2015/16 浙江工业大学高等数学 A(上)期中考试试卷

学院：________ 班级：________ 姓名：________ 学号：________

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

一、试解下列各题（每小题 3 分）：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^x=$________。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=$________。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$________。

4. 设 $y=\sin\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________。

5. 设 $y=x\ln(1+x)$，则 $dy=$________dx。

6. 设 $x+y=e^{xy}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________。

7. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$，则 $f'(0)=$________。

8. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=$________。

9. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，则方程 $f'(x)=0$ 有________个实根。

10. 曲线 $y=xe^{-x^2}$ 在区间________是单调增加的。

11. 常数 a 满足条件________时，方程 $\ln x=ax$ 有两个实根。

二、试解下列各题（每小题 7 分）：

1. 用导数的定义证明指数函数 $y=a^x$ 的导数是 $y'=a^x\ln a$。

2．求函数 $y=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{e-e^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点及间断点的类型。

3． 设 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

4． 证明不等式：$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$，（$x>0$）。

5．确定常数 k，使曲线 $y=k(x^2-3)^2$ 在其拐点处的法线通过原点。

三、下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？对的请说明理由；错的试给出反例（每小题 3 分）：

1．如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在。

2．如果数列 $\{x_n\}$ 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

3．两个无穷小的商是无穷小。

4．如果极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{h}$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导。

四、（8 分）设 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个领域内满足关系式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程。

五、（8分）设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，证明：$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处可导的充分必要条件。

六、（4分）讨论函数$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$，在$x=0$处的连续性。