03/04 高等数学标准答案

一. 1. e^{bc}; 2. $\frac{1}{2}$; 3. $\frac{y^2-e^{xy}y}{e^{xy}x-2xy}$; 4.跳跃间断点;

5. $[2,+\infty)$

6. $\frac{1}{4}\arctan(x^4+1)+C$; 7. $\frac{\pi}{2}$; 8. $e+\frac{1}{2}$; 9. $2e$; 10. -3 or -4

二. 1.C 2.D 3.D 4.C

三. 1. $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t^2}{2t\cos t-t^2\sin t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2t^2\sin t^2(2\cos t-t\sin t)-\cos t^2(2\cos t-t^2\cos t-4\sin t)}{(2t\cos t-t^2\sin t)^3}.$$

2. 解: $y'|_{x=0}=e^x+1|_{x=0}=2, y(0)=1,$

所以切线方程为 $y=2x+1$.

3. 解: $\int x^3\sqrt{x^2-3}dx=\frac{1}{2}\int(x^2-3+3)\sqrt{x^2-3}d(x^2-3)$

$$=\frac{1}{2}\int(x^2-3)^{3/2}d(x^2-3)+\frac{1}{2}\int 3\sqrt{x^2-3}d(x^2-3)$$

$$=\frac{1}{5}(x^2-3)^{5/2}+(x^2-3)^{3/2}+C$$

4. 解: 令 $y''=p$, 则$y'''=p'$, 于是

$p'-p=x$, 一阶线性方程, 得通解为$p=C_1e^x-x-1$. 从而得 $y''=C_1e^x-x-1$.

解得 $y=C_1e^x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+C_2x+C_3$.

四. 1. 解: 交点为 (±1, 1),

$$V_x=\int_{-1}^{1}\pi[(2-x^2)^2-x^4]dx=2\int_0^1\pi[(2-x^2)^2-x^4]dx=\frac{16}{3}\pi$$

2. 解: $y'+\frac{2x}{x^2+1}y=-\frac{4x^3}{x^2+1}$ ----------一阶线性方程

$p(x)=\frac{2x}{x^2+1}, Q(x)=-\frac{4x^3}{x^2+1}$, 得通解为

$$y=e^{-\int\frac{2x}{x^2+1}dx}[\int-\frac{4x^3}{x^2+1}e^{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}dx+C]=\frac{1}{1+x^2}(C-x^4)$$

五．解：$S_1(t)=\int_0^t \sqrt[3]{y}dy$，$S_2(t)=\int_t^1 1-\sqrt[3]{y}dy$，

记 $F(t)=S_1(t)+S_2(t)$，令 $F'(t)=\sqrt[3]{t}-(1-\sqrt[3]{t})=2\sqrt[3]{t}-1=0$，得 $t=\frac{1}{8}$，显见当

$t=\frac{1}{8}$，时为最小，最小值为 $\frac{7}{32}$.

六、解：由积分方程得 $f(0)=1$，对积分方程两边求导得

$f'=e^x-\int_0^x f(t)dt$，且 $f'(0)=1$，再次两边求导得 $f''=e^x-f$，即求解以下微分

方程(令 $y=f(x)$) $\begin{cases} y''+y=e^x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$，二阶常系数非齐 $c\in(0,\frac{1}{2})$，次方程，特征方程为

$r^2+1=0$,

得 $r=\pm i$，所以对应齐次方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$．设特解为 $y^*=ae^x$，

代入微分方程得 $2ae^x=e^x$，解得 $a=\frac{1}{2}$．故特解为 $y^*=\frac{1}{2}e^x$.

于是微分方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$，代入初始条件，得 $C_1=\frac{1}{2}$，$C_2=\frac{1}{2}$．

积分方程的解为 $y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x+e^x)$

七、证：(1)

令 $F'(x)=xf(x)$，则 $\int_0^{1/2} xf(x)dx=F(\frac{1}{2})-F(0)$，由拉格朗日中值得存在 $c\in(0,\frac{1}{2})$，使得

$F(\frac{1}{2})-F(0)=\frac{1}{2}F'(c)=\frac{1}{2}cf(c)$，于是得到 $f(1)=cf(c)$，证毕.

(2) 由（1）知 $F(1)=F(c)$，由罗尔定理得存 $\xi\in(c,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $\xi f(\xi)=0$．