16/17（一）浙江工业大学高等数学 A 考试试卷

学院：________ 班级：_______ 姓名:_________ 学号:_________

任课老师：________________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						

一、填空选择题（每小题 3 分）：

1． $d[\sin(1+3x^2)] =$ ___________________ dx。$6x\cos(1+3x^2)$

2． 设 $y = xe^{\frac{1}{x}}$，则 $\dfrac{dy}{dx} =$ __________________。$(1-\dfrac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}$

3． 函数 $y = 2x + \dfrac{8}{x}$ $(x > 0)$ 在区间____________上单调减少。$(0,2)$

4．函数 $f(x) = x - 2x^4$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值是______________。$\dfrac{3}{8}$

5．曲线 $y = 1 - xe^x$ 在 $x = 0$ 处的切线方程是________。$x + y = 1$

6． $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 x}dx =$ ____________________。3

7．设在区间 $[a,b]$ 上，$f(x) > 0$，$f'(x) > 0$，$f''(x) > 0$，记 $A = \int_a^b f(x)dx$，$B = f(a)(b-a)$，$C = \dfrac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$，则 A,B,C 的大小关系是 $B < A < C$

8．微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = xy$ 的通解是____________________。$y = ce^{\frac{1}{2}x^2}$

9．微分方程 $y'' + y = 1$ 的通解是__________________。$y = c_1\sin x + c_2\cos x + 1$

10． $f(x)$ 在 $x = x_0$ 附近可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0} = \dfrac{1}{2}$，则 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的（ C ）。

A) 拐点； B) 极大值点； C) 极小值点； D) 上述都不对。

11．设 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} =$（ A ）

A) $f'(x_0)$； B）$-f'(-x_0)$； C) $f'(-x_0)$； D) $-f'(x_0)$。

12．若 $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$，则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在区间 $[0,1]$ 内有（ D ）

A) 可去间断点； B) 跳跃间断点； C) 连续但不可导点； D) 连续可导。

二、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$

$\frac{1}{2}$

2．设 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$， $\frac{d^2y}{dx^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}$ $\qquad\qquad$ $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1+t^2}{t^3}$

3．求不定积分 $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$$

4．求定积分 $\int_{-2}^{0}\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$

$$\int_{-2}^{0}\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx=\int_{-2}^{0}\frac{x+2}{(x+1)^2+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{t+1}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{2}$$

5．求微分方程 $xy''+y'=\frac{1}{2}x$ 的通解

$(xy')'=\frac{1}{2}x$ $\qquad\qquad$ $xy'=\frac{1}{4}x^2+c_1$

$y'=\frac{1}{4}x+\frac{c_1}{x}$ $\qquad\qquad$ $y=\frac{1}{8}x^2+c_1\ln x+c_2$

三、试解下列各题（每小题 9 分）：

1．求椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点。

$y'=\frac{2x-y}{x-2y}=0,\quad x^2=1$

驻点 $(1,2)$ $\quad(1,-1)$，$(-1,1)$ $\quad(-1,-2)$

由此可知纵坐标最大和最小的点是：$(1,2)$ $\quad(-1,-2)$

2．过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D。（1）求图形 D 的面积；（2）求图形 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积。

切点 $(e,1)$，　切线 $y=\frac{1}{e}x$

平面图形 D 的面积 $A=\int_0^1 e^y dy-\frac{1}{2}e=\frac{1}{2}e-1$

旋转体的体积 $V=\pi\int_0^1\left[(e-ey)^2-(e-e^y)^2\right]dy=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$

四、（4 分） 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)\neq 0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$。

记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，$G(x)=\int_a^x g(t)dt$　在区间 $[a,b]$ 上利用柯西定理

五、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x-x}{x^2} & x>0\\ ax+b & x\le 0\end{cases}$，试确定常数 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续、可导；并求 $f'(0)$。

$$f(0^-)=b,\quad f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x^2}=0,$$

在 $x=0$ 处连续，所以 $b=0$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=a$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}=\frac{1}{3}$$

在 $x=0$ 处可导；所以 $a=\frac{1}{3}$，并且 $f'(0)=\frac{1}{3}$。

2．设 $f(x)$ 连续，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$，（1）写出微分方程 $y'+y=f(x)$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的一个特解 $y(x)$；（2）求 $\lim_{x\to+\infty}y(x)$。

特解　$y(x)=e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^t f(t)dt}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$