一. 填空题（每空 2 分，共 20 分）

1. 设 A、B 为两个事件，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，且 $P(B|A)=0.8$, 则$P(\overline{A}B)=$ _____。

   解：

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(A)P(B|A)=0.4, \\
P(\underline{A}B) &= P(B)-P(AB)=0.6-0.4=0.2
\end{aligned}
$$

2. 一种零件的加工由独立的 n 道工序完成，每道工序的废品率均为 p，则一个零件经 n 道工序加工后为正品的概率为 _____。

   解：经 n 道工序加工后为正品即在每道工序均为正品，概率为 $(1-p)^n$。

3. 设 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，则 X 的概率密度函数 $f(x)=$ _____； $Y=e^{-2X}$ 的数学期望为 _____。

   解：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= F'(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases} \\
EY &= E(e^{-2X})=\int_0^{\infty} e^{-2x}e^{-x}dx=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

4. 某赛事中，3 男 2 女五名志愿者被随机地安排到 3 个比赛场馆, 则每个场馆都有志愿者且仅有一个场馆恰有一男一女的概率为 _____。

   解： 此为古典概型，5 名志愿者安排到 3 个比赛场馆的方式共有 3^5 种；每个场馆都有志愿者且仅有一个场馆恰有一男一女即一场馆为一男一女，一场馆为 2 男，一场馆为 1 女，这样方式共有 $3!\times C_3^1\times C_2^1=36$ 种，概率为 $\frac{36}{3^5}=\frac{4}{27}$。

5. 设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从参数为 λ_1,λ_2 的泊松分布, 则 $X+Y$ 服从参数为 _____ 的泊松分布。

解：此为 Poisson 分布的性质，$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。证明如下：

$$\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k,Y=n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}
\end{aligned}$$

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 未知，S^2 为样本方差, 给定置信度 $1-\alpha$，则总体均值 μ 的置信区间长度公式为 $L=$ _____，当样本容量一定时, 减小 $1-\alpha$，L 将 _____。(变大, 变小)

   解： 方差未知时，正态总体均值的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，从而区间长度为 $\frac{2S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，当信度 $1-\alpha$ 减小时，精度将增加，即区间长度将变小。

7. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 是其样本，统计量 $U=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-X_{2i-1})^2$，则 $EU=$ _____。

   解：因为 $E(X_{2i}-X_{2i-1})=0$，

$$\begin{aligned}
& E(X_{2i}-X_{2i-1})^2=D(X_{2i}-X_{2i-1}) \\
=\ & D(X_{2i})+D(X_{2i-1})=2\sigma^2 \\
EU =\ & \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}E(X_{2i}-X_{2i-1})^2=\sigma^2
\end{aligned}$$

8. 设某类电视机的使用年数 X 服从指数分布，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}0.1e^{-0.1x}, & x\geq 0\\ 0, & ,x<0\end{cases}$，某人买了一台此类旧电视机，利用指数分布的无记忆性：$P(X>t+s|x>s)=P(X>t)$，此台电视机还能使用 5 年

以上的概率为 _____。

解： 由无记忆性，这和一台新电视机能使用 5 年以上的概率相同，为

$$P(X>5) \quad = \quad \int_5^{\infty} 0.1e^{-0.1x}dx = e^{-0.1\times 5} \approx 0.61$$

二. 选择题（每题 2 分，共 20 分）

1. 若 $P(A)=0.75, P(B)=0.25$，则事件 A, B 之间的关系为 (　　)。
   A) 相互独立　B) 互不相容　C) $A\supset B$　D) 不能确定
   解： A),B),C) 都是可能发生的，答案是D) 不能确定。

2. 甲乙两人独立地对同一目标各射击一次，他们的命中率分别是 0.6 和 0.5，现已知目标被击中，则目标由甲一人击中的概率为 (　　)。
   A) 0.6　B) 0.375　C) 6/11　D) 0.75
   解： A 表示目标被甲击中，B 表示目标被乙击中，C 表示目标被击中，D 表示目标由甲一人击中，则

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A\cup B) = 1-P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1-0.5\times 0.5 = 0.8 \\ P(D) &= P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = 0.6\times 0.5 = 0.3 \\ P(D|C) &= P(D)\overline{P}(C) = 0.375 \end{aligned}$$

3. 设随机变量 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P(|X-\mu_1|<1) > P(|Y-\mu_2|<1)$，则有关系式 (　　)。
   A) $\sigma_1<\sigma_2$　B) $\sigma_1>\sigma_2$　C) $\mu_1<\mu_2$　D) $\mu_1>\mu_2$
   解：

$$\begin{aligned} P(|X-\mu_1|<1) &= P(|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}|<\frac{1}{\sigma_1} = 2\Phi(\frac{1}{\sigma_1})-1 \\ P(|X-\mu_2|<1) &= P(|\frac{X-\mu_2}{\sigma_2}|<\frac{1}{\sigma_2} = 2\Phi(\frac{1}{\sigma_2})-1 \end{aligned}$$

   由 Φ 的单调性，从而 $\sigma_1<\sigma_2$。

4. 设随机变量 X, Y 相互独立，且都服从标准正态分布，则 (　　)。
   A) $P(X+Y>0)=\frac{1}{4}$　B) $P(X-Y>0)=\frac{1}{4}$
   C) $P(\max(X,Y)>0)=\frac{1}{4}$　D) $P(\min(X,Y)>0)=\frac{1}{4}$
   解： 我们有 $X+Y\sim N(0,2)$，$X-Y\sim N(0,2)$，且

有 $P(X>0)=P(Y>0)=\frac{1}{2}$，

$$\begin{aligned} P(X+Y>0) &= \frac{1}{2} \\ P(X-Y>0) &= \frac{1}{2} \\ P(\max(X,Y)>0) &\geq P(X>0)=\frac{1}{2} \\ P(\min(X,Y)>0) &= P(X>0,Y>0)=P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

5. 对任意两个随机变量 X,Y，下列命题等价的是 (　　)。

   (a) $\text{cov}(X,Y)=0$;

   (b) $D(X+Y)=DX+DY$;

   (c) $E(XY)=EX\cdot EY$;

   (d) X,Y 相互独立。

   A)　a,b,c　　B)　b,c,d　　C)　a,c,d　　D)　a,b,c,d

   解： 独立性是强的结论，和分布有关，而前三个仅和分布的特征有关。

$$\begin{aligned} D(X+Y) &= DX+DY+2\text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(X,Y) &= E(XY)-EX\cdot EY \end{aligned}$$

   从而 a,b,c 是等价的。

6. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 相互独立且均服从 0-1 分布，概率函数为 $p(x)=p^x(1-p)^{1-x},x=0,1$，则 $\sum_{i=1}^n X_i$ 服从的分布是 (　　)。

   A)　正态分布 $N(np,np(1-p))$　B)　二项分布 $B(n,p)$

   C)　泊松分布 $P(np)$　D)　不能确定

   解： 独立服从相同 0-1 分布的和服从二项分布，正态分布和泊松分布是其渐近分布。

7. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1$ 取自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，则 $D(\overline{X})=($　　$)$。

   A)　σ^2　　B)　$n\sigma^2$　　C)　$\frac{\sigma^2}{n}$　　D)　$\frac{\sigma^2}{n^2}$

解：

$$D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}D(X_1+X_2+\cdots+X_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

8. 设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自正态总体 $N(0,1)$ 的一个样本，则统计量 $\frac{X_2^2+X_3^2+\cdots+X_n^2}{(n-1)X_1^2}$ 服从 (　　)。
A) $\mathcal{X}^2(n-1)$　B) $\mathcal{X}^2(n)$　C) $F(n-1,1)$　D) $F(1,n-1)$
解： $X_2^2+X_3^2+\cdots+X_n^2 \sim \mathcal{X}^2(n-1)$，从而
$$\frac{X_2^2+X_3^2+\cdots+X_n^2}{(n-1)X_1^2} \sim F(n-1,1)$$

9. 设 X_1, X_2, X_3 是总体 $N(\mu,1)$ 的一个样本，下列 μ 的无偏估计中哪一个最有效 (　　)。
A) $\frac{X_1}{3}+\frac{X_2}{3}+\frac{X_3}{3}$　B) $\frac{X_1}{2}+\frac{X_2}{4}+\frac{X_3}{4}$　C) $\frac{X_1}{2}+\frac{X_2}{6}+\frac{X_3}{3}$　D) $\frac{X_1}{2}+\frac{X_3}{2}$
解： 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且 $E(X_i)=\sigma^2$，
$$D(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n) = (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\sigma^2$$
则方差分别为 $\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{7}{18}, \frac{1}{2}$，从而A) 最有效。

10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的一个样本，若统计量 $Y = C[(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2]$ 服从 $\mathcal{X}^2$-分布，则常数 C 和自由度分别为 (　　)。
A) $\frac{1}{3}$; 2　B) $\frac{1}{9}$; 2　C) $\frac{1}{3}$; 3　D) $\frac{1}{9}$; 3
解： $\mathcal{X}^2$-分布的自由度即其为表示为标准正态分布随机变量平方和中平方的个数，因此为 2；
$$Y = [\sqrt{C}(X_1+X_2+X_3)]^2+[\sqrt{C}(X_4+X_5+X_6)]^2$$
即 $\sqrt{C}(X_1+X_2+X_3) \sim N(0,1)$，
$$D(\sqrt{C}(X_1+X_2+X_3)) = C(DX_1+DX_2+DX_3) = 3C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

三. 解答题 (1-5 每题 8 分，6,7 每题 10 分)

1. 某城市下雨的天数占一年中的 60%, 李进每天出门根据天气预报带伞. 如果预报下雨,他一定带伞, 否则,他不带伞, 天气预报有 3/4 的准确. 设 A={ 天下雨 }, B={ 预报有雨 }, C={ 李进带雨伞 }.

(a) 问: 事件 $\overline{A}\,\overline{B}\,C, \overline{A}\,B\,C$ 的含义是什么? 哪一个是不可能事件?

(b) 求他带伞而没有下雨的概率.

解:

(a) $\overline{A}\,\overline{B}\,C$：天没下雨，预报没有雨，李进带伞；为不可能事件
$\overline{A}\,B\,C$：天没下雨，预报有雨，李进带伞；

(b) $P(\overline{A}\,B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = 0.4 \times 0.25 = 0.1$ 其带伞而没有下雨的概率为 0.1。

2. 设想有这样一种博彩游戏，博彩者将本金一元压注在 1 到 6 的某个数字上，然后掷三次骰子。若所压的数字在三次掷骰子中出现 k 次 (k=1,2,3)，则下注者赢 k 元，否则没收1元本金，试求博彩者的平均所得是多少？这样的游戏规则对下注者是否公平？

解: 设掷出 k 的次数为 X，博彩者的所得为 Y，则

$$Y = \begin{cases} X, & X = 1,2,3 \\ -1, & X = 0 \end{cases}$$

由 $X \sim B(3, \frac{1}{6})$，从而 $EX = \frac{1}{2}$，$P(X=0) = (\frac{5}{6})^3 = \frac{125}{216}$，有

$$EY = EX - P(X=0) = \frac{1}{2} - \frac{125}{216} = \frac{-17}{216} \approx -0.0787$$

该游戏对下注者不公平。

3. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $\frac{A}{1+x^2}$，

(a) 求常数 A；

(b) 求 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数。

解:

(a)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{1+x^2}\,dx = A \arctan x|_{-\infty}^{\infty} = A\pi$$

因此 $A = \frac{1}{\pi}$。

(b)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(1 - \sqrt[3]{X} \le y) \\ &= P(X \ge (1-y)^3) = \int_{(1-y)^3}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \\ f_Y(y) &= F'_Y(y) = -\frac{1}{\pi(1+(1-y)^6)} 3(1-y)^2(-1) \\ &= \frac{3(1-y)^2}{\pi(1+(1-y)^6} \end{aligned}$$

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, & x,y>0 \\ 0, & else \end{cases}$

(a) 求边缘概率密度，并判断 X,Y 是否独立;

(b) 求 (X,Y) 落在 $D = \{(x,y)|x,y>0, 2x+3y<6\}$ 内的概率。

解:

(a)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \\ &= \begin{cases} \int_0^{\infty} 6e^{-(2x+3y)}dy = 2e^{-2x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \\ &= \begin{cases} \int_0^{\infty} 6e^{-(2x+3y)}dx = 3e^{-3y}, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$，因此 X,Y 相互独立。

(b)

$$\begin{aligned} P((X,Y) \in D) &= \iint_D f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^3 [\int_0^{2-\frac{2}{3}x} 6e^{-(2x+3y)}dy]\, dx \\ &= \int_0^3 2e^{-2x}[1-e^{2x-6}]dx \\ &= 1 - e^{-6} - 6e^{-6} = 1 - 7e^{-6} \end{aligned}$$

5. 测定某种溶液中的水分含量情况，取得 9 个样本观测值，算出样本标准差 $s = 0.037\%$。设测定值总体服从正态分布，总体均值未知。试在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，检验假设 $H_0 : \sigma \geq 0.04\%$，$H_1 : \sigma < 0.04\%$。并回答是否可以认为标准差显著的小于 0.04%。($\mathcal{X}^2_{0.95}(8) = 2.733, \mathcal{X}^2_{0.05}(8) = 15.507, \mathcal{X}^2_{0.975}(8) = 2.18, \mathcal{X}^2_{0.025}(8) = 17.535$)

   解：

   (a) $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 = 0.04\%^2$，$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

   (b) $\mathcal{X}_2^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}(n-1)S^2 \sim \mathcal{X}^2(n-1)$，
   其观测值为
   $$\frac{1}{0.04^2} \times 8 \times 0.037^2 = 6.845$$

   (c) 拒绝域为 $(0, \mathcal{X}^2_{0.95}(8) = 2.733)$

   (d) 观测值不在拒绝域内，接受原假设，标准差没有显著的小于 0.04%。

6. 设两个随机变量 X, Y 相互独立且均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$，$U = aX + bY$，$V = aX - bY$，a,b 是常数。

   (a) 求 U, V 的相关系数；

   (b) 问 U, V 是否相关，是否独立。

   解：

   (a) 解法一：根据协方差的双线性性质，

   $$\begin{aligned} \mathrm{cov}(U, V) &= \mathrm{cov}(aX + bY, aX - bY) \\ &= \mathrm{cov}(aX, aX) - \mathrm{cov}(bY, bY) \\ &= a^2DX - b^2DY = (a^2 - b^2)\sigma^2 \end{aligned}$$

   解法二：根据和的方差的计算，

   $$\begin{aligned} DU &= DV = (a^2 + b^2)\sigma^2 \\ 4a^2\sigma^2 &= D(2aX) = D(U + V) \\ &= DU + DV + 2\mathrm{cov}(U, V) \end{aligned}$$
   $$\Rightarrow \mathrm{cov}(U, V) = (a^2 - b^2)\sigma^2$$

(b) 当 $|a|=|b|$，即 $a=\pm b$ 时，U,V 不相关，并且独立；
当 $|a|\neq|b|$，即 $a\neq\pm b$ 时，U,V 相关，并且不独立。

7. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$，$\theta>1$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为简单样本，求 θ 的矩估计量和极大似然估计量。

解：

(a) 矩估计：

$$
\begin{aligned}
\nu_1 &= EX=\int_0^1 \theta x^{\theta-1}x dx=\frac{\theta}{\theta+1}\\
&\Rightarrow \theta=\frac{1}{1-\nu_1}-1=\frac{\nu_1}{1-\nu_1}\\
&\Rightarrow \hat{\theta}=\frac{V_1}{1-V_1}=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}
\end{aligned}
$$

(b) 极大似然估计：对 $0<x_i<1$，

$$
\begin{aligned}
L(\theta) &= \Pi_{i=1}^n f(x_i)\\
&= \Pi_{i=1}^n \theta x_i^{\theta}=\theta^n(\Pi_{i=1}^n x_i)^{\theta}\\
\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} &= \frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^n \ln x_i=0\\
&\Rightarrow \hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}
\end{aligned}
$$