2015/16 浙江工业大学高等数学 A(上)期中考试试卷

学院：________ 班级：________ 姓名：________ 学号：________

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

一、试解下列各题（每小题 3 分）：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^x=$ e^{-2}。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=$ 2。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$ $-\dfrac{1}{2}$。

4. 设 $y=\sin\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ $-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5. 设 $y=x\ln(1+x)$，则 $dy=$ $\left(\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}\right)$ dx。

6. 设 $x+y=e^{xy}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ $\dfrac{1-ye^{xy}}{xe^{xy}-1}$ $\left(或\ \dfrac{1-y(x+y)}{x(x+y)-1}\right)$

7. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$，则 $f'(0)=$ $(-1)^n\cdot n!\cdot\left[-1-\dfrac{1}{2}-\cdots-\dfrac{1}{n}\right]$。

8. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=$ ak。

9. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，则方程 $f'(x)=0$ 有 3 个实根。

10. 曲线 $y=xe^{-x^2}$ 在区间 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 是单调增加的。

11. 常数 a 满足条件 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，方程 $\ln x=ax$ 有两个实根。

二、试解下列各题（每小题 7 分）：

1. 用导数的定义证明指数函数 $y=a^x$ 的导数是 $y'=a^x\ln a$。

$$\because \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot(a^h-1)}{h}$$

$$=a^x\cdot\ln a$$

$$\therefore y'=a^x\ln a$$

2. 求函数 $y=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{e-e^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点及间断点的类型。

$x=0$，$x=1$ 是间断点。

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{e-e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{e\cdot e^{-\frac{1}{x}}-1}=-1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{e-e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{e}$

$x=0$ 是跳跃间断点。

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{e-e^{\frac{1}{x}}}=\infty$ $\quad x=1$ 是第二类间断点。
(无穷)

3. 设 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{t}$ $\quad -2$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\dfrac{1+t^2}{t^3}$ $\quad -2$

4. 证明不等式：$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$，（$x>0$）。

令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$

$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$

$\therefore f(x)\uparrow$ $\quad\therefore f(x)>\underset{0}{f(0)}$ 当 $x>0$. 即当 $x>0$ 时
$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$

5. 确定常数 k，使曲线 $y=k(x^2-3)^2$ 在其拐点处的法线通过原点。

$y'=2k(x^2-3)\cdot 2x$

$y''=12k(x^2-1)$

令 $y''=0$ $\quad x=\pm 1$

而当 $k=0$ 时无拐点

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
y'' $k>0$	$+$	$-$	$+$
$k<0$	$-$	$+$	$-$

2

$\therefore(-1,4k)$ 和 $(1,4k)$ 都为拐点。

在 $(-1,4k)$ 处. $\quad y'=8k$

法线：$y-4k=-\dfrac{1}{8k}(x+1)$

又法线过原点 $\therefore k^2=\dfrac{1}{32}$ $\quad k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

在 $(1,4k)$ 处 $\quad y'=-8k$

法线：$y-4k=\dfrac{1}{8k}(x-1)$

又法线过原点 $\therefore k^2=\dfrac{1}{32}$ $\quad k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

$\therefore k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

三、下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？对的请说明理由；错的试给出反例（每小题3分）：

1．如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在。

对　用反证法，设 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在。

则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))-\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，得出矛盾。

2．如果数列 $\{x_n\}$ 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

错．　反例：$\{(-1)^n\}$ 有界但极限不存在

3．两个无穷小的商是无穷小。

错　反例：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty$

4．如果极限 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{h}$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导。

错　反例：$f(x)=|x|$　$x_0=0$　则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-h)-f(h)}{h}=0$

但 $|x|$ 在0处不可导.

四、（8分）设 $f(x)$ 是周期为5的连续函数，它在 $x=0$ 的某个领域内满足关系式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程。

令 $x\to 0$　则　$f(1)-3f(1)=0$　　$f(1)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{8x}{x}+\frac{o(x)}{x}\right)=8$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)+3f(1)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=8$$

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导．　$\therefore f'(1)+3f'(1)=8$　$f'(1)=2$

又 $f(x)$ 是周期为5的函数　$\therefore f(6)=f(1)$　$f'(6)=f'(1)$

$\therefore$ 切线方程：　$y=2(x-1)$

五、（8 分）设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，证明：$f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件。

证明："$\Rightarrow$" $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)\cdot(1+\sin x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(x)\cdot\sin x}{x}$

$=f'(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)\cdot(1-\sin x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(x)\sin x}{x}$

$=f'(0)$

$\therefore$ $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

"$\Leftarrow$" $\because$ $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=f'(0)+f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=f'(0)-f(0)$

$\therefore$ $f(0)=0$.

六、（4 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le0\end{cases}$，在 $x=0$ 处的连续性。

解：$\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}}$.

又 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{1}{2}$

$\therefore\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续