10 浙江工业大学高等数学期中考试试卷 A

学院：________ 班级：______ 姓名:________ 学号:________

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
得 分							

一、填空题（每小题 4 分）：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{b}{x+a})^{cx+d}=$ e^{bc} （其中 a,b,c,d 为常数）。

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ $=0$ 。

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})=$ $\frac{1}{2}$ 。

4. 设 $f(x)=\begin{cases}2+(x-1)\cos\dfrac{1}{x-1} & x<1\\ x^2+\ln x & x\geq 1\end{cases}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点。

5 . 设 $y=e^{-\sin x^2}$ ，则 $dy=$ $-2x\cos x^2 e^{-\sin x^2}dx$。

6. 由方程 $xy^2-e^{xy}+2=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}=$ $\dfrac{y^2-ye^{xy}}{xe^{xy}-2xy}$ 。

7. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\ln(n+3)-\ln n\right]=$ 3 。

二、选择题（每小题 4 分）：

1. 下列极限中，正确的是（ C ）

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$ B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=1$ C. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$ D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$。

2. 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，$\Delta y=f(x_0+h)-f(x_0)$，则当 $h\to 0$ 时，必有（ C ）

A. dy 是 h 的等价无穷小； B. dy 是 h 的高阶无穷小；

C. $\Delta y-dy$ 是比 h 高阶的无穷小； D. $\Delta y-dy$ 是 h 的同阶无穷小；

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1+2^{\frac{x+1}{x}}}{2-2^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点类型是（ C ）

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+2\cdot2^{\frac{1}{x}}}{2-2^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2^{-\frac{1}{x}}+2}{2\cdot2^{-\frac{1}{x}}-2}=-1$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1+2\cdot2^{\frac{1}{x}}}{2-2^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+2\cdot2^{\frac{1}{x}}}{2-2^{\frac{1}{x}}}=\infty$

A．一个可去间断点，一个跳跃间断点；

B．一个无穷间断点，一个可去间断点；

C．一个跳跃间断点，一个无穷间断点；

D．二个无穷间断点。

三、（10分）判断下列各命题（结论）是否正确（在括弧内填入√或×）：

1．若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，那么 $|f(x)|$ 也在 $x=a$ 连续。（ √ ）

2．若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，且 $f(a)\neq0$，则存在 a 的一个邻域 $U(a)$，在此邻域内有 $f(x)\neq0$。（ √ ）

3．若 $f(x)$ 在 a 的一个邻域 $U(a)$ 内满足 $f(x)\le f(a)$，则 $f'(a)=0$。（ × ）

4．若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且满足 $f(x)\le g(x)$，则在区间 $[a,b]$ 上有 $f'(x)\le g'(x)$。（ × ）

5．若函数 $f(x)$ 在 a 的一个邻域 $U(a)$ 内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的充分必要条件是 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a+2h)}{h}$ 存在。（ √ ）

四、试解下列各题（每小题7分）：

1．求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-\cos x}{1-\cos\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-\cos x}{\frac{x}{2}}$ ① $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\frac{x}{2}+o(x)-(1\quad+o(x))}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\frac{x}{2}+o(x)}{\frac{x}{2}}=-1$

② $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sin x}{\frac{1}{2}}=-1$

2．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+2^x+3^x)}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{2^x\ln2+3^x\ln3}{1+2^x+3^x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln2+3^x\ln3}{1+2^x+3^x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2^x}{3^x}\ln2+\ln3}{\frac{1}{3^x}+\frac{2^x}{3^x}+1}}=e^{\ln3}=3$

3．设 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$，求：$\dfrac{dy}{dx}$

$$\ln y = x\ln\frac{x}{1+x} = x\left(\ln x-\ln(1+x)\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \ln\frac{x}{1+x} + x\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right) = \ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}$$

$$y' = \left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}\cdot\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

4．$\begin{cases} x=\ln\left(1+t^{2}\right) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求：$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}$$

5．设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x-x}{x^{3}} & x>0 \\ ax+b & x\le 0 \end{cases}$，试确定常数 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续、可导；并求 $f'(0)$。

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}(ax+b) = b$$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\quad\therefore b=\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\tan x-x}{x^3}-\frac{1}{3}}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{3(\tan x-x)-x^3}{3x^4} = \lim_{x\to0^+}\frac{\tan^2 x-x^2}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{4x^3} = 0$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{ax+b-b}{x} = a$$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 可导 $\quad\therefore a=0\quad$ 并且可知 $f'(0)=0$

五、（10分）设函数 $f(x)$ 满足下列条件：（1）$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，对一切 $x,y\in R$；（2）$f(x)=1+xg(x)$，而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$。

证明：（1）$f(x)$ 在 R 上处处连续、可导；（2）$f'(x)=f(x)$；（3）$f(x)=e^x$。

证明：(1) $\forall x\in R$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\frac{1+\Delta x\,g(\Delta x)-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\,g(\Delta x)$$

$$=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 在 R 上处处连续可导

(2) 由(1)可得 $f'(x)=f(x)$

(3) 令 $F(x)=e^{-x}f(x)$

则 $F'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=0$

$\therefore F(x)\equiv C$.

又 $f(0)=1$ $\therefore F(0)=1$

$\therefore F(x)\equiv 1$ $\therefore f(x)=e^x$

六、（5分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，证明存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{4})$。

证明：令 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{4})$，则 $F(x)$ 在 $[0,\frac{3}{4}]$ 上连续.

$F(0)=f(0)-f(\frac{1}{4})$

$F(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{2})$

$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-f(\frac{3}{4})$

$F(\frac{3}{4})=f(\frac{3}{4})-f(1)$

$\therefore F(0)+F(\frac{1}{4})+F(\frac{1}{2})+F(\frac{3}{4})=f(0)-f(1)=0$

若 $F(0)=F(\frac{1}{4})=F(\frac{1}{2})=F(\frac{3}{4})=0$，则取 $\xi=0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}$ 其一即可.

若 $F(0),F(\frac{1}{4}),F(\frac{1}{2}),F(\frac{3}{4})$ 不全为0，则至少有两个值异号

由零点定理可得 $\exists\,\xi\in(0,\frac{3}{4})$ 有 $F(\xi)=0$　综上，$\exists\,\xi\in[0,1]$ 有 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{4})$