УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 63

Студент
Нодири Хисравхон
P3131

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург, 2023 г.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $8 < (1x_4x_5 + x_1x_2x_3) \leq 11$, и неопределенное значение при $|x_5x_1x_2 - x_4x_3| = 3$.

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$1x_4x_5$	$x_1x_2x_3$	$x_5x_1x_2$	x_4x_3	f
0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	5	0	4	0	0
2	0	0	0	1	0	6	0	0	2	0
3	0	0	0	1	1	7	0	4	2	0
4	0	0	1	0	0	4	1	0	1	0
5	0	0	1	0	1	5	1	4	1	d
6	0	0	1	1	0	6	1	0	3	d
7	0	0	1	1	1	7	1	4	3	0
8	0	1	0	0	0	4	2	1	0	0
9	0	1	0	0	1	5	2	5	0	0
10	0	1	0	1	0	6	2	1	2	0
11	0	1	0	1	1	7	2	5	2	d
12	0	1	1	0	0	4	3	1	1	0
13	0	1	1	0	1	5	3	5	1	0
14	0	1	1	1	0	6	3	1	3	1
15	0	1	1	1	1	7	3	5	3	1
16	1	0	0	0	0	4	4	2	0	0
17	1	0	0	0	1	5	4	6	0	1
18	1	0	0	1	0	6	4	2	2	1
19	1	0	0	1	1	7	4	6	2	1
20	1	0	1	0	0	4	5	2	1	1
21	1	0	1	0	1	5	5	6	1	1
22	1	0	1	1	0	6	5	2	3	1
23	1	0	1	1	1	7	5	6	3	d
24	1	1	0	0	0	4	6	3	0	d
25	1	1	0	0	1	5	6	7	0	1
26	1	1	0	1	0	6	6	3	2	0
27	1	1	0	1	1	7	6	7	2	0
28	1	1	1	0	0	4	7	3	1	1
29	1	1	1	0	1	5	7	7	1	0
30	1	1	1	1	0	6	7	3	3	0
31	1	1	1	1	1	7	7	7	3	0

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee$$
$$\vee\, x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$
$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$
$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$$
$$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5)$$
$$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$		
m_{17}	10001	✓
m_{18}	10010	✓
m_{20}	10100	✓
m_5	00101	✓
m_6	00110	✓
m_{24}	11000	✓
m_{14}	01110	✓
m_{19}	10011	✓
m_{21}	10101	✓
m_{22}	10110	✓
m_{25}	11001	✓
m_{28}	11100	✓
m_{11}	01011	✓
m_{15}	01111	✓
m_{23}	10111	✓

$K^1(f)$		
m_6-m_{14}	0X110	
m_{18}-m_{19}	1001X	✓
m_{17}-m_{19}	100X1	✓
m_{20}-m_{21}	1010X	✓
m_{20}-m_{22}	101X0	✓
m_{17}-m_{21}	10X01	✓
m_{18}-m_{22}	10X10	✓
m_{24}-m_{25}	1100X	
m_{24}-m_{28}	11X00	
m_{17}-m_{25}	1X001	
m_{20}-m_{28}	1X100	
m_5-m_{21}	X0101	
m_6-m_{22}	X0110	
m_{14}-m_{15}	0111X	
m_{11}-m_{15}	01X11	
m_{22}-m_{23}	1011X	✓
m_{21}-m_{23}	101X1	✓
m_{19}-m_{23}	10X11	✓

$K^2(f)$	
m_{20}-m_{21}-m_{22}-m_{23}	101XX
m_{18}-m_{19}-m_{22}-m_{23}	10X1X
m_{17}-m_{19}-m_{21}-m_{23}	10XX1

$Z(f)$
0X110
1100X
11X00
1X001
1X100
X0101
X0110
0111X
01X11
101XX
10X1X
10XX1

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы									
		0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
		1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
		1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
		0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
		14	15	17	18	19	20	21	22	25	28
A	0X110	X									
B	1100X									X	
C	11X00										X
D	1X001			X						X	
E	1X100						X				X
F	X0101							X			
	~~X0110~~								X		
G	0111X	X	X								
H	01X11		X								
I	101XX						X	X	X		
	~~10X1X~~				X	X			X		
J	10XX1			X		X		X			

Ядро покрытия:

$$T = \{10X1X\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы						
		0 1 1 1 0	0 1 1 1 1	1 0 0 0 1	1 0 1 0 0	1 0 1 0 1	1 1 0 0 1	1 1 1 0 0
		14	15	17	20	21	25	28
A	0X110	X						
B	1100X						X	
C	11X00							X
D	1X001			X			X	
E	1X100				X			X
F	X0101					X		
G	0111X	X	X					
H	01X11		X					
I	101XX				X	X		
J	10XX1			X		X		

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$Y = (A \vee G)\ (G \vee H)\ (D \vee J)\ (E \vee I)\ (F \vee I \vee J)\ (B \vee D)\ (C \vee E)$

Приведем выражение в ДНФ:

$Y = A\,B\,C\,H\,I\,J \vee A\,B\,E\,H\,J \vee A\,C\,D\,H\,I \vee A\,D\,E\,F\,H \vee B\,C\,G\,I\,J \vee B\,E\,G\,J \vee C\,D\,G\,I \vee D\,E\,F\,G$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \\ C \\ H \\ I \\ J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10X1X \\ 0X110 \\ 1100X \\ 11X00 \\ 01X11 \\ 101XX \\ 10XX1 \end{Bmatrix}$$

$S_1^a = 25$
$S_1^b = 32$

$$C_2 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \\ E \\ H \\ J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10X1X \\ 0X110 \\ 1100X \\ 1X100 \\ 01X11 \\ 10XX1 \end{Bmatrix}$$

$S_2^a = 22$
$S_2^b = 28$

$$C_3 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ C \\ D \\ H \\ I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10X1X \\ 0X110 \\ 11X00 \\ 1X001 \\ 01X11 \\ 101XX \end{Bmatrix}$$

$S_3^a = 22$
$S_3^b = 28$

$$C_4 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ D \\ E \\ F \\ H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10X1X \\ 0X110 \\ 1X001 \\ 1X100 \\ X0101 \\ 01X11 \end{Bmatrix}$$

$S_4^a = 23$
$S_4^b = 29$

$$C_5 = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ C \\ G \\ I \\ J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10X1X \\ 1100X \\ 11X00 \\ 0111X \\ 101XX \\ 10XX1 \end{Bmatrix}$$

$S_5^a = 21$
$S_5^b = 27$

$$C_6 = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ E \\ G \\ J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10X1X \\ 1100X \\ 1X100 \\ 0111X \\ 10XX1 \end{Bmatrix}$$

$S_6^a = 18$
$S_6^b = 23$

$$C_7 = \begin{Bmatrix} T \\ C \\ D \\ G \\ I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10X1X \\ 11X00 \\ 1X001 \\ 0111X \\ 101XX \end{Bmatrix}$$

$S_7^a = 18$
$S_7^b = 23$

$$C_8 = \begin{Bmatrix} T \\ D \\ E \\ F \\ G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10X1X \\ 1X001 \\ 1X100 \\ X0101 \\ 0111X \end{Bmatrix}$$

$S_8^a = 19$
$S_8^b = 24$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 10X1X \\ 1100X \\ 1X100 \\ 0111X \\ 10XX1 \end{Bmatrix}$$

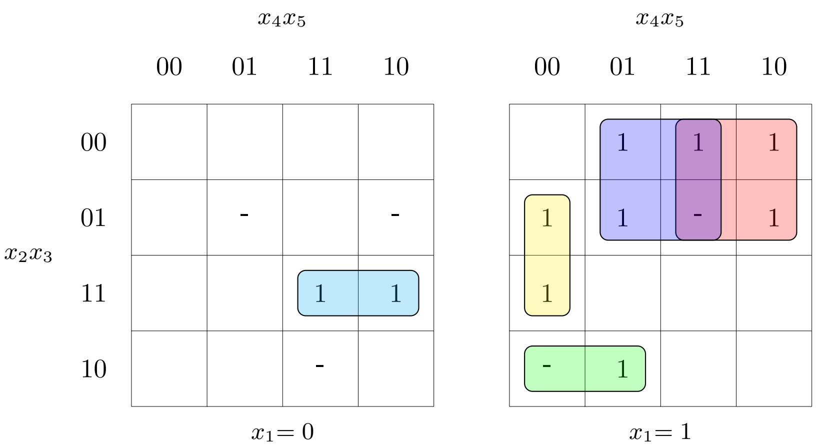
$$S^a = 18$$
$$S^b = 23$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = x_1\,\overline{x_2}\,x_4 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_5$$

Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ

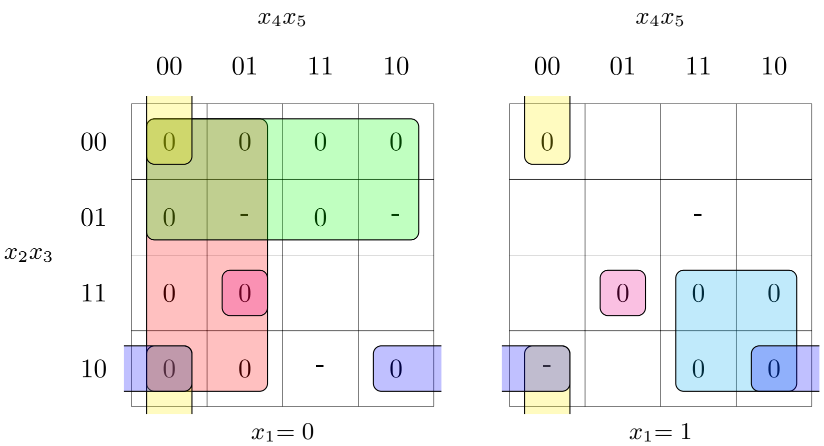


$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 10X1X \\ 1100X \\ 1X100 \\ 0111X \\ 10XX1 \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 18$$
$$S^b = 23$$

$$f = x_1\,\overline{x_2}\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_5 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4$$

Определение МКНФ



$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 0XX0X \\ 00XXX \\ XX000 \\ 11X1X \\ X10X0 \\ X1101 \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 17$$
$$S^b = 23$$

$$f = (x_1 \vee x_4)\,(x_1 \vee x_2)\,(x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4})\,(\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_5)\,(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$f = x_1\,\overline{x_2}\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_5 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \quad S_Q = 23 \quad \tau = 2$

$f = x_1\,\overline{x_2}\,(x_4 \vee x_5) \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \quad S_Q = 21 \quad \tau = 3$

$\varphi = \overline{x_4}\,\overline{x_5}$

$\overline{\varphi} = x_4 \vee x_5$

$f = x_1\,\overline{x_2}\,\overline{\varphi} \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \varphi\,x_1\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$

Декомпозиция нецелесообразна

$f = x_1\,\overline{x_2}\,(x_4 \vee x_5) \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \quad S_Q = 21 \quad \tau = 3$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$f = (x_1 \vee x_4)\,(x_1 \vee x_2)\,(x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4})\,(\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_5)\,(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 23 \quad \tau = 2$

$f = (x_1 \vee x_2\,x_4)\,(x_3 \vee x_5 \vee \overline{x_2}\,x_4)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4})\,(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 20 \quad \tau = 3$

$\varphi = x_2\,x_4$

$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_4}$

$f = (x_1 \vee \varphi)\,(x_3 \vee x_5 \vee \overline{x_2}\,x_4)\,(\overline{\varphi} \vee \overline{x_1})\,(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 20 \quad \tau = 4$

Декомпозиция нецелесообразна

$f = (x_1 \vee x_2\,x_4)\,(x_3 \vee x_5 \vee \overline{x_2}\,x_4)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4})\,(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 20 \quad \tau = 3$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1\,\overline{x_2}\,(x_4 \vee x_5) \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \quad (S_Q = 21, \tau = 3)$$

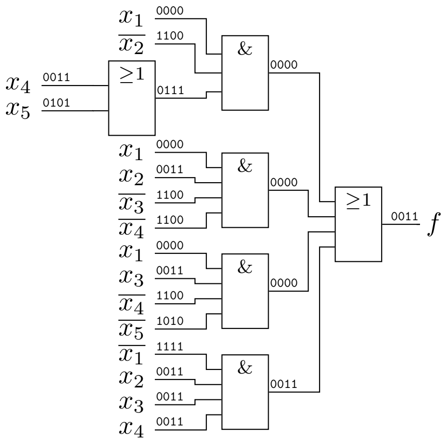
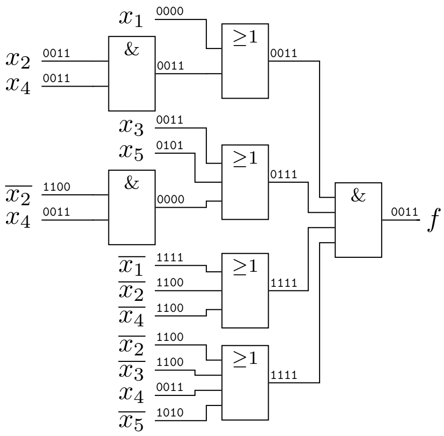


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2\,x_4)\,(x_3 \vee x_5 \vee \overline{x_2}\,x_4)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4})\,(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \quad (S_Q = 20, \tau = 3)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1\,\overline{x_2}\,\overline{\varphi}}\;\overline{x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}}\;\overline{\varphi\,x_1\,x_3}\;\overline{\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4}} \quad (S_Q = 26, \tau = 6)$$

$$\varphi = \overline{x_4}\,\overline{x_5}$$

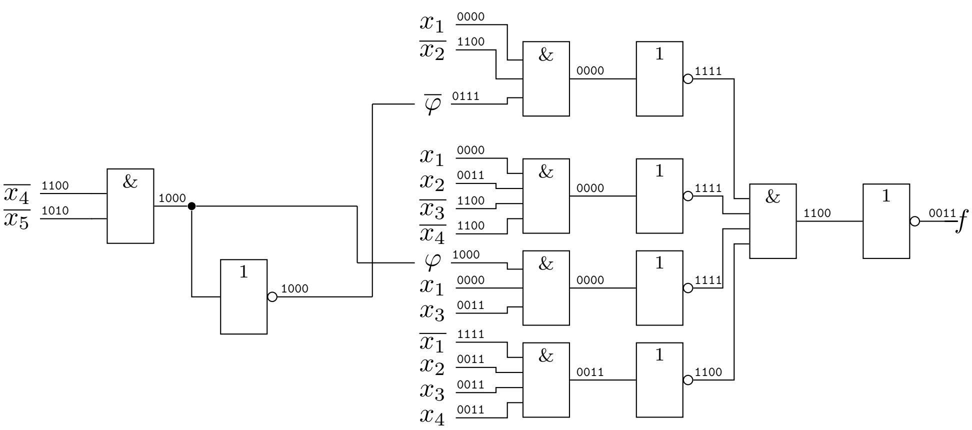
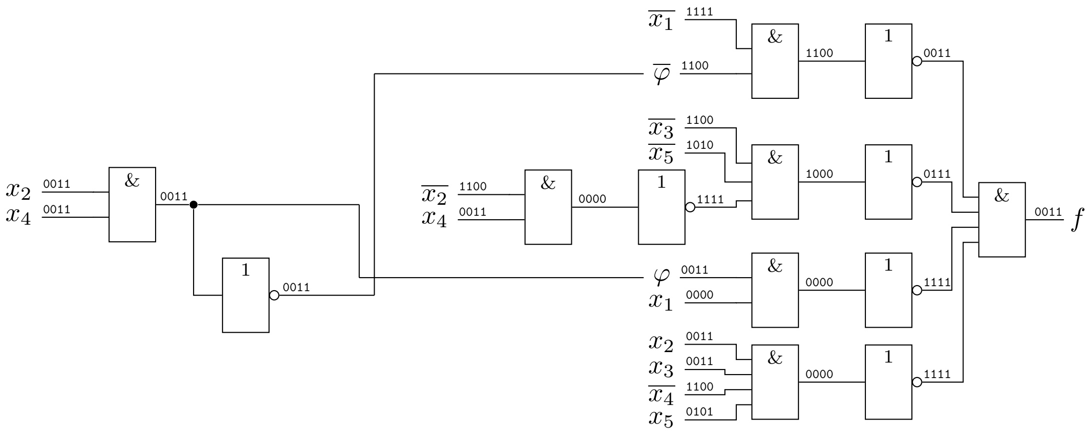


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1}\,\overline{\varphi}}\;\overline{\overline{x_3}\,\overline{x_5}\,\overline{\overline{x_2}\,x_4}}\;\overline{\varphi\,x_1}\;\overline{x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5} \quad (S_Q = 25, \tau = 5)$$

$$\varphi = x_2\,x_4$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{x_1\,\overline{\overline{\overline{x_2}\;\overline{\overline{x_4}}\;\overline{\overline{x_5}}}\;\overline{\overline{x_4}\;\overline{\overline{x_2\,\overline{x_3}}\;\overline{x_3\,\overline{x_5}}}}}}\;\overline{\overline{\overline{\overline{x_1}\,x_2}\;\overline{\overline{x_3\,x_4}}}}} \quad (S_Q = 28, \tau = 6)$$

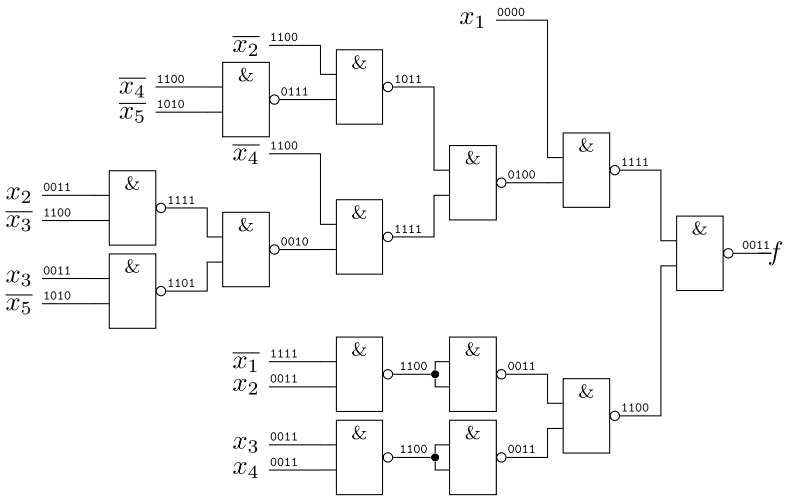


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_2\,\overline{\overline{x_1\,x_4}\,\overline{x_3\,\overline{\overline{\overline{x_4}\,x_5}}}}}\;\overline{\overline{\overline{\overline{x_1}}\,\overline{\overline{x_2\,x_4}}\,\overline{\overline{x_3}\,\overline{\overline{\overline{x_5}\,\overline{\overline{x_2}\,x_4}}}}}}}} \quad (S_Q = 32, \tau = 8)$$