一. 填空题（每空 2 分）

1. 设 $A, B$ 为两个随机事件，$P(A) = 0.9$，$P(AB) = 0.36$，则 $P(A\overline{B}) =$___。

**解：**

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0.9 - 0.36 = 0.54$$

2. 将 3 个球随机投入 4 个盒子中（每个盒子容球个数无限），则任意 3 个盒子各有一个球的概率为___，任意一个盒子中有 3 个球的概率为___。

**解：** 三个球放入 4 个盒子的方式共有 $4^3$ 种，其中任意 3 个盒子中各有一个球的方式有 $C_4^3 3!$，概率为 $\frac{C_4^3 3!}{4^3} = \frac{3}{8}$；任意一个盒子中有 3 个球的方式有 $C_4^1$ 种，概率为 $\frac{1}{16}$。

3. 设随机变量 $X \sim U(1, 6)$，则方程 $t^2 + Xt + 1 = 0$ 有实根的概率为 ___。

**解：** 方程有实根，则 $X^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow X \geq 2$ 或 $X \leq -2$，概率为

$$\int_2^6 \frac{1}{5}\, dx = \frac{4}{5}$$

4. 设连续型随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$，则常数 $k =$ ___，$P(1 < X \leq 2) =$ ___，$P(X = 2) =$ ___，$P(X \leq 2) =$ ___。

**解：**由密度函数规范性，

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \\
&= \int_0^{\infty} ke^{-\frac{x}{2}}\, dx = 2k \\
&\Rightarrow\ k = \frac{1}{2} \\
P(1 < X \leq 2) &= \int_1^2 ke^{-\frac{x}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{2}[2e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{-1}] = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} \\
P(X = 2) &= 0 \\
P(X \leq 2) &= \int_0^2 ke^{-\frac{x}{2}}\, dx = 1 - e^{-x}
\end{aligned}$$

或者直接看出这是个指数分布，其密度函数为 $\lambda e^{-\lambda x}$，$x > 0$，其分布函数为 $1 - e^{-\lambda x}$，此处 $\lambda = \frac{1}{2}$。

5. 已知随机变量 $X$ 服从正态分布，且概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-1)^2}$，则 $EX =$ ___，$EX^2 =$ ___。

**解：** 正态分布的概率密度为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中参数 $\mu, \sigma^2$ 分别为期望和方差。则

$$\mu = 1, \sigma^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

因此，$EX = 1$，$EX^2 = (EX)^2 + DX = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$。

6. 设随机变量 $X$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$，由切比雪夫不等式估计 $P(|X| < 2) \geq$ ___。

**解：** 切比雪夫不等式

$$P(|X - EX| < \epsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\epsilon^2}$$

代入得，$P(|X| < 2) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 0.75$。

7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单样本，样本均值为 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，样本方差为 $S^2$，如果再抽取一个样本 $X_{n+1}$，则统计量 $V = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{X_{n+1} - \overline{X}}{S}$ 服从的分布是 ___。( 写明参数 )

**解：** $\overline{X}$，$X_{n+1}$ 和 $S$ 均相互独立，因此 $X_{n+1} - \overline{X}$ 和 $S$ 独立。$X_{n+1} - \overline{X}$ 服从正态分布，参数为

$$E(X_{n+1} - \overline{X}) = 0 \quad D(X_{n+1} - \overline{X}) = \frac{n+1}{n}\sigma^2$$

因此 $U = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{X_{n+1} - \overline{X}}{\sigma} \sim N(0,1)$，而 $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2(n-1)$，且相互独立，从而

$$\begin{aligned}
\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}} &= \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{[X_{n+1} - \overline{X}]/\sigma}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2/\sigma^2}{n-1}}} \\
&= \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{X_{n+1} - \overline{X}}{S} \sim t(n-1)
\end{aligned}$$

8. 若随机变量 $X$ 服从参数为 2 的指数分布，随机变量 $Y=8X$，则 $Y$ 的概率密度函数为 ___。

**解：** $X$ 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, x\leq 0\end{cases}$，则 $Y$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 为：

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y\leq y)=P(X\leq \frac{y}{8})\\ &= F_X(\frac{y}{8})\end{aligned}$$

从而 $Y$ 的密度函数为：

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= F'_Y(y)=\frac{1}{8}F'_X(\frac{y}{8})\\ &= \begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}y}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}\end{aligned}$$

9. 设某种保险丝熔化事件 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ( 单位：秒 )，取 $n=16$ 的样本，得到样本均值和样本方差分别为 $\overline{x}=15$，$s^2=0.36$，则均值 $\mu$ 的置信水平为 95% 的置信区间为 ___。( 相应分布数值表于最后 )

**解：** 方差未知，正态总体均值的置信水平为 $\alpha$ 的置信区间为:

$$(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$$

代入数据，$t_{0.025}(15)=2.13$，得到置信区间为 $(14.68,15.32)$。

二. 单选题 ( 每小题 2 分 )

1. 设 $X$ 与 $Y$ 为两个随机变量，则 (　) 是正确的。
   A) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$　B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$
   C) $E(XY)=E(X)E(Y)$　D) $D(XY)=D(X)D(Y)$
   **解**：只有 A) 是不需要任何条件都是正确的，B) 和 C) 需要 $X$ 和 $Y$ 独立的条件，D) 一般都不正确。

2. 设随机变量 $(X,Y)$ 的方差 $DX=4$, $DY=1$，相关系数 $R(X,Y)=0.6$，则方差 $D(3X-2Y)=$　。
   A)　40　B)　34　C)　25.6　D)　17.6
   **解**：

$$\begin{aligned} D(3X-2Y) &= D(3X)+D(2Y)-2Cov(3X,2Y) \\ &= 9DX+4DY-2\times 3\times 2R(X,Y)\sqrt{DXDY} \\ &= 36+4-12\times 0.6\times 2=25.6 \end{aligned}$$

3. 设随机变量 $(X,Y)$ 的联合概率分布如下表，则 (　)。

| X\Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| -1 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{7}{20}$ |
| 2 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

   A)　$X$ 与 $Y$ 不独立　B)　$X$ 与 $Y$ 独立
   C)　$E(XY)=\frac{21}{40}$　D)　$X$ 与 $Y$ 不相关

**解**：

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \frac{1}{10}\times(-1)\times 0+\frac{1}{20}\times(-1)\times 1+\frac{7}{20}\times(-1)\times 2+\\
&\quad \frac{3}{10}\times 2\times 0+\frac{1}{10}\times 2\times 1+\frac{1}{10}\times 2\times 2\\
&= \frac{1}{20}[0-1-14+0+4+8]=-\frac{3}{20}\\
EX &= \frac{1}{10}\times(-1)+\frac{1}{20}\times(-1)+\frac{7}{20}\times(-1)+\frac{3}{10}\times 2+\\
&\quad \frac{1}{10}\times 2+\frac{1}{10}\times 2\\
&= \frac{1}{20}[-2-1-7+12+4+4]=\frac{1}{2}\\
EY = &= \frac{1}{10}\times 0+\frac{1}{20}\times 1+\frac{7}{20}\times 2+\frac{3}{10}\times 0+\frac{1}{10}\times 1+\frac{1}{10}\times 2\\
&= \frac{1}{20}[0+1+14+2+4]=\frac{21}{20}\\
\mathrm{cov}\,(X,Y) &= E(XY)-EX\cdot EY\\
&= -\frac{3}{20}-\frac{1}{2}\times\frac{21}{20}=-\frac{47}{40}
\end{aligned}$$

这说明 B), C), D) 都不正确。

4. 设总体 $X\sim N(0,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_6$ 为样本，$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$，$cY$ 服从 $\mathcal{X}^2(2)$ 分布，则常数 $c=(\quad)$。

   A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 3 D) 2

   **解**：令 $Y_1=\sqrt{c}(X_1+X_2+X_3)$，$Y_2=\sqrt{c}(X_4+X_5+X_6)$，则 $Y_1$，$Y_2$ 独立同分布，$cY=Y_1^2+Y_2^2\sim\mathcal{X}^2(2)$，说明 $Y_1\sim N(0,1)$，则

   $$D(Y_1)=cD(X_1+X_2+X_3)=c[DX_1+DX_2+DX_3]=3c=1\Rightarrow c=\frac{1}{3}$$

5. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，且 $X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，则 $(\quad)$。

   A) $P(X+Y\le 0)=0.5$ B) $P(X+Y\le 1)=0.5$

   C) $P(X+Y\le -1)=0.5$ D) 以上都不对

   **解**： 由独立性，$X+Y$ 也服从正态分布，

   $$\begin{aligned}
   & E(X+Y)=EX+EY=-1\\
   \Rightarrow\ & P(X+Y\le -1)=0.5
   \end{aligned}$$

三. 解答题

1. ( 6 分 ) 口袋中有 8 个球，其中新球 3 个，旧球 5 个，第一次比赛任取 2 球，比赛后放回，第二次比赛，任取 3 球，求事件 $A=$ ”第二次取出的 3 个球中恰好有 2 个是新球” 的概率。

**解：** 记 $A_i$ 为第一次取到的新球个数为 $i$，$i=0,1,2$，则

$$\begin{aligned}
P(A_0) &= \frac{C_5^2C_3^0}{C_8^2}=\frac{10}{28}\\
P(A_1) &= \frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}\\
P(A_2) &= \frac{C_5^0C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}\\
P(A|A_0) &= \frac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}\\
P(A|A_1) &= \frac{C_6^1C_2^2}{C_8^3}=\frac{6}{56}\\
P(A|A_2) &= 0
\end{aligned}$$

从而，

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_0)P(A|A_0)+P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)\\
&= \frac{10}{28}\times\frac{15}{56}+\frac{15}{28}\times\frac{6}{56}+\frac{3}{28}\times 0\\
&= \frac{10\times 15+15\times 6}{28\times 56}=\frac{15}{98}
\end{aligned}$$

2. ( 6 分 ) 加工某一零件共需三道工序，设第一、第二、第三道工序的次品率分别是 2%、3%、5%，假定各道工序互不影响，问加工出来的零件的次品率是多少？

**解：** 用 $A_i$ 表示第 $i$ 道工序产生的是次品，$A$ 表示生产出来的零件是次品，则

$$\begin{aligned}
P(A) &= 1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})\\
&= 1-0.98\times 0.97\times 0.95\approx 0.097
\end{aligned}$$

3.（9 分）设随机变量 $X$ 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$。

试求：

(a) $X$ 的分布函数 $F_X(x)$；

(b) $P(0 \le X \le \frac{1}{2})$；

(c) $Y = X^2$ 的概率密度函数。

**解：**

(a)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) $P(0 \le X \le \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) - F_X(0) = \frac{1}{4}$;

(c) $Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(X^2 \le y) \\ &= \begin{cases} P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}), & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \le y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

因而其密度函数为 $f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$。

4.（9 分）设二维随机变量 $(X, Y)$ 的密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(a) 求 $X, Y$ 的边缘密度函数；

(b) 判断 $X, Y$ 是否相互独立；

(c) 求 $P(X+Y \ge 1)$。

**解：**

(a)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \\ = & \begin{cases} \int_x^1 8xy\,dy, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 4x(1-x^2), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \\ = & \begin{cases} \int_0^y 8xy\,dx, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 4y^3, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

(b) $f(x,y) \ne f_X(x) f_Y(y)$，因此 $X, Y$ 不独立；

(c)

$$\begin{aligned} P(X+Y \ge 1) &= \int_{x+y\ge 1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\int_{1-y}^{y} 8xy\,dx)\,dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} 4y[y^2 - (1-y)^2]\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 8y^2 - 4y\,dy \\ &= [\frac{8}{3}y^3 - 2y^2]|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

5. ( 10 分 ) 一批零件中有 9 个合格品与 3 个废品，安装机器时从这批零件中任取一个，如果每次取出的废品不再放回去，求在取得合格品以前已取出的废品数的概率分布。

**解：** 记 $X$ 为取得合格品前取出的废品数，

$$\begin{aligned}P(X=0) &= \frac{9}{12}=\frac{3}{4}\\ P(X=1) &= \frac{3}{12}\times\frac{9}{11}=\frac{9}{44}\\ P(X=2) &= \frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{220}\\ P(X=3) &= \frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{9}=\frac{1}{220}\end{aligned}$$

6. ( 10 分 ) 设随机变量 $X$ 的分布率为

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| P | $\theta^2$ | $2\theta(1-\theta)$ | $(1-\theta)^2$ |

如果取三个样本 $X_1, X_2, X_3$，

(a) 求参数 $\theta$ 的矩估计量；

(b) 若样本观测值为 $1,2,1$，求参数 $\theta$ 的矩估计值和最大似然估计值。

**解：**

(a)

$$\begin{aligned}\nu_1 &= EX = 1\times\theta^2 + 2\times 2\theta(1-\theta) + 3\times(1-\theta)^2\\ &= \theta^2+4\theta-4\theta^2+3\theta^2-6\theta+3 = 3-2\theta\\ &\Rightarrow\ \theta = \frac{1}{2}(3-\nu_1)\end{aligned}$$

其矩估计为 $\hat\theta = \frac{1}{2}(3-V_1) = \frac{1}{2}(3-\overline{X})$。

(b) 由 $\overline{x} = \frac{1}{3}(1+2+1) = \frac{4}{3}$，矩估计值为

$$\hat\theta = \frac{1}{2}(3-\overline{x}) = \frac{4}{3}$$

其似然函数为 $L(\theta;1,2,1) = \theta^2\times 2\theta(1-\theta)\times\theta^2 = 2\theta^5 - 2\theta^6$，

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = 10\theta^4 - 12\theta^5 = 12\theta^4(\frac{5}{6}-\theta)$$

其解为最大似然估计值 $\hat\theta = \frac{5}{6}$。

7. ( 10 分 )

(a) 根据长期经验，某工厂生产的特种金属丝的折断力 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (单位：kg)。已知 $\sigma = 8$ kg，现从该厂生产的一大批特种金属丝中随机抽取 16 个样本，测得样本均值 $\overline{x} = 575.2$ kg。问这批特种金属丝的平均折断力可否认为 570 kg? ( $\alpha = 0.05$ )

(b) 已知维尼纶的纤度在正常条件下服从正态分布 $N(\mu, 0.048^2)$。某日抽取 5 个样品，测得其纤度。若计算得 $\overline{x} = 1.414$，$s^2 = 0.0078$，问这天的纤度的方差是否正常? ( 取 $\alpha = 0.10$ )

**解：**

(a) $H_0$：$\mu = \mu_0 = 570$，$H_1$：$\mu \neq \mu_0$

$$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = \frac{575.2 - 570}{8/4} = 2.6$$

其拒绝域为 $(-\infty, -u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup u_{\frac{\alpha}{2}}, \infty)$，

$$\alpha = 0.05 \ \Rightarrow \ u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

从而 $u$ 的观测值在拒绝域中，拒绝原假设，不能认为这批特种金属丝的平均折断力为 570 kg。

(b) $H_0$：$\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.048^2$，$H_1$：$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$$\mathcal{X}^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} s^2 \approx 13.54$$

其拒绝域为 $(0, \mathcal{X}^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (\mathcal{X}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty)$，

$$\alpha = 0.1,\ n = 5 \Rightarrow \mathcal{X}^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 0.71 \text{ 和 } \mathcal{X}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 9.5$$

从而 $\mathcal{X}^2$ 的观测值在拒绝域中，从而拒绝原假设，这天纤度的方差不正常。

附分位点数值表：

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u_{0.025}$ | 1.96 | $t_{0.025}(15)$ | 2.13 |
| $t_{0.05}(15)$ | 1.75 | $t_{0.025}(16)$ | 2.12 |
| $\mathcal{X}^2_{0.05}(4)$ | 9.5 | $\mathcal{X}^2_{0.95}(4)$ | 0.71 |
| $\mathcal{X}^2_{0.05}(5)$ | 11.07 | $\mathcal{X}^2_{0.95}(5)$ | 1.15 |