

2011 浙江工业大学高等数学(上)考试试卷 A

学院 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____

任课教师 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、填空题 (每小题 3 分):

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & x < 0 \\ a+x & x \geq 0 \end{cases}$, 使得 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $a =$ _____。

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 与 ax^3 是等价无穷小, 则 $a =$ _____。

3. 设 $y = x^2 \sqrt{1+x^2}$, 则 $y' =$ _____。

4. 设 $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = t \cos t \end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____。

5. 设 $y = y(x)$ 由方程 $y^2 - 2xy + 9 = 0$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____。

6. 设 $y = x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$), 则 $y' =$ _____。

7. 设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续, $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 2x) = 0$, 则 $f'(0) =$ _____。

8. 函数 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ 单调减少的区间是 _____。

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right] =$ _____。

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2} =$ _____。

11. $\int x \ln x dx =$ _____。

12. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx =$ _____。

13. 微分方程 $y'' + y' + y = 0$ 的通解是 _____。

二、试解下列各题（每小题 6 分）：

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x \sin 3x}$

2. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax} = \int_{-\infty}^a te^t dt$, 求常数 a

3. 求 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$

~~4.~~ 求微分方程 $y'' - ay'^2 = 0$, $x=0$ 时 $y=0, y'=-1$ 的特解。

三、(8分) 设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个邻域内具有三阶连续导数, 如果 $f''(x_0) = 0$, 而 $f'''(x_0) \neq 0$, 试问 $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点? 为什么? 请证明。

四、(8分) 设 $f(x)$ 连续, $f(x) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} x - \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^1 f^2(x) dx$, 试求: $\int_{-1}^1 f^2(x) dx$

五、(8分) 设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$, 证明: (1) $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;
(2) $2 - \sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

六、(4分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f''(x) < 0$, 证明: $\int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(\frac{a+b}{2})$

~~七~~、(9分) 设 $y = f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上的连续非负函数, 过点 $(2, \frac{2}{9})$, 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 1, x = t, (t > 1)$ 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为:
 $V(t) = \frac{\pi}{3}[t^2 f(t) - f(1)]$, 求曲线 $y = f(x)$ 的表达式。

勘误: 一填空题第 7 题改为:

7. 设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x}{x} = 0$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。