09/10(一)浙江工业大学高等数学期中考试试卷 A

学院：________ 班级：______ 姓名:________ 学号:________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得 分								

一、填空题（每小题 4 分）：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{2x}=$ e^4 ________。

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ $=0$ ________________。

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{\pi x}{6}$，要使 $f(x)$ 处处连续，则应该补充定义 $f(0)=$ $\dfrac{\pi}{6}$ ______。

4. 设 $y=e^{-\sin x^2}$，则 $dy=$ $-2x\cos x^2 e^{-\sin x^2}dx$

5. 设 $y=\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)^x$， $y'=$ $\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)^x\cdot\left[\ln\dfrac{2x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right]$ ________________。

6. 曲线 $y=x^5+5x^3-x-2$ 的拐点坐标是 $(0,-2)$ ______。

7. 曲线 $e^{xy}-2x-y=3$ 在点 $(-1,0)$ 处的切线方程是 $x+y+1=0$ ______。

8. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，$dy=f'(x_0)\Delta x$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y-dy$ 是 Δx 的 高阶 无穷小

二、选择题（每小题 4 分）：

1. 设 $f(x)=(x^2-3x+2)\sin x$，则方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,\pi)$ 内有（ A ）
（A）至少 3 个根； （B）至多 2 个根； （C）0 个根； （D）1 个根。

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x>1\\ x^2, & x\le 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（ B ）
（A）左、右导数都存在； （B）左导数存在、右导数不存在；
（C）左导数不存在、右导数存在； （D）左、右导数都不存在；

$x>x_0\ f'(x)>0$
$x<x_0\ f'(x)<0$

3．$f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内可导，由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}=1$ 可知 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的（ B ）

（A）极大值；（B）极小值；（C）拐点；（D）不能确定；

4．若函数 $f(x)$ 在 a 的一个邻域 $U(a)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的（ B ）条件。

（A）充分；（B）必要；（C）充分必要；（D）既非充分也非必要；

三、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．求：$\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$。

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{\ln^2x}\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{x\ln^2x}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln^2x+2\ln x}{-1}=0$$

2．求：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{\sin^4 2x}$

$$①=\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{2^4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{-2x+2xe^{-x^2}}{2^4\cdot4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x(e^{-x^2}-1)}{2^6x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-2x^3}{2^6\cdot x^3}=-\frac{1}{32}$$

$$②=\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-(1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4))}{2^4x^4}=-\frac{1}{2^5}=-\frac{1}{32}$$

3．设 $\begin{cases}x=2te^t+1\\ y=t^2+2t\end{cases}$，求：$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+2}{2e^t+2te^t}=e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-e^{-t}}{2e^t+2te^t}=-\frac{1}{2t+2}e^{-2t}$$

四、（14 分）设函数 $f(x)=\left|xe^{-x}\right|$，求：（1）$f(x)$ 的连续、可导、单调、凹凸区间；（2）$f(x)$ 的极值点、拐点；（3）$f(x)$ 的渐近线。

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-x} & x\geq 0 \\ -xe^{-x} & x<0 \end{cases}$$

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-1$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 不可导，其余可导，

即在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 可导

$$f'(x)=\begin{cases} (1-x)e^{-x} & x>0 \\ (x-1)e^{-x} & x<0 \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} (x-2)e^{-x} & x>0 \\ (2-x)e^{-x} & x<0 \end{cases}$$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$-$
$f''(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

单增区间 $(0,1)$，

单减区间 $(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$

凹区间：$(-\infty,0)$ $(2,+\infty)$

凸区间：$(0,2)$

$x=0$ 为极小值点，$x=1$ 为极大值点

拐点为 $(0,0)$ $(2,2e^{-2})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} -xe^{-x}=\infty$ $\therefore y=0$ 为渐近线

五、（8 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=2$，求常数 τ 和 k，使当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim\tau x^k$。

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=2$ $\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x^3}=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=4$ $\therefore \tau=4$ $k=3$

六、（6 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明存在一个点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

证：令 $g(x)=xf(x)$

则 $g(0)=0 \quad g(1)=1$

对 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 应用罗尔中值定理可得 $\exists\, \xi\in(0,1)$ 有 $g'(\xi)=0$

即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

七、（6 分）设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导的凹弧（曲线），且在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(x)=x+o(x)$，试证：$f(x)\ge x \quad x\in(-\infty,+\infty)$。

证明：$\because f(x)=x+o(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x}=0$ 即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

$\therefore f(0)=0,\ f'(0)=1$

令 $F(x)=f(x)-x$

则 $F'(x)=f'(x)-1$，$F''(x)=f''(x)\geq 0$

当 $x>0$ 时

$\therefore F'(x)\geq F'(0)=0$ $\quad\therefore F(x)\geq F(0)=0$

当 $x<0$ 时

$F'(x)\leq F'(0)=0$ $\quad\therefore F(x)\geq F(0)=0$

$\therefore f(x)\geq x$