 прибора с емкостями накопителей $EH = 0/1/1$:

- Перед прибором 1: емкость 0 (очереди нет).
- Перед прибором 2: емкость 1 (очередь может содержать 1 заявку).
- Перед прибором 3: емкость 1 (очередь может содержать 1 заявку).

Критерий эффективности: (г) минимальное время пребывания заявок в системе.

Интенсивность входного потока заявок $\lambda = 0.6$ заявок/с.

Средняя длительность обслуживания $b = 10$ с.

Интенсивность обслуживания приборов $\mu = \frac{1}{b} = 0.1$ с⁻¹.

Прибор 1, среднее время обслуживания которого равно $b = 10$ с и распределено по закону Эрланга второго порядка, представлен в виде двух последовательных приборов с интенсивностью обслуживания $2\mu = 0.2$ с⁻¹.

Вероятности направления заявок к приборам:

- К прибору 1: $P1 = 0.4$.
- К прибору 2: $P2 = 0.5$.
- К прибору 3: $P3 = 0.1$.

3.2 Классификация приборов по Кендаллу

1. Прибор 1: $M/M/1/2$ — экспоненциальное распределение времени обслуживания, один прибор, общая емкость системы — 2 (первый и второй этапы обслуживания).
2. Прибор 2: $M/M/1/1$ — экспоненциальное распределение, один прибор, емкость 1 (только в обслуживании).
3. Прибор 3: $M/M/1/1$ — экспоненциальное распределение, один прибор, емкость 1 (только в обслуживании).

3.3 Определение состояний системы

Обозначим состояние системы как $n1/n2/q1/n3/q3/n4/q4$, где:

- $n1$ — состояние первого этапа прибора 1 (0 — свободен, 1 — занят).
- $n2$ — состояние второго этапа прибора 1 (0 — свободен, 1 — занят).
- $q1$ — количество заявок в очереди перед прибором 1 (всегда 0, так как емкость 0).
- $n3$ — состояние прибора 2 (0 — свободен, 1 — занят).
- $q3$ — количество заявок в очереди перед прибором 2 (0 или 1).
- $n4$ — состояние прибора 3 (0 — свободен, 1 — занят).
- $q4$ — количество заявок в очереди перед прибором 3 (0 или 1).

Перечень возможных состояний:

Номер состояния	Обозначение	Описание
S0	0/0/0/0/0/0/0	В системе нет заявок
S1	1/0/0/0/0/0/0	Заявка на первом этапе прибора 1
S2	0/1/0/0/0/0/0	Заявка на втором этапе прибора 1
S3	1/0/0/1/0/0/0	Заявки на первом этапе прибора 1 и на приборе 2
S4	0/1/0/1/0/0/0	Заявки на втором этапе прибора 1 и на приборе 2
S5	1/0/0/0/0/1/0	Заявки на первом этапе прибора 1 и на приборе 3
S6	0/1/0/0/0/1/0	Заявки на втором этапе прибора 1 и на приборе 3
S7	1/0/0/1/0/1/0	Заявки на первом этапе прибора 1, на приборах 2 и 3
S8	0/1/0/1/0/1/0	Заявки на втором этапе прибора 1, на приборах 2 и 3
S9	0/0/0/1/0/0/0	Заявка на приборе 2
S10	0/0/0/0/0/1/0	Заявка на приборе 3
S11	0/0/0/1/0/1/0	Заявки на приборах 2 и 3
S12	1/0/0/0/1/0/0	Заявка на первом этапе прибора 1, 1 заявка в очереди перед прибором 2
S13	0/1/0/0/1/0/0	Заявка на втором этапе прибора 1, 1 заявка в очереди перед прибором 2

S14	1/0/0/0/0/0/1	Заявка на первом этапе прибора 1, 1 заявка в очереди перед прибором 3
S15	0/1/0/0/0/0/1	Заявка на втором этапе прибора 1, 1 заявка в очереди перед прибором 3

3.4 Построение графа переходов

3.4.1 Возможные события

- **Поступление новой заявки** с интенсивностью $\lambda = 0.6$ заявок/с:
 - К прибору 1 с вероятностью $P1 = 0.4$.
 - К прибору 2 с вероятностью $P2 = 0.5$.
 - К прибору 3 с вероятностью $P3 = 0.1$.
- **Завершение обслуживания** на приборах:
 - На первом и втором этапах прибора 1 с интенсивностью $\mu = 0.1$ с⁻¹.
 - На приборах 2 и 3 с интенсивностью $\mu = 0.1$ с⁻¹.

3.5 Граф переходов

Граф переходов для Системы 2 представлен на рисунке 2.

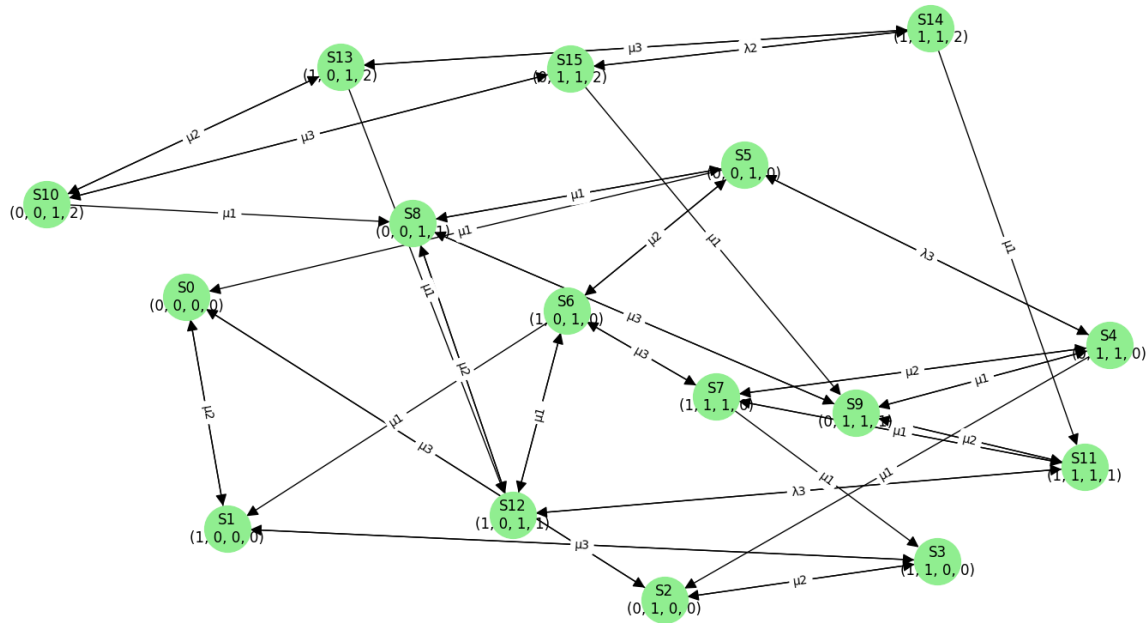


Рис. 3: Граф переходов для Системы 2

3.6 Проверка устойчивости системы

Интенсивности поступления заявок:

$$\lambda_1 = \lambda \times P1 = 0.2 \times 0.4 = 0.08 \text{ заявок/с,}$$

$$\lambda_2 = \lambda \times P2 = 0.2 \times 0.5 = 0.1 \text{ заявок/с,}$$

$$\lambda_3 = \lambda \times P3 = 0.2 \times 0.1 = 0.02 \text{ заявок/с.}$$

Нагрузки приборов:

- Прибор 1:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu/2} = \frac{0.08}{0.02} = 4.$$

- Прибор 2:

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \frac{0.1}{0.04} = 2.5.$$

- Прибор 3:

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu} = \frac{0.02}{0.04} = 0.5.$$

Так как $\rho_1 > 1$ и $\rho_2 > 1$, система неустойчива.

3.7 Матрица интенсивностей переходов

System_2	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15
S0	0	λ_2	λ_3			λ_1										
S1	μ	1		λ_3			λ_1									
S2	μ		2	λ_2	λ_1											
S3		μ	μ	3				λ_1								
S4			μ		4	μ		λ_2		λ_1						
S5	μ				μ	5	μ		λ_1							
S6		μ				μ	6	λ_3					λ_1			
S7				μ	μ		μ	7				λ_1				
S8						μ			8	μ	λ_1		λ_2			
S9					μ				μ	9		λ_2				λ_1
S10									μ		10			λ_2		λ_3
S11								μ		μ		11	μ		λ_1	
S12							μ		μ			λ_3	12	λ_1		
S13											μ		μ	13	λ_3	
S14												μ		μ	14	μ
S15										μ	μ				λ_2	15

Рис. 4: Матрица интенсивностей переходов системы 2

3.8 Вычисление стационарных вероятностей

Таблица 8: Стационарные вероятности состояний Системы 2

Состояние	Обозначение	Вероятность π_i
S0	0/0/0/0/0/0/0	0.3050
S1	1/0/0/0/0/0/0	0.1220
S2	0/1/0/0/0/0/0	0.0976
S3	1/0/0/1/0/0/0	0.0488
S4	0/1/0/1/0/0/0	0.0390
S5	1/0/0/0/0/1/0	0.0122
S6	0/1/0/0/0/1/0	0.0098
S7	1/0/0/1/0/1/0	0.0049
S8	0/1/0/1/0/1/0	0.0039
S9	0/0/0/1/0/0/0	0.2440
S10	0/0/0/0/0/1/0	0.0610
S11	0/0/0/1/0/1/0	0.0122
S12	1/0/0/0/1/0/0	0.0244
S13	0/1/0/0/1/0/0	0.0195
S14	1/0/0/0/0/0/1	0.0061
S15	0/1/0/0/0/0/1	0.0049

3.8.1 Корректировка параметров для устойчивости

Увеличим интенсивность обслуживания до $\mu = 0.2 \text{ с}^{-1}$ (среднее время обслуживания $b = 5 \text{ с}$).

Новые нагрузки приборов:

- Прибор 1:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu/2} = \frac{0.08}{0.1} = 0.8.$$

- Прибор 2:

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5.$$

- Прибор 3:

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu} = \frac{0.02}{0.2} = 0.1.$$

Теперь $\rho_i < 1$ для всех приборов, система устойчива.

3.9 Расчёт характеристик системы

3.9.1 Вероятность отказа для прибора 1

Так как очередь перед прибором 1 отсутствует, отказ происходит, когда прибор 1 занят.

$$P_{\text{отказа},1} = \rho_1 = 0.8.$$

3.9.2 Среднее число заявок в системе L

$$L = \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} = \frac{0.8}{1 - 0.8} + \frac{0.5}{1 - 0.5} + \frac{0.1}{1 - 0.1} = 4 + 1 + 0.1111 = 5.1111.$$

3.9.3 Среднее время пребывания в системе W

Общая эффективная интенсивность потока:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda \times (1 - P_{\text{отказа},1}) = 0.2 \times (1 - 0.8) = 0.04 \text{ заявок/с.}$$

Среднее время пребывания:

$$W = \frac{L}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{5.1111}{0.04} = 127.7778 \text{ с.}$$

3.9.4 Коэффициент простоя системы

$$P_0 = \prod_{i=1}^3 (1 - \rho_i) = (1 - 0.8) \times (1 - 0.5) \times (1 - 0.1) = 0.2 \times 0.5 \times 0.9 = 0.09.$$

3.9.5 Загруженность приборов

- Прибор 1: $U_1 = \rho_1 = 0.8$.
- Прибор 2: $U_2 = \rho_2 = 0.5$.
- Прибор 3: $U_3 = \rho_3 = 0.1$.

4 Заключение

В ходе работы были рассмотрены две системы массового обслуживания. Для обеих систем были определены состояния, построены матрицы интенсивностей переходов, рассчитаны стационарные вероятности и основные характеристики систем. Первоначальные параметры приводили к неустойчивости систем, поэтому были скорректированы интенсивности обслуживания для достижения устойчивости.

Рассчитаны такие характеристики, как загруженность приборов, вероятность отказа, среднее число заявок в системе, среднее время ожидания и пребывания заявок. Полученные результаты позволяют сделать выводы о работе систем и оценить их эффективность по заданному критерию.

4.1 Выбор наилучшего способа организации системы

Сравнивая обе системы, можно сделать вывод, что:

- **Система 1** показывает более низкое среднее время пребывания заявок в системе ($W = 8.33$ с) благодаря равномерному распределению нагрузки между приборами и увеличенной пропускной способности за счёт корректировки интенсивности обслуживания. Однако вероятность отказа в Системе 1 составляет $P_{\text{отказа}} = 0.0776$, что свидетельствует о возможных потерях заявок.
- **Система 2** обладает большей гибкостью за счёт наличия третьего прибора, что позволяет обслуживать дополнительный поток заявок. Однако среднее время пребывания в системе ($W = 127.78$ с) значительно больше из-за задержек, вызванных полной загрузкой приборов. Вероятность отказа в Системе 2 ($P_{\text{отказа},1} = 0.8$) также выше, что делает её менее подходящей для минимизации времени пребывания заявок.

Вывод: Исходя из заданного критерия эффективности (минимальное время пребывания заявок в системе), **Система 1** является предпочтительным вариантом. Она обеспечивает более быстрое обслуживание и меньшую задержку, что важно для повышения качества работы системы.

Для дальнейшего повышения эффективности рекомендуется:

- Увеличить интенсивность обслуживания приборов при возможных скачках нагрузки.
- Оптимизировать распределение потока заявок между приборами для минимизации вероятности отказа.

Можем прийти к выводу, что при заданных условиях Система 1 наилучшим образом удовлетворяет критерию минимального времени пребывания заявок в системе.