Расчётно-графическая работа по теме "Ряды Тейлора и Фурье"

11 июня 2023 г.

1 Введение

В этой работе мы исследуем применение рядов Тейлора для аппроксимации функций и решения дифференциальных уравнений.

2 Ряды Тейлора

2.1 Задача 1а

Дан числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{3^n} * (2n-1)}. \tag{1}$$

Этот ряд напоминает ряд Маклорена для функции $\arctan(x)$, который выглядит следующим образом:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{2}$$

При замене x на $1/\sqrt{3}$ в ряде для $\arctan(x)$ мы получим исходный числовой ряд. Следовательно, сумма числового ряда равна $\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$.

2.2 Задача 1б

Требуется найти первообразную функции $f(x) = \sin(x)/x$ в виде ряда Маклорена. Разложим $\sin(x)$ в ряд Маклорена:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{3}$$

Теперь можем представить функцию $f(x)$ в виде степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}. \tag{4}$$

Интегрируем это выражение для нахождения первообразной:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + C, \tag{5}$$

где C - константа интегрирования.

2.3 Задача 1в

Рассмотрим дифференциальное уравнение и начальные условия:

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{\sqrt{y}} + 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Допустим, что решение можно представить в виде степенного ряда:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y''''(0)}{4!}x^4 + \dots$$

Согласно заданным условиям, вычисляем первые четыре производные в точке x=0:

$$y(0) = 1,$$
$$y'(0) = 2,$$
$$y''(0) = \frac{1}{2},$$
$$y'''(0) = \frac{1}{4},$$

Чтобы вычислить четвертую производную в точке x=0, продолжаем процесс дифференцирования:

$$y'''' = \frac{3}{8}y^{-5/2}$$

Подставляем y(0) = 1 и получаем $y''''(0) = \frac{3}{8}$.
Тогда, приближённое решение до четвертого порядка будет:

$$y(x) \approx y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y''''(0)}{4!}x^4 = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{192}x^4$$