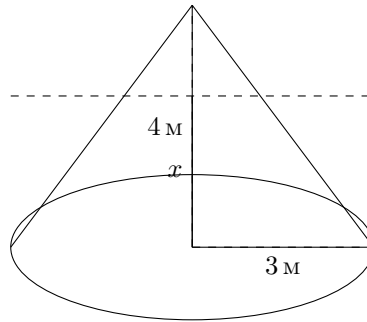


Задание 5. Приложения определенного интеграла

Условие задачи:

Определить массу круглого конуса высотой 4 м и диаметром основания 6 м, если плотность конуса в каждой точке равна квадрату расстояния этой точки от плоскости, проходящей через вершину конуса параллельно его основанию.



Математическая модель задачи:

Пусть V - объем элементарного слоя конуса толщиной dx , который удален от вершины конуса на расстоянии x . Тогда масса dm этого элементарного слоя равна произведению плотности $\rho(x)$ на объем V .

$$dm = \rho(x)V$$

Разбиение промежутка изменения аргумента на элементарные участки dx :

Высота конуса равна 4 м. Будем разбивать высоту конуса на элементарные участки dx .

Вычисление малого приращения искомой величины Q на элементарном участке dx :

Из условия задачи плотность $\rho(x) = x^2$. Объем элементарного слоя конуса V равен произведению площади основания S на толщину слоя dx .

Поскольку радиус конуса изменяется линейно от 0 до 3 м, можно использовать пропорцию для вычисления радиуса $r(x)$ на расстоянии x от вершины:

$$r(x) = \frac{3x}{4}$$

Теперь вычислим площадь основания S для элементарного слоя:

$$S = \pi r^2(x) = \pi \left(\frac{3x}{4} \right)^2 = \frac{9\pi x^2}{16}$$

Теперь можем вычислить массу элементарного слоя dm :

$$dm = \rho(x)V = x^2 \cdot \frac{9\pi x^2}{16} dx = \frac{9\pi x^4}{16} dx$$

Получение интегральной суммы:

Чтобы вычислить общую массу конуса M , нужно просуммировать массы всех элементарных слоев:

$$M = \int dm = \int_0^4 \frac{9\pi x^4}{16} dx$$

Вычисление определенного интеграла с использованием первообразной и формулы Ньютона-Лейбница:

Найдем первообразную подынтегральной функции:

$$\int \frac{9\pi x^4}{16} dx = \frac{9\pi}{16} \int x^4 dx = \frac{9\pi}{16} \cdot \frac{x^5}{5} + C$$

Теперь применим формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла:

$$M = \int_0^4 \frac{9\pi x^4}{16} dx = \left[\frac{9\pi}{16} \cdot \frac{x^5}{5} \right]_0^4 = \frac{9\pi}{16} \cdot \frac{4^5}{5} - \frac{9\pi}{16} \cdot \frac{0^5}{5}$$

Упрощаем:

$$M = \frac{9\pi}{16} \cdot \frac{1024}{5} = \frac{9216\pi}{80}$$

Ответ:

Масса круглого конуса равна $\frac{9216\pi}{80}$ кг.