2014/15 浙江工业大学高等数学 A(上)期中考试试卷

学院：________ 班级：______ 姓名:________ 学号:______

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

一、试解下列各题（每小题 3 分）：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+1}\right)^{x+1}=$ $\sqrt{e}$。

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=$ ∞。

3. 设 $y=xe^{x^2}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ $(1+2x^2)e^{x^2}$。

4. 设 $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$，则 $dy=$ $-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dx。

5. 设 $xy=e^{x+y}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ $\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$。

6. 设 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ $\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left[\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right]$。

7. 设 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{h}=$ -4。

8. 曲线 $y=x\ln(1+x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 是单调增加的。

9. $x=0$ 是函数 $y=e^{x+\frac{1}{x}}$ 的间断点，间断点的类型是 第二类间断点。

10. 当 $x\to 0$ 时 $\dfrac{2}{3}(\cos x-\cos 2x)$ 是 x^2 的 D。

(A) 高阶无穷小； (B) 同阶无穷小，但不是等价无穷小；
(C) 低价无穷小； (D) 等价无穷小；

二、试解下列各题（每小题 6 分）：

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(2x)^2}{x^2}=2$

2. 设$\begin{cases} x=2\sqrt{t} \\ y=1+\sqrt[3]{t} \end{cases}$，求：$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3}t^{-\frac{1}{6}} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{18}t^{-\frac{7}{6}}}{t^{-\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{18}t^{-\frac{2}{3}}$$

3. 证明不等式：$|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$

证明：令 $f(x)=\arctan x$ $\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$

$\therefore |\arctan a-\arctan b|=\frac{1}{1+\xi^2}|a-b|\le|a-b|$

4. 讨论方程 $8x^3-6x+1=0$ 在区间 $(-1,1)$ 内的实根个数。

解：令 $f(x)=8x^3-6x+1$

$f'(x)=24x^2-6$ 令$f'(x)=0$ $x=\pm\frac{1}{2}$

x	-1	$(-1,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1)$	1
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3

由零点定理和单调性可得在$(-1,1)$内方程有3个实根.

5. 求函数 $f(x)=x^4(12\ln x-7)$ 的拐点。

解：$f'(x)=16x^3(3\ln x-1)$ $\quad f''(x)=144x^2\ln x$

令 $f''(x)=0$ 得$x=1$，$x=0$处$f''(x)$不存在.

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$		$-$		$+$

$\therefore (1,-7)$为拐点.

6. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$，求 $f'(1)$

方法一：$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x-2)\cdots(x-n)$

$=(-1)^{n-1}(n-1)!$

方法二：令 $f(x)=(x-1)g(x)$ $\quad g(x)=(x-2)\cdots(x-n)$

$f'(x)=g(x)+(x-1)g'(x)$ $\quad f'(1)=g(1)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$

三、下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？对的请说明理由；错的试给出反例（每小题 3 分）：

1. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在。

对. 用反证法，假设 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)-f(x)]$

$= \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] - \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，得出矛盾.

2. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$ 不存在。

错. 反例：$f(x)=x \quad g(x)=\sin\frac{1}{x} \quad x_0=0$

$\lim\limits_{x\to 0} x$ 存在，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ 存在.

3. 如果函数 $f(x)$ 在 a 连续，那么 $|f(x)|$ 也在 a 连续。

对. 证：$\because \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

又 $\because \big||f(x)|-|f(a)|\big| < |f(x)-f(a)|$ $\therefore$ 当 $0<|x-a|<\delta$ 时有

$\big||f(x)|-|f(a)|\big|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|$

4. 如果函数 $|f(x)|$ 在 a 连续，那么 $f(x)$ 也在 a 连续。

错. 反例：$f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$

$|f(x)|=1$ 在 0 连续，但 $f(x)$ 在 0 不连续.

四、（6 分）设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内具有三阶连续导数，如果 $f''(x_0)=0$，而 $f'''(x_0)\neq 0$，试问 $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点？为什么？请证明。

不妨设 $f'''(x_0)>0$

则 $f'''(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} > 0$

则 $\exists \mathring{U}(x_0,\delta)$，使 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$，$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$

即 若 $x\in(x_0-\delta, x_0)$，$f''(x)<0$

$x\in(x_0, x_0+\delta)$，$f''(x)>0$

$\therefore (x_0, f(x_0))$ 为拐点.

五、（8 分）设 $f(x)=3x^2+Ax^{-3}, 0<x<+\infty$，其中 A>0。试讨论 A 为何值时，使对任一 $x\in(0,+\infty)$ 都有 $f(x)\geq 20$。

$f'(x)=6x-3Ax^{-4}=\dfrac{6x^5-3A}{x^4}$ $f''(x)=6+12Ax^{-5}$

令 $f'(x)=0$ $x=\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$ (唯一驻点)

又 $f''\left(\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\right)=30>0$ 极小值

$\therefore f_{min}\left(\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\right)=20$

$\therefore$ 只须 $f\left(\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\right)\geq 20 \Rightarrow A\geq 64$

六、（8 分）讨论函数 $y=\begin{cases} x^k\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性（$k>0$）。

$\lim\limits_{x\to 0} x^k\sin\frac{1}{x}=0$

$\therefore$ 当 $k>0$ 时，在 $x=0$ 连续

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^k\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{k-1}\sin\frac{1}{x}$

$\therefore$ 当 $k>1$ 时 在 $x=0$ 可导

当 $k>0$ 时 在 $x=0$ 连续.