16/17（一）浙江工业大学高等数学A期中考试试卷

学院：________ 班级：_______ 姓名：_________ 学号：_________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						

一、填空选择题（每小题4分）：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x+1})^{3x+4}=$ e^6 。

2. 设 $y=xe^{\frac{1}{x}}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ $e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ 。

3. 设 $y=e^{-\sin x^2}$，则 $dy=$ $-2x\cos x^2 e^{-\sin x^2}dx$

4. 由方程 $xy^2-e^{xy}+2=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}=$ $\dfrac{y^2-ye^{xy}}{xe^{xy}-2xy}$ 。

5 . $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n+3)-\ln n]=$ 3 。

6. 下列极限中，正确的是（ C ）

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$ B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=1$ C. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$ D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$ 。

7. 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，$\Delta y=f(x_0+h)-f(x_0)$，则当 $h\to0$ 时有（ C ）

A. dy 是 h 的等价无穷小； B. dy 是 h 的高阶无穷小；

C. $\Delta y-dy$ 是比 h 高阶的无穷小； D. $\Delta y-dy$ 是 h 的同阶无穷小；

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ D ）

A. $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在； B. $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续；

C. $f'(0)$ 存在； D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导；

9. 函数 $f(x)=\dfrac{1+2^{\frac{x+1}{x}}}{2-2^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点类型是（ C ）

A. 一个可去间断点，一个跳跃间断点； B. 一个无穷间断点，一个可去间断点；

C. 一个跳跃间断点，一个无穷间断点； D. 二个无穷间断点。

10. 方程 $x^3-3x+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内（ B ）。

A. 无实根； B. 有唯一实根； C. 有二个实根； D. 有三个实根。

二、（10 分）判断下列各命题（结论）是否正确（在括弧内填入 √ 或×）：

1．两个无穷小的商也是无穷小。（ × ）

2．若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，且 $f(a)\neq 0$，则存在 a 的一个邻域 $U(a)$，在此邻域内有 $f(x)\neq 0$。（ √ ）

3．若 $f(x)$ 在 a 的一个邻域 $U(a)$ 内满足 $f(x)\le f(a)$，则必有 $f'(a)=0$。（ × ）

4．若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且满足 $f(x)\le g(x)$，则在区间 $[a,b]$ 上有 $f'(x)\le g'(x)$。（ × ）

5．若函数 $f(x)$ 在 a 的一个邻域 $U(a)$ 内有定义，则函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的充分必要条件是 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a+2h)}{h}$ 存在。（ √ ）

三、试解下列各题（每小题 7 分）：

1． 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\cdot(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$$

2．设 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$，求：$\dfrac{dy}{dx}$

$$\ln y=x\cdot\left[\ln x-\ln(1+x)\right]$$

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{x}{1+x}+x\cdot\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right]$$

$$y'=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\cdot\left[\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right]$$

3． $\begin{cases}x=\ln\left(1+t^2\right)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，求：$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$$

四、试解下列各题（每小题 7 分）：

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x-x}{x^3} & x>0\\ ax+b & x\le 0\end{cases}$，试确定常数 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续、可导；并求 $f'(0)$。

解：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan^2x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=b$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\therefore b=\dfrac{1}{3}$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\tan x-x}{x^3}-\frac{1}{3}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\tan x-3x-x^3}{3x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\sec^2x-3-3x^2}{12x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3(\tan^2x-x^2)}{12x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\tan x-x)(\tan x+x)}{4x^3}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax}{x}=a$ 又 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导 $\therefore a=0$

$\therefore f'(0)=0$

2．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微，证明当函数 $\Phi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $x=a\ne0$ 处有极值时，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处的切线必通过原点。

证明：$\Phi'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

又 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微，而 $\Phi(x)$ 在 $x=a\ne0$ 处有极值

$\therefore \Phi'(a)=0$ $\therefore af'(a)=f(a)$

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的切线：$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$\because af'(a)=f(a)$ $\therefore$ 切线过原点.

3．当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时，证明不等式：$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$

证明：令 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$

$\because f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$

令 $g(x)=x\sec^2 x-\tan x$ 则 $g'(x)=\sec^2 x+2x\sec^2 x\tan x-\sec^2 x$

$=2x\sec^2 x\tan x$

$\therefore$ 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时 $g'(x)>0$ 则有 $f'(x)>0$ 即有 $f(x)\uparrow$

$\therefore$ 当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时 $f(x_1)<f(x_2)$ 即 $\frac{\tan x_1}{x_1}<\frac{\tan x_2}{x_2}$

即 $\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$

五、试解下列各题（每小题 4 分）：

1．设函数 $f(x)$ 满足 $|f(x)|\le x^2$，$x\in(-1,1)$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性。

解：当 $x=0$ 时 $|f(0)|\le 0$ $\therefore |f(0)|=0$ 即 $f(0)=0$

$\therefore 0\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\le\left|\frac{x^2}{x}\right|=|x|$

令 $x\to 0$，则有 $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 上可导.

2．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，证明存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$。

证明：令 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$

则 $F(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续.

又 $F(0)=f(0)-f(\frac{1}{2})$ $F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-f(1)$

即 $f(0)=f(1)$

若 $f(0)=f(\frac{1}{2})$，则取 $\xi=0$ 即可

若 $f(0)\ne f(\frac{1}{2})$，则 $F(0)\cdot F(\frac{1}{2})=-(f(0)-f(\frac{1}{2}))^2<0$

$\therefore \exists\xi\in(0,\frac{1}{2})$ 有 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$

综上可得 $\exists\xi\in[0,1]$ 有 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$