第 4 章 不确定性推理方法

确定性推理和不确定性推理的区别

推理：

事实（证据） → 结论

知 识

不确定推理：

不确定事实（证据） → 不确定结论

不确定知识

知识和证据的不确定性，为推理机的设计与实现增加了复杂性和难度。

不确定性推理中的基本问题

不确定推理：不确定事实（证据） → 不确定结论

不确定知识

- 推理方向
- 推理方法
- 控制策略

- 1. 不确定性的表示与度量
- 2. 组合证据不确定性的算法
- 3. 不确定性匹配算法
- 4. 不确定性的传递算法
- 5. 结论不确定性的合成

不同的不确定性推理方法所涉及不确定性的表示问题和计算问题解决的方法是不一样的。

第4章 不确定性推理方法

基于概率论的不确定推理方法

- 4.1 不确定性推理的基本概念
- 4.2 可信度方法（Shortliffe等人, 1975, MYCIN）
- 4.3 证据理论（Dempster和Shafer, 1976年）
- 4.4 模糊推理方法（Zadeh，1983年）

> - 了解可信度方法，掌握证据理论及其推理方法，掌握模糊集合、模糊知识表示、模糊推理方法及应用。
> - 重点：证据理论和模糊推理等不确定性推理及应用
> - 难点：证据理论、模糊推理

- □ 4.1 不确定性推理的基本概念
- ✓ 4.2 可信度方法
- □ 4.3 证据理论
- □ 4.4 模糊推理方法

- 什么是可信度方法?
- 可信度方法中事实/证据、知识的不确定性是如何表示与度量的?
- 组合证据不确定性怎么处理的?
- 如何得到结论的不确定性?
- 结论不确定性怎么合成的?

4.2 可信度方法

1. 知识不确定性的表示

确定性因子

$CF(H, E) \in [-1, 1]$

- 知识:

IF E THEN H $(CF(H,E))$

$CF(H,E)$：由证据E得到的假设H的确定性因子（Certainty Factor），反映前提条件与结论的联系强度。

IF 头痛 AND 流涕 THEN 感冒 （0.7）

计算公式:

$$CF(H,E) = \begin{cases} \dfrac{P(H|E)-P(H)}{1-P(H)} & P(H|E) > P(H) \\ 0 & P(H|E) = P(H) \\ \dfrac{P(H)-P(H|E)}{-P(H)} & P(H|E) < P(H) \end{cases}$$

4.2 可信度方法

2. 证据不确定性的表示

IF E THEN H ($CF(H,E)$)

- **$CF(E)$: 证据 E 的不确定性**
- 初始证据的可信度：由用户提供
- 中间结果作为证据的可信度：由不确定性传递算法计算

- **$CF(E) \in [-1，1]$**
- 若证据 E 肯定为真，则 $CF(E) = 1$；
- 若证据 E 以某种程度为真，则 $0 < CF(E) < 1$；
- 若证据 E 肯定为假，则 $CF(E) = -1$；
- 若证据 E 以某种程度为假，则 $-1 < CF(E) < 0$；
- 若证据 E 一无所知，则 $CF(E) = 0$。

3. 组合证据不确定性的算法（采用**最大最小**法）

- **证据的合取**

$$E = E_1 \quad AND \quad E_2 \quad AND \quad \ldots \quad AND \quad E_n$$

则 $CF(E) = \min\{CF(E_1), CF(E_2), \ldots, CF(E_n)\}$

- **证据的析取**

$$E = E_1 \quad OR \quad E_2 \quad OR \quad \ldots \quad OR \quad E_n$$

则 $CF(E) = \max\{CF(E_1), CF(E_2), \ldots, CF(E_n)\}$

- ***证据的非** $CF(\neg E) = -CF(E)$ 不同于概率 $P(\neg E) = 1 - P(E)$

4.2 可信度方法

4．不确定性的传递算法

IF E THEN H $(CF(H,E))$

- 不确定性的传递算法：$CF(E)$, $CF(H,E)$ $\rightarrow$ $CF(H)$ ？
- 结论H 的可信度 $CF(H)$：

$$CF(H) = CF(H,E) \times \max\{0, CF(E)\} \qquad (4.3)$$

当$CF(E) < 0$时，则$CF(H) = 0$

当$CF(E) > 0$时，则$CF(H) = CF(H,E)CF(E)$

当$CF(E) = 1$时，则$CF(H) = CF(H,E)$

■ 结论H的可信度不考虑E为假时对H产生的影响。

4.2 可信度方法

5．结论不确定性的合成算法

- 设知识：

$$IF \quad E_1 \quad THEN \quad H \quad (CF(H,E_1))$$
$$IF \quad E_2 \quad THEN \quad H \quad (CF(H,E_2))$$
$$IF \quad E_3 \quad THEN \quad H \quad (CF(H,E_3))$$

（1）分别对每一条知识求出 **CF（H）**：

$$CF_1(H) = CF(H,E_1) \times \max\{0, CF(E_1)\}$$
$$CF_2(H) = CF(H,E_2) \times \max\{0, CF(E_2)\}$$
$$CF_3(H) = CF(H,E_3) \times \max\{0, CF(E_3)\}$$

5．结论不确定性的合成算法

（2）求E_1与E_2对 H 的综合可信度 $CF_{1,2}(H)$：

$$CF_{1,2}(H)=\begin{cases} CF_1(H)+CF_2(H)-CF_1(H)CF_2(H) & CF_1(H)\ge 0, CF_2(H)\ge 0 \\ CF_1(H)+CF_2(H)+CF_1(H)CF_2(H) & CF_1(H)<0, CF_2(H)<0 \\ \dfrac{CF_1(H)+CF_2(H)}{1-\min\{|CF_1(H)|,|CF_2(H)|\}} & CF_1(H)\text{与}CF_2(H)\text{异号} \end{cases}$$

$\in$[-1，1]

（3）求 E_1、E_2与E_3对 H 的综合可信度 $CF_{1,2,3}(H)$：

$$\left.\begin{matrix} CF_{1,2}(H) \\ CF_3(H) \end{matrix}\right\} CF_{1,2,3}(H)$$

4.2 可信度方法

- 例4.1, 设有如下一组知识：

r_1: $IF \quad E_1 \quad THEN \quad H \quad (0.8)$

r_2: $IF \quad E_2 \quad THEN \quad H \quad (0.6)$

r_3: $IF \quad E_3 \quad THEN \quad H \quad (-0.5)$

r_4: $IF \quad E_4 \quad AND \quad (E_5 \quad OR \quad E_6) \quad THEN \quad E_1 \quad (0.7)$

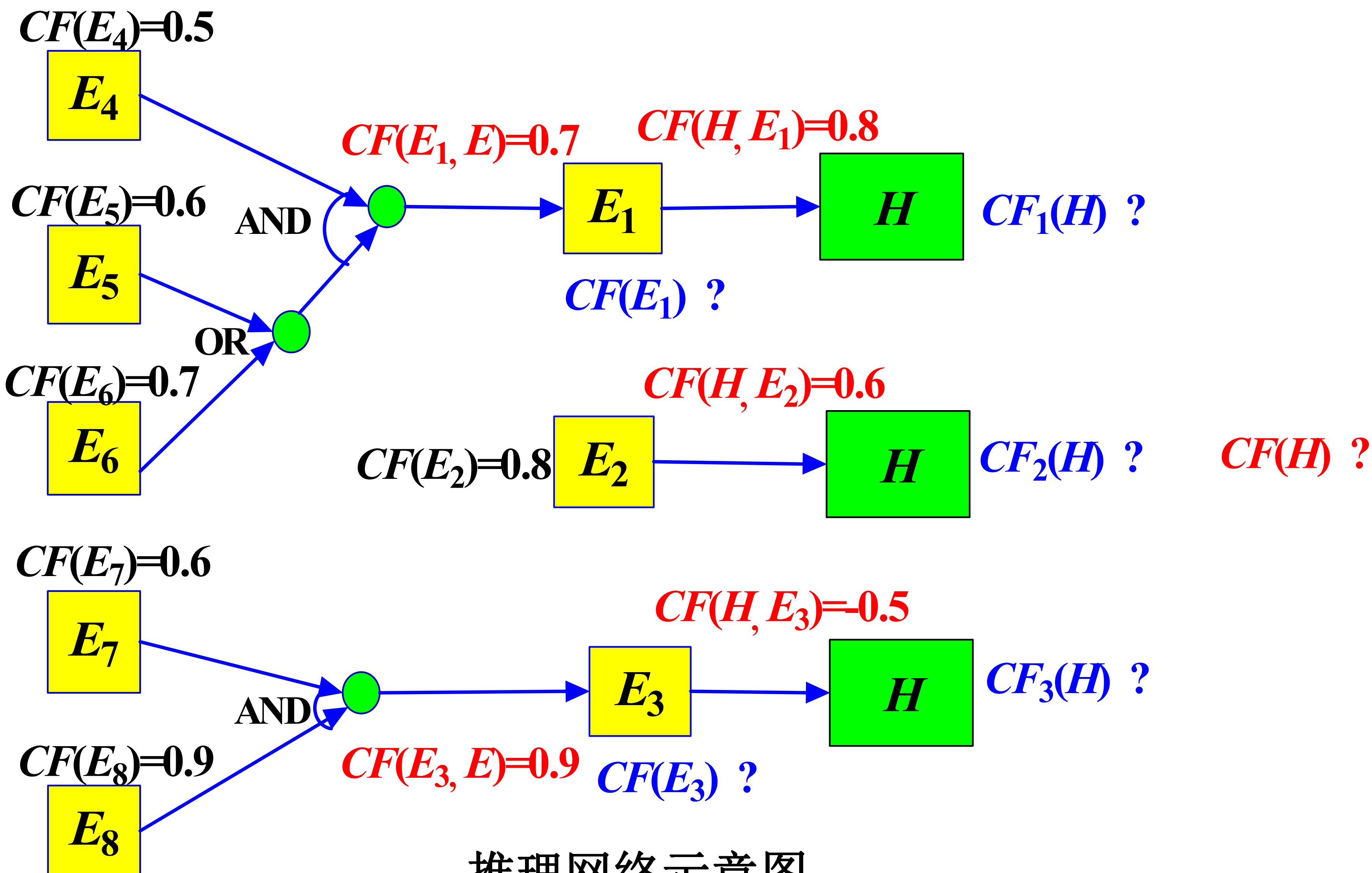
r_5: $IF \quad E_7 \quad AND \quad E_8 \quad THEN \quad E_3 \quad (0.9)$

已知：$CF(E_2)=0.8$, $CF(E_4)=0.5$, $CF(E_5)=0.6$,

$CF(E_6)=0.7$, $CF(E_7)=0.6$, $CF(E_8)=0.9$.

求：$CF(H)$

4.2 可信度方法



推理网络示意图

4.2 可信度方法

- 解：（1）求出CF_1（H）、 CF_2（H）、 CF_3（H）

r_4: IF E_4 AND (E_5 OR E_6) THEN E_1 (0.7)

$$
\begin{aligned}
CF(E_1) &= 0.7 \times \max\{0, CF[E_4 \quad AND \quad (E_5 \quad OR \quad E_6)]\} \\
&= 0.7 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), CF(E_5 \quad OR \quad E_6)\}\} \\
&= 0.7 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), \max\{CF(E_5), CF(E_6)\}\}\} \\
&= 0.7 \times \max\{0, \min\{0.5, \max\{0.6, 0.7\}\}\} \\
&= 0.7 \times \max\{0, 0.5\} \\
&= 0.35
\end{aligned}
$$

r_1: IF E_1 THEN H (0.8)

$$
\begin{aligned}
CF_1(H) &= 0.8 \times \max\{0, CF(E_1)\} \\
&= 0.8 \times \max\{0, 0.35\} = 0.28
\end{aligned}
$$

4.2 可信度方法

- 解：（1）求出CF_1（H）、 CF_2（H）、 CF_3（H）

r_2： $IF \quad E_2 \quad THEN \quad H \quad (0.6)$

$$CF_2(H) = 0.6 \times \max\{0, CF(E_2)\}$$

$$= 0.6 \times \max\{0, 0.8\}$$

$$= 0.48$$

$CF(E_2)=0.8,\ CF(E_4)=0.5,\ CF(E_5)=0.6,$
$CF(E_6)=0.7,\ CF(E_7)=0.6,\ CF(E_8)=0.9.$

4.2 可信度方法

- 解：(1) 求出$CF_1(H)$、$CF_2(H)$、$CF_3(H)$

$$r_5:\quad IF \quad E_7 \quad AND \quad E_8 \quad THEN \quad E_3 \quad (0.9)$$

$$\begin{aligned} CF(E_3) &= 0.9 \times \max\{0, CF(E_7 \quad AND \quad E_8)\} \\ &= 0.9 \times \max\{0, \min\{CF(E_7), CF(E_8)\}\} \\ &= 0.9 \times \max\{0, \min\{0.6, 0.9\}\} \\ &= 0.9 \times \max\{0, 0.6\} \\ &= 0.54 \end{aligned}$$

$$r_3:\quad IF \quad E_3 \quad THEN \quad H \quad (-0.5)$$

$$\begin{aligned} CF_3(H) &= -0.5 \times \max\{0, CF(E_3)\} \\ &= -0.5 \times \max\{0, 0.54\} \quad = -0.27 \end{aligned}$$

4.2 可信度方法

- （2）根据合成算法求出*CF*（*H*）

$\because$ $CF_1(H)=0.28$,　$CF_2(H)=0.48$,　$CF_3(H)= -0.27$

$$\therefore CF_{1,2}(H)=CF_1(H)+CF_2(H)-CF_1(H)\times CF_2(H)$$

$$=0.28+0.48-0.28\times 0.48 = 0.63$$

$$CF_{1,2,3}(H)=\frac{CF_{1,2}(H)+CF_3(H)}{1-\min\{|CF_{1,2}(H)|,|CF_3(H)|\}}$$

$$=\frac{0.63-0.27}{1-\min\{0.63,0.27\}}=\frac{0.36}{0.73}=0.49$$

综合可信度：$CF(H)=0.49$

4.2 可信度方法

- *主要优点：简单、容易理解和实现；可信度值的物理意义明确，可以将信任与不信任清楚地分开。
- *评论
  - 可信度方法的宗旨不是理论上的严密性，而是处理实际问题的可用性。
  - 不可一成不变地用于任何领域，甚至也不能适用于所有科学领域。推广至一个新领域时必须根据情况修改。

- 4.1 不确定性推理的基本概念
- 4.2 可信度方法
  - MOOC上：第5讲讨论及单元测试
  - 网络教学平台作业W3-2
- ✓ 4.3 证据理论
  - 什么是证据理论？
  - 证据理论中假设、证据、知识的不确定性是如何表示与度量的？
  - 如何处理由“不知道”所引起的不确定性？
  - 基于证据理论的不确定推理如何进行的？
  - 证据理论的优点、局限性、适用领域？
- 4.4 模糊推理方法

4.3 证据理论

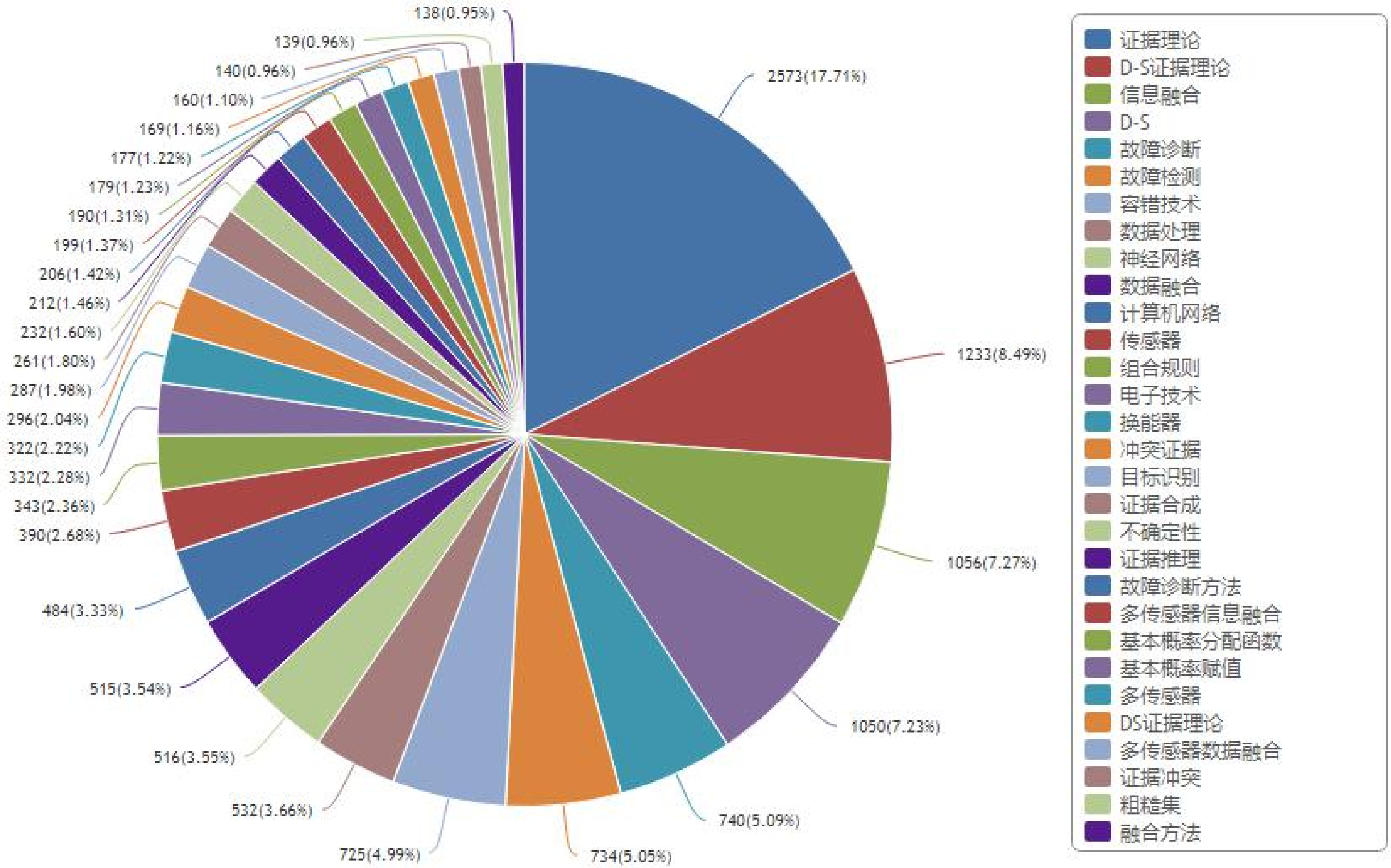
- 证据理论(theory of evidence)：又称D－S理论，是德普斯特（A. P. Dempster）于20世纪60年代首先提出，沙佛（G. Shafer）在1976年出版的《证据的数学理论》中进一步发展起来的一种处理不确定性的理论。

- 证据理论引入了信任函数来度量不确定性，并引用似然函数来处理由不知道引起的不确定性，并且事先不必给出知识的先验概率，与主观Bayes方法相比，具有较大的灵活性。

- Dempster合成公式可以综合不同专家或数据源的知识或数据，这使得证据理论在专家系统、信息融合等领域中得到了广泛应用。

- 适用领域：信息融合、专家系统、情报分析、法律案件分析、多属性决策分析，等等。

主题分布 >>


138(0.95%)
139(0.96%)
140(0.96%)
160(1.10%)
169(1.16%)
177(1.22%)
179(1.23%)
190(1.31%)
199(1.37%)
206(1.42%)
212(1.46%)
232(1.60%)
261(1.80%)
287(1.98%)
296(2.04%)
322(2.22%)
332(2.28%)
343(2.36%)
390(2.68%)
484(3.33%)
515(3.54%)
516(3.55%)
532(3.66%)
725(4.99%)
734(5.05%)
740(5.09%)
1050(7.23%)
1056(7.27%)
1233(8.49%)
2573(17.71%)
证据理论
D-S证据理论
信息融合
D-S
故障诊断
故障检测
容错技术
数据处理
神经网络
数据融合
计算机网络
传感器
组合规则
电子技术
换能器
冲突证据
目标识别
证据合成
不确定性
证据推理
故障诊断方法
多传感器信息融合
基本概率分配函数
基本概率赋值
多传感器
DS证据理论
多传感器数据融合
证据冲突
粗糙集
融合方法

4.3 证据理论

- **4.3.1 概率分配函数**
- **4.3.2 信任函数**
- **4.3.3 似然函数**
- **4.3.4 概率分配函数的正交和**
- **4.3.5 基于证据理论的不确定推理**

- 证据理论中假设、证据、知识的不确定性是如何表示与度量的？
- 如何处理由“不知道”所引起的不确定性？
- 组合证据的不确定是如何处理的？
- 基于证据理论的不确定推理如何进行的？

4.3.1 概率分配函数

- 证据理论采用集合来表示命题，把命题的不确定性问题转化为集合的不确定性问题。

- 设 D 是变量 x 所有可能取值的集合，且 D 中的元素是互斥的，在任一时刻 x 都取且只能取 D 中的某一个元素为值，则称 D 为 x 的样本空间，或称假设空间/识别框架。

- 例如，

  所讨论车的样本空间 D={自行车，摩托车，汽车，火车}

  所讨论家禽的样本空间 D={马，牛，羊，鸡，狗，兔}

  所考虑疾病的样本空间 D={感冒，支气管炎，鼻炎}

  所看到颜色的样本空间 D={红，黄，蓝}

4.3.1 概率分配函数

- 证据理论中，*D* 的子集 *A*构成求解问题的各种答案

  例如*D*={自行车，汽车，火车，摩托车}，如果问题是哪些是机械动力车？

  答案：*D*的一个子集{汽车，火车，摩托车}

- *D* 的任何一个子集 *A* 都对应于一个关于 x 的命题，称该命题为“x 的值是在 *A* 中”。

- 设 x：所看到的颜色，*D*={红，黄，蓝}，

  则 A_1={红}：“x 是红色”；

  A_2={红，蓝}：“x 或者是红色，或者是蓝色”。

证据理论针对样本空间D中的每一个子集/假设都分配了概率，称为基本概率分配或者是基本置信分配，这个分配函数称为基本概率分配函数。

4.3.1 概率分配函数

- 设D为样本空间，领域内的命题都用D的子集表示，则基本概率分配函数（basic probability assignment function）定义如下：

定义4.1 设函数 $M:2^D \to [0,1]$，（对任何一个属于D的子集A，命它对应一个数$M(A) \in [0，1]$） 且满足

$$M(\Phi)=0$$

$$\sum_{A\subseteq D} M(A)=1$$

则 M：2^D上的基本概率分配函数，M（A）：A的基本概率数。

4.3.1 概

▪ 设 D={红，黄，蓝}，则其子集个数 $2^3=8$，具体为：

A_1={红}，A_2={黄}，A_3={蓝}，A_4={红，黄}，A_5={红，蓝}，A_6={黄，蓝}，A_7={红，黄，蓝}，A_8={ Φ }。

说明：

（1）设样本空间D中有n个元素，则D中子集的个数为2^n个。

幂集 2^D：D的所有子集。

（2）概率分配函数：

上的一个数M（A）。

▪ M（A_1）= 0.3：“x是红色”的信任度是0.3。

M（A_4）= 0.2：“x或者是红色或者是蓝色”的信任度是0.2。

$A \subset D$，$A \neq D$时，M（A）：对相应命题A的精确信任度。

$A=D$，M（A）：对D的各子集进行信任分配后剩下的部分，表示不知道该对这部分如何进行分配。

（3）概率分配函数与概率不同。

▪ 设 D={红, 黄, 蓝}, M({红})=0.3, M({黄})=0, M({蓝})=0.1,

M({红，黄})=0.2，M({红, 蓝})=0.2，M({黄, 蓝})=0.1，$M(\Phi)$=0.

M({红, 黄, 蓝})=0.1

▪但 M（{红}）+ M（{黄}）+ M（{蓝}）=0.4

4.3.1 概率分配函数

- 设D为样本空间，领域内的命题都用D的子集表示，则**基本概率分配函数**（**basic probability assignment function**）定义如下：

定义4.1 设函数 $M:2^D \to [0,1]$，**（对任何一个属于D的子集A，命它对应一个数$M(A)$ $\in$ [0，1]）** 且满足

$$M(\Phi)=0$$

$$\sum_{A\subseteq D} M(A)=1$$

则 M：2^D上的基本概率分配函数，M（A）：A的基本概率数。

4.3 证据理论

- 4.3.1 概率分配函数
- 4.3.2 信任函数
- 4.3.3 似然函数
- 4.3.4 概率分配函数的正交和
- 4.3.5 基于证据理论的不确定推理

设D={红, 黄, 蓝},
M({红})=0.3, M({黄})=0, M({蓝})=0.1,
M({红，黄})=0.2，M({红, 蓝})=0.2，
M({黄, 蓝})=0.1，M({红, 黄, 蓝})=0.1，
$M(\Phi)$ =0

- 证据理论中假设、证据、知识的不确定性是如何表示与度量的？
- 如何处理由“不知道”所引起的不确定性？
- 组合证据的不确定是如何处理的？
- 基于证据理论的不确定推理如何进行的？

4.3.2 信任函数

定义4.2 命题的信任函数（**belief function**）Bel：

$$2^D \to [0,1] \text{ 且 } Bel(A) = \sum_{X \subseteq A} M(X) \quad \forall A \subseteq D$$

$Bel(A)$：对命题A为真的总的信任程度。

命题A的Bel（A）和M（A）是什么关系？

A. $Bel(A) > M(A)$

B. $Bel(A) = M(A)$

C. $Bel(A) \geq M(A)$

D. $Bel(A) < M(A)$

- 设 D={红，黄，蓝}，M（{红}）=0.3，M（{黄}）=0，M（{红，黄}）=0.2，

$$Bel(\{红,黄\}) = M(\{红\}) + M(\{黄\}) + M(\{红,黄\}) = 0.3 + 0.2 = 0.5$$

$$Bel(\{红\}) = M(\{红\}) = 0.3$$

- 由信任函数及概率分配函数的定义推出：

$$Bel(\Phi) = M(\Phi) = 0, \qquad Bel(D) = \sum_{X \subseteq D} M(X) = 1$$

4.3 证据理论

- **4.3.1 概率分配函数**
- **4.3.2 信任函数**
- **4.3.3 似然函数**
- **4.3.4 概率分配函数的正交和**
- **4.3.5 基于证据理论的不确定推理**

***Bel*(*A*)**:对命题*A*为真的总的信任程度

问题：命题*A*为假的信任程度怎么确定?

***Bel*(¬*A*)**：命题*A*为假的信任程度

- 证据理论中假设、证据、知识的不确定性是如何表示与度量的?
- 如何处理由“不知道”所引起的不确定性?
- 组合证据的不确定是如何处理的?
- 基于证据理论的不确定推理如何进行的?

4.3.3 似然函数

- 似然函数（**plausibility function**）：不可驳斥函数或上限函数，表示命题非假的信任程度。

定义4.3 似然函数 $Pl: 2^D \to [0,1]$ 且

$$Pl(A) = 1 - Bel(\neg A) = \sum_{A \cap X \neq \Phi} M(X) \quad \text{对所有的 } A \subseteq D$$

- 设 D ={红,黄,蓝}, M({红})=0.3,M({黄})=0,M({蓝})=0.1, M({红，黄})=0.2，M({红,蓝})=0.2，M({黄,蓝})=0.1，M({红,黄,蓝})=0.1，

$$Bel(\{红,黄\}) = M(\{红\}) + M(\{黄\}) + M(\{红,黄\}) = 0.3 + 0.2 = 0.5$$

$$Pl(\{蓝\}) = 1 - Bel(\neg\{蓝\}) = 1 - Bel(\{红，黄\}) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$Pl(\{蓝\}) = M(\{蓝\}) + M(\{红，蓝\}) + M(\{黄，蓝\}) + M(\{红，黄，蓝\})$$

$$= 0.1 + 0.2 + 0.1 + 0.1 = 0.5$$

信任函数与似然函数的关系

$Bel(A)$：对A为真的信任程度，是A的最小信任度。

$Pl(A)$　：对A为非假的信任程度，是A的最大信任度。

信任区间[*Bel(A)*, *Pl(A)*]: 表示对A的确认程度，即A的不确定性

$$Bel(A) = \sum_{X \subseteq A} M(X)$$

$$Pl(A) = 1 - Bel(\neg A) = \sum_{A \cap X \neq \Phi} M(X)$$

$$\therefore \quad Pl(A) \geq Bel(A)$$

$$Pl(\Phi) = Bel(\Phi)$$

命题A的Bel（A）和Pl（A）是什么关系？

A. $Pl(A) > Bel(A)$

B. $Pl(A) = Bel(A)$

C. $Pl(A) \geq Bel(A)$

D. $Pl(A) < Bel(A)$

由于缺少关于总概率的分配信息，所以不能确切地知道概率是如何分配给每个元素x（$x \in D$），因而也就不可能计算与D的子集有关的概率P（A）：$Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A)$

信任函数与似然函数的关系

- $A(\,Bel(A), Pl(A)\,)$: 对A信任程度的下限与上限。

- $A(0,0)$: $Bel(A)=0$ 表示对A为真不信任，

  $Bel(\neg A)=1-Pl(A)=1$ 表示对$\neg A$为真信任，

  所以$A(0,0)$表示A为假。

- $A(1,1)$: $Bel(A)=1$ 表示对A为真信任，

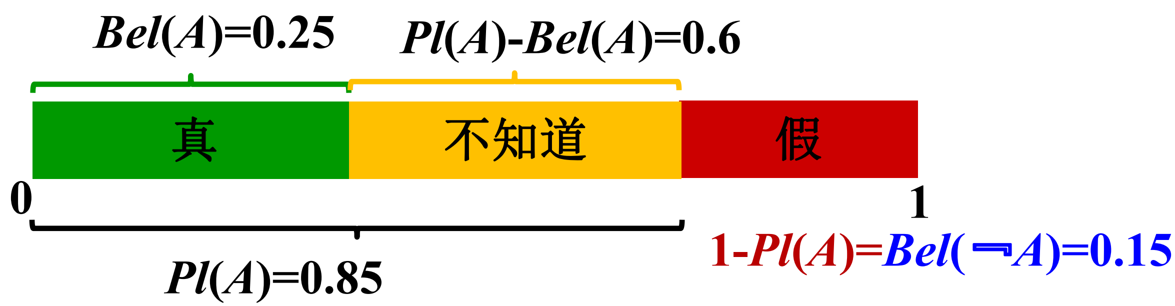
  $Bel(\neg A)=1-Pl(A)=0$ 表示对$\neg A$为真不信任，

  所以$A(1,1)$表示A为真。

信任函数与似然函数的关系

- *A*(*Bel*(*A*), *Pl*(*A*)): 对*A*信任程度的下限与上限。

> • *A*(0.25,0.85): *Bel*(*A*)=0.25 表示对*A*为真有0.25的信任度，
>
> *Bel*(¬*A*)=1-*Pl*(*A*)=0.15 表示对¬*A*为真有0.15的信任度，
>
> *A*(0.25,0.85) 表示*A*为真的信任度稍高于对*A*为假的信任度。



- *Bel*(*A*)：对*A*为真的信任程度；*Bel*(¬*A*)：对*A*为假的信任程度；
- *Pl*(*A*) : 对*A*为非假的信任程度；
- *Pl*(*A*)－ *Bel*(*A*)：对*A*不知道的程度，即既非对*A*信任又非不信任的那部分。

课堂测试

考生考试成绩的论域为{A，B，C，D，E}，

小王成绩为A、为B、为A或B的基本概率分别分配为0.2、0.1、0.3。

若 $Bel(\{C, D, E\})=0.2$，

则 $Bel(\{A, B\})=$__________

$Pl(\{A, B\})=$ __________

对{A, B}不知道的程度为__________。

$Bel(\{A, B\})=$ 0.2+0.1+0.3=0.6 ，

$Pl(\{A, B\})=1-Bel(\{C, D, E\})=$ 1-0.2=0.8 ，

对{A, B}不知道的程度为 0.8-0.6=0.2 。

4.3 证据理论

- 4.3.1 概率分配函数
- 4.3.2 信任函数
- 4.3.3 似然函数
- 4.3.4 概率分配函数的正交和
- 4.3.5 基于证据理论的不确定推理

- 证据理论中假设、证据、知识的不确定性是如何表示与度量的？
- 如何处理由“不知道”所引起的不确定性？
- 组合证据的不确定是如何处理的？
- 基于证据理论的不确定推理如何进行的？

4.3.4 概率分配函数的正交和（证据的组合）

- 对样本空间 $D=\{a, b\}$,
- 从不同来源分别得到如下两个概率分配函数:

$$M_1(\{a\})=0.3,\ M_1(\{b\})=0.6,\ M_1(\{a, b\})=0.1,\ M_1(\Phi)=0$$

$$M_2(\{a\})=0.4,\ M_2(\{b\})=0.4,\ M_2(\{a, b\})=0.2,\ M_2(\Phi)=0$$

- 德普斯特（A. P. Dempster)提出的组合方法就是对这两个概率分配函数进行正交和运算。

4.3.4 概率分配函数的正交和（证据的组合）

定义4.4 设 M_1 和 M_2是两个概率分配函数；则其正交和 $M=M_1\oplus M_2$ ：

$$M(A)=\frac{1}{K}\sum_{X\cap Y=A}M_1(X)M_2(Y)$$

$$\boxed{M(\Phi)=0}$$

其中，K为归一化常数：

$$K=1-\sum_{X\cap Y=\Phi}M_1(X)M_2(Y)=\sum_{X\cap Y\neq\Phi}M_1(X)M_2(Y)$$

如果 $K\neq 0$，则正交和 M也是一个概率分配函数；

如果 $K=0$，则不存在正交和 M，即没有可能存在概率函数，称M_1 与M_2 矛盾。

4.3.4 概率分配函数的正交和

- 设 D={黑，白}，且设

$$M_1(\{黑\},\{白\},\{黑,白\},\Phi) = (0.3,0.5,0.2,0)$$

$$M_2(\{黑\},\{白\},\{黑,白\},\Phi) = (0.6,0.3,0.1,0)$$

则：

$$\boxed{K = 1 - \sum_{X \cap Y = \Phi} M_1(X)M_2(Y) = \sum_{X \cap Y \neq \Phi} M_1(X)M_2(Y)}$$

$$= 1 - [M_1(\{黑\})M_2(\{白\}) + M_1(\{白\})M_2(\{黑\})]$$

$$= 1 - [0.3 \times 0.3 + 0.5 \times 0.6] \quad = 0.61$$

$$\boxed{M(\{黑\}) = K^{-1} \sum_{X \cap Y = \{黑\}} M_1(X)M_2(Y)}$$

$$= \frac{1}{0.61}[M_1(\{黑\})M_2(\{黑\}) + M_1(\{黑\})M_2(\{黑,白\}) + M_1(\{黑,白\})M_2(\{黑\})]$$

$$= \frac{1}{0.61}[0.3 \times 0.6 + 0.3 \times 0.1 + 0.2 \times 0.6] \quad = 0.54$$

4.3.4 概率分配函数的正交和

- 同理可得：$M(\{白\}) = 0.43$

$$M(\{黑,白\}) = 0.03$$

- 组合后得到的概率分配函数：

$$\boxed{M(\{黑\}), \{白\}, \{黑,白\}, \Phi) = (0.54, 0.43, 0.03, 0)}$$

$$\boxed{M_1(\{黑\}, \{白\}, \{黑,白\}, \Phi) = (0.3, 0.5, 0.2, 0)}$$

$$\boxed{M_2(\{黑\}, \{白\}, \{黑,白\}, \Phi) = (0.6, 0.3, 0.1, 0)}$$

$$\boxed{M(A) = K^{-1} \sum_{X \cap Y = A} M_1(X) M_2(Y)}$$

$$\boxed{K = 1 - \sum_{X \cap Y = \Phi} M_1(X) M_2(Y) = \sum_{X \cap Y \neq \Phi} M_1(X) M_2(Y)}$$

4.3 证据理论

设D={红, 黄, 蓝}, M({红})=0.3, M({黄})=0,
M({蓝})=0.1, M({红，黄})=0.2，M({红, 蓝})=0.2，
M({黄, 蓝})=0.1，M({红, 黄, 蓝})=0.1，$M(\Phi)$=0
Bel({红})=0.3, Pl({红})=0.3+0.2+0.2+0.1=0.8

- **4.3.1 概率分配函数**
- **4.3.2 信任函数**
- **4.3.3 似然函数**
- **4.3.4 概率分配函数的正交和**
- **4.3.5 基于证据理论的不确定推理**

- 证据理论中假设、证据、知识的不确定性是如何表示与度量的？
- 如何处理由“不知道”所引起的不确定性？
- 组合证据的不确定是如何处理的？
- 基于证据理论的不确定推理如何进行的？

4.3 证据理论

- **4.3.1 概率分配函数**
- **4.3.2 信任函数**
- **4.3.3 似然函数**
- **4.3.4 概率分配函数的正交和**
- **4.3.5 基于证据理论的不确定推理**

设D={红, 黄, 蓝}, M({红})=0.3, M({黄})=0,
M({蓝})=0.1, M({红，黄})=0.2，M({红, 蓝})=0.2,
M({黄, 蓝})=0.1，M({红, 黄, 蓝})=0.1，$M(\Phi)$=0
Bel({红})=0.3, Pl({红})=0.3+0.2+0.2+0.1=0.8

$$M_1(\{黑\},\{白\},\{黑,白\},\Phi)=(0.3,0.5,0.2,0)$$

$$M_2(\{黑\},\{白\},\{黑,白\},\Phi)=(0.6,0.3,0.1,0)$$

$$M(\{黑\}),\{白\},\{黑,白\},\Phi)=(0.54,0.43,0.03,0)$$

$$M(A)=K^{-1}\sum_{X\cap Y=A}M_1(X)M_2(Y)$$

$$K=1-\sum_{X\cap Y=\Phi}M_1(X)M_2(Y)=\sum_{X\cap Y\neq\Phi}M_1(X)M_2(Y)$$

4.3.5 基于证据理论的不确定性推理

- 基于证据理论的不确定性推理的步骤：

（1）建立问题的样本空间*D*, 确定概率分配函数

（2）假设（证据、知识）的不确定表示：由经验给出，或者由规则和事实的信度度量计算基本概率数

（3）组合证据不确定性的算法

（4）不确定性的传递算法:计算所关心的子集*A*的信任函数值*Bel*(*A*)、似然函数值*Pl*(*A*)

（5）得到最终的推理结果：由信任函数值*Bel*(*A*) 、似然函数值*Pl*(*A*)得出结论。

4.3.5 基于证据理论的不确定性推理

✓ 例4.7 设有规则：

（1）如果 流鼻涕 则 感冒但非过敏性鼻炎（0.9）
或 过敏性鼻炎但非感冒（0.1）。

（2）如果 眼发炎 则 感冒但非过敏性鼻炎（0.8）
或 过敏性鼻炎但非感冒（0.05）。

✓ 有事实：

（1）小王流鼻涕（0.9）。

（2）小王发眼炎（0.4）。

✓ 问：小王患的什么病？

✓取样本空间D={h_1,h_2,h_3}：

h_1： 感冒但非过敏性鼻炎

h_2： 过敏性鼻炎但非感冒

h_3： 同时得了两种病（感冒且过敏性鼻炎）

4.3.5 基于证据理论的不确定性推理

✓取样本空间：$D=\{h_1,h_2,h_3\}$

h_1：“感冒但非过敏性鼻炎”，

h_2：“过敏性鼻炎但非感冒”，

h_3：“同时得了两种病”。（“感冒且过敏性鼻炎”）

✓取下面的基本概率分配函数：

$$M_1(\{h_1\})=\text{事实可信度}\times\text{规则可信度}=0.9\times0.9=0.81$$

$$M_1(\{h_2\})=0.9\times0.1=0.09$$

$$M_1(\{h_1,h_2,h_3\})=1-M_1(\{h_1\})-M_1(\{h_2\})=1-0.81-0.09=0.1$$

1)如果 流鼻涕 则 感冒但非过敏性鼻炎(0.9)
或 过敏性鼻炎但非感冒(0.1)。
2)如果 眼发炎 则 感冒但非过敏性鼻炎(0.8)
或 过敏性鼻炎但非感冒(0.05)。
(1)小王流鼻涕(0.9)。(2)小王发眼炎(0.4)。

4.3.5 基于证据理论的不确定性推理

✓取样本空间：$D=\{h_1,h_2,h_3\}$

h_1： “感冒但非过敏性鼻炎”，

h_2： “过敏性鼻炎但非感冒”，

h_3： “同时得了两种病”。（“感冒且过敏性鼻炎”）

✓取下面的基本概率分配函数：

$$M_2(\{h_1\})=0.4\times0.8=0.32$$

$$M_2(\{h_2\})=0.4\times0.05=0.02$$

$$M_2(\{h_1,h_2,h_3\})=1-M_2(\{h_1\})-M_2(\{h_2\})=1-0.32-0.02=0.66$$

1)如果 流鼻涕 则 感冒但非过敏性鼻炎(0.9)
或 过敏性鼻炎但非感冒(0.1)。
2)如果 眼发炎 则 感冒但非过敏性鼻炎(0.8)
或 过敏性鼻炎但非感冒(0.05)。
(1)小王流鼻涕(0.9)。(2)小王发眼炎(0.4)。

✓将两个概率分配函数组合：

$$M_1(\{h_1\})=0.81 \qquad M_2(\{h_1\})=0.32$$
$$M_1(\{h_2\})=0.09 \qquad M_2(\{h_2\})=0.02$$
$$M_1(\{h_1,h_2,h_3\})=0.1 \qquad M_2(\{h_1,h_2,h_3\})=0.66$$

$$\boxed{K=1-\sum_{X\cap Y=\Phi} M_1(X)M_2(Y)=\sum_{X\cap Y\neq\Phi} M_1(X)M_2(Y)}$$

$$K=1-[M_1(\{h_1\})M_2(\{h_2\})+M_1(\{h_2\})M_2(\{h_1\})]$$
$$=1-[0.81\times 0.02+0.09\times 0.32]$$
$$=1-0.045=0.955$$

$$\boxed{K^{-1}=1/0.955=1.05}$$

$$M(\{h_1\})=K^{-1}[M_1(\{h_1\})M_2(\{h_1\})+M_1(\{h_1\})M_2(\{h_1,h_2,h_3\})$$
$$+M_1(\{h_1,h_2,h_3\})M_2(\{h_1\})]$$
$$=1.05\times 0.8258=0.87$$

$$\boxed{M(A)=K^{-1}\sum_{X\cap Y=A} M_1(X)M_2(Y)}$$

$$M(\{h_2\})=K^{-1}[M_1(\{h_2\})M_2(\{h_2\})+M_1(\{h_2\})M_2(\{h_1,h_2,h_3\})$$
$$+M_1(\{h_1,h_2,h_3\})M_2(\{h_2\})]$$
$$=1.05\times 0.0632=0.066$$

$$M(\{h_1,h_2,h_3\})=1-M(\{h_1\})-M(\{h_2\})=1-0.87-0.066=0.064$$

$M(\{h_1\}) = 0.87$

$M(\{h_2\}) = 0.066$

$M(\{h_1, h_2, h_3\}) = 0.064$

h_1: “感冒但非过敏性鼻炎”，

h_2: “过敏性鼻炎但非感冒”。

✓信任函数：

$$Bel(\{h_1\}) = M(\{h_1\}) = 0.87$$

$$Bel(\{h_2\}) = M(\{h_2\}) = 0.066$$

✓似然函数：

$$Pl(\{h_1\}) = M(\{h_1\}) + M(\{h_1,\ h_2, h_3\})] = 0.87 + 0.064 = 0.934$$

$$Pl(\{h_2\}) = M(\{h_2\}) + M(\{h_1, h_2, h_3\}) = 0.066 + 0.064 = 0.13$$

$\{h_1\}$的信任区间：[0.87, 0.934]
$\{h_2\}$的信任区间：[0.066, 0.13]

✓结论：小王可能是感冒了而非过敏性鼻炎。

4.3.5 基于证据理论的不确定性推理

- 基于证据理论的不确定性推理的步骤：

（1）建立问题的样本空间D, 确定概率分配函数

（2）假设（证据、知识）的不确定表示：由经验给出，或者由规则和事实的信度度量计算基本概率数

（3）组合证据不确定性的算法

（4）不确定性的传递算法:计算所关心的子集A的信任函数值$Bel(A)$、似然函数值$Pl(A)$

（5）得到最终的推理结果：由信任函数值$Bel(A)$ 、似然函数值$Pl(A)$得出结论。

4.3 证据理论

- **优点：**
  - 证据理论满足比概率论更弱的公理系统。
  - 证据理论可以区分不知道和不确定的情况
  - 证据理论可以依靠证据的积累，不断地缩小假设集合。
- **缺点：**
  - 证据必须是独立的, 样本空间中的元素要求互斥
  - 基于概率分配函数要求给的值太多，计算比较复杂
  - 计算结果在数值上有时缺乏稳定性，基本概率分配函数的一个很小变化可能导致结果有较大的改变。在某些情况下得到的结果违背常理，如“Zadeh悖论”。

4.3 证据理论

"Zadeh悖论"：对证据理论的合成公式的合理性进行质疑。

例子： 利用**Dempster**证据合成规则对两个目击证人（**W1, W2**）判断某宗"谋杀案"的三个犯罪嫌疑人（**Peter, Paul, Mary**）中究竟谁是真正的凶手，合成后的基本概率分布函数$M()$如下表所示：

	$M_1()$	$M_2()$	$M()$
Peter	**0.99**	**0.00**	**0.00**
Paul	**0.01**	**0.01**	**1.00**
Mary	**0.00**	**0.99**	**0.00**

得到的结果（认定Paul是凶手）却违背了人的常识推理结果，Zadeh认为这样的结果无法接受。