浙江工业大学高等数学(上)期中考试试卷 A12

学院：________ 班级：_______ 姓名:_________ 学号:_______

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得 分								

一、试解下列各题（每小题 4 分）：

1．当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$，则 $X=$ $\sqrt{397}$ 时，使当 $|x|>X$ 时，有 $|y-1|<0.01$。

2．设 $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$，则 $y'=$ $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$。

3．设 $y=y(x)$ 由方程 $x\sin y+ye^x=0$ 所确定，则 $y'(0)=$ 0。

4．曲线 $y=x\ln(1+x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 是单调增加的。

5．质点沿曲线 $y=f(x)$ 运动，曲线在点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{3}$，在点 M 处质点的横坐标以 5（单位/秒）的速率增加，则在点 M 处质点的纵坐标的变化速率是 $\frac{5}{3}$。

二、试解下列各题（每小题 4 分）：

1．设 $y=\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}\right|$，则极限 $\lim\limits_{x\to1^+}y$ 及 $\lim\limits_{x\to1^-}y$ （ A ）

A） 存在且相等；　　B）存在但不相等；

C） 都不存在；　　D）只有一个存在；

2．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且当 $x\to0$ 时 $f(x)+2$ 与 $x+\sin x$ 为等价无穷小，则（ D ）

A） $f'(0)$ 不存在；　　B） $f'(0)=1$；

C） $f'(0)=0$；　　D） $f'(0)=2$；

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+2}{x+\sin x}=1$　$f(0)=-2$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+2}{x+\sin x}\cdot\frac{x+\sin x}{x}=1\cdot2=2$

3．设 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=$（ A ）

A） $f'(x_0)$；　B） $-f'(-x_0)$；　C） $f'(-x_0)$；　D） $-f'(x_0)$；

4．过点 $M(2,0)$ 所引曲线 $y=3-x^2$ 的切线中有一条的方程是（ B ）

A） $y=-4(x-2)$；　　B） $2x+y=4$；

C） $y=2x-4$；　　D） $y=-(x-2)$；

5．设 $f(x)$ 在含有 x_0 的区间 (a,b) 连续，$f(x_0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^{2/3}}=k<0$，则必有（ B ）

$\exists \mathring{U}(x_0)$ 有 $f(x)<0=f(x_0)$

A） $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；　　B） $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

C） $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内单调增加；　　D） $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内单调减少；

三、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．求极限 $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}-x=0$

2．求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\cdot(e^{\sin x-x}-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$

3. 已知 $f(x)=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x-2}$，求常数 a,b,c,d 使 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$。

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x-2}=1 \quad \therefore a=0 \quad b=1$

又 $\lim\limits_{x\to1}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x-2}=0 \quad \therefore \lim\limits_{x\to1}(x^2+cx+d)=0 \quad \therefore 1+c+d=0.$

且 $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x+c}{2x+1}=0 \quad \therefore \frac{2+c}{3}=0 \quad \therefore c=-2 \quad d=1$

四、(**8 分**) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\omega x & x<0\\ 2x^2+1 & x\ge0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶可导性。

$\because \lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\cos wx-1}{x}=0 \qquad \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x^2+1-1}{x}=0$

$\therefore f'(x)=\begin{cases}-w\sin wx & x<0\\ 0 & x=0\\ 4x & x>0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-w\sin wx}{x}=-w^2$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{4x}{x}=4$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶不可导.

五、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．设 $y=f(1-\cos x)$，$f''(x)$ 存在，求：$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\sin x\cdot f'(1-\cos x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\cos x\cdot f'(1-\cos x)+\sin^2 x\cdot f''(1-\cos x)$$

2．设 $\begin{cases}x=2te^t+1\\ y=t^3-3t\end{cases}$，求：$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-3}{2e^t+2te^t}$$

当 $x=1$ 时对应 $t=0$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=-\frac{3}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{6t(2e^t+2te^t)-(3t^2-3)(4e^t+2te^t)}{(2e^t+2te^t)^2}}{2e^t+2te^t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}=\frac{3}{2}$$

3．证明不等式：$\sqrt{1+x}>1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}\quad(x>0)$

法 1° $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\underbrace{\dfrac{\frac{3}{8}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}}}{3!}x^3}_{x>0\text{时}>0}>1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}$

法 2° 令 $f(x)=\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}$　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}$　$f''(x)=-\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时　$f''(x)>0$　$f'(x)\uparrow$　$f'(x)>f'(0)=0$

$\therefore f(x)\uparrow$　$\therefore f(x)>f(0)=0$.　$\therefore \sqrt{1+x}>1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}$

六、（**10 分**）在第一象限部分内的椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上求一点，使在该点的切线与两坐标轴所围的面积最小。

解：设该点为 $\left(x_0, \frac{3}{2}\sqrt{4-x_0^2}\right)$

由 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 得 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{9}y\cdot y'=0$　$y'|_{x=x_0}=-\dfrac{3x_0}{2\sqrt{4-x_0^2}}$

切线为 $y-\frac{3}{2}\sqrt{4-x_0^2}=-\dfrac{3x_0}{2\sqrt{4-x_0^2}}(x-x_0)$　令 $x=0$　$y=\dfrac{6}{\sqrt{4-x_0^2}}$；$y=0$　$x=\dfrac{4}{x_0}$

所围面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{4-x_0^2}}\cdot\dfrac{4}{x_0}=\dfrac{12}{x_0\sqrt{4-x_0^2}}$

令 $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$，即求 $f(x)$ 的最大值

$f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$　令 $f'(x)=0$.　$x=\sqrt{2}$

而当 $x<\sqrt{2}$　$f'(x)>0$　$x>\sqrt{2}$　$f'(x)<0$　$\therefore x=\sqrt{2}$ 是极大值.

$\therefore$ 在 $\left(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ 上的切线与两坐标轴所围面积最小

七、**（6 分）**下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例。

（1） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在；

（2） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在；

（3） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 不存在。

(1) 对. 用反证法，设 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在.

则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] - \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在. ∴矛盾

∴ $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在.

(2) 错. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{x}$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}(x-\frac{1}{x})$ 存在.

(3) 错. $\lim\limits_{x\to 0} x$ 存在，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ 存在.