2012 浙江工业大学高等数学(上)考试试卷 A

学院：________ 班级：_______ 姓名:_________ 学号:_______

任课教师____________

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

一、选择填空题（每小题 3 分）：

1．下列极限中正确的是（ A ）。

（A）$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$；（B）$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=1$；

（C）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$；（D）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\frac{1}{2}$。

2．设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则下列几个数的大小顺序正确的是（ B ）。

（A） $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$；

（B） $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$；

（C） $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$；

（D） $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$。

3．$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=$______________。$-\frac{1}{2}$

4．设 $f'(0)=2,\ f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$______________。2

5．$d[\sin(1+3x^2)]=$____________________ dx。$6x\cos(1+3x^2)$

6．设 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t^2 \\ y=1-t \end{cases}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$______________。$\frac{1}{t^3}$

7. 方程 $2x^3+3x^2+6x=0$ 有______个实根。1

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{2x}=$______________。$\frac{1}{2}$

9. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx=$__________________。$2\sqrt{2}$

10. 微分方程 $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$ 的通解是_____。$(e^x+1)(e^y-1)=c$

11. 微分方程 $y''+y=1$ 的通解是_________。$y=c_1\sin x+c_2\cos x+1$

二、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．设 $y=2^x+\dfrac{\tan x}{x^2+1}$， 求： y'

解：

$$y'=2^x\ln x+\frac{(x^2+1)\sec^2 x-2x\tan x}{(x^2+1)^2}$$

2．求函数 $y=x^3-5x^2+3x+5$ 的拐点和凹凸区间。

解：

$$y''=6x-10,\quad x=\frac{5}{3}$$

$(-\infty,\dfrac{5}{3})$ $y''<0$ 凸区间； $(\dfrac{5}{3},+\infty)$ $y''>0$ 凹区间

拐点为 $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{20}{27}\right)$

3．证明不等式：$1+\dfrac{1}{2}x\geq\sqrt{1+x}$ $(x\geq 0)$。

解：

记 $f(x)=1+\dfrac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\geq 0,\ (x\geq 0)$$

则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，

所以 $f(x)\geq f(0)=0$

即 $1+\dfrac{1}{2}x\geq\sqrt{1+x}$ $(x\geq 0)$

4．证明不等式：$2e^{-\frac{1}{4}}\leq\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leq 2e^2$

解：记 $f(x)=e^{x^2-x}$，则 $f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=\dfrac{1}{2}$

由 $f(0)=1$； $f(\dfrac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$； $f(2)=e^2$

知 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上最大（小）值，即有 $e^{-\frac{1}{4}}\leq f(x)\leq e^2$；

从而有 $2e^{-\frac{1}{4}}\leq\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leq 2e^2$

三、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．求不定积分 $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$。

解：

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= -2\sqrt{1-x^2} - \arcsin x + c$$

2．求定积分 $\int_1^e x \ln x dx$。

解： $\int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

四、试解下列各题（每小题 5 分）：

1. 设 $f(x)$ 是连续函数，且满足方程 $f(x) - 2\int_0^x f(t)dt = x^2 + 1$，求： $f(x)$

解：

方程两边求导得 $f'(x) - 2f(x) = 2x$

这是一阶线性微分方程，从而有

$$f(x) = e^{\int 2dx}\left(\int 2xe^{\int -2dx} dx + c\right) = ce^{2x} - x - \frac{1}{2}$$

由 $f(0) = 1$ 得 $c = \frac{3}{2}$

从而得 $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - x - \frac{1}{2}$

2. 设 $f(x)$ 连续，且 $f(x) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, x - \sqrt[4]{1-x^2}\int_{-1}^{1} f^2(x)dx$，试求：$\int_{-1}^{1} f^2(x)dx$

解：

记 $A = \int_{-1}^{1} f^2(x)dx$，则 $f(x) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, x - \sqrt[4]{1-x^2}\, A$

$$f^2(x) = \frac{3}{4\pi}x^2 - 2A\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, x\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}\, A^2$$

从而有 $A = \int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{4\pi}x^2 - 2A\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, x\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}\, A^2\right)dx$

$$= \frac{1}{2\pi} + 0 + \frac{\pi}{2}A^2$$

解方程得 $A = \frac{1}{\pi}$， 即 $\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}$

3. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 区间上的非负连续函数，证明在 $[a,b]$ 区间上存在一点 c，使直线 $x=c$ 将曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a, x=b, y=0$ 所围的曲边梯形的面积二等分。

解： 记 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$，则 $g(b)=\int_a^b f(t)dt$ 是所围曲边梯形的面积，

再记 $F(x)=g(x)-\dfrac{1}{2}g(b)$

由 $F(a)=g(a)-\dfrac{1}{2}g(b)=-\dfrac{1}{2}g(b)$， $F(b)=g(b)-\dfrac{1}{2}g(b)=\dfrac{1}{2}g(b)$

显然 $F(a)$，$F(b)$ 异号，则由零点定理可知，在 $[a,b]$ 区间上存在一点 c

使 $F(c)=g(c)-\dfrac{1}{2}g(b)=0$， 即 $\int_a^c f(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_a^b f(t)dt$

即直线 $x=c$ 将所围的曲边梯形面积二等分。

五、（8 分）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+2x+2} & x\le 0\\ \dfrac{1}{1+e^x} & x>0\end{cases}$，$F(x)=\int_{-2}^x f(t)dt$

（1） 求 $F(x)$ 在[-2, 2]上的解析表达式。

（2） 讨论 $F(x)$ 在 $x=0$ 点的可导性。

解： （1） $$F(x)=\begin{cases}\arctan(x+1)+\dfrac{\pi}{4} & -2\le x\le 0\\ x-\ln(1+e^x)+\dfrac{\pi}{2}+\ln 2 & 0<x\le 2\end{cases}$$

（2）因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{2}$， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^x}=\dfrac{1}{2}$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

从而积分上限函数 $F(x)=\int_{-2}^x f(t)dt$ 在 $x=0$ 点可导

六、（8 分）设曲线 $y=\sqrt{x-1}$，

（1）求此曲线在点 $(2,1)$ 处的法线；

（2）求该曲线与在点 $(2,1)$ 处的法线及直线 $x=0, y=0$ 所围图形的面积；

（3）求上述所围图形绕 y 轴旋转所成立体的体积。

解：

（1）曲线在点 $(2,1)$ 处的法线方程 $y=5-2x$

（2）面积 $A=\int_0^1(y^2+1)dy+\int_1^5\dfrac{1}{2}(5-y)dy=\dfrac{16}{3}$

（3）体积 $V=\pi\int_0^1(y^2+1)^2dy+\dfrac{\pi}{4}\int_1^5(5-y)^2dy=\dfrac{28}{15}\pi+\dfrac{16}{3}\pi=\dfrac{36}{5}\pi$