17/18（一）浙江工业大学高等数学考试试卷

参考答案

一、填空选择题（每小题 3 分）：

1．$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{\pi}{n}=\pi$

2．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x} & x>0\\ a+x & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续则常数 $a=$ 2

3．设 $y=\dfrac{1}{x}e^{-x^2}$，则 $dy=-\left(\dfrac{1}{x^2}+2\right)e^{-x^2}dx$

4．曲线 $y=e^{2x}-1$ 在 $x=0$ 处的切线是 $y=2x$

5．函数 $y=x^3+2x^2-6$ 的单调减少区间是 $\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$

6．设 $y=y(x)$ 由方程 $x\sin y+ye^x=\dfrac{\pi}{2}$ 所确定，则 $y'(0)=-\dfrac{\pi}{2}-1$

7．不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^2}{1+x}dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln|1+x|+c$

8．曲线 $y=x^3-5x^2+6x$ 与 x 轴所围成的图形的面积是 $\dfrac{37}{12}$

9．$f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}=\dfrac{1}{2}$，则 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的（ C ）。

A)拐点；B)极大值点；C)极小值点；D)上述都不对。

10．下列函数中哪一个是 $\sin 2x$ 的原函数（ D ）。

A) $\sin 2x$；B）$\cos 2x$；C）$1-\dfrac{1}{2}\sin 2x$；D）$1-\dfrac{1}{2}\cos 2x$。

11．设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，记 $A=\int_a^b f(x)dx$，$B=f(a)(b-a)$，$C=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则有（ C ）。

A）$A>B>C$；B）$A>C>B$；C）$C>A>B$；D）$C>B>A$。

二、试解下列各题（每小题 6 分）：

1． 求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{\sin x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{2}=\frac{1}{2}$$

2．设$\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求：$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{t}{2}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+t^2}{4t}$

3．证明不等式$2x\arctan x\ge\ln(1+x^2)$

记 $f(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$，$f'(x)=2\arctan x$

而 $f''(x)=\frac{2}{1+x^2}>0$ 易知$x=0$是 $f(x)$ 的最小值点，

所以有 $f(x)\ge f(0)=0$

4．求曲线 $y=(x+1)^2(x-2)$ 的极值点和拐点。

$y'=3(x-1)(x+1),\quad y''=6x$ 驻点 $x=\pm1$

易知 $x=-1$是极大值点，$x=1$是极小值点，

$(0,-2)$ 是拐点，

三、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．求不定积分$\int\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x+1}}dx$

解一：令$u=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

则有$\int\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{2}{1-u^2}du=\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+c=2\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})+c$

解二：令$x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec t$则有

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}=\int\sec t dt=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+c$$

$$=\ln\left|2x+2\sqrt{x^2+x}+1\right|+c$$

2．求定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\sqrt{1-\cos^2 x}dx$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\sqrt{1-\cos^2 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\left|\sin x\right|dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\left|\sin x\right|dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\left|\sin x\right|dx=\pi-1$$

3．求圆盘$x^2+y^2\le1$绕$x=-2$旋转一周所成旋转体的体积。

$$V=\int_{-1}^{1}\left[\pi(\sqrt{1-y^2}+2)^2-\pi(-\sqrt{1-y^2}+2)^2\right]dy=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy=4\pi^2$$

或，坐标轴平移，转变为：圆盘$(x-2)^2+y^2\le 1$绕y轴旋转一周的体积

用柱壳法有$V=2\int_1^3 2\pi xy dx=4\pi\int_1^3 x\sqrt{1-(x-2)^2}dx=4\pi^2$

4．已知 $f(x)$ 有连续的二阶导数， $f(0)=f(1)=1$，证明：

$$\int_0^1\left(f(x)+\frac{x(1-x)}{2}f''(x)\right)dx=1$$

$$\int_0^1\left(f(x)+\frac{x(1-x)}{2}f''(x)\right)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{x(1-x)}{2}f''(x)dx$$

而

$$\int_0^1\frac{x(1-x)}{2}f''(x)dx=\frac{x(1-x)}{2}f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1(\frac{1}{2}-x)f'(x)dx$$

$$=-(\frac{1}{2}-x)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(0)-\int_0^1 f(x)dx$$

$$=1-\int_0^1 f(x)dx$$

所以有$\int_0^1\left(f(x)+\frac{x(1-x)}{2}f''(x)\right)dx=1$

5．设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$内连续且 $f(x)>0$，证明函数$F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$在$(0,+\infty)$内为单调增加函数。

见教材 P243 例 7

四、（4 分）设函数 $f(x)$ 满足：$f(a)>0, f'(a)<0$ 且 $f''(x)<0$，证明方程 $f(x)=0$ 在$(a,+\infty)$内有唯一实根。

泰勒公式 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$

记$b=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$，易知$b\in(a,+\infty)$， $f(b)=\frac{f''(\xi)}{2}(b-a)^2<0$

又 $f(a)>0$，所以在(a,b)内方程 $f(x)=0$至少有一个根

由 $f''(x)<0$知 $f'(x)$单调减少，故在$(a,+\infty)$有 $f'(x)<f'(a)<0$，进而在$(a,+\infty)$内 $f(x)$单调减少，故在$(a,+\infty)$内，方程 $f(x)=0$至多有一个根。

所以，方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内有唯一实根。

五、（**9** 分）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+2x+2} & x\le 0\\ \dfrac{1}{1+e^x} & x>0\end{cases}$，$F(x)=\int_{-2}^{x} f(t)dt$

1．求 $F(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的解析表达式；2．讨论 $F(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性与可导性。

$$F(x)=\begin{cases}\arctan(x+1)+\dfrac{\pi}{4} & x\le 0\\ x-\ln(e^x+1)+\ln 2+\dfrac{\pi}{2} & x>0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{2}$ $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续，从而在 $[-2,2]$ 上连续，

由连续函数的原函数可导知 $F(x)$ 在 $x=0$ 点连续、可导。