# 08/09(一)浙江工业大学高等数学 A 考试试卷 A

**学院：________ 班级：_______ 姓名:_________ 学号:_________**

**任课教师:_________**

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | | | |

一、填空选择题（每小题 3 分）：

1．$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{b}{x+c})^{ax}=$__________（其中 $a,b,c$ 为常数）。

2．已知当 $x\to 0$ 时，$e^{ax}-1$ 与 $1-\sqrt{1-2x}$ 是等价无穷小，则常数 $a=$_______。

3．设 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$，则 $y'=$_________________________。

4．设 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$_____________________。

5．方程 $e^y+xy-e=0$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$__________________。

6．函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ $(x\geq 0)$ 的最大值是 ____________。

7．设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，$F(0)=1, F(x)>0$，$f(x)\cdot F(x)=x$，则当 $x\geq 0$ 时

$f(x)=$___________________。

8．设函数 $f(x_0)=0$，则 $f'(x_0)=0$ 是 $|f(x)|$ 在 $x_0$ 处可导的（　　　）

（A）充分非必要条件；　　　　（B）充分必要条件；

（C）必要非充分条件；　　　　（D）非充分非必要条件；

9．设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　　）

（A）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在；　　（B）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续；

（C）$f'(0)$ 存在；　　（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导；

10．微分方程 $y''+y'=xe^x$ 的一个特解的形式为（　　）

（A）$y^*=axe^x$；　　　　（B）$y^*=ae^x$；

（C） $y^* = x(ax+b)e^x$；　　　　　　（D） $y^* = (ax+b)e^x$；

**二、试解下列各题（每小题 5 分）：**

1．设 $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$，求 $f(x)$ 的间断点并指出类型。

2． $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\cos\sqrt{x} - \cos x)\sin x}{1-\cos x}$

3．求：$\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x}} dx$。

4．求：$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$。

三、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．已知曲线 $y = xf(x)$ 有水平渐近线 $y = A$，试求 $a$ 使函数 $\varphi(x)=\begin{cases} f(\frac{1}{x}),\ x\neq 0 \\ a,\quad x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，进而讨论函数 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性。

2．设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$（$x\geq 1$），证明：$f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{2}\ln^2 x$。

四、试解下列各题（每小题 5 分）：

1．求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1$ 的通解。

2．若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续， $f(x)<0$，证明：$F(x)=\int_a^b |x-t|\, f(t)dt$ 是 $(a,b)$ 上的凸函数。

3．设 $f(x)$， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

五、（9 分）计算由摆线 $x=t-\sin t, y=1-\cos t$ 相应于 $0\le t\le 2\pi$ 的一拱，直线 $y=0$ 所围成的平面图形分别绕 $x$ 轴，$y$ 轴旋转而成的旋转体的体积。

六、（**5** 分）设 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，求：$F'(x)$，并讨论 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

七、（9 分）设函数 $f(x)$（$x \geq 0$）二阶可导，$f'(x) > 0$，$f(0) = 1$，记曲线 $y = f(x)$ 上任一点 $P(x, y)$ 的切线及该点到 $x$ 轴的垂线和 $x$ 轴所围成三角形面积为 $S_1$，区间 $[0, x]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边是梯形面积为 $S_2$，且 $2S_1 = S_2 + 1$，求此曲线 $y = f(x)$ 的方程。