2017/18 浙江工业大学高等数学ⅡA 考试试卷

学院：________ 班级:_________ 姓名：_________ 学号:________
任课老师：________

一、填空、选择题（本题满分 36 分，每小题 3 分）：

1、设二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的三个特解为：$x,\quad e^x,\quad e^{3x}$，则方程满足初始条件 $y(0)=4,\quad y'(0)=3$ 的特解是___。$y=3e^x+e^{3x}-3x$

2、过点 $M(3,1,-5)$ 且同时垂直 x 轴和 y 轴的直线方程是__。$\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+5}{1}$

3、动点 $M(x,y,z)$ 到原点的距离与到点 $(1,-1,2)$ 的距离相等，则动点 $M(x,y,z)$ 的轨迹方程是__。$x-y+2z=3$

4、函数 $u=2xy-z^2$ 在点 $(1,-1,1)$ 处方向导数的最大值__。$2\sqrt{3}$

5、交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx=$_。$\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^1 f(x,y)dy$

6、设 D：$|x|\le 1$，$0\le y\le 1$.则 $\iint\limits_D (xe^y+y)dxdy=$_____。1

7、若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n \quad (b>0)$，当 $x=0$ 时收敛，当 $x=2b$ 时发散，则该级数的收敛半径是___。b

8、周期为 2 的函数 $f(x)$，它在一个周期上的表达式为 $f(x)=x \quad -1\le x<1$，设它的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(\frac{3}{2})=$____。$-\dfrac{1}{2}$

9、函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$ 在点 $(0,0)$ 处（ C ）.

(A) 两个偏导数都不存在； (B) 两个偏导数存在；
(C) 偏导数一个存在，一个不存在； (D) 可微。

10、若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则下列结论错误的是（ C ）

（A）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续； （B）$f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 存在；

（C）$f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；

（D）曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处有切平面。

11、已知数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则（　B　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)^2$ 收敛；　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ 收敛；

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ 收敛；　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ 收敛。

12、下列级数中发散的是（　D　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}}$；　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n+1}$；　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$。

二、试解下列各题（本题满分 12 分，每小题 6 分）：

1、求微分方程 $xdy+(y-2x)dx=0$ 的通解。

解：$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=2$　线性方程，或齐次方程，或凑微分 $d(xy)-dx^2=0$　　2 分

通解　$y=\frac{c}{x}+x$　　6 分

2、求函数 $f(x,y)=xy(3-x-y)$ 的极值。

解：$\begin{cases} f_x(x,y)=3y-2xy-y^2=0 \\ f_y(x,y)=3x-2xy-x^2=0 \end{cases}$ 驻点 $(0,0)$，$(1,1)$，$(0,3)$，$(3,0)$　　3 分

$$f_{xx}=-2x, f_{xy}=3-2x-2y, f_{yy}=-2y$$

对 $(0,0)$，$(0,3)$，$(3,0)$，　$AC-B^2=-9<0$，不是极值点　　4 分

对 $(1,1)$，$AC-B^2=3>0, A<0$，是极大值点，极大值为 1　　6 分

3、设 z 是方程　$z=x+y\sin z$　所确定的 x，y 的函数，求：$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y\cos z}$，　　3 分　　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sin z}{1-y\cos z}$　　6 分

4、求曲线$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1 \\ x = 1 \end{cases}$上点$M(1,1,1)$处的切线方程。

解：曲线化为参数方程$x=1, y=t, z=t^2$，则切向量$\vec{T}=(0,1,2)$，　　3 分

切线方程$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$　　6 分

5、求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（参数方程$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$）围成图形在第一象限部分的面积。

解：记L_1为星形线，　$L_2: x=0, L_3: y=0$为直线。

面积$A=\oint_L xdy=\int_{L_1} xdy+\int_{L_2} xdy+\int_{L_3} xdy$　　3 分

$=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^2 xdx+0+0=\dfrac{3}{32}\pi a^2$　　6 分

6、求$\int_L \sqrt{y}ds$，其中L是抛物线$y=x^2$上点$O(0,0)$与点$B(1,1)$之间的一段弧。

解：　$\int_L \sqrt{y}ds=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx$　　4 分

$=\dfrac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$　　6 分

三、试解下列各题（本题满分 14 分，每小题 7 分）：

1、求$\oint\!\!\oint_\Sigma zdS$，其中$\sum$是由平面$x=0, y=0, z=0$及$x+y+z=1$所围成四面体的整个边界。

$$\oint\!\!\oint_\Sigma zdS=\left(\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_3}+\iint_{\Sigma_4}\right)zdS=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}(1-x-y)dxdy+\iint_{D_{yz}}zdydz+\iint_{D_{xz}}zdxdz+0$$

其中$\sum_1: x+y+z=1$，$\sum_2: x=0,\ \sum_3: y=0,\ \sum_4: z=0$　　3 分

$\iint_{D_{xy}}(1-x-y)\sqrt{3}dxdy=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，　　5 分

$\iint_{D_{yz}}zdydz=\iint_{D_{yz}}zdydz=\dfrac{1}{6}$，　　所以　$\oint\!\!\oint_\Sigma zdS=\dfrac{\sqrt{3}+2}{6}$　　7 分

2、求$\oiint\limits_{\Sigma} z(x^2+y^2+z^2)dxdy$，其中$\Sigma$是上半球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$z=0$所围成立体的边界曲面的外侧。

解一：直接计算$\oiint\limits_{\Sigma} z(x^2+y^2+z^2)dxdy=\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy+0$　　4 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}d\rho=\frac{2}{3}\pi \qquad 7\text{ 分}$$

解二：先化简被积函数，代入曲面方程再用高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma} z(x^2+y^2+z^2)dxdy=\oiint\limits_{\Sigma} zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\frac{2}{3}\pi$$

解三：直接用高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma} z(x^2+y^2+z^2)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+3z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}}(\rho^2+3z^2)dz$$

$$=2\pi\int_0^1(\rho^3\sqrt{1-\rho^2}+\rho\sqrt{(1-\rho^2)^3})d\rho\overset{1-\rho^2=t}{=\!=\!=\!=}\pi\int_0^1\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}\pi$$

四、（8 分）设L为xOy面上右半平面内任意一条简单闭曲线，$f(x)$有连续的二阶导数且满足$\oint_L\left(x-f'(x)\right)\frac{y}{x}dx+f'(x)dy=0$，$f(1)=f'(1)=0$，求$f(x),\quad x>0$。

解：积分与路径无关，由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 有 $f''(x)=(x-f'(x))\frac{1}{x}$　　2 分

得微分方程 $xy''+y'=x$，通解$y=\frac{1}{4}x^2+C_1\ln x+C_2$　　7 分

由初始条件可得 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}$　　8 分

五、（6 分）求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n$ 的收敛域与和函数。

解：收敛域 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　　3 分

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-2x)(1-x)} \qquad 6\text{ 分}$$