Método Clássico de Denavit-Hartenberg Aplicado ao KUKA LBR iiwa

A. C. Pereira[1], B. Bresolini[1], F. H. N. Resende[1], I. A. Bastos[1], K. Geamonoud[1], M. O. Coelho[1], O. G. B. de O. e Oliveira[1], T. O. Campagnani[1]

[1]Graduandos em Eng. Mecatrônica
Departamente de Eng. Mecatrônica, CEFET-MG

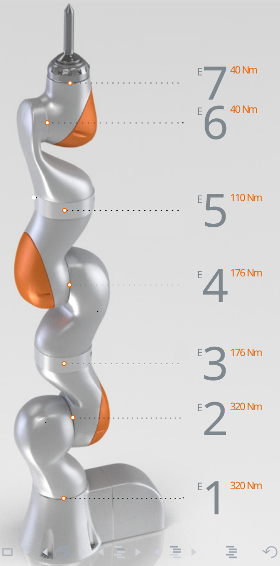
Divinópolis, Setembro 2020

Sumário

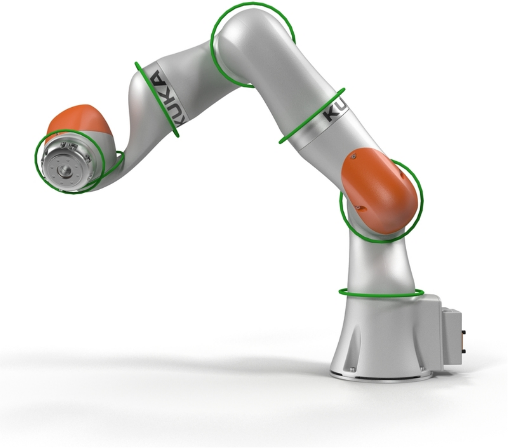
Sumário

KUKA LBR iiwa

O robô KUKA LBR iiwa é conhecido como novo antropomorfo e contém 7 graus de liberdade. Existem dois padrões vendidos: LBR iiwa 7 800 e LBR iiwa 14 820. O primeiro com carga efetiva de até 7 kg e o segundo com 14 kg.



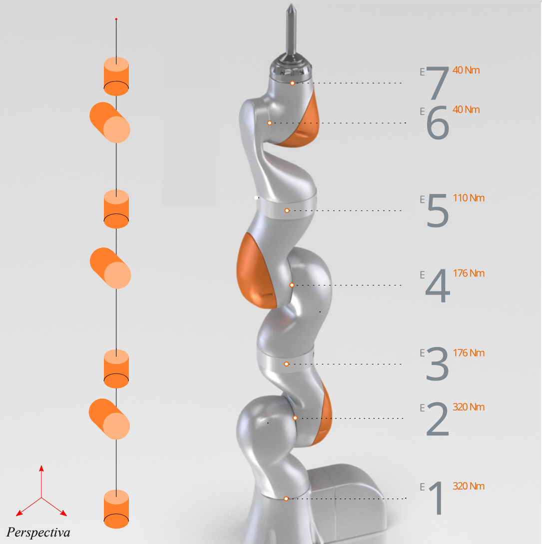
KUKA LBR iiwa



Sua estrutura cinemática é do tipo esférica-rotacional-esférica (SRS) e seu volume de trabalho é uma esfera de 1,7 a 1,8 m^3.

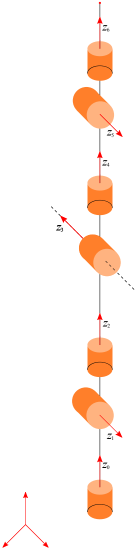
Sumário

O primeiro passo para a aplicação do método clássico de Denavit-Hartenberg é desenhar o diagrama de arames para o manipulador robótico.



Atribuição de frames

Inicialmente, deve-se atribuir os eixos z_i nos eixos de atuação, para cada junta $i+1$, sendo $i = 0, 1, 2 \ldots, n-1$. A última junta é o **end-effector** ou o **tool frame** e, pode ser atribuído ao final.



Perspectiva

Atribuição de frames

De acordo com SPONG, HUTCHINSON e VIDYASAGAR (2005, p. 74), se z_{i-1} intercepta z_i, x_i é escolhido no plano normal formado por z_i e z_{i-1}. O sentido positivo de x_i é arbitrária e a origem o_i pode ser atribuído no ponto de interseção de z_i e z_{i-1}. Se isto for feito, o parâmetro a_i será igual a 0.

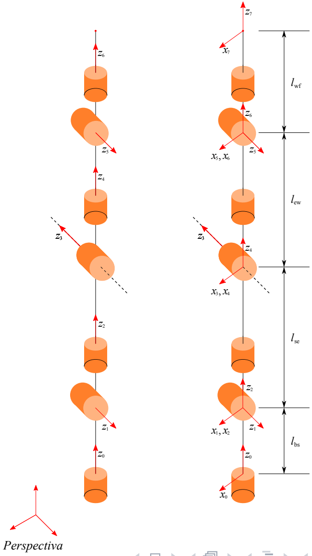


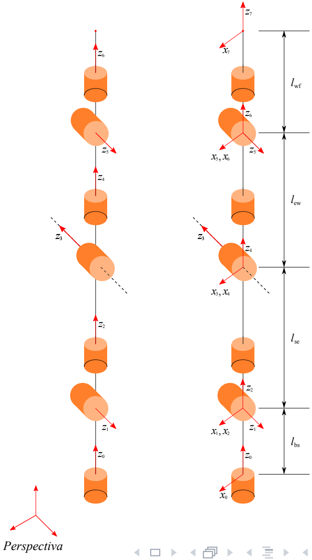
Tabela de Denavit-Hartenberg

Os parâmetros dos *links* do KUKA LBR iiwa podem ser retirados da sua interpretação física da atribuição de frames.

Tabela: Parâmetros DH do KUKA LBR iiwa

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi/2$	ℓ_{bs}	θ_1^*
2	0	$\pi/2$	0	θ_2^*
3	0	$\pi/2$	ℓ_{se}	θ_3^*
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4^*
5	0	$-\pi/2$	ℓ_{ew}	θ_5^*
6	0	$\pi/2$	0	θ_6^*
7	0	0	ℓ_{wf}	θ_7^*

O * indica que é variável.



Matriz de Transformação Homogênea

Usando os parâmetros obtidos na tabela, em cada linha é obtida a matriz de transformação homogênea A_i do *link* i para o *link* $i-1$, fazendo

$$
\begin{aligned}
A_i &= \text{Rot}_{z,\,\theta_i}\,\text{Trans}_{z,\,d_i}\,\text{Trans}_{x,\,a_i}\,\text{Rot}_{x,\,\alpha_i} \\
&= \left[\begin{array}{ccc:c}
c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\
s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha} & -c_{\theta_i}s_{\alpha} & a_i s_{\theta_i} \\
0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

A matriz de transformação T de n para 0 é então determinada por

$$
T_n^0 = \prod_{i=0}^{n} A_i
$$

Matriz de Transformação Homogênea

Para o *link* 1, segue $a_1 = 0$, $\alpha_1 = -\pi/2$, $d_1 = \ell_{\mathrm{bs}}$ e θ_1 sendo a variável, então

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc:c} c_{\theta_1} & 0 & -s_{\theta_1} & 0 \\ s_{\theta_1} & 0 & c_{\theta_1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ell_{\mathrm{bs}} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Para o *link* 2, segue $a_2 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$, $d_2 = 0$ e θ_2 sendo a variável, então

$$A_2 = \left[\begin{array}{ccc:c} c_{\theta_2} & 0 & s_{\theta_2} & 0 \\ s_{\theta_2} & 0 & -c_{\theta_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Para o *link* 3, segue $a_3 = 0$, $\alpha_3 = \pi/2$, $d_3 = \ell_{\mathrm{se}}$ e θ_3 sendo a variável, então

$$A_3 = \left[\begin{array}{ccc:c} c_{\theta_3} & 0 & s_{\theta_3} & 0 \\ s_{\theta_3} & 0 & -c_{\theta_3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_{\mathrm{se}} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Para o *link* 4, segue $a_4 = 0$, $\alpha_4 = -\pi/2$, $d_4 = 0$ e θ_4 sendo a variável, então

$$A_4 = \left[\begin{array}{ccc:c} c_{\theta_4} & 0 & -s_{\theta_4} & 0 \\ s_{\theta_4} & 0 & c_{\theta_4} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Matriz de Transformação Homogênea

Para o *link* 5, segue $a_5 = 0$, $\alpha_5 = -\pi/2$, $d_5 = \ell_{\text{ew}}$ e θ_5 sendo a variável, então

$$A_5 = \left[\begin{array}{ccc|c} c_{\theta_5} & 0 & -s_{\theta_5} & 0 \\ s_{\theta_5} & 0 & c_{\theta_5} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ell_{\text{ew}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Para o *link* 6, segue $a_6 = 0$, $\alpha_6 = \pi/2$, $d_6 = 0$ e θ_6 sendo a variável, então

$$A_6 = \left[\begin{array}{ccc|c} c_{\theta_6} & 0 & s_{\theta_6} & 0 \\ s_{\theta_6} & 0 & -c_{\theta_6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Para o *link* 7, $a_7 = 0$, $\alpha_7 = 0$, $d_7 = \ell_{\text{wf}}$ e sendo θ_7 a variável, segue

$$A_7 = \left[\begin{array}{ccc|c} c_{\theta_7} & -s_{\theta_7} & 0 & 0 \\ s_{\theta_7} & c_{\theta_7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_{\text{wf}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Matriz de Transformação Homogênea

Por fim, a matriz de transformação homogênea do frame 7 para o frame 0 é encontrada fazendo

$$T_7^0 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 \tag{1}$$

uma multiplicação de 7 matrizes 4×4 de variáveis reais.

Matriz de Transformação

A multiplicação das matrizes n matrizes de transformação homogênea resulta em

$$T_n^0 = \left[\begin{array}{ccc:c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{33} & d_y \\ r_{31} & r_{22} & r_{33} & d_z \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{2}$$

Para a qual os termos serão expostos a seguir.

Rotação

$$r_{11} = \Bigg[\Bigg[\left(\left(-s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3\right) c_4 + s_2 s_4 c_1\right) c_5 + \left(-s_1 c_3 - s_3 c_1 c_2\right) s_5\Bigg] c_6 +$$

$$\left(\left(-s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3\right) s_4 - s_2 c_1 c_4\right) s_6\Bigg] c_7 + \Bigg[-\Bigg[\left(-s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3\right) c_4 +$$

$$s_2 s_4 c_1\Bigg] s_5 + \left(-s_1 c_3 - s_3 c_1 c_2\right) c_5\Bigg] s_7$$

$$r_{12} = -\Bigg[\Bigg[\left(\left(-s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3\right) c_4 + s_2 s_4 c_1\right) c_5 + \left(-s_1 c_3 - s_3 c_1 c_2\right) s_5\Bigg] c_6$$

$$+ \left(\left(-s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3\right) s_4 - s_2 c_1 c_4\right) s_6\Bigg] s_7 + \Bigg[-\Bigg[\left(-s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3\right) c_4$$

$$+ s_2 s_4 c_1\Bigg] s_5 + \left(-s_1 c_3 - s_3 c_1 c_2\right) c_5\Bigg] c_7$$

Rotação

$$r_{13} = \Big[\left(\left(-s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3\right) c_4 + s_2 s_4 c_1\right) c_5 + \left(-s_1 c_3 - s_3 c_1 c_2\right) s_5\Big] s_6 \\ - \left(\left(-s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3\right) s_4 - s_2 c_1 c_4\right) c_6$$

$$r_{21} = \Bigg[\Big[\left(\left(s_1 c_2 c_3 + s_3 c_1\right) c_4 + s_1 s_2 s_4\right) c_5 + \left(-s_1 s_3 c_2 + c_1 c_3\right) s_5\Big] c_6 \\ + \left(\left(s_1 c_2 c_3 + s_3 c_1\right) s_4 - s_1 s_2 c_4\right) s_6\Bigg] c_7 + \Bigg[-\Big[\left(s_1 c_2 c_3 + s_3 c_1\right) c_4 \\ + s_1 s_2 s_4\Big] s_5 + \left(-s_1 s_3 c_2 + c_1 c_3\right) c_5\Bigg] s_7$$

Rotação

$$r_{22} = -\Bigg[\Big[\left(\left(s_1 c_2 c_3 + s_3 c_1\right) c_4 + s_1 s_2 s_4\right) c_5 + \left(-s_1 s_3 c_2 + c_1 c_3\right) s_5\Big] c_6$$

$$+ \left(\left(s_1 c_2 c_3 + s_3 c_1\right) s_4 - s_1 s_2 c_4\right) s_6\Bigg] s_7 + \Bigg[-\Big[\left(s_1 c_2 c_3 + s_3 c_1\right) c_4$$

$$+ s_1 s_2 s_4\Big] s_5 + \left(-s_1 s_3 c_2 + c_1 c_3\right) c_5\Bigg] c_7$$

$$r_{23} = \Bigg[\Big[\left(s_1 c_2 c_3 + s_3 c_1\right) c_4 + s_1 s_2 s_4\Big] c_5 + \left(-s_1 s_3 c_2 + c_1 c_3\right) s_5\Bigg] s_6$$

$$- \Big[\left(s_1 c_2 c_3 + s_3 c_1\right) s_4 - s_1 s_2 c_4\Big] c_6$$

Rotação

$$r_{31} = \Big[\left(\left(-s_2 c_3 c_4 + s_4 c_2 \right) c_5 + s_2 s_3 s_5 \right) c_6 + \left(-s_2 s_4 c_3 - c_2 c_4 \right) s_6 \Big] c_7 \\ + \Big[- \left(-s_2 c_3 c_4 + s_4 c_2 \right) s_5 + s_2 s_3 c_5 \Big] s_7$$

$$r_{32} = - \Big[\left(\left(-s_2 c_3 c_4 + s_4 c_2 \right) c_5 + s_2 s_3 s_5 \right) c_6 + \left(-s_2 s_4 c_3 - c_2 c_4 \right) s_6 \Big] s_7 \\ + \Big[- \left(-s_2 c_3 c_4 + s_4 c_2 \right) s_5 + s_2 s_3 c_5 \Big] c_7$$

$$r_{33} = \Big[\left(-s_2 c_3 c_4 + s_4 c_2 \right) c_5 + s_2 s_3 s_5 \Big] s_6 - \left(-s_2 s_4 c_3 - c_2 c_4 \right) c_6$$

Translação

$$d_x = 90\Big[\left(\left(-s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3 \right) c_4 + s_2 s_4 c_1 \right) c_5 + \left(-s_1 c_3 - s_3 c_1 c_2 \right) s_5 \Big] s_6 \\ - 90\Big[\left(-s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3 \right) s_4 - s_2 c_1 c_4 \Big] c_6 - 400 \left(-s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3 \right) s_4 \\ + 400 s_2 c_1 c_4 + 420 s_2 c_1$$

$$d_y = 90\Big[\left(\left(s_1 c_2 c_3 + s_3 c_1 \right) c_4 + s_1 s_2 s_4 \right) c_5 + \left(-s_1 s_3 c_2 + c_1 c_3 \right) s_5 \Big] s_6 \\ - 90\Big[\left(s_1 c_2 c_3 + s_3 c_1 \right) s_4 - s_1 s_2 c_4 \Big] c_6 - 400 \left(s_1 c_2 c_3 + s_3 c_1 \right) s_4 \\ + 400 s_1 s_2 c_4 + 420 s_1 s_2$$

$$d_z = 90\Big[\left(-s_2 c_3 c_4 + s_4 c_2 \right) c_5 + s_2 s_3 s_5 \Big] s_6 - 90 \left(-s_2 s_4 c_3 - c_2 c_4 \right) c_6 \\ + 400 s_2 s_4 c_3 + 400 c_2 c_4 + 420 c_2 + 360$$

Sumário

Implementação: *Set Up*

```python
import sympy as sp     # Pacote para manipulaçoes simbolicas
from sympy import pi, sin, cos
from sympy.physics.vector import init_vprinting   # Usada para
    printar em latex
from sympy.physics.mechanics import dynamicsymbols

init_vprinting(use_latex='mathjax', pretty_print=False)    #
    Configurando o vprinting

theta1, theta2, theta3, theta4 = dynamicsymbols('theta1 theta2
    theta3 theta4')
theta5, theta6, theta7 = dynamicsymbols('theta5 theta6 theta7')
l1, l2, theta, alpha, a, d = dynamicsymbols('l1 l2 theta alpha a d')
```

Implementação: Tabela DH

```python
# Valores das distancias (LBR iiwa 14 820)
dbs, dse, dew, dwf = 360, 420, 400, 90

# Matriz DH:          alfi, ai, di, thetai
TDH = sp.Matrix([ [-pi/2, 0, dbs, theta1],
                  [ pi/2, 0,   0, theta2],
                  [ pi/2, 0, dse, theta3],
                  [-pi/2, 0,   0, theta4],
                  [-pi/2, 0, dew, theta5],
                  [ pi/2, 0,   0, theta6],
                  [    0, 0, dwf, theta7]])
```

Implementação: A_i

```
Rot = sp.Matrix([
     [cos(theta), -sin(theta)*cos(alpha),  sin(theta)*sin(alpha)],
     [sin(theta), cos(theta)*cos(alpha), -cos(theta)*sin(alpha)],
     [ 0, sin(alpha), cos(alpha)]
                ])

Tran = sp.Matrix([a*cos(theta),a*sin(theta),d])
S = sp.Matrix([[0, 0, 0, 1]])

# Matriz Ai geral
A = sp.Matrix.vstack(sp.Matrix.hstack(Rot, Tran), S)
```

Implementação: MTH T_7^0

```
# Matriz A de cada linha
A1 = A.subs({alpha:TDH[0,0],a:TDH[0,1],d:TDH[0,2],theta:TDH[0,3]})
A2 = A.subs({alpha:TDH[1,0],a:TDH[1,1],d:TDH[1,2],theta:TDH[1,3] })
A3 = A.subs({alpha:TDH[2,0],a:TDH[2,1],d:TDH[2,2],theta:TDH[2,3] })
A4 = A.subs({alpha:TDH[3,0],a:TDH[3,1],d:TDH[3,2],theta:TDH[3,3] })
A5 = A.subs({alpha:TDH[4,0],a:TDH[4,1],d:TDH[4,2],theta:TDH[4,3] })
A6 = A.subs({alpha:TDH[5,0],a:TDH[5,1],d:TDH[5,2],theta:TDH[5,3] })
A7 = A.subs({alpha:TDH[6,0],a:TDH[6,1],d:TDH[6,2],theta:TDH[6,3]})

# Matriz de transf. homogenea de 7 para 0
T = A1*A2*A3*A4*A5*A6*A7
```

```
# Posição Home
Thome = T.subs({ theta1:0, theta2:0,
 ↪  theta3:0, theta4:0, theta5:0,
 ↪  theta6:0, theta7:0 })

# Posição escolhida
q1, q2, q3      = 0, 0, 0
q4, q5, q6, q7 = -pi/2, pi/3, 0, 0

T_ = T.subs({ theta1:q1, theta2:q2,
 ↪  theta3:q3, theta4:q4, theta5:q5,
 ↪  theta6:q6, theta7:q7 })
```

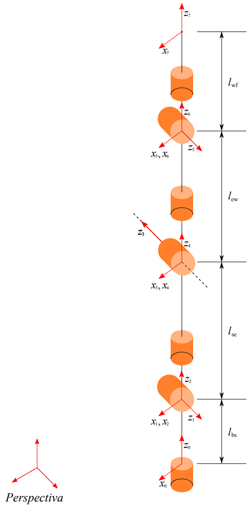
Ao qual retorna

$$\mathtt{T}_{\mathtt{home}} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1270 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

e

$$\mathtt{T\_} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 490 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 780 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Análise Dimensional: *home*

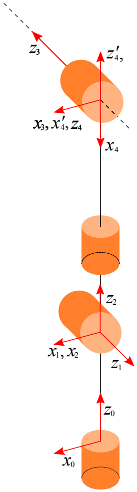


Para a configuração *home* tem-se

$$\mathrm{T}_{\mathtt{home}} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1270 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

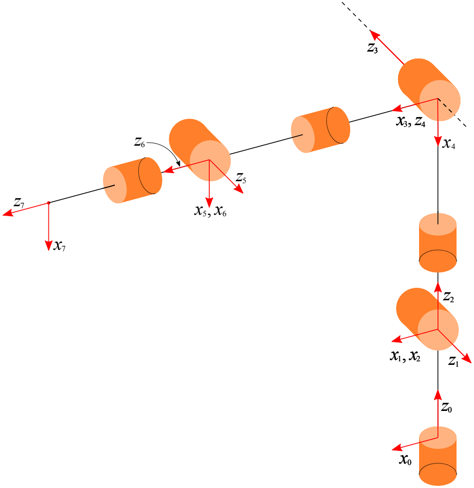
Isto é, uma translação em z_0 de 1270 mm e uma rotação de 0°. Como retorna a simulação no RoboDK.

Aplicando uma rotação em $-90°$ na junta 4, o *frame* 4 se torna



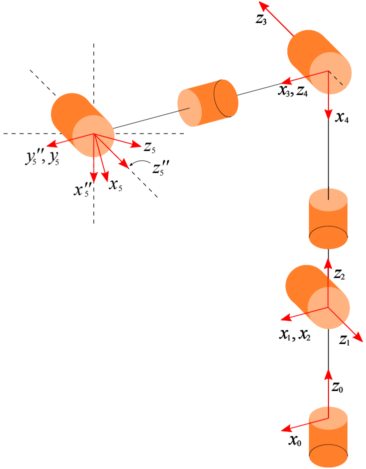
Análise dimensional da posição escolhida

Associando a rotação do frame com o restante do robô temos



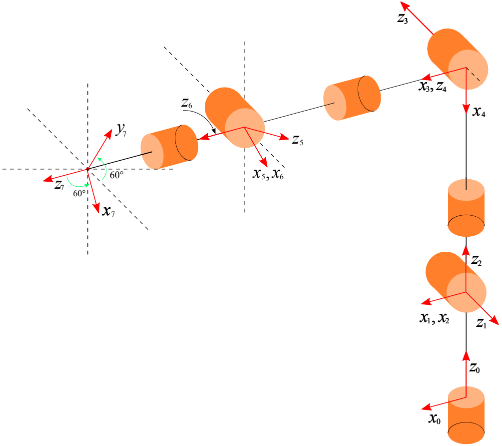
Análise dimensional da posição escolhida

Agora, é feita uma rotação de 60° na junta 5 e o frame 5 se torna



Análise dimensional da posição escolhida

Por fim, a representação final do robô é feita compondo as duas rotações.



A matriz de rotação é então calculada fazendo

$$R_7^0 = \begin{bmatrix} x_7 \cdot x_0 & y_7 \cdot x_0 & z_7 \cdot x_0 \\ x_7 \cdot y_0 & y_7 \cdot y_0 & z_7 \cdot y_0 \\ x_7 \cdot z_0 & y_7 \cdot z_0 & z_7 \cdot z_0 \end{bmatrix}$$

que resulta em

$$\begin{aligned} R_{\_} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos 60^\circ & \operatorname{sen} 60^\circ & 0 \\ -\operatorname{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (3)$$

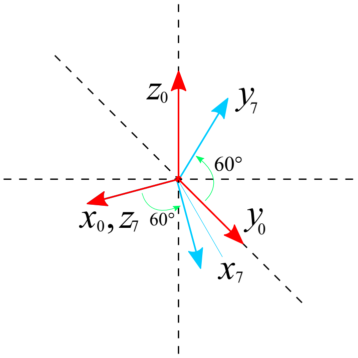


Figura: Diagrama de arames para a configuração escolhida

Análise dimensional da posição escolhida

Para a configuração escolhida ($\theta_4 = -90°$ e $\theta_5 = 60°$), a matriz de transformação calculada é

$$\mathrm{T}_{-} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 490 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 780 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Comparando com a rotação (3) obtida na análise dimensional

$$R_{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifica-se que a orientação coincide com a submatriz de rotação e logo, o modelo de cinemática direta é validado.

Simulação $\mathtt{T}_{\mathtt{home}}$

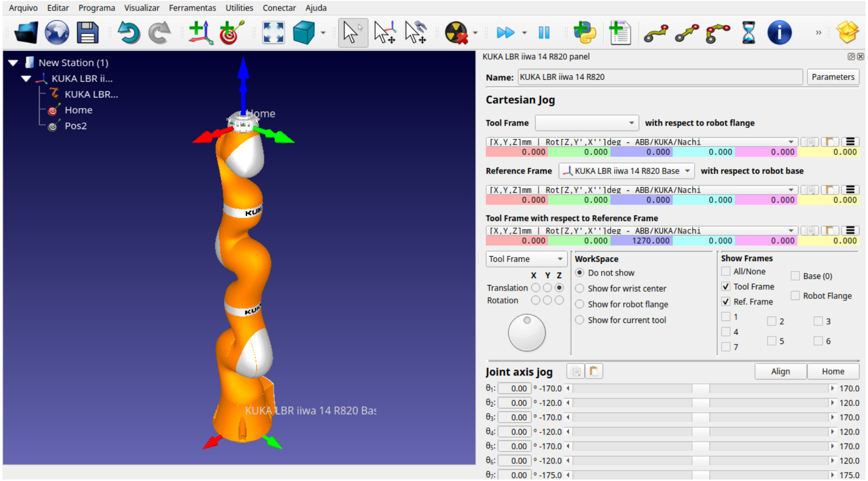


Figura: $\mathtt{T}_{\mathtt{home}}$ resultante do RoboDK

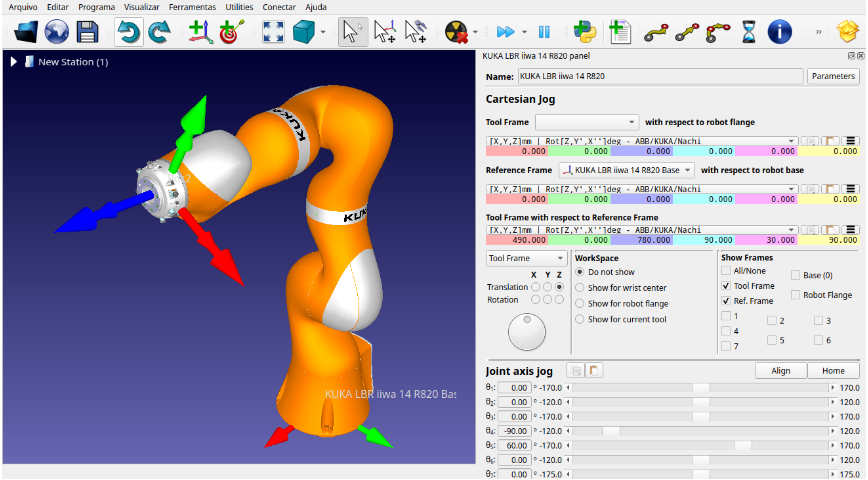


Figura: T_ resultante do RoboDK

Para a configuração escolhida em $\mathtt{T\_}$, são dados

$$R_{-} = \mathrm{Rot}_{z,\,90^\circ}\,\mathrm{Rot}_{y,\,30^\circ}\,\mathrm{Rot}_{x,\,90^\circ}$$

Aplicando os valores

$$R_{-} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja comparação com $\mathtt{T\_}$ valida novamente a modelagem

$$\mathtt{T\_} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 490 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 780 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Agradecimentos