浙江工业大学 08/09(一)高等数学 A 考试试卷 A 标准答案

一、填空题选择题（每小题 3 分）：

1．e^{ab}， 2. 1， 3．$\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$, 4．$\dfrac{t}{2}$, 5．$\dfrac{-y}{e^y+x}$,

6. $\dfrac{1}{2}$, 7. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, 8. B, 9. C， 10. D.

二、试解下列各题（每小题 5 分）：

1． 解： $x=0$ 处函数不连续

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$$

$x=0$ 是第一类可去间断点

2． 解：$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\left(\cos\sqrt{x}-\cos x\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}2\frac{\dfrac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\sin x}{1}$$

$$=-1$$

3. 解：$=\int\sqrt{x+1}dx-\int\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

$$=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-2(1+x)^{\frac{1}{2}}+c$$

4. 解： 令 $\sqrt{x}=t, dx=2tdt$

$$=2\int_0^2 te^t dt$$

$$=2e^2+2$$

三、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．解：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf(x)}{x}=0$

$$\lim_{x\to 0}f(\frac{1}{x})=0$$

$a=0$ 时 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 连续

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)=A$$

2． 解： $f\left(\frac{1}{x}\right)\overset{令t=\frac{1}{u}}{=}\int_1^x\frac{\ln u}{u(u+1)}du$

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt=\frac{1}{2}\ln^2 x+c$$

又 $f(1)=0,c=0$

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt=\frac{1}{2}\ln^2 x$$

四、试解下列各题（每小题 5 分）：

1． 解：令 $x-y=u,y=x-u,\frac{dy}{dx}=1-\frac{du}{dx}$

$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{u},$ 即 $-udu=dx$

$$-\frac{u^2}{2}=x+c$$

$u=x-y$ 代入得：$-\frac{(x-y)^2}{2}=x+c$

2． 解：$F(x)=\int_a^x(x-t)f(t)dt+\int_x^b(t-x)f(t)dt$

$$=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt+\int_x^b tf(t)dt-x\int_x^b f(t)dt$$

$$F'(x)=\int_a^x f(t)dt-\int_x^b f(t)dt$$

$$F''(x)=2f(x)<0$$

$F(x)$ 是 (a,b) 上的凸函数

3． 解：令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt,G(x)=\int_a^x g(t)dt$

$F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，由柯西中值定理，

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

五、（9 分）

解： $V(x)=\int_{0}^{2\pi}\pi y^{2}(x)dx$

$=\int_{0}^{2\pi}\pi(1-\cos t)^{2}(1-\cos t)dt$

$=5\pi^{2}$ 5 分

$V(y)=\int_{0}^{2}\pi x_{2}^{2}(y)dy-\int_{0}^{2}\pi x_{1}^{2}(y)dy$

$=\pi\int_{2\pi}^{\pi}(t-\sin t)^{2}\sin tdt-\pi\int_{0}^{\pi}(t-\sin t)^{2}\sin tdt$

$=6\pi^{3}$

或 $V(y)=\int_{0}^{2\pi}2\pi x\left|y(x)\right|dx=6\pi^{3}$

六、（5 分）

解： 当 $x\neq 0$ 时,

$$F(x)=\int_{0}^{1}f(xt)dt\overset{令xt=u}{=}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(u)du$$

$$F'(x)=-\frac{1}{x^{2}}\int_{0}^{x}f(u)du+\frac{f(x)}{x}\left(x\neq 0\right)$$

又 $F(0)=0$

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0\ \ )}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}f(u)du}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=1$$

$$F'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^{2}}\int_{0}^{x}f(u)du+\frac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^{2}}\int_{0}^{x}f(u)du+\frac{f(x)}{x}\left(x\neq 0\right)\right)=1$$

$F'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

七、（9 分）

解： $S_{2}=\int_{0}^{x}y(t)dt,\quad S_{1}=\frac{1}{2}\frac{y^{2}}{y'}$

$$\frac{y^{2}}{y'}=\int_{0}^{x}y(t)dt+1$$

两边求导并整理得：

$$\begin{cases} y'^2 = yy'' \\ y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

解得 $y = e^x$