07/08(一)高等数学 A 标准答案

一、1． 1； 2. 6.； 3. $\dfrac{ye^{xy}-2}{1-xe^{xy}}$； 4. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-4)-\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-2}{x+2}+c$

5. $x^2-\dfrac{2}{3}x^3+c$； 6. $y=c_1+c_2x+c_3e^x\cos 2x+c_4e^x\sin 2x$

二、1. B； 2. B; 3. C; 4. B;

三、1、 $=n\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|\,dx$ (2 分)

$$=n\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\sin x+\cos x)dx-n\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(\sin x+\cos x)dx \qquad (4\text{ 分})$$

$$=2\sqrt{2}n \qquad (6\text{ 分})$$

2、 $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{1+\sec^2 x}dx$ (2 分)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{2+\tan^2 x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad (4\text{ 分})$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \qquad （6\text{ 分}）$$

3、 $=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}\sin x}{2x}$ （4 分）

$$=\frac{1}{2e} \qquad （6\text{ 分}）$$

四 4、 证明：$f(x)=e^{x^2-x}$，$f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$

令 $f'(x)=0,\ x=\dfrac{1}{2}$，$f'(\dfrac{1}{2})>0$

$f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处取得最小值，$f(x)$ 在 $x=2$ 处取得最大值.

$$e^{-\frac{1}{4}}\le f(x)\le e^2 \qquad （4\text{ 分}）$$

$$2e^{-\frac{1}{4}}\le\int_0^2 f(x)\le 2e^2 \qquad （6\text{ 分}）$$

~~四~~五、1、另 $y'=p, y''=p'$

$$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$y'=p=c(1+x^2), y'|_{x=0}=3, c=3$$

$y'=3(1+x^2)$,　（4 分）

$$y=3x+x^3+c$$

$y|_{x=0}=1$，$c=1$

$y=3x+x^3+1$　（6 分）

2、设弧 $\overset{\frown}{OP}$ 的方程为 $y=f(x), x\in(0,1]$

有 $x^2=\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{2}xf(x)$，且 $y|_{x=1}=1$，

$y'-\frac{1}{x}y=-4$（一阶线性）（3 分）

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int -4e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+c\right]$$

$y=-4x\ln x+cx$（5 分）

$$y|_{x=1}=1$$

$y=-4x\ln x+x$（6 分）

~~3~~四 2、$f(x)$ 在上 $[1,2]$ 连续，$(1,2)$ 内可导，且 $f(1)f(2)<0$

由零点定理，至少存在 $\xi_1\in(1,2)$.，使 $f(\xi_1)=0$（3 分）

$f(x)$ 在上 $[0,\xi_1]$ 连续，$(0,\xi_1)$ 内可导，且 $f(0)=f(\xi_1)=0$

由罗尔定理：至少存在 $\xi\in(0,\xi_1)\subset[0,2]$，使. $f'(\xi)=0$（6 分）

六、~~五~~、1、（1）$F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+x, 0\le x<1\\ x^2+\frac{1}{3}, 1\le x\le 2\end{cases}$　（4 分）

（2） $f(x)=\begin{cases}x^2+1, 0\le x<1\\ 2x, 1\le x<2\end{cases}$ 在 $(0,2)$ 连续，所以 $F(x)$ 可导.（8 分）

2、 绕 x 轴

$$V_x=\int_0^{\pi}\pi\sin^2 x dx$$

$$=\int_0^{\pi}\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{2}$$ （4 分）

绕 y 轴

$$V_y=\int_0^{\pi}2\pi x\sin x dx$$

$$=2\pi(-x\cos x+\sin x)\big|_0^{\pi}=2\pi^2$$ （8 分）

~~六~~七、抛物线 $y=-p\left(x-\frac{q}{2p}\right)^2+\frac{q^2}{4p}$ 与 x 轴的交点为 $x_1=0, x_2=\frac{q}{p}$，（1 分）

抛物线与 x 轴的所围平面图形的面积为

$$S=\int_0^{\frac{q}{p}}\left(-px^2+qx\right)dx$$

$$=\frac{q^3}{6p^2}$$ （5 分）

在切点 (x_0, y_0) 处

$$\begin{cases}x_0+y_0=5\\ y_0=-px_0^2+qx_0\\ -2px_0+q=-1\end{cases}$$ 得 $p=\frac{1}{20}(1+q)^2$ （7 分）

$$S=\frac{200q^3}{3(q+1)^4}$$

在 $q=3$ 时取唯一的极大值，也为最大值. $q=3, p=\frac{4}{5}$ （8 分）

~~七~~八、 $0\le f'(x)\le p|f(x)|=p|f(x)-f(0)|$

$$=p|f'(\xi_1)x|\le p|f'(\xi_1)|\le p^2|f(\xi_1)|$$

$$\le p^3|f(\xi_2)|\le\cdots p^n|f(\xi_{n-1})|$$

其中，$\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_{n-1}\in(0,1)$

$\lim\limits_{n\to\infty}p^n\left|f(\xi_{n-1})\right|=0$

$f'(x)=0,f(x)=c$（常数）

又 $f(0)=0$，$f(x)\equiv 0$（4 分）