CAPÍTULO V. DERIVABILIDAD DE FUNCIONES

SECCIONES

A. DEFINICIÓN DE DERIVADA.

Una función $y = f(x)$ se dice que es *derivable en un punto* c del dominio cuando existe el límite del cociente incremental siguiente:

$$(1a) \qquad \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Cada uno de los límites laterales de la expresión anterior se llama *derivada lateral* de f en el punto $x = c$. Cuando las dos derivadas laterales existen (son finitas) y son iguales, la función es derivable en $x = c$ y el resultado se llama *derivada* de la función en $x = c$. Otra forma de expresar la derivada de una función f en el punto c es:

$$(1b) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

La fórmula (1a) la aplicaremos para calcular derivadas de funciones en puntos particulares. Sin embargo es más conveniente utilizar (1b) para calcular derivadas de funciones en puntos genéricos.

Observa que para calcular estos límites se debe resolver la forma indeterminada 0/0, para lo cual utilizaremos las técnicas mostradas en el capítulo 3.

De la definición se deduce que toda función derivable en un punto es necesariamente continua en dicho punto.

La notación que utilizaremos para expresar la derivada de una función es alguna de las siguientes:

$$f'(x) = Df(x) = \frac{df(x)}{dx} \text{ o bien } y' = Dy = \frac{dy}{dx}.$$

Para las derivadas laterales se usará la notación análoga $f'(x^+)$ o bien $f'(x^-)$, según sea el caso.

PROBLEMA 5.1.

Calcular la derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ en el punto $x = -1/2$.

Solución

Utilizando la fórmula (1a) y teniendo en cuenta que $f(-1/2) = 2$, resulta:

$$\begin{aligned} f'(-1/2) &= \lim_{x\to -1/2} \frac{f(x) - f(-1/2)}{x + 1/2} = \lim_{x\to -1/2} \frac{1/x + 1/x^2 - 2}{x + 1/2} \\ &= \lim_{x\to -1/2} \frac{x + 1 - 2x^2}{x^2(2x+1)/2} = \lim_{x\to -1/2} \frac{-(2x+1)(x-1)}{x^2(2x+1)/2} \\ &= \lim_{x\to -1/2} \frac{-(x-1)}{x^2/2} = \frac{3/2}{1/8} = 12. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.2.

Calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt{3x-2}$.

Solución

En este caso utilizaremos la fórmula (1b) para calcular la derivada en un punto cualquiera:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)-2} - \sqrt{3x-2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{3(x+h)-2} - \sqrt{3x-2})(\sqrt{3(x+h)-2} + \sqrt{3x-2})}{h(\sqrt{3(x+h)-2} + \sqrt{3x-2})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h) - 2 - (3x-2)}{h(\sqrt{3(x+h)-2} + \sqrt{3x-2})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h(\sqrt{3(x+h)-2} + \sqrt{3x-2})} = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.3.

Demostrar:

a) $\frac{d}{dx}(c) = 0$ siendo c una constante arbitraria.

b) $\frac{d}{dx}(x) = 1$.

c) $\frac{d}{dx}(cx) = c$.

d) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

Solución

a) $\frac{d}{dx}(c) = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$.

b) $\frac{d}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$.

c) $\frac{d}{dx}(cx) = \lim_{h\to 0} \frac{c(x+h)-cx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ch}{h} = c$.

d) Aplicando la fórmula del binomio de Newton,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^n) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 5.4.

Utilizando la definición, calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \frac{3+x}{3-x}$ en $x = 2$.

b) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ en $x = 5$.

Solución

a) Como $f(2) = 5$, tenemos

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{5+h}{1-h} - 5\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{6h}{1-h} = \lim_{h\to 0} \frac{6}{1-h} = 6. \end{aligned}$$

b) En este caso $f(5) = 3$, con lo que

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+2h}-3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+2h}-3}{h} \cdot \frac{\sqrt{9+2h}+3}{\sqrt{9+2h}+3} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{9+2h-9}{h(\sqrt{9+2h}+3)} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{9+2h}+3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.5.

Hallar la derivada de $y = \dfrac{1}{x-2}$ *en los puntos* $x = 1$ *y* $x = 3$.

Demostrar que la función no es derivable en el punto $x = 2$ *en el que presenta una discontinuidad.*

Solución

Para $x \neq 2$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x-2)(x+h-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Así, $f'(1) = \dfrac{-1}{(1-2)^2} = -1$ y $f'(3) = \dfrac{-1}{(3-2)^2} = -1$.

Sin embargo, como la función no está definida en $x = 2$, no es continua, con lo que tampoco será derivable en dicho punto.

PROBLEMA 5.6.

Hallar la derivada de $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+4}$ y demostrar que la función no es derivable en el punto $x = -4/3$ en el que presenta una discontinuidad.

Solución

Por la definición de derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(x+h)-3}{3(x+h)+4} - \frac{2x-3}{3x+4}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{17h}{h(3x+4)(3x+3h+4)} = \lim_{h\to 0} \frac{17}{(3x+4)(3x+3h+4)} = \frac{17}{(3x+4)^2}. \end{aligned}$$

Para $x = -4/3$ la función no es derivable porque se anula el denominador.

PROBLEMA 5.7.

Hallar la derivada de $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

Solución

La función está definida en el intervalo $[-1/2, \infty)$ por lo que es derivable en el intervalo abierto $(-1/2, \infty)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1})}{h(\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[2(x+h)+1] - (2x+1)}{h(\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.8.

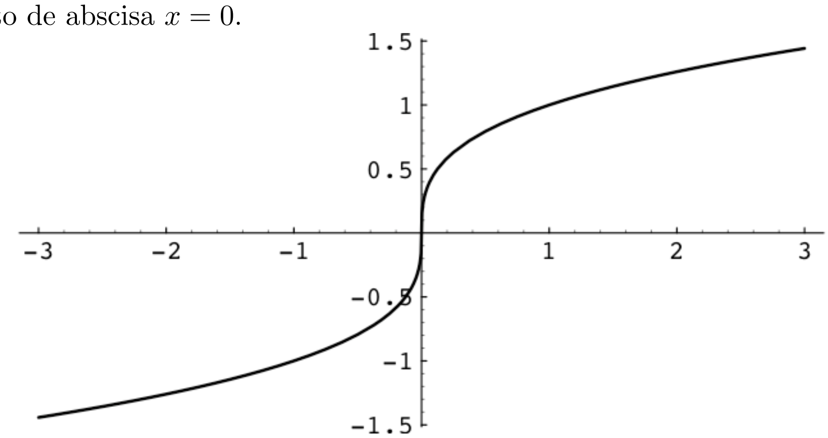
Calcular la derivada de $f(x) = x^{1/3}$ *y como aplicación estudiar* $f'(0)$.

Solución

De acuerdo a la definición, tenemos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{1/3}-x^{1/3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^{1/3}-x^{1/3}][(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}]}{h[(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h[(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}.
\end{aligned}$$

La función no es derivable en $x = 0$ porque el denominador es cero. Obsérvese sin embargo que la función sí es continua en el punto $x = 0$. Geométricamente, esto significa que la gráfica de f tiene una tangente vertical en el punto de abscisa $x = 0$.



PROBLEMA 5.9.

Utilizando la definición, calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

b) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$.

Solución

a) Según la definición:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2} \operatorname{sen}\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos\frac{2x+h}{2}\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h/2} = \cos x, \end{aligned}$$

debido a la equivalencia $\operatorname{sen}(h/2) \sim h/2$.

b) Como $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x+h) - \operatorname{arc\,sen} x}{h}$, si hacemos el cambio de variable $k = \operatorname{arc\,sen}(x+h) - \operatorname{arc\,sen} x$ y llamamos $t = \operatorname{arc\,sen} x$, entonces $x = \operatorname{sen} t$, $x + h = \operatorname{sen}(t + k)$, de modo que $h = \operatorname{sen}(t + k) - \operatorname{sen} t$ y cuando $h \to 0$, también $k \to 0$. Tenemos pues:

$$f'(x) = \lim_{k\to 0} \frac{k}{\operatorname{sen}(t+k) - \operatorname{sen} t} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(t+k)-\operatorname{sen} t}{k}} = \frac{1}{\cos t},$$

pues el denominador corresponde a la derivada de $\operatorname{sen} t$. Deshaciendo el cambio de variable,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

PROBLEMA 5.10.

Sea $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

a) *¿Es f continua en $x = 0$?*

b) *¿Es derivable en $x = 0$?*

Solución

a) Como f es producto de $\operatorname{sen} 1/x$, que es acotada, y x, que tiene límite 0 cuando $x \to 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Esto indica que la función es continua en $x = 0$.

b) Por otra parte,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h \operatorname{sen} 1/h - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} 1/h. \end{aligned}$$

Como este límite no existe, la función, aun siendo continua, no tiene derivada en el punto $x = 0$.

PROBLEMA 5.11.

Sea $f(x) = |x|$. Probar que f no es derivable en $x = 0$ calculando las derivadas laterales.

Solución

Debido a que $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$, tenemos

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1;$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Al ser distintas las derivadas laterales de la función en el punto $x = 0$, la función no es derivable en dicho punto.

PROBLEMA 5.12.

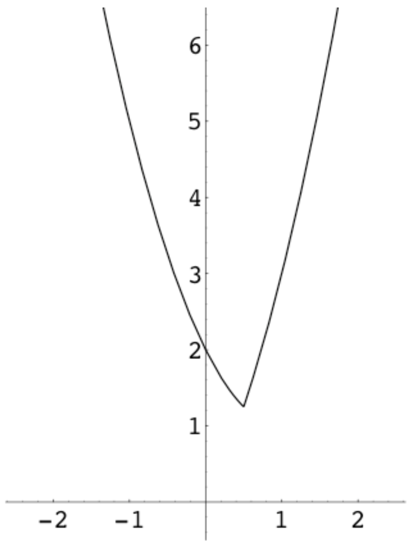
Comprobar si la función $f(x) = x^2 + 1 + |2x - 1|$ es o no derivable en $x = 1/2$.

Solución

Debido a la presencia del valor absoluto, debemos calcular las derivadas laterales y ver si son iguales:

$$
\begin{aligned}
f'(1/2^-) &= \lim_{x\to 1/2^-} \frac{f(x)-f(1/2)}{x-1/2} = \lim_{x\to 1/2^-} \frac{x^2+1-(2x-1)-5/4}{x-1/2} \\
&= \lim_{x\to 1/2^-} \frac{(x-1/2)(x-3/2)}{x-1/2} = \lim_{x\to 1/2^-} (x-3/2) = -1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(1/2^+) &= \lim_{x\to 1/2^+} \frac{f(x)-f(1/2)}{x-1/2} = \lim_{x\to 1/2^+} \frac{x^2+1+(2x-1)-5/4}{x-1/2} \\
&= \lim_{x\to 1/2^+} \frac{(x-1/2)(x+5/2)}{x-1/2} = \lim_{x\to 1/2^+} (x+5/2) = 3.
\end{aligned}
$$



La función no es derivable en $x = 1/2$ pues las derivadas laterales, aunque existen, son distintas. Como se observa en la gráfica anterior, aun siendo la función continua en el punto, presenta un "pico". Esto es característico de las funciones continuas no derivables.

PROBLEMA 5.13.

Demostrar que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ no es derivable en $x = 0$.

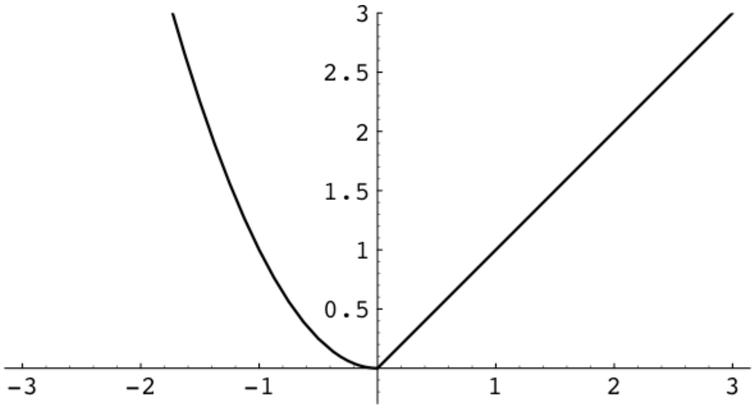
Solución

Las derivadas laterales son

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1; \\ f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0. \end{aligned}$$

Como $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, se deduce que f no es derivable en $x = 0$.

La gráfica muestra el comportamiento de la función en un entorno de $x = 0$.



PROBLEMA 5.14.

Dada la función $f(x) = \sqrt{|x|}$, comprobar que no es derivable en $x = 0$.

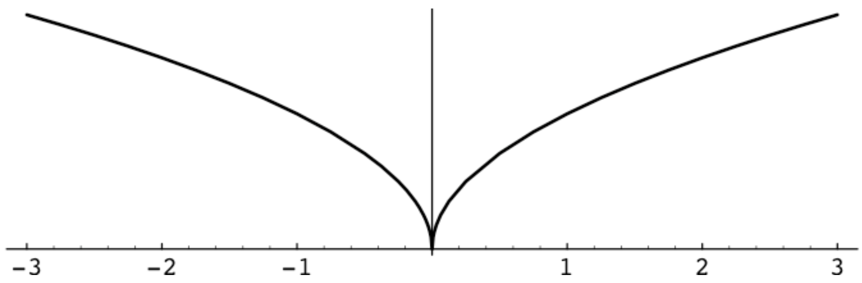
Solución

Teniendo en cuenta que $|h| = h$ si $h > 0$ y $|h| = -h$ si $h < 0$, resulta:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty;$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-h}} = -\infty.$$

Lo anterior prueba que la función no es derivable en $x = 0$. La situación que se presenta corresponde a la figura siguiente:



PROBLEMA 5.15.

Sea f una función que verifica $|f(x)| \leq x^2$, $\forall x$. Demostrar que f es derivable en $x = 0$.

Solución

Aplicando la hipótesis a $x = 0$ resulta que $|f(0)| \leq 0$, es decir $f(0) = 0$.

Además, de $|f(x)| \leq x^2 = |x|^2$ tenemos que $0 \leq \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leq \dfrac{|x|^2}{|x|} = |x|$, de donde $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)/x| = 0$. De aquí se deduce que también $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = 0$.

Por tanto, $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 0$, lo que prueba que f es derivable en $x = 0$.

PROBLEMA 5.16.

Sabiendo que la función f es derivable en $x = 0$, calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Solución

Sumando y restando $f(x_0)$ al numerador tenemos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{2h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{2h} \\
= &\ \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \\
= &\ \frac{1}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2} f'(x_0) = f'(x_0).
\end{aligned}$$

B. REGLAS DE DERIVACIÓN.

Algunas reglas útiles que se deducen de la definición de derivada para las operaciones algebraicas con funciones son:

(a) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$. Derivada de la suma y la resta.

(b) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Derivada del producto.

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$. Derivada del cociente.

(d) $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$. Derivada de la potencia.

(e) $(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$. Derivada de la función compuesta (regla de la cadena).

(f) $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$. Derivada de la función inversa.

Algunas derivadas de funciones más comunes mediante las cuales se pueden obtener muchas más son (u representa cualquier función de x, c y n son constantes arbitrarias):

1.- $f(x) = c \Longrightarrow \quad f'(x) = 0$.

2.- $f(x) = u^n \Longrightarrow \quad f'(x) = nu^{n-1} \cdot u'$.

3.- $f(x) = \operatorname{sen} u \Longrightarrow \quad f'(x) = \cos u \cdot u'$.

4.- $f(x) = \cos u \Longrightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{sen} u \cdot u'$.

5.- $f(x) = \operatorname{tg} u \Longrightarrow \quad f'(x) = \sec^2 u \cdot u'$.

6.- $f(x) = \sec u \Longrightarrow \quad f'(x) = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u'$.

7.- $f(x) = \operatorname{cosec} u \Longrightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \cdot u'$.

8.- $f(x) = \operatorname{cotg} u \Longrightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$.

9.- $f(x) = \operatorname{arc\,sen} u \Longrightarrow \quad f'(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

10.- $f(x) = \arccos u \Longrightarrow \quad f'(x) = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

11.- $f(x) = \operatorname{arc\,tg} u \Longrightarrow \quad f'(x) = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

12.- $f(x) = a^u \Longrightarrow \quad f'(x) = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

13.- $f(x) = \log_a u \Longrightarrow \quad f'(x) = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$.

14.- $f(x) = \operatorname{sh} u \Longrightarrow \quad f'(x) = \operatorname{ch} u \cdot u'$.

15.- $f(x) = \operatorname{ch} u \Longrightarrow \quad f'(x) = \operatorname{sh} u \cdot u'$.

16.- $f(x) = \operatorname{th} u \Longrightarrow \quad f'(x) = \operatorname{sech}^2 u \cdot u'$.

17.- $f(x) = \operatorname{sech} u \Longrightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{sech} u \cdot \operatorname{th} u \cdot u'$.

18.- $f(x) = \operatorname{csch} u \Longrightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{csch} u \cdot \coth u \cdot u'$.

19.- $f(x) = \coth u \Longrightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{csch}^2 u \cdot u'$.

20.- $f(x) = \operatorname{argsh} u \Longrightarrow \quad f'(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$.

21.- $f(x) = \operatorname{argch} u \Longrightarrow \quad f'(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$.

22.- $f(x) = \operatorname{argth} u \Longrightarrow \quad f'(x) = \dfrac{u'}{1-u^2}$.

PROBLEMA 5.17.

Sea f una función derivable en $x = a$ y $g(x) = c \cdot f(x)$. Probar que g es derivable en $x = a$ y $g'(a) = c \cdot f'(a)$.

Solución

Como g es el producto de dos funciones derivables, ella misma es derivable en $x = a$.

Si aplicamos la regla de derivación del producto, tenemos:

$$g'(a) = (c)' \cdot f(a) + c \cdot f'(a) = c \cdot f'(a)$$

porque la derivada de la función constante es cero.

PROBLEMA 5.18.

Si $f(x) = x^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, probar que $f'(a) = na^{n-1}, \forall a$.

Solución

Vamos a utilizar el método de inducción sobre n.

Para $n = 1$, es evidente que si $f(x) = x$, $f'(x) = 1$ y $f'(a) = 1$.

Suponemos ahora que la propiedad es cierta para n, de modo que si $f(x) = x^n$, entonces $f'(a) = na^{n-1}, \forall a$. Probaremos la propiedad para $n+1$.

Sea $g(x) = x^{n+1}$. Si escribimos $g(x) = x \cdot x^n$ y aplicamos la regla de derivación del producto, tenemos:

$$g'(x) = (x)' \cdot (x^n) + x \cdot (x^n)' = x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n,$$

por lo que $g'(a) = (n+1)a^n, \ \forall a$.

PROBLEMA 5.19.

Calcular la derivada de la función $f(x) = x^{10} + 7x^5 - x^3 + 1$.

Solución

En este caso se debe aplicar la regla de la suma repetidas veces. Cada sumando es producto de una constante por una potencia de la variable x. El resultado quedará entonces así:

$$f'(x) = 10x^9 + 7 \cdot 5x^4 - 3x^2 = 10x^9 + 35x^4 - 3x^2.$$

En general, la derivada de un polinomio es otro polinomio de grado una unidad menor al anterior.

PROBLEMA 5.20.

Encontrar los puntos de discontinuidad de $f'(x)$ *si se define*

$$f(x) = (x + |x|) + 2\left(x - \frac{1}{2} + \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) + 4\left(x - \frac{1}{4} + \left|x - \frac{1}{4}\right|\right).$$

Solución

Para poder derivar $f(x)$ la estudiamos por separado en los intervalos siguientes:

- Si $x < 0$, $f(x) = (x - x) + 2\left(x - \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + 4\left(x - \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{4}\right)\right) = 0$.

- Si $0 \leq x < 1/4$, $f(x) = (x+x)+2\left(x - \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)+4\left(x - \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{4}\right)\right) = 2x$.

- Si $1/4 \leq x < 1/2$, $f(x) = (x+x)+2\left(x - \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)+4\left(x - \frac{1}{4} + \left(x - \frac{1}{4}\right)\right) = 10x - 2$.

- Si $1/2 \leq x$, $f(x) = (x + x) + 2\left(x - \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + 4\left(x - \frac{1}{4} + \left(x - \frac{1}{4}\right)\right) = 14x - 4$.

Por tanto, los puntos de discontinuidad de f' son $x = 0$, $x = 1/4$, $x = 1/2$, porque

$$\begin{array}{ccc} f'(0^-) = 0; & f'(1/4^-) = 2; & f'(1/2^-) = 10. \\ f'(0^+) = 2; & f'(1/4^+) = 10; & f'(1/2^+) = 14. \end{array}$$

PROBLEMA 5.21.

Calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$.

Solución

Para utilizar la regla de la potencia, podemos escribir la función como $f(x) = (x^2 + x - 1)^{1/3}$.

De este modo, podemos aplicar la regla de la cadena y la derivada será el producto de las derivadas de la potencia $1/3$ por la del polinomio que está dentro de la raíz; resulta de la forma:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}(x^2 + x - 1)^{1/3-1} \cdot (2x + 1) \\ &= \frac{1}{3}(x^2 + x - 1)^{-2/3} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{(x^2 + x - 1)^2}}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.22.

Calcular la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

Solución

Tenemos que aplicar en este caso la regla del cociente, la cual da como resultado:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'\sqrt{x^2-4} - x(\sqrt{x^2-4})'}{(\sqrt{x^2-4})^2} = \frac{\sqrt{x^2-4} - x\cdot(1/2)\cdot(x^2-4)^{-1/2}\cdot 2x}{x^2-4} \\ &= \frac{\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} = \frac{-4}{(x^2-4)^{3/2}}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.23.

Derivar las siguientes funciones:

a) $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$.

b) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$.

c) $y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{3/2}$.

d) $y = \dfrac{2}{x^{1/2}} + \dfrac{6}{x^{1/3}} - \dfrac{2}{x^{3/2}} - \dfrac{4}{x^{3/4}}$.

e) $s = (t^2-3)^4$.

f) $y = \sqrt{x^2+6x+3}$.

g) $y = (x^2-4)^2(2x^3-1)^3$.

h) $y = \dfrac{3-2x}{3+2x}$.

i) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$.

Solución

a) Por la regla de derivación de una suma, tenemos:

$$y' = 0+2\cdot 1-3\cdot 2x-5\cdot 3x^2-8\cdot 4x^3+9\cdot 5x^4 = 2-6x-15x^2-32x^3+45x^4.$$

b) Escribimos $y = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$ y tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= -x^{-2} + 3\cdot(-2x^{-3}) + 2\cdot(-3x^{-4}) \\ &= -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}. \end{aligned}$$

c) Análogamente al caso anterior,

$$y' = 2\cdot(1/2)x^{-1/2}+6\cdot(1/3)x^{-2/3}-2\cdot(3/2)x^{1/2} = x^{-1/2}+2x^{-2/3}-3x^{1/2}.$$

d) Si escribimos $y = 2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} - 2x^{-3/2} - 4x^{-3/4}$, resulta:

$$\begin{aligned} y' &= 2\cdot(-1/2)x^{-3/2} + 6\cdot(-1/3)x^{-4/3} - 2\cdot(-3/2)x^{-5/2} - 4\cdot(-3/4)x^{-7/4} \\ &= -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} + 3x^{-5/2} + 3x^{-7/4} = -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}. \end{aligned}$$

e) $s' = 4(t^2-3)^3\cdot(2t) = 8t(t^2-3)^3$.

f) Si $y = \sqrt{x^2+6x+3} = (x^2+6x+3)^{1/2}$, tenemos

$$\begin{aligned} y' &= (1/2)\cdot(x^2+6x+3)^{-1/2}\cdot(x^2+6x+3)' \\ &= (1/2)\cdot(x^2+6x+3)^{-1/2}\cdot(2x+6) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+3}}. \end{aligned}$$

g) Según la regla de derivación del producto,

$$\begin{aligned} y' &= (x^2-4)^2\cdot\frac{d}{dx}(2x^3-1)^3 + (2x^3-1)^3\cdot\frac{d}{dx}(x^2-4)^2 \\ &= (x^2-4)^2\cdot 3(2x^3-1)^2\cdot\frac{d}{dx}(2x^3-1) + (2x^3-1)^3\cdot 2(x^2-4)\cdot\frac{d}{dx}(x^2-4) \\ &= (x^2-4)^2\cdot 3(2x^3-1)^2\cdot 6x^2 + (2x^3-1)^3\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x \\ &= 2x(x^2-4)(2x^3-1)^2[(x^2-4)\cdot 3\cdot 3x + (2x^3-1)\cdot 2] \\ &= 2x(x^2-4)(2x^3-1)^2(13x^3-36x-2). \end{aligned}$$

h) Aplicamos la regla de derivación del cociente:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3+2x)\frac{d}{dx}(3-2x) - (3-2x)\frac{d}{dx}(3+2x)}{(3+2x)^2} \\ &= \frac{(3+2x)(-2)-(3-2x)(2)}{(3+2x)^2} = \frac{-12}{(3+2x)^2}. \end{aligned}$$

i) Procediendo como en el caso anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(4-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\frac{d}{dx}(4-x^2)^{1/2}}{4-x^2} \\
&= \frac{(4-x^2)^{1/2}\cdot 2x - x^2(1/2)(4-x^2)^{-1/2}(-2x)}{4-x^2} \\
&= \frac{(4-x^2)^{1/2}\cdot 2x + x^3(4-x^2)^{-1/2}}{4-x^2}\cdot\frac{(4-x^2)^{1/2}}{(4-x^2)^{1/2}} \\
&= \frac{2x(4-x^2)+x^3}{(4-x^2)^{3/2}} = \frac{8x-x^3}{(4-x^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 5.24.

Calcular la derivada de la función

$$f(x) = \operatorname{sen}^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x + \cos^4 x.$$

Solución

Aplicaremos la regla de derivación de la suma y en cada sumando la regla de la potencia de las funciones trigonométricas que aparecen. Obtenemos la siguiente secuencia de igualdades (trata de justificar por tí mismo cada identidad y así entender el proceso):

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4\operatorname{sen}^3 x\cos x + 2[2\operatorname{sen} x\cos x\cos^2 x \\
&\qquad + \operatorname{sen}^2 x\cdot 2\cos x(-\operatorname{sen} x)] + 4\cos^3 x(-\operatorname{sen} x) \\
&= 4\operatorname{sen}^3 x\cos x + 4\operatorname{sen} x\cos^3 x - 4\operatorname{sen}^3 x\cos x - 4\cos^3 x\operatorname{sen} x = 0.
\end{aligned}$$

El resultado podía haberse obtenido también si escribimos originalmente la función como $f(x) = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 = 1^2 = 1$ y tenemos en cuenta que la derivada de una constante es cero.

PROBLEMA 5.25.

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2\operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

a) ¿Es f derivable en $x = 0$?

b) ¿Es f' continua en $x = 0$?

Solución

a) Aplicando la definición de derivada,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} 1/h - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen} 1/h = 0,$$

pues $|\operatorname{sen}(1/x)| \leq 1$ y $\lim_{h\to 0} h = 0$.

Así pues la función es derivable, y en consecuencia continua, en $x = 0$.

b) Utilizando las reglas elementales de derivación,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 1/x) + (\operatorname{sen} 1/x)\frac{d}{dx}(x^2) \\ &= x^2(\cos 1/x)(-1/x^2) + (\operatorname{sen} 1/x)(2x) = -\cos 1/x + 2x \operatorname{sen} 1/x. \end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(-\cos 1/x + 2x \operatorname{sen} 1/x)$ no existe pues $\lim_{x\to 0} \cos 1/x$ no existe, entonces $f'(x)$ no puede ser continua en $x = 0$, pese a existir $f'(0)$.

Esto muestra que no se puede calcular $f'(0)$ en este caso simplemente calculando $f'(x)$ y haciendo luego $x = 0$. Solamente cuando la derivada es continua en un punto el procedimiento es correcto.

PROBLEMA 5.26.

Hallar y' en los siguientes casos:

a) $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sen}(x/a)$.

b) $y = x \operatorname{arccosec} \dfrac{1}{x} + \sqrt{1 - x^2}$.

c) $y = \dfrac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \left(\dfrac{b}{a} \operatorname{tg} x \right)$.

Solución

a) Aplicando las reglas correspondientes,

$$\begin{aligned} y' &= x \cdot \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) + (a^2 - x^2)^{1/2} + a^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} \cdot \frac{1}{a} \\ &= \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

b) $y' = x \cdot \dfrac{-(-1/x^2)}{(1/x)\sqrt{(1/x)^2-1}} + \operatorname{arccosec}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = \operatorname{arccosec}\dfrac{1}{x}.$

c) Aplicamos sucesivas veces la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)^2} \cdot \frac{b}{a} \cdot \sec^2 x = \frac{1}{ab} \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{b}{a} \cdot \sec^2 x \\ &= \frac{\sec^2 x}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.27.

Hallar la derivada de la función

$$y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x+1} + \operatorname{arc\,sen}(\cos\sqrt{x+1}).$$

Solución

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1+(x+1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\sqrt{x+1}}} \cdot (-\operatorname{sen}\sqrt{x+1}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\left(\frac{1}{x+2} - 1\right) \\ &= \frac{-(x+1)}{2\sqrt{x+1}(x+2)} = \frac{-\sqrt{x+1}}{2(x+2)}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.28.

Hallar la derivada, simplificando el resultado, de la función

$$y = \frac{2\operatorname{sen} x}{2+\cos x} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}(1-\cos x)}{3\operatorname{sen} x}.$$

Solución

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2\cos x(2+\cos x)+2\operatorname{sen}^2 x}{(2+\cos x)^2} \\
&\quad -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(1-\cos x)^2}{3\operatorname{sen}^2 x}}\cdot\frac{3\sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x-3\sqrt{3}\cos x(1-\cos x)}{9\operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{2+4\cos x}{(2+\cos x)^2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3\operatorname{sen}^2 x}{3\operatorname{sen}^2 x+(1-\cos x)^2}\cdot\frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{3}\cos x}{9\operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{2+4\cos x}{(2+\cos x)^2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3\operatorname{sen}^2 x}{3(1-\cos x)(1+\cos x)+(1-\cos x)^2}\cdot\frac{3\sqrt{3}(1-\cos x)}{9\operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{2+4\cos x}{(2+\cos x)^2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3\operatorname{sen}^2 x}{3(1+\cos x)+(1-\cos x)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3\operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{2+4\cos x}{(2+\cos x)^2}-\frac{2}{2(2+\cos x)}=\frac{2+4\cos x-(2+\cos x)}{(2+\cos x)^2}=\frac{3\cos x}{(2+\cos x)^2}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 5.29.

Dada la función $y=\arccos(\operatorname{sen} 3x)+\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$, *calcular (simplificando lo más posible) el valor de* $z=(y'+3)^2$.

Solución

Si llamamos $y_1=\arccos(\operatorname{sen} 3x)$ e $y_2=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$, tenemos:

$$y_1'=\frac{-3\cos 3x}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 3x}}=\frac{-3\cos 3x}{\cos 3x}=-3.$$

$$\begin{aligned}
y_2' &= \frac{1}{1+\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}=\frac{-x}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2(1-x^2)}{1+x^2}}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}.
\end{aligned}$$

Como $y=y_1+y_2$, entonces $y'=-3-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$. Luego $z=\dfrac{x^2}{1-x^4}$.

PROBLEMA 5.30.

Hallar el valor de la derivada de la función $y = \ln \dfrac{x^2 + 2^x}{x^2 - 2^x}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 - 2^x}{x^2 + 2^x} \cdot \frac{(2x + 2^x \ln 2)(x^2 - 2^x) - (2x - 2^x \ln 2)(x^2 + 2^x)}{(x^2 - 2^x)^2} \\
&= \frac{1}{x^2 + 2^x} \cdot \frac{-4x \cdot 2^x + 2^{x+1} x^2 \ln 2}{x^2 - 2^x} = \frac{2^{x+1}(x \ln 2 - 2)x}{x^4 - 2^{2x}}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 5.31.

Hallar la derivada de la función $y = \ln \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}(x/2)}}$.

Solución

De las propiedades de los logaritmos: $y = \frac{1}{2} \left[\ln\left(1 - \operatorname{tg}(x/2)\right) - \ln\left(1 + \operatorname{tg}(x/2)\right)\right]$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2}\left[\frac{-\frac{1}{2}\sec^2(x/2)}{1 - \operatorname{tg}(x/2)} - \frac{\frac{1}{2}\sec^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}(x/2)}\right] \\
&= -\frac{\sec^2(x/2)}{4} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}(x/2) + (1 - \operatorname{tg}(x/2))}{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)} \\
&= \frac{-\sec^2(x/2)}{2(1 - \operatorname{tg}^2(x/2))} = -\frac{1}{2[\cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2)]} = \frac{-1}{2\cos x}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 5.32.

Hallar dy/dx para las funciones siguientes:

a) $y = \operatorname{sh} 3x$.

b) $y = \operatorname{ch} x/2$.

c) $y = \operatorname{th}(1 + x^2)$.

d) $y = \coth 1/x$.

e) $y = x \operatorname{sech} x^2$.

f) $y = \operatorname{csch}^2(x^2 + 1)$.

g) $y = \dfrac{1}{4} \operatorname{sh} 2x - \dfrac{1}{2} x$.

h) $y = \ln \operatorname{th} 2x$.

Solución

a) $y' = 3 \operatorname{ch} 3x$.

b) $y' = (1/2) \operatorname{sh} x/2$.

c) $y' = 2x \operatorname{sech}^2(1 + x^2)$.

d) $y' = (1/x^2) \operatorname{csch}^2 1/x$.

e) $y' = x \cdot 2x(-\operatorname{sech} x^2 \operatorname{th} x^2) + \operatorname{sech} x^2 = -2x^2 \operatorname{sech} x^2 \operatorname{th} x^2 + \operatorname{sech} x^2$.

f) $y' = 2 \operatorname{csch}(x^2 + 1)(-\operatorname{csch}(x^2 + 1) \coth(x^2 + 1)) \cdot 2x = -4x \operatorname{csch}^2(x^2 + 1) \coth(x^2 + 1)$.

g) $y' = \dfrac{1}{2} \operatorname{ch} 2x - \dfrac{1}{2} = \operatorname{sh}^2 x$.

h) $y' = \dfrac{1}{\operatorname{th} 2x} \cdot 2 \operatorname{sech}^2 2x = \dfrac{2}{\operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 2x} = 4 \operatorname{csch} 4x$.

PROBLEMA 5.33.

Hallar dy/dx en las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{argsh} 3x$.

b) $y = \operatorname{argch} e^x$.

c) $y = 2 \operatorname{argth}(\operatorname{tg} x/2)$.

Solución

a) $y' = \dfrac{3}{\sqrt{(3x)^2+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$.

b) $y' = \dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

c) $y' = 2 \cdot \dfrac{1}{1-\operatorname{tg}^2 x/2} \cdot \sec^2(x/2) \cdot (1/2) = \dfrac{\sec^2(x/2)}{1-\operatorname{tg}^2 x/2} = \sec x$.

PROBLEMA 5.34.

Calcular la derivada dr/dt en $t = 0$ sabiendo que $r = \sqrt{s+1}$, $s = 16t^2 - 20t$.

Solución

Aplicando la regla de derivación de la función compuesta, resulta:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = (1/2)(s+1)^{-1/2}(32t-20).$$

Ahora bien, cuando $t = 0$, al sutituir en la segunda función resulta $s = 0$. Por lo tanto:

$$\frac{dr}{dt}(0) = (1/2)(1)^{-1/2}(-20) = -10.$$

PROBLEMA 5.35.

Sea $f(x) = x^3 + 2x + 1$ una función definida para $x > 0$ y llamemos $g(x) = f^{-1}(x)$. Calcular $g'(x)$ en el punto donde $g(x) = 1$.

Solución

Por la fórmula de derivación de la función inversa, $g'(x) = \dfrac{1}{f'[g(x)]}$, tenemos:

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \Longrightarrow f'[g(x)] = 3[g(x)]^2 + 2.$$

Cuando $g(x) = 1, f'(1) = 5$. En ese punto, $g'(x) = \dfrac{1}{f'(1)} = 1/5$.

PROBLEMA 5.36.

Hallar dy/dx en la función $x = y\sqrt{1-y^2}$.

Solución

Como $\dfrac{dx}{dy} = (1-y^2)^{1/2} + (1/2)y(1-y^2)^{-1/2}(-2y) = \dfrac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}}$ se deduce que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-2y^2}.$$

PROBLEMA 5.37.

Dada una función derivable g, encontrar los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < x_0, \\ ax+b & \text{si } x \geq x_0, \end{cases}$ sea derivable en x_0.

Solución

En primer lugar f debe ser continua en x_0. Como

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g(x_0), \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = ax_0 + b,$$

debe cumplirse que $g(x_0) = ax_0 + b$.

Por otra parte las derivadas laterales en x_0 deben ser iguales. Tenemos:

$$f'(x_0^-) = g'(x_0), \ f'(x_0^+) = a,$$

con lo que $a = g'(x_0)$.

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos que $b = g(x_0) - x_0 \cdot g'(x_0)$.

PROBLEMA 5.38.

Encontrar un polinomio $F(x)$ para el que la derivada de la función $\phi(x) = e^{2x}F(x)$ sea igual a $e^{2x}(x^2 - 1)$.

Solución

Calculamos en primer lugar la derivada de $\phi(x)$:

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = \frac{d}{dx}[e^{2x}F(x)] = 2e^{2x}F(x) + e^{2x}F'(x) = e^{2x}[2F(x) + F'(x)].$$

Como debe verificarse que $e^{2x}[2F(x)+F'(x)] = e^{2x}(x^2-1)$, resulta $2F(x)+F'(x) = x^2 - 1$. De aquí se deduce que $F(x)$ debe ser un polinomio de segundo grado.

Si escribimos $F(x) = ax^2 + bx + c$, $F'(x) = 2ax + b$. Entonces:

$2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b = x^2 - 1$ o bien $2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c) = x^2 - 1$.

Identificando coeficientes tenemos:

$$2a = 1, \ 2a + 2b = 0, \ b + 2c = -1 \Longrightarrow a = 1/2, \ b = -1/2, \ c = -1/4.$$

El polinomio buscado es pues $F(x) = x^2/2 - x/2 - 1/4$.

C. DERIVADAS SUCESIVAS.

Al calcular la derivada de una función en cualquier punto donde esta exista, se obtiene como resultado otra función, llamada función derivada o función primera derivada. Si derivamos esta nueva función, se obtiene la llamada derivada segunda de la función original. Reiterando el proceso n veces, podemos llegar a la llamada *derivada de orden n* o *derivada n-ésima* de la función original. Así pues, son válidas las mismas fórmulas y reglas de derivación con las derivadas sucesivas.

La notación utilizada para indicar derivadas de orden n es:

$$f^{(n)}(x) = D^{(n)}f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \text{ o bien } y^{(n)} = D^{(n)}y = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

En algunos casos puede utilizarse un proceso de recurrencia para obtener las derivadas de cualquier orden de una función.

PROBLEMA 5.39.

Sea $y = f(x)$ un polinomio cualquiera de orden n, es decir, el que tiene por ecuación $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$. Calcular todas sus derivadas.

Solución

Las derivadas sucesivas son:

$$\begin{aligned}
y' &= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + \cdots + a_1; \\
y'' &= n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 2a_2; \\
& \dots \\
y^{(n)} &= n(n-1)(n-2)..,2 \cdot 1 \cdot a_n = n!\ a_n; \\
y^{(n+1)} &= 0; \\
y^{(n+k)} &= 0,\ \forall k > 0.
\end{aligned}$$

Como se observa, el grado del polinomio va disminuyendo con cada derivada, hasta que se anula. Las derivadas de orden mayor a n son todas cero.

PROBLEMA 5.40.

Hallar y'' en la función $y = e^{-x}\ln x$.

Solución

Las dos primeras derivadas son, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
y' &= e^{-x} \cdot \frac{1}{x} - e^{-x} \ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y. \\
y'' &= \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - y' \\
&= \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x} \ln x = -e^{-x}(2/x + 1/x^2 - \ln x).
\end{aligned}
$$

PROBLEMA 5.41.

Si la función $s(t) = \sqrt[3]{(4+2t)^2} + \dfrac{1}{(t+2)^2}$ *expresa la ecuación del movimiento, calcular la velocidad inicial y la aceleración inicial.*

Solución

Como sabemos, la velocidad es la derivada respecto al tiempo de la distancia, y la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo, o lo que es lo mismo, la derivada segunda de la distancia respecto al tiempo. Debemos calcular las dos primeras derivadas de la función $s(t)$ y sustituir $t = 0$ en ellas, lo que corresponde al inicio del movimiento (escribimos $s(t) = (4+2t)^{2/3} + (t+2)^{-2}$ para calcular más cómodamente las derivadas).

$$v(t) = s'(t) = \frac{2}{3}(4+2t)^{-1/3} \cdot 2 - 2(t+2)^{-3}.$$

$$a(t) = s''(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{3}(4+2t)^{-4/3} \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-3)(t+2)^{-4}.$$

Sustituyendo el valor $t = 0$, se obtiene que $v(0) = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{4}} - \dfrac{1}{4}$; $a(0) = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{4}} + \dfrac{3}{8}$.

PROBLEMA 5.42.

Mostrar que la función $y = x^3 \cos \ln x + 2x^3 \operatorname{sen} \ln x$ *verifica la ecuación* $x^2y'' - 5xy' + 10y = 0$.

Solución

Las dos primeras derivadas de la función son:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2\cos\ln x - x^3(1/x)\operatorname{sen}\ln x + 6x^2\operatorname{sen}\ln x + 2x^3(1/x)\cos\ln x \\ &= 5x^2\cos\ln x + 5x^2\operatorname{sen}\ln x. \\ y'' &= 10x\cos\ln x - 5x^2(1/x)\operatorname{sen}\ln x + 10x\operatorname{sen}\ln x + 5x^2(1/x)\cos\ln x \\ &= 15x\cos\ln x + 5x\operatorname{sen}\ln x. \end{aligned}$$

Sustituyendo entonces en la ecuación,

$$x^2y''-5xy'+10y = (15x^3-25x^3+10x^3)\cos\ln x+(5x^3-25x^3+20x^3)\operatorname{sen}\ln x = 0.$$

PROBLEMA 5.43.

Hallar las derivadas sucesivas de $f(x) = x^{4/3}$ *en* $x = 0$.

Solución

$f'(x) = (4/3)x^{1/3}$ y $f'(0) = 0$.

$f''(x) = (4/3)\cdot(1/3)x^{-2/3}$ y $f''(0)$ no existe, por lo que no existen las siguientes derivadas en $x = 0$.

Por tanto, para $x = 0$ sólo existe la primera derivada.

PROBLEMA 5.44.

Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{1-x}$, *calcular* $f^{(n)}(x)$.

Solución

Escribimos $f(x) = 2(1-x)^{-1}$ y las derivadas sucesivas son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(-1)(1-x)^{-2}(-1) = 2(1-x)^{-2}; \\ f''(x) &= 2(-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2\cdot 2!(1-x)^{-3}; \\ f'''(x) &= 2\cdot 2!(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 2\cdot 3!(1-x)^{-4}; \end{aligned}$$

lo que sugiere la fórmula general $f^{(n)}(x) = 2 \cdot n!(1-x)^{-(n+1)}$.

Esta fórmula se puede probar por el método de inducción:

Suponiendo que $f^{(k)}(x) = 2 \cdot k!(1-x)^{-(k+1)}$, se verifica que

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) = -2 \cdot k!(k+1)(1-x)^{-(k+2)}(-1) \\ &= 2 \cdot (k+1)!(1-x)^{-(k+2)}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.45.

Hallar las derivadas de orden n de las funciones $y_1 = \operatorname{sen} x$ e $y_2 = \cos x$.

Solución

Teniendo en cuenta que $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$ y que $\operatorname{sen} x = -\cos(x + \pi/2)$, resulta que:

$$\begin{aligned} y_1' &= \cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2); \\ y_1'' &= \cos(x + \pi/2) = \operatorname{sen}(x + 2\pi/2); \\ y_1''' &= \cos(x + 2\pi/2) = \operatorname{sen}(x + 3\pi/2); \\ \dots & \\ y_1^{(n)} &= \operatorname{sen}(x + n\pi/2). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} y_2' &= -\operatorname{sen} x = \cos(x + \pi/2); \\ y_2'' &= -\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos(x + 2\pi/2); \\ y_2''' &= -\operatorname{sen}(x + 2\pi/2) = \cos(x + 3\pi/2); \\ \dots & \\ y_2^{(n)} &= \cos(x + n\pi/2). \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.46.

Hallar la derivada n-ésima de las funciones siguientes:

a) $y = e^{ax} \operatorname{sen} bx$.

b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

Solución

a) $y' = ae^{ax}\operatorname{sen} bx + be^{ax}\cos bx = e^{ax}(a\operatorname{sen} bx + b\cos bx)$.

Haciendo $b/a = \operatorname{tg}\phi$, es $b^2/a^2 = \operatorname{tg}^2\phi$ y $1 + b^2/a^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\phi = 1/\cos^2\phi$, con lo que, operando, tenemos $a = (a^2+b^2)^{1/2}\cos\phi$ y $b = (a^2+b^2)^{1/2}\operatorname{sen}\phi$.

Sustituimos en la derivada y nos queda:

$y' = e^{ax}(a^2+b^2)^{1/2}(\operatorname{sen} bx\cos\phi + \cos bx\operatorname{sen}\phi) = e^{ax}(a^2+b^2)^{1/2}\operatorname{sen}(bx+\phi)$.

Al derivar sucesivas veces llegamos a

$$y^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\operatorname{sen}(bx+n\phi).$$

b) Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$, resulta del problema anterior que:

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen}^2 x) &= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(\cos 2x)\\ &= -\frac{1}{2}\cdot 2^n\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) = -2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

D. FUNCIONES IMPLÍCITAS. DERIVACIÓN LOGARÍTMICA.

Cuando en la ecuación que define una función, la variable y no aparece despejada en función de x, se dice que la función está definida en *forma implícita*, y la ecuación que la define tiene la forma general $F(x,y) = 0$.

Aunque generalmente una expresión de la forma $F(x,y) = 0$ no da lugar a una sino a varias funciones, es posible calcular sus derivadas sin tener que despejar la variable y. Para ello basta aplicar las reglas usuales de derivación teniendo en cuenta que y es una función desconocida de x, y por lo tanto, su derivada debe dejarse indicada para después despejarla si es posible. Por ejemplo, así como la derivada de x^2 es $2x$, la derivada de y^2 es $2y\cdot y'$ (debido a la regla de la cadena).

El uso de las funciones implícitas da lugar a otro método de derivación, llamado *derivación logarítmica*. Este consiste en tomar logaritmos en la función (esto permite pasar de potencias a productos y de productos a sumas, cada uno más fácil de derivar que el anterior), para después derivar término a término la función implícita que resulta. Así, funciones de la forma $y = f(x)^{g(x)}$ se transforman en $\ln y = g(x) \ln f(x)$ y, aunque las funciones tengan ahora forma implícita, para derivarlas basta utilizar la regla del producto.

Los problemas siguientes permiten aclarar estos conceptos.

PROBLEMA 5.47.

Hallar dy/dx en las funciones definidas en forma implícita por

a) $x^3 - xy + y^3 = 1$.

b) $(x+y)^3 + (x-y)^3 = x^4 + y^4$.

Solución

a) Derivando formalmente ambos miembros de la ecuación obtenemos:

$$(x^3)' - (xy)' + (y^3)' = (1)';$$

$$3x^2 - (x \cdot y' + 1 \cdot y) + 3y^2 \cdot y' = 0;$$

$$y'(3y^2 - x) = y - 3x^2;$$

$$y' = \frac{y - 3x^2}{3y^2 - x}.$$

b) En ambos miembros se debe aplicar la regla de derivación de la suma, donde cada sumando es una potencia:

$$3(x+y)^2(x+y)' + 3(x-y)^2(x-y)' = 4x^3 + 4y^3y';$$

$$3(x+y)^2(1+y') + 3(x-y)^2(1-y') = 4x^3 + 4y^3y';$$

$$3(x+y)^2 + 3(x+y)^2y' + 3(x-y)^2 - 3(x-y)^2y' = 4x^3 + 4y^3y';$$

$$y'[3(x+y)^2 - 3(x-y)^2 - 4y^3] = -3(x+y)^2 - 3(x-y)^2 + 4x^3.$$

Despejando y simplificando, queda en definitiva:

$$y' = \frac{-3(x^2+y^2) + 2x^3}{2y(3x-y^2)}.$$

PROBLEMA 5.48.

Hallar las derivadas de las funciones definidas en forma implícita por las ecuaciones:

a) $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$.

b) $y^2 \operatorname{sen} x + y = \operatorname{arc\,tg} x$.

Solución

a) Derivando término a término tenemos:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0; \\
x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x^2) - x\frac{d}{dx}(y^2) - y^2\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0; \\
x^2y' + 2xy - 2xyy' - y^2 + 2x + 2yy' = 0;
\end{gathered}$$

y despejando resulta:

$$y' = \frac{y^2 - 2x - 2xy}{x^2 + 2y - 2xy}.$$

b) Si $y^2 \operatorname{sen} x + y = \operatorname{arc\,tg} x$,

$$\begin{aligned}
2yy' \operatorname{sen} x + y^2 \cos x + y' &= \frac{1}{1+x^2}; \\
y'(2y \operatorname{sen} x + 1) &= \frac{1}{1+x^2} - y^2 \cos x; \\
y' &= \frac{1 - (1+x^2)y^2 \cos x}{(1+x^2)(2y \operatorname{sen} x + 1)}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 5.49.

Hallar la primera derivada de las siguientes funciones aplicando la derivación logarítmica:

a) $y = (x^2+2)^3(1-x^3)^4$.

b) $y = \dfrac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}}$.

Solución

a) Como $\ln y = 3\ln(x^2+2) + 4\ln(1-x^3)$, derivando tenemos:

$$\frac{y'}{y} = 3\cdot\frac{2x}{x^2+2} + 4\cdot\frac{-3x^2}{1-x^3} = \frac{6x(1-x^3) - 12x^2(x^2+2)}{(x^2+2)(1-x^3)} = \frac{6x(1-4x-3x^3)}{(x^2+2)(1-x^3)};$$

$$\Longrightarrow y' = 6x(x^2+2)^2(1-x^3)^3(1-4x-3x^3).$$

b) Análogamente al anterior, como $\ln y = \ln x + 2\ln(1-x^2) - (1/2)\ln(1+x^2)$, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{(1-x^2)(1+x^2) - 4x^2(1+x^2) - x^2(1-x^2)}{x(1-x^2)(1+x^2)} \\ &= \frac{1-5x^2-4x^4}{x(1-x^2)(1+x^2)};\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow y' = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}} \cdot \frac{1-5x^2-4x^4}{x(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{(1-5x^2-4x^4)(1-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

PROBLEMA 5.50.

Calcular la derivada segunda de la función $y = f(x)$ definida en forma implícita por $xy + y^2 = 1$.

Solución

Empezaremos calculando la derivada primera:

$$y + xy' + 2yy' = 0 \Longrightarrow y'(x+2y) = -y \Longrightarrow y' = -\frac{y}{x+2y}.$$

Aplicamos la regla del cociente al resultado para calcular la derivada segunda:

$$y'' = \frac{-y'(x+2y) + y(1+2y')}{(x+2y)^2} = \frac{-xy' - 2yy' + y + 2yy'}{(x+2y)^2} = \frac{-xy' + y}{(x+2y)^2}.$$

Sustituyendo y' por el valor conseguido anteriormente, resulta:

$$y'' = \frac{\frac{xy}{x+2y} + y}{(x+2y)^2} = \frac{xy + (x+2y)y}{(x+2y)^3} = \frac{2xy + 2y^2}{(x+2y)^3}.$$

El resultado final viene expresado únicamente en función de x e y.

PROBLEMA 5.51.

Hallar y' e y'' en la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$.

Solución

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(3) \Longrightarrow 2x - xy' - y + 2yy' = 0;$$
$$y' = \frac{2x-y}{x-2y}.$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(x-2y)\frac{d}{dx}(2x-y) - (2x-y)\frac{d}{dx}(x-2y)}{(x-2y)^2} \\ &= \frac{(x-2y)(2-y') - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2} = \frac{3xy'-3y}{(x-2y)^2} \\ &= \frac{3x\frac{2x-y}{x-2y} - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{6(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^3} = \frac{18}{(x-2y)^3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.52.

Calcular la derivada de $y = x^x(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$.

Solución

Llamamos $y_1 = x^x$ e $y_2 = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$. Entonces, por derivación logarítmica:

$$\ln y_1 = x \ln x \Longrightarrow \frac{y_1'}{y_1} = \ln x + x \cdot (1/x) = 1 + \ln x \Longrightarrow y_1' = x^x(1+\ln x);$$

$$\begin{aligned} \ln y_2 = \operatorname{tg} x \ln \operatorname{sen} x \quad &\Longrightarrow \quad \frac{y_2'}{y_2} = \frac{1}{\cos^2 x}\ln \operatorname{sen} x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\operatorname{tg} x = \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + 1 \\ &\Longrightarrow \quad y_2' = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + 1\right). \end{aligned}$$

Para calcular y' aplicamos la regla de derivación del producto:

$$\begin{aligned} y' &= (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} y_1' + x^x y_2' = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} x^x (1 + \ln x) + x^x (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\ln \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + 1 \right) \\ &= x^x (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} \left(2 + \ln x + \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \right). \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.53.

Derivar la función $y = (\operatorname{sen} x)^{(\cos x)^{\operatorname{tg} x}}$.

Solución

Si llamamos $y_1 = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$, la función se escribe como $y = (\operatorname{sen} x)^{y_1}$. Tomando logaritmos, $\ln y = y_1 \ln \operatorname{sen} x$, con lo que $\dfrac{y'}{y} = y_1 \cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + y_1' \cdot \ln \operatorname{sen} x$.

Calculamos aparte la derivada de y_1 por derivación logarítmica:

$$\begin{aligned} \ln y_1 = \operatorname{tg} x \ln \cos x \quad &\Longrightarrow \quad \frac{y_1'}{y_1} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} + \sec^2 x \ln \cos x \\ &\qquad\quad = -\operatorname{tg}^2 x + \sec^2 x \ln \cos x \\ &\Longrightarrow \quad y_1' = (\cos x)^{\operatorname{tg} x} (-\operatorname{tg}^2 x + \sec^2 x \ln \cos x). \end{aligned}$$

Si sustituimos este resultado obtenemos:

$$\begin{aligned} y' &= \left[(\cos x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + (\cos x)^{\operatorname{tg} x} (-\operatorname{tg}^2 x + \sec^2 x \ln \cos x) \ln \operatorname{sen} x \right] \\ &\qquad \times (\operatorname{sen} x)^{(\cos x)^{\operatorname{tg} x}} \\ &= (\operatorname{sen} x)^{(\cos x)^{\operatorname{tg} x}} \cdot (\cos x)^{\operatorname{tg} x} \left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + (-\operatorname{tg}^2 x + \sec^2 x \ln \cos x) \ln \operatorname{sen} x \right]. \end{aligned}$$

E. ECUACIONES PARAMÉTRICAS.

Frecuentemente en las aplicaciones físicas se escriben las ecuaciones de las curvas no expresando una variable en función de la otra sino que ambas coordenadas se expresan como funciones de una nueva variable, llamada parámetro, dando lugar a las llamadas *ecuaciones paramétricas* de la curva. La forma general es:

$$x = f(t),\ y = g(t).$$

En los casos donde se pueda despejar t en la primera ecuación y sustituirlo en la segunda, se obtiene la ecuación cartesiana común. Sin embargo, escrita la ecuación en su forma paramétrica, es posible resolver problemas analíticos y geométricos.

La derivada de y respecto a x se calcula así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)},\ \text{siempre que } f'(t) \neq 0. \tag{2}$$

PROBLEMA 5.54.

Dada la curva en forma paramétrica $x = \dfrac{t}{1+t}$, $y = t^2$, *escribir la curva en la forma* $y = f(x)$ *y calcular de dos maneras la derivada* dy/dx *comprobando que son iguales.*

Solución

En primer lugar debemos despejar t de la primera ecuación. Así:

$$x(1+t) = t \Longrightarrow x = t - xt \Longrightarrow t = \frac{x}{1-x}.$$

Sustituyendo el valor en la segunda ecuación resulta la ecuación en su forma explícita:

$$y = \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

Si derivamos esta ecuación obtenemos:

$$y' = \frac{2x(1-x)^2 - 2(1-x)(-1)x^2}{(1-x)^4} = \frac{2x(1-x) + 2x^2}{(1-x)^3} = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

Derivando la ecuación original mediante la fórmula (2) tenemos:

$$y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t}{\frac{1+t-t}{(1+t)^2}} = 2t(1+t)^2.$$

Para comprobar la igualdad de los dos resultados, basta sustituir x por $\dfrac{t}{1+t}$ en el primero, o sustituir t por $\dfrac{x}{1-x}$ en el segundo.

PROBLEMA 5.55.

Dibujar la curva representada por la ecuación $x = 2\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$.

Solución

Para escribir la ecuación en su forma cartesiana, es decir, sin que intervenga el parámetro t, elevaremos al cuadrado las dos ecuaciones después de despejar $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ en ellas (en este caso es preferible a despejar t en una de las ecuaciones). Tenemos así:

$$\frac{x^2}{4} = (\cos t)^2, \ \frac{y^2}{9} = (\operatorname{sen} t)^2.$$

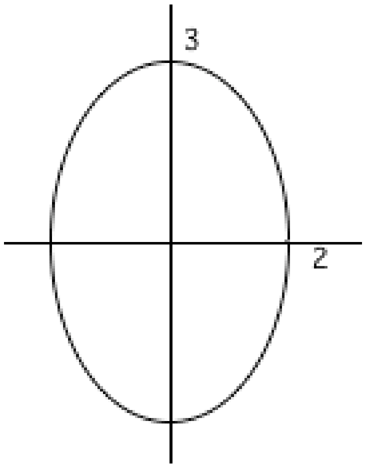
Si sumamos ambas ecuaciones se elimina la variable t y queda:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

que corresponde a una elipse de centro el origen de coordenadas y ejes los de coordenadas.

Para dibujar la gráfica, calculamos los vértices o puntos de corte con los ejes.

Cuando $x = 0, y = \pm 3$. Cuando $y = 0, x = \pm 2$. La gráfica queda entonces:



F. RECTA TANGENTE Y NORMAL.

Se llama *recta secante* a una curva de ecuación $y = f(x)$ en los puntos $P_0(x_0, f(x_0))$ y $P_1(x_1, f(x_1))$ a la recta que pasa por dichos puntos. La pendiente de esta recta es entonces

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

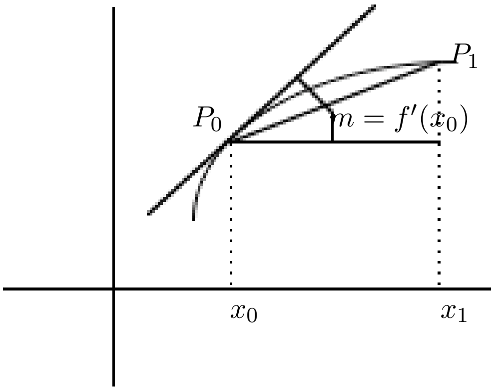
Si ahora hacemos que el punto P_1 se mueva a lo largo de la curva $y = f(x)$ aproximándose cada vez más al punto P_0, la posición límite de las rectas secantes se llamará *recta tangente* a la curva $y = f(x)$ por el punto P_0. En este caso la pendiente se obtendrá también como un límite y tendrá la forma:

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{3}$$

Esta fórmula corresponde precisamente a la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto P_0. De este modo, la recta tangente a una curva en un punto tiene por pendiente la derivada de dicha función en el punto.

La ecuación de la recta tangente será entonces:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{4}$$



Se llama *recta normal* a la curva $y = f(x)$ en el punto $P_0(x_0, f(x_0))$ a la recta que, pasando por P_0, es perpendicular a la recta tangente a f en ese punto. Su ecuación debe ser, por lo tanto:

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{5}$$

PROBLEMA 5.56.

Hallar las ecuaciones de la recta tangente y normal a la función $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ en el origen de coordenadas.

Solución

La pendiente de la recta tangente será $f'(0)$. Derivemos en primer lugar la función para después sustituir en $x = 0$:

$$f'(x) = \sec^2(2x) \cdot 2 \Longrightarrow f'(0) = 2.$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 2(x - 0)$, o bien, $y = 2x$.

La recta normal tiene por ecuación: $y = -x/2$.

PROBLEMA 5.57.

Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $y = x^2$ que pasen por el punto $(0, -1)$.

Solución

Como el punto $(0, -1)$ no pertenece a la curva, no podemos seguir el procedimiento anterior. Hay que averiguar en primer lugar el punto o puntos de tangencia. Supongamos que dicho punto es (a, a^2) (recuerda que debe pertenecer a la curva).

La pendiente de la recta tangente se puede calcular de dos formas:

- Sabiendo que es la derivada de la función en el punto de tangencia, y como $y' = 2x$, obtenemos:

$$m = f'(a) = 2a.$$

- Sabiendo que pasa por los puntos $(0, -1)$ y (a, a^2), resulta:

$$m = \frac{a^2 + 1}{a}.$$

Igualando ambos resultados, tenemos la ecuación $2a = \dfrac{a^2 + 1}{a}$. Resolviendo esta ecuación:

$$2a^2 = a^2 + 1 \Longrightarrow a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1.$$

Tenemos entonces que hay dos rectas tangentes que verifican la condición, una con pendiente 2 y la otra con pendiente -2. Sus ecuaciones son, respectivamente:

$$y + 1 = 2x; \quad y + 1 = -2x.$$

Si queremos encontrar también las rectas normales, ya no tienen que pasar por el punto $(-1, 0)$ pero sí por los puntos de tangencia $(1, 1)$ y $(-1, 1)$. La primera tendrá pendiente $-1/2$ y la segunda, $1/2$. Las ecuaciones son por tanto:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1); \quad y - 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

PROBLEMA 5.58.

Hallar las rectas tangente y normal a la curva de ecuación $x^2y^2 = 9$ *en el punto* $P(-1, 3)$.

Solución

Como sabemos, la pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada de la función en el punto de tangencia. Derivando la función implícita tenemos:

$$2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{2xy^2}{2x^2y} = -\frac{y}{x},$$

siempre que $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Como el punto P pertenece a la curva, tenemos directamente que $m = -3/-1 = 3$.

La ecuación de la recta tangente es: $y-3 = 3(x+1)$ o bien, $y = 3x+6$.

La recta normal tiene por ecuación: $y - 3 = -\frac{1}{3}(x + 1)$, es decir, $3y+x-8 = 0$.

PROBLEMA 5.59.

Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$x = t\cos t, \;\; y = t\,\mathrm{sen}\, t$$

en $(0, 0)$ y en el punto correspondiente a $t = \pi/4$.

Solución

En primer lugar debemos calcular la derivada de la función. Como:

$$x'(t) = \cos t - t\,\mathrm{sen}\, t, \;\; y'(t) = \mathrm{sen}\, t + t\cos t,$$

resulta que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\mathrm{sen}\, t + t\cos t}{\cos t - t\,\mathrm{sen}\, t}$.

La pendiente de la recta tangente se obtiene sustituyendo en la derivada el valor de t correspondiente al punto de tangencia. Para obtener el valor de t correspondiente al origen de coordenadas, sustituimos los valores $x = 0$ e $y = 0$ en la ecuación de la curva; debemos resolver las ecuaciones

$$0 = t\cos t, 0 = t\,\mathrm{sen}\, t.$$

De la primera se obtiene que $t = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$

Las soluciones de la segunda ecuación son: $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

El único valor común para las dos es el de $t = 0$.

Haciendo $t = 0$ en la fórmula de la derivada, resulta: $m = 0$.

Así, la ecuación de la recta tangente en el punto $(0, 0)$ es $y - 0 = 0(x - 0)$, es decir, $y = 0$.

Si $t = \dfrac{\pi}{4}$, la pendiente vale: $m = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \pi/4)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \pi/4)} = \dfrac{1 + \pi/4}{1 - \pi/4}$.

El punto de tangencia se obtiene sustituyendo en la ecuación de la curva el valor $t = \pi/4$. Tenemos:

$$x(\pi/4) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}, y(\pi/4) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

La ecuación de la recta tangente es $y - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8} = \dfrac{1 + \pi/4}{1 - \pi/4}\left(x - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$.

PROBLEMA 5.60.

Calcular la pendiente de la curva $x = y^2 - 4y$ en los puntos de intersección con el eje Y.

Solución

Los puntos de corte con el eje Y tienen como ordenada las soluciones de $0 = y^2 - 4y$, es decir son los puntos $(0, 0)$ y $(0, 4)$.

Además la pendiente de la recta tangente se obtiene sustituyendo en la derivada de la función los puntos anteriores. Así tenemos:

$$\frac{dx}{dy} = 2y - 4 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{2y - 4}.$$

En $(0, 0)$ la pendiente es $-1/4$ y en $(0, 4)$ la pendiente es $1/4$.

G. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Encontrar, usando la definición, las derivadas de las siguientes funciones: a) $f(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{x}$ en el punto $x = 1$.

Resp.: $f'(1) = 2$. b) $f(x) = (x^2 + 2x)^3$.

Resp.: $f'(x) = 6(x + 1)(x^2 + 2x)^2$. c) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3x + 2}$.

Resp.: $f'(x) = \dfrac{13}{(3x + 2)^2}$. d) $f(x) = \cos x$.

Sugerencia: Recuerda la identidad $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ y aplícala a la expresión $\cos(x + h)$.

Resp.: $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

2.- Sea $f(x) = x^{3/2}$. Probar que f tiene derivada lateral en $x = 0$ por la derecha y hallar su valor.

Sugerencia: Calcula directamente $f'(0^+)$ mediante la definición.

Resp.: $f'(0^+) = 0$.

3.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 2, \\ 9 & \text{si } 2 \leq x \leq 8, \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x > 8, \end{cases}$

hallar, en caso de que existan, $f(0), f'(2), f'(8)$.

Resp.: No existen.

4.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 2 & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

(a) Estudiar la continuidad y derivabilidad.

(b) Probar que $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1, -1/2)$.

Resp.: (a) Continua en todo $\mathbb{R}$ pero derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Aplicar el teorema de Bolzano.

5.- *Calcular las derivadas de las siguientes funciones.*

a) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$.

Resp.: $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2}}$.

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$.

Resp.: $f'(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)^{-1/2} \cdot \dfrac{x^2 - 2x - 1}{2(1+x^2)^2}$.

c) $f(x) = (x^2 - 1)^2(2x^2 + 3x + 2)^2$.

Resp.: $f'(x) = 2(x^2 - 1)(2x^2 + 3x + 2)(8x^3 + 9x^2 - 3)$.

d) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}(x-1)}{x^2 + 2}$.

Resp.: $f'(x) = \dfrac{-x^3 + 3x^2 + 6x - 2}{\sqrt{x}(2 + x^2)^2}$.

e) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

Resp.: $f'(x) = \operatorname{sen} 2x - 2 \cos 2x$.

f) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$.

Resp.: $f'(x) = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$.

g) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{arc\,tg}^2(x^3)}$.

Resp.: $f'(x) = \dfrac{2x^2}{(1 + x^6)\sqrt[3]{\operatorname{arc\,tg}(x^3)}}$.

h) $f(x) = \cos(x^3 + 1) - \sec(2\sqrt{x})$.

Resp.: $f'(x) = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3 + 1) - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \sec(2\sqrt{x}) \operatorname{tg}(2\sqrt{x})$.

i) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x + \cos(x^2) + \operatorname{sen}^4(x^2 + x)$.

Resp.: $f'(x) = 3 \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x - 2x \operatorname{sen}(x^2) + 4(2x+1) \operatorname{sen}^3(x^2+x) \cos(x^2 + x)$.

j) $f(x) = \cos(x^2+1) - \operatorname{arc\,tg}(\sec x)$.

Resp.: $f'(x) = -2x \operatorname{sen}(x^2+1) - \dfrac{\sec x \operatorname{tg} x}{1+\sec^2 x}$.

k) $f(x) = e^{x^x}$.

Resp.: $f'(x) = e^{x^x} \cdot x^x \cdot (1+\ln x)$.

6.- Sean f y g dos funciones derivables. Calcular la derivada de la función $y = f[g(x^n)] \cdot g[f(x)^n]$.

Resp.: $y' = f'[g(x^n)] \cdot g'(x^n) n x^{n-1} g[f(x)^n] + f[g(x^n)] \cdot g'[f(x)^n] n f(x)^{n-1} f'(x)$.

7.- Sean f y g dos funciones derivables tales que $f(2) = 3, f'(2) = -1, g(2) = -5, g'(2) = 2$. Calcular

(a) $(g-f)'(2)$.

(b) $(f \cdot f)'(2)$.

(c) $(g/f)'(2)$.

Resp.: (a) 3; (b) - 6; (c) 1/9.

8.- Sabiendo que $f(0) = 1, g(0) = 2, h(0) = 1, f'(0) = 2, g'(0) = 1, h'(0) = 2, h'(1) = 1, h(1) = 2, f'(2) = 1, g(1) = 1, g'(1) = 3$, calcular:

(a) $(f \circ g)'(0)$.

(b) $(f \circ h \circ g)'(1)$.

Resp.: (a) $f'[g(0)] \cdot g'(0) = 1$;

(b) $f'[(h \circ g)(1)] \cdot h'[g(1)] \cdot g'(1) = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$.

9.- Calcular dy/dx si $y = \sqrt{u^2+1}, u = \sec x \operatorname{tg} x$.

Resp.: $dy/dx = u(u^2+1)^{-1/2}(\sec^3 x + \sec x \operatorname{tg}^2 x)$.

10.- Sea $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$. Encontrar todos los valores de x para los que

(a) $f'(x) = 0$.

(b) $f'(x) = -2$.

(c) $f'(x) = 10$.

Resp.: (a) 1, -2; (b) 0, -1; (c) 3, -4.

11.- Probar que si $f(x)$ es un polinomio cuyas n raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$ son todas distintas, entonces $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}$.

Sugerencia: Escribir $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ y aplicar derivación logarítmica.

12.- Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hallar los valores de las constantes a, b, c y d para que $f(0) = 1,\ f'(-1) = 8,\ f''(0) = -4,\ f'''(x) = 2$.

Resp.: $a = 1/3,\ b = -2,\ c = 3, d = 1$.

13.- Una bola se deja caer de una altura inicial de 122,5 m. y su posición viene dada por $s(t) = 122,5 - 4,9t^2$.

(a) ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 1/2$?

(b) ¿Cuánto tiempo tarda la bola en llegar al suelo?

(c) ¿Cuál es la velocidad de impacto?

Resp.: $v(1/2) = -4,9$ m/sg; $t = 5$ sg; $v(5) = -49$ m/sg.

14.- Calcular la derivada de orden 10 de las siguientes funciones: a)

$f(x) = 1/x$.

Resp.: $f^{(10)}(x) = 10!\ x^{-11}$. b) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Resp.: $f^{(10)}(x) = -\operatorname{sen} x$.

15.- Calcular la derivada de orden 100 de las siguientes funciones: a) $f(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$.

Resp.: $f^{(100)}(x) = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 197 \cdot (-x + 399)}{2^{100} \cdot (1 - x)^{201/2}}$.

b) $f(x) = x \ln x$.

Resp.: $f^{(100)}(x) = 98! x^{-99}$.

16.- *Mostrar que la función que se indica verifica la ecuación respectiva.*

a) $y = x + \operatorname{sen} 2x;\ y'' + 4y = 4x.$

b) $y = x^3 + x;\ y^{(v)} + y^{(iv)} + y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 7x + 7.$

17.- *Dada la curva* $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$, *calcular* y' *e* y''.

Resp.: $y' = -\dfrac{x}{y}$ si $x^2 + y^2 \neq 1$ y además $y \neq 0$; $y'' = -\dfrac{x^2 + y^2}{y^3}$.

18.- *Probar que las curvas* $x^2 + y^2 = 2, y^2 = 2x - 1$ *son ortogonales. (Dos curvas son ortogonales cuando sus rectas tangentes en los puntos de intersección de ambas curvas son perpendiculares.)*

Resp.: Puntos de intersección $(1, 1)$ y $(1, -1)$. Derivadas $y' = -\dfrac{x}{y},\ y' = \dfrac{1}{y}$.

19.- *Dadas las curvas* $x^2 - y^2 = 5, 4x^2 + 9y^2 = 72$, *encontrar sus puntos de intersección. Verificar que en tales puntos las curvas se cortan en ángulo recto.*

Resp.: $(3, 2), (-3, 2), (3, -2), (-3, -2)$.

Las derivadas de las curvas son $y' = \dfrac{x}{y},\ y' = -\dfrac{4x}{9y}$, respectivamente.

20.- *Dibujar la curva que tiene por ecuación:*

a) $x = 1 - t,\ y = 1 + t.$

b) $x = t + 1,\ y = \frac{1}{t}.$

c) $x = \sqrt{t},\ y = t.$

Resp.: a) Recta $x + y = 2$.

b) Hipérbola $y = \dfrac{1}{x - 1}$.

c) Parábola $y = x^2$ con $x \geq 0$.

21.- *Dadas las curvas* $2x^2 + 3y^3 = 5, \{x = t, y = \sqrt{t}$ *para* $t > 0\}$.

(a) *Encontrar el punto de intersección.*

(b) Encontrar el ángulo de intersección de ambas curvas en dicho punto.

Resp.: (a) $(1,1)$.

(b) $\operatorname{tg}\beta = 17/14$.

22.- Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt{1+x}}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Resp.: $y - \sqrt[3]{2} = x/(6\sqrt[3]{4}); y - \sqrt[3]{2} = -6\sqrt[3]{4}x$.

23.- Escribir las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \arccos 3x$ en el punto de intersección con el eje Y.

Resp.: $y - \pi/2 = -3x; y - \pi/2 = x/3$.

24.- Hallar las ecuaciones de las tangentes a $y = 4x^2$ que pasen por $(2,0)$.

Resp.: $y = 0; y = 32x - 64$.

25.- Encontrar los puntos de la curva $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ donde la tangente es paralela al eje X.

Resp.: $(2,0), (-1,27)$.

26.- Encontrar los puntos de la curva $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ cuya recta tangente es paralela a la recta $8x + 2y - 5 = 0$.

Resp.: $(0,5); (-4/3, 311/27)$.

27.- Probar que no existe ninguna recta que pase por $(1,2)$ y que sea tangente a la curva $y = 4 - x^2$.

Resp.: La ecuación $\dfrac{4-x^2-2}{x-1} = -2x$ no tiene ninguna solución real.

28.- Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{x^2+a}{x^2+b}$ en $x = 1$. Encontrar a y b de forma que la tangente hallada pase por el punto $(2,1)$ y sea perpendicular a la recta $3x + 3y - 7 = 0$.

Resp.: $y - \dfrac{1+a}{1+b} = \dfrac{2(b-a)}{(1+b)^2}(x-1)$; $a = -1, b = 1$.

29.- Demostrar que las tangentes a la curva $y = -4x + \dfrac{12}{x}$ en sus puntos de corte con la recta $2x - y = 0$ son paralelas entre sí.

Resp.: $m_1 = m_2 = -10$.

30.- Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por $(6, 5)$ y son tangentes a la curva $y = x^2 - 3x - 4$.

Resp.: $y = 15x - 85$; $y = 3x - 13$.

31.- Encontrar los puntos de la curva $y = x^3$ cuya recta tangente en ese punto corta al eje X en el punto 4.

Resp.: $(0, 0), (6, 216)$.

32.- Encontrar a, b, c, d de forma que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sea tangente a la recta $3x - y - 1 = 0$ en $(1, 2)$ y a la recta $10x - y - 12 = 0$ en $(2, 8)$.

Resp.: $a = 1, b = -1, c = 2, d = 0$.

33.- Escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $(x+y)^3 + x^2y = \sqrt{y}$ en $(0, 1)$.

Resp.: $6x + 5y - 5 = 0$.

34.- Probar que la recta tangente a la curva $xy = k$ en el punto (a, b) es $bx + ay = 2k$.

Resp.: Tener en cuenta que $a \cdot b = k$ para que el punto esté en la curva.

35.- ¿En qué puntos de la gráfica de $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$ la recta tangente es horizontal o vertical?

Resp.: Como $y' = 1$, no hay rectas tangentes horizontales ni verticales.

36.- Dada la curva $yx^2 + 2y^2 - x - 11 = 0$, hallar las rectas tangentes en los puntos de abscisa $x = -1$.

Resp.: $y - 2 = \dfrac{5}{9}(x + 1)$; $y + \dfrac{5}{2} = \dfrac{4}{9}(x + 1)$.

37.- Dada la curva en coordenadas paramétricas

$$x(t) = 5\cos t + 1,\ \ y(t) = 4 \operatorname{sen} t + 1.$$

(a) Hallar la ecuación cartesiana e identificar la curva.

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente en $(7/2, 2\sqrt{3} + 1)$.

(c) ¿Para qué valores de t la recta tangente es paralela al eje X?

Resp.: (a) $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$; elipse centrada en $(1,1)$ y ejes $x = 1, y = 1$.

(b) $4x + 5\sqrt{3}y - 44 - 5\sqrt{3} = 0$.

(c) $t = \pi/2, t = 3\pi/2$.

38.- Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$x(t) = \operatorname{sen} t \cos t,\ \ y(t) = \sqrt{t+1}.$$

que sean horizontales o verticales.

Resp.: No tiene tangentes horizontales.

Tangentes verticales: $x = \dfrac{\operatorname{sen}(-2)}{2}$; $x = \dfrac{1}{2}$; $x = -\dfrac{1}{2}$.

39.- Dada la curva

$$x = t + \frac{1}{t},\ \ y = t - \frac{1}{t} \text{ para } t > 0.$$

(a) Encontrar la ecuación cartesiana.

(b) Encontrar los valores de t que hacen verticales a las tangentes a la curva.

Resp: (a) $x^2 - y^2 = 4$ (hipérbola).

(b) $t = 1$.

40.- Sea L_1 la recta tangente a la curva $y = f(x)$ definida implícitamente por la ecuación $x^2y + \sqrt{y} - 3x + 1 = 0$ en el punto $(1, 1)$.

Sea L_2 la recta normal a la curva representada por la ecuación $x = t - 1, y = t^2$, en el punto correspondiente a $t = 0$.

Calcular el punto de intersección de L_1 y L_2.

Resp.: Rectas $y - 1 = \frac{2}{3}(x - 1); x = -1$. Intersección $(-1, -1/3)$.

41.- *Decidir si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas:*

(a) Si $y = f(x)$ es derivable en el punto $x = a$ pero $y = g(x)$ no es derivable en $x = a$, entonces la función $y = (f + g)(x)$ no es derivable en $x = a$.

Resp.: Verdadero.

(b) Si f y g no son derivables en $x = a$, entonces $f + g$ no es derivable en $x = a$.

Resp.: Falso. Ejemplo: $f(x) = \sqrt{|x|}$, $g(x) = -1/\sqrt{|x|}$ en $x = 0$.

(c) Si f y g no son derivables en $x = a$, entonces $f \cdot g$ no es derivable en $x = a$.

Resp.: Falso. Ejemplo: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en $x = 0$.

(d) Si $y = f(x)$ es derivable en el intervalo (a, ∞) y existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$, entonces existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)$. El recíproco es falso.

Resp.: La primera parte es falsa como muestra el ejemplo $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x}$.

La segunda parte es cierta pues basta comprobar el hecho con la función $f(x) = \cos(\ln x)$.