14/15(一)浙江工业大学高等数学A考试试卷A

学院：________ 班级：_______ 姓名：_________ 学号：_______

任课老师：________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空选择题（每小题3分）：

1. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1})=$________。$-\dfrac{1}{2}$

2. 设 $y=y(x)$ 由方程 $xy=e^{x+y}$ 所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$______。$\dfrac{y-xy}{xy-x}$

3. 曲线 $y=2x+\dfrac{8}{x}$ $(x>0)$ 在区间__________是单调增加的。$x>2$

4. 函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$，则方程 $f'(x)=0$ 共有____2____实根。

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=$________。$\dfrac{1}{p+1}$

6. 微分方程 $y''+a^2y=0$ 的通解是___。（常数 $a>0$）$y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$

7. 已知 $y=1,y=x,y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为__。$y=c_1(1-x)+c_2(1-x^2)+1$　　或者……….（表示不唯一）

8. 下列极限不存在的是（　B　）

A. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$；　B. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$；　C. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$；　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$。

9. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，$dy=f'(x_0)\Delta x$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y-dy$ 是 Δx 的（　B　）

A．等价无穷小；　B．高阶无穷小；　C．低阶的无穷小；　D．同阶无穷小。

10. 设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=1$，则下列选项正确的是（　B　）

A．$x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点；　B．$x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点；

C．$(a,f(a))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点；

D．$x=a$ 不是 $f(x)$ 的极小值点，$(a,f(a))$ 也不是 $y=f(x)$ 的拐点。

二、试解下列各题（每小题6分）：

1．设 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$，求：$\dfrac{dy}{dx}$　　解：$\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}\left(\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$　　6分

2．设 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t^{2} \\ y=1-t \end{cases}$，求：$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$　　解：$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{t}$　3分　$\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}=\dfrac{1}{t^{3}}$　　6分

3．求函数 $y=x^{3}-6x^{2}+9x-4$ 的极大值。

解：$y'=3(x-1)(x-3)$，驻点：$x=1,x=3$　　3分

判别知 $x=1$ 是极大值点，从而得极大值为0　　6分

4．求不定积分 $\int(\cos^{3}x-\cos^{2}x)dx$

解：$\int\cos^{3}xdx=\int(1-\sin^{2}x)d\sin x=\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^{3}x+c$　　3分

$\int\cos^{2}xdx=\int\dfrac{1+\cos 2x}{2}dx=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}+c$

从而 $\int(\cos^{3}x-\cos^{2}x)dx=\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^{3}x-\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}+c$　　6分

5．求定积分 $\int_{1}^{4}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$　　解：$\int_{1}^{4}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln x\Big|_{1}^{4}-\int_{1}^{4}2\sqrt{x}\dfrac{1}{x}dx$　　3分

$=4\ln 4-4\sqrt{x}\Big|_{1}^{4}=4\ln 4-4$　　6分

6．求曲线 $y=x^{3}-5x^{2}+6x$ 与 x 轴所围成的图形的面积。

解：面积 $A=\int_{0}^{2}(x^{3}-5x^{2}+6x)dx-\int_{2}^{3}(x^{3}-5x^{2}+6x)dx=\dfrac{37}{12}$．　6分

7．求微分方程 $xdy-ydx=x^{2}e^{x}dx$ 的通解。

解一：方程可化为一阶线性方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=xe^{x}$　　1分

通解 $y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int xe^{x}e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+c\right)=x(e^{x}+c)$　　6分

解二：方程可化为 $\dfrac{xdy-ydx}{x^{2}}=e^{x}dx$　　3分

从而有 $d\left(\dfrac{y}{x}\right)=de^{x}$　　$\dfrac{y}{x}=e^{x}+c$　　6分

三、（8 分）求曲线 $y=2x-x^2$ 与 $y=0$ 所围平面图形分别绕 x 轴与 y 轴旋转所得旋转体的体积。

解： $V_x=\int_0^2 \pi f^2(x)dx=\int_0^2 \pi(2x-x^2)^2 dx=\frac{16}{15}\pi$ 4 分

$V_y=\int_0^2 2\pi x f(x)dx=2\pi\int_0^2 x(2x-x^2)dx=\frac{8}{3}\pi$ 8 分

或 $V_y=\int_0^1 \pi\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2 dy-\int_0^1 \pi\left(1-\sqrt{1-y}\right)^2 dy=\frac{8}{3}\pi$

四、（8 分）设函数 $f(x)$ 是连续的周期函数，周期为 T，

（1）证明：$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$； （2）求：$\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin 2x}dx$。

解：参见教材 P250 例 7 每小题 4 分

五、（8 分）奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且单调增加，设 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$，

求证：（1）$F(x)$ 为奇函数；（2）$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少。

解：（1）因为 $F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt\overset{t=-u}{=\!=\!=}\int_0^x (x-2u)f(-u)du$

$=-\int_0^x (x-2u)f(u)du=-F(x)$ 所以 $F(x)$ 为奇函数 3 分

（2）$F(x)=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$

$F'(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_0^x f(x)dt=\int_0^x [f(t)-f(x)]dt$ 6 分

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，所以在 $[0,x)$ 上 $\int_0^x [f(t)-f(x)]dt<0$

所以，$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少。 8 分

六、（4 分）平面上曲线段 $y=2\sqrt{x}$，$0\le x\le 1$（抛物线）绕 x 轴旋转得一空间曲面（抛物面），试求该曲面（抛物面）的面积。

解： 由积分元素法可得 $dA=2\pi y ds$ 2 分

从而 $A=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx=\frac{8\pi}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1)$ 2 分