浙江工业大学 09/10(一)高等数学 A 考试试卷 A 标准答案

一、填空题选择题（每小题 3 分, 共 24 分）：

1．e^{-2}，　　2. $x^x\left(\ln x+1\right)$ ，　　3．$1-\sqrt{2}$，　　4．$[0,2]$，　5．$\dfrac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}$，

6. $\dfrac{1}{2}e^{-3(2x+1)}+c$，　　7. $\dfrac{\pi}{2}$，　　8. $x-1$，

二、选择题（每小题 3 分, 共 12 分）

1．B，　2．D,　3. A，　4. C.

三、试解下列各题（每小题 6 分, 共 12 分）：

1．　解：$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x\left(1-\cos x\right)}{x^3}$　　$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{2}$　　6 分

2.解：

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to\infty}x^k\sin\frac{1}{x}=f(0)=0\quad,\qquad f(x)\text{在}x=0\text{处连续}.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^k\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^{k-1}\sin\frac{1}{x}=0\quad,\qquad f(x)\text{在}x=0\text{处可导}.$$

四、试解下列各题（每小题 6 分, 共 18 分）：

1．解：$=\displaystyle\int\frac{\left(x+1\right)^2-2\left(x+1\right)+2}{\left(x+1\right)^2}dx$　$=\displaystyle\int 1dx-2\int\frac{1}{\left(x+1\right)}dx+2\int\frac{1}{\left(x+1\right)^2}dx$

$=x-2\ln(x+1)-\dfrac{2}{x+1}+c$　　6 分

2．　解：　$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2x\sin x\cos xdx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\sin 2xdx=\pi$$

3．　解：　因为 $f(1)=0,\ f'(x)=2\dfrac{\sin x^2}{x}$

$$\int_0^1 xf(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}f(x)\right]\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}f'(x)dx$$

$$=0-\int_0^1 x\sin x^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2 dx^2=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$$

五、试解下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1． 解：原方程可化为 $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x\ln x}$

通解为： $\frac{1}{y}=c\ln x$

$x=e, y=2$ 代入得，$c=\frac{1}{2}$

特解为 $y=\frac{2}{\ln x}$

2． 解： 特征方程为：$r^2-4r+3=0$

特征根：$r_1=3, r_2=1$，

对应齐次方程的通解为 $c_1e^{3x}+c_2e^x$

原方程的一个特解为：$-2e^{2x}$

原方程的一个通解为 $c_1e^{3x}+c_2e^x-2e^{2x}$

六、（8 分）

解：$f(-x)=\int_0^{-x} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt \overset{令t=-u}{=} -\int_0^u e^{-\frac{1}{2}u^2}du=-f(x)$ $f(x)$ 为奇函数

$-\infty<x<+\infty, f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}>0,\ f(x)$ 在定义域为增函数

$f''(x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}$，$f''(x)=0$, 且 $x>0, f''(x)<0, x<0, f''(x)>0,\ (0,0)$ 为拐点.

七、（10 分）

解： 当 $x\neq 0$ 时，$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3}{2}a$，即 $\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{3}{2}a$

$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+Cx$，

又因为 $2=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+Cx\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+\frac{C}{2}$ 所以 $C=4-a$

$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x$

旋转体体积

$$V=\int_0^1 \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{10}a^2+a+16\right)$$

令$V'=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{5}a+1\right)=0$　　得$a=-5$

$\therefore$ $a=-5$是唯一的极小值点,所以$a=-5$时体积最小

八、（4 分）

$$\left(f(0)+f(1)\right)^2=f^2(0)+f^2(1)+2f(0)f(1)$$

$$<f^2(0)+f^2(1)-2f(0)f(1)=\left(f(1)-f(0)\right)^2=f'^2(\xi)\le M^2$$

$$\left(f(0)+f(1)\right)\le M(M\ge 0)$$