

16/17 (一) 浙江工业大学高等数学 A 期中考试试卷

学院: _____ 班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、填空选择题 (每小题 4 分):

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x+1})^{3x+4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $y = xe^{\frac{1}{x}}$, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $y = e^{-\sin x^2}$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 由方程 $xy^2 - e^{xy} + 2 = 0$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} n[\ln(n+3) - \ln n] = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 下列极限中, 正确的是 ()

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = 1$ C. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$.

7. 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$, 则当 $h \rightarrow 0$ 时有 ()

- A. dy 是 h 的等价无穷小; B. dy 是 h 的高阶无穷小;
C. $\Delta y - dy$ 是比 h 高阶的无穷小; D. $\Delta y - dy$ 是 h 的同阶无穷小;

8. 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 ()

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在; B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续;
C. $f'(0)$ 存在; D. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 但不可导;

9. 函数 $f(x) = \frac{1+2^{\frac{x+1}{x}}}{2-2^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点类型是 ()

- A. 一个可去间断点, 一个跳跃间断点; B. 一个无穷间断点, 一个可去间断点;
C. 一个跳跃间断点, 一个无穷间断点; D. 二个无穷间断点.

10. 方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内 ()。

- A. 无实根; B. 有唯一实根; C. 有二个实根; D. 有三个实根.

二、(10分) 判断下列各命题(结论)是否正确(在括弧内填入√或×):

1. 两个无穷小的商也是无穷小。()
2. 若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续, 且 $f(a) \neq 0$, 则存在 a 的一个邻域 $U(a)$, 在此邻域内有 $f(x) \neq 0$ 。()
3. 若 $f(x)$ 在 a 的一个邻域 $U(a)$ 内满足 $f(x) \leq f(a)$, 则必有 $f'(a)=0$ 。()
4. 若函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导, 且满足 $f(x) \leq g(x)$, 则在区间 $[a,b]$ 上有 $f'(x) \leq g'(x)$ 。()
5. 若函数 $f(x)$ 在 a 的一个邻域 $U(a)$ 内有定义, 则函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的充分必要条件是 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)-f(a+2h)}{h}$ 存在。()

三、试解下列各题(每小题7分):

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

2. 设 $y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$, 求: $\frac{dy}{dx}$

3. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$, 求: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

四、试解下列各题（每小题 7 分）：

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x - x}{x^3} & x > 0 \\ ax + b & x \leq 0 \end{cases}$, 试确定常数 a, b , 使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续、可导; 并求 $f'(0)$ 。

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可微, 证明当函数 $\Phi(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $x = a \neq 0$ 处有极值时, 曲线 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 处的切线必通过原点。

3. 当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时, 证明不等式: $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$

五、试解下列各题 (每小题 4 分):

1. 设函数 $f(x)$ 满足 $|f(x)| \leq x^2$, $x \in (-1, 1)$, 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性。

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$, 证明存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$ 。