浙江工业大学 2010 - 2011 学年第二学期
概率论与数理统计试卷

姓名：__________学号：__________ 班级：__________任课教师：__________

一. 填空题（每空 2 分，共 30 分）

1. $\underline{\ 0.8\ }$
2. $\underline{\frac{32}{125}}$，$\underline{\frac{48}{125}}$
3. $a=\underline{\ 3\ }$
4. $\underline{\ 1\ }$，$\underline{\ 1\ }$，$\underline{\ \frac{8}{9}\ }$
5. $\underline{\ 1\ }$，$\underline{\ -1\ }$，$\underline{\begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}}$
6. $\underline{\ 0.6826\ }$
7. $\underline{\ 9\ }$，$\underline{\ 1\ }$
8. $\underline{\ (4.412, 5.588)\ }$
9. $\underline{\ \frac{1}{\sqrt{80\pi}}e^{-\frac{(z-3)^2}{80}}\ }$

二. 选择题（每题 2 分，共 10 分） 1. A 2. B 3. B 4. A 5. C

三. 计算题（第一题 8 分，第四题 12 分，其余每题 10 分，共 60 分）

1. **解：** 记 A_1, A_2, A_3 分别表示该产品为甲、乙、丙厂生产，B 表示该产品为次品。

   1）

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3) \\ &= 0.4\times 0.01+0.4\times 0.02+0.2\times 0.04=0.02 \end{aligned}$$

   2）

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.008}{0.02}=0.4$$

2. 解：记鞋子配成的双数为 X，则

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{C_5^4 2^4}{C_{10}^4} = \frac{8}{21} \\
P(X=1) &= \frac{C_5^1 C_4^2 2^2}{C_{10}^4} = \frac{4}{7} \\
P(X=2) &= \frac{C_5^2}{C_{10}^4} = \frac{1}{21} \\
EX &= \frac{4}{7} \times 1 + \frac{1}{21} \times 2 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

3. 解：

1) $P(X>1) = e^{-\lambda 1} = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$，从而

$$P(X>2) = e^{-\lambda 2} = e^{-1}$$

2) $EX^2 = (EX)^2 + Var(X) = 4 + 4 = 8$

3) 对 $y>0$，

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(X^2 \le y) \\
&= 1 - P(X > \sqrt{y}) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

从而密度函数为 $f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{y}}, & y>0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$。

4. 解：

1) $1 = \int_0^2 \int_0^2 a(x+y)dxdy = a\int_0^2 (2+2y)dy = 8a$，从而 $a = \frac{1}{8}$。

2)

$$\begin{aligned}
P(X+Y \le 2) &= \int_0^2 \int_0^{2-x} a(x+y)dydx \\
&= a[\int_0^2 x(2-x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 dx] \\
&= a[4 - \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{3}] = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

3）

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \\
&= \begin{cases} \frac{1}{4}+\frac{1}{4}x, & 0<x<2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{4}+\frac{1}{4}y, & 0<y<2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$

4）由对称性

$$
\begin{aligned}
EX &= EY = \int_0^2 (\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x)xdx = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{8}{3} = \frac{7}{6} \\
E(XY) &= \int_0^2\int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)xydxdy \\
&= \frac{1}{8}\int_0^2 (2x^2+\frac{8}{3}x)dx = \frac{1}{8}(2\times\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\times 2) = \frac{4}{3} \\
Cov(X,Y) &= E(XY)-EXEY = \frac{4}{3}-(\frac{7}{6})^2 = -\frac{1}{36} \\
EX^2 &= EY^2 = \int_0^2 \frac{1}{4}(x+1)x^2dx = \frac{1}{4}(4+\frac{8}{3}) = \frac{5}{3} \\
Var(X) &= Var(Y) = \frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2 = \frac{11}{36} \\
\rho(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = -\frac{1}{11}
\end{aligned}
$$

5. **解：**

1）矩估计：

$$EX = \int_0^a \frac{2x}{a^2}xdx = \frac{2}{3}a$$

从而 $a=\frac{3}{2}EX$，$\hat{a}=\frac{3}{2}\overline{X}$

2) 极大似然估计：似然函数为

$$L(a) = \begin{cases} \Pi_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{a^2}, & 0 < x_i < a, i = 1, 2, \cdots, n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Pi_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{a^2}, & a \leq \max(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

该函数关于 a 是单调递减函数，其极大似然估计为$\hat{a} = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

6. **解：**

1) $H_0 : \mu = \mu_0 = 500$，$H_1 : \mu \neq \mu_0$

2) $t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{488-500}{6.29/9} = 17.17$

3) 拒绝域为 $(-\infty, -2.306) \cup (2.306, \infty)$

4) 在拒绝域中，拒绝原假设，不能认为该包装机包装食盐的平均重量是正常的。

浙江工业大学 2011 - 2012 学年第二学期
概率论与数理统计试卷

姓名：__________学号：__________ 班级：__________任课教师：__________

一. 填空题（每空 2 分，共 28 分）

1. $\underline{\quad 0.4 \quad}$
2. $\underline{\quad 1 \quad}$，$\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$
3. $\underline{\quad \frac{19}{27} \quad}$
4. $\underline{\quad 1 \quad}$，$\underline{\quad 2 \quad}$
5. $\underline{\quad \frac{2}{3} \quad}$
6. $\underline{\quad 6-2\sqrt{2} \quad}$
7. $\underline{\quad \geq \frac{3}{4} \quad}$
8. $\underline{\quad 0.6826 \quad}$
9. $\underline{\quad \sqrt{2} \quad}$，$\underline{\quad 2 \quad}$，$\underline{\quad 2 \quad}$
10. $\underline{\quad (39.51, 40.49) \quad}$

二. 选择题（每题 3 分，共 12 分）

1. B
2. B
3. D
4. B

三. 解答题（共 60 分）

1. (8 分)

解：

1) 3 本语文书放在一起的概率为 $p_1 = \frac{3!8!}{10!} = \frac{1}{15}$;

2) 4 本数学书放在一起的概率为 $p_3 = \frac{4!7!}{10!} = \frac{1}{30}$;

4 本数学书放在一起且 3 本物理书放在一起的概率为

$p_4 = \frac{4!3!5!}{10!} = \frac{1}{210}$，

则所求概率为 $p_2 = p_3 - p_4 = \frac{1}{35}$。

2. (10 分)

解： 用 A_1, A_2 分别表示被保险人为甲类和乙类，用 B 表示被保险人发生事故。

1) $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = 0.3 \times 0.4 + 0.7 \times 0.2 = 0.26$;

2) $P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{0.3\times 0.4}{0.26} = \frac{6}{13} = 0.46$。

3. （10 分 ）

解：

1)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x se^{-\frac{s^2}{2}}ds = 1 - e^{\frac{-s^2}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

2) $y = x^2$ 在 $(0, \infty)$ 上单调，$x = \sqrt{y}$，

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0\ , & y < 0 \end{cases}$$

4. (12 分)

解：

1)

$$\int_0^1 dy \int_0^y Axdx$$
$$= A\int_0^1 \frac{1}{2}y^2 dy = \frac{A}{6}$$

3）对 $0<x<1$，

$$f_X(x)=\int_x^1 Axdy=6x(1-x)$$

对于 $0<y<1$，

$$f_Y(y)=\int_0^y Axdx=3y^2$$

3）

$$\begin{aligned}
EX &= \int_0^1 6x(1-x)xdx = 2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\\
EX^2 &= \int_0^1 6x(1-x)x^2dx = \frac{3}{2}-\frac{6}{5}=\frac{3}{10}\\
EY &= \int_0^1 3y^2ydy=\frac{3}{4}\\
EY^2 &= \int_0^1 3y^2y^2dy=\frac{3}{5}\\
EXY &= \int_0^1\int_0^y 6xxydxdy=\int_0^1 2y^4dy=\frac{2}{5}\\
\mathrm{cov}(X,Y) &= \frac{2}{5}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{40}\\
DX &= \frac{3}{10}-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{20}\\
DY &= \frac{3}{5}-(\frac{3}{4})^2=\frac{3}{80}\\
\rho(X,Y) &= \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

5.（10 分）

解：

1）

$$\begin{aligned}
EX &= \int_0^{+\infty}\lambda^2xe^{-\lambda x}xdx=\frac{2}{\lambda}\\
\lambda &= \frac{2}{EX}\\
\hat{\lambda} &= \frac{2}{\overline{X}}
\end{aligned}$$

2）极大似然函数为：

$$L(\lambda) = \Pi_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i e^{-\lambda x_i}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\lambda} - x_i$$

$$\hat{\lambda} = \frac{2}{\overline{X}}$$

6.（10 分）**解**： $H_0 : \mu = \mu_0 = 72$; $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \approx -2.453$$

拒绝域为 $(-\infty, -2.2622) \cup (2.2622, \infty)$，在拒绝域中，故拒绝原假设，铅中毒患者与正常人的脉搏有显著差异。

概率统计 2012-2013 学年第 I 学期期末试卷参考答案

一、1. 9/64；

2. 0.25

3. 4

4. 2/9， 1/9

5. 5/3， 0.928

6. 1/2， 1/4

7. （4.412，5.588）

二、 D A C C D

三、 1. 解： A_1 表示乘火车； A_2 表示乘轮船； A_3 表示乘汽车； A_4 表示乘飞机；

B 表示迟到；

则

$$P\left(A_1\right)=\frac{3}{10},P\left(A_2\right)=\frac{1}{5},P\left(A_3\right)=\frac{1}{10},P\left(A_4\right)=\frac{2}{5}$$

$$P\left(B\left|A_1\right.\right)=\frac{1}{4},P\left(B\left|A_2\right.\right)=\frac{1}{3},P\left(B\left|A_3\right.\right)=\frac{1}{2},P\left(B\left|A_4\right.\right)=0$$

由全概率公式，

$$P\left(B\right)=\sum_{i=1}^{4}P\left(A_i\right)P\left(B\left|A_i\right.\right)=\frac{23}{120}$$

由贝叶斯公式，

$$P\left(A_1\left|B\right.\right)=\frac{P\left(A_1\right)P\left(B\left|A_1\right.\right)}{P\left(B\right)}=\frac{9}{23}$$

2. 1） $P\left(x\geq a\right)=1-P\left(x<a\right)=P\left(x<a\right)$

所以 $P\left(x<a\right)=\frac{1}{2}$

即 $P\left(x<a\right)=\int_0^a 2xdx=\frac{1}{2}$

得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2） 由于 $F\left(y\right)=P\left(Y\leq y\right)=P\left(X^2\leq y\right)$

如果 $y<0,F\left(y\right)=0$

如果 $y>1,F\left(y\right)=1$

当 $0 \le y \le 1, F(y) = P\left(0 \le X \le \sqrt{y}\right) = \int_0^{\sqrt{y}} 2x dx = y$

所以

$$f(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & else \end{cases}$$

3. 1）由 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Axe^{-(x+y)}dxdy = 1$ 得 $A = 1$

2）$f_X(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-(x+y)}dy = xe^{-x}$

$f_Y(y) = \int_0^{+\infty} xe^{-(x+y)}dx = e^{-y}$

由于 $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

所以相互独立

3）$P(X+Y<1) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xe^{-(x+y)}dy = 1 - \frac{5}{2}e^{-1}$

4. 由于 $X \sim P(2)$，所以 $E(X) = 2, \quad Var(X) = 2$

由于 $Y \sim U(0,6)$，所以 $E(Y) = 3, \quad Var(Y) = 3$

则 $E(Z) = 3E(X) - 2E(Y) = 0$

$$Cov(X,Y) = \rho_{XY}\sqrt{Var(X)Var(Y)} = 1$$

$$\begin{aligned} Var(Z) &= 9Var(X) + 4Var(Y) - 12Cov(X,Y) \\ &= 18 + 12 - 12 \\ &= 18 \end{aligned}$$

5. 1）由 $E(X) = \int_1^{+\infty} x\theta x^{-\theta-1}dx = \frac{\theta}{\theta-1} = \overline{X}$

得 $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$

2）似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{-\theta-1} = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta - (\theta + 1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

求导，并令导数等于 0

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$$

得 $\hat{\theta} = n / \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$

6. $H_0 : \mu = 72$; $H_1 : \mu \neq 72$

当 H_0 成立时， 统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

计算， $\overline{X} = 66.44, s = 7.18$， 则

$$t = \frac{66.44 - 72}{7.18 / \sqrt{16}} = -3.098$$

由于 $|t| = 3.098 > t_{15}(0.025) = 2.1315$， 拒绝原假设。

浙江工业大学 2012 - 2013 学年第二学期
概率论与数理统计试卷

姓名：__________学号：__________ 班级：__________任课教师：__________

一. 填空题 (每空 2 分，共 22 分)

1. $\underline{\quad 0.6 \quad}$。
2. $\underline{\quad 0.12 \quad}$，$\underline{\quad 0.37 \quad}$。
3. $\underline{\quad 6 \quad}$，$\underline{\quad 0.72 \quad}$。
4. $\underline{\quad 0.1 \quad}$。
5. $\underline{\quad 4 \quad}$，$\underline{\quad 4 \quad}$，$\underline{\quad \geq \frac{5}{9} \quad}$。
6. $\underline{\quad (9.10, 15.56) \quad}$。
7. $\underline{\quad 0.6826 \quad}$。

二. 选择题 (每题 3 分，共 18 分)

1. D
2. B
3. C
4. B
5. A
6. C

三. 计算题（共 60 分）

1.（12 分）**解：**

1），2）

Y \ X	0	1	2	
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{6}{15}$
1	0	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$
2	0	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	

3）$E(X-1)(Y-1) = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} \times (-1) = \frac{1}{15}$。

2.（16 分）解：

1）$A+B=1, -A+B=0 \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}$；

2）$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

3）$P(-\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{6})=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$；

4）$E\cos(X)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\cos^2 x dx=\frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x+1)dx=\frac{1}{4}(2+\pi)$

3.（12 分）解：

1）

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^1 \int_0^x C(y+1)dydx \\ &= C\int_0^1 \frac{1}{2}x^2 + xdx \\ &= \frac{2}{3}C \Rightarrow C = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

2）

$$\begin{aligned}P(X<2Y) &= \int_0^1 \int_{x/2}^x \frac{3}{2}(y+1)dydx \\ &= \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{3}{4}x^2 + xdx \\ &= \frac{3}{4}(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}) = \frac{9}{16}\end{aligned}$$

3）

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_0^x \frac{3}{2}(y+1)dy = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \\ f_Y(y) &= \int_y^1 \frac{3}{2}(y+1)dx = \frac{3}{2}(1-y^2)\end{aligned}$$

$f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$，故不独立。

4.（10 分）**解：**

1）矩估计：

$$EX = E(X-1)+1 = \lambda + 1 \Rightarrow \lambda = EX - 1$$

矩估计为 $\hat{\lambda} = \overline{X} - 1$。

2）极大似然估计：

$$L(\lambda) = \Pi_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i-1}}{(x_i-1)!}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n}[-1 + \frac{x_i - 1}{\lambda}]$$

极大似然估计为 $\hat{\lambda} = \overline{X} - 1$。

5.（10 分）**解：**

1）$H_0 : \mu = \mu_0 = 18$，$H_1 : \mu \neq \mu_0$

2）$u = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = 0.6$

3）拒绝域为 $(-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$

4）不在拒绝域中，故可以认为该灌装机工作正常。

浙工大2013/2014第一学期概率统计试卷（A）参考答案

一、填空题（每空3分，共 30 分）

1、8/15；　2、$(1-p)^3$；3、$B(n,p)$；4、4；　5、5/7；

6、$\lambda_1+\lambda_2$；7、72；　8、np^2；　9、$\frac{a}{2}+\frac{3b}{4}=1$；10、$F(1,1)$；

二、单选题(每小题2分,共16分)

1、A；2、C；3、B；4、D；5、C；6、B；7、B；8、C；

三.解答下列各题（每小题6分,共18分）

1．　设事件A,B满足$P(B\mid A)=P(\overline{B}\mid \overline{A})=\frac{1}{3}$，$P(A)=\frac{1}{3}$，求$P(B)$。

解：$P(B|\overline{A})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},P(\overline{A})=\frac{2}{3}$，

$$P(B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})+P(A)P(B|A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$$

2. **解**：因为$Y=e^X$，故Y不取负值，从而，当$y<0$时，则$f_Y(y)=0$；当$y>0$时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\le y\}=P\{0<Y\le y\}=P\{0<e^X\le y\}\\&=P\{-\infty<X\le \ln y\}=\Phi(\ln y).\end{aligned}$$

从而，$y>0$时，$f_Y(y)=F_Y'(y)=\Phi'(x)|_{x=\ln y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\ln y)^2}\cdot\frac{1}{y}.$

所以$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-(\ln y)^2/2}, & y>0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

3. 解：由$1=a+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+b+\frac{1}{4}$得$a+b=\frac{1}{4}$

由$P(X=x_1,Y=y_3)=P(X=x_1)P(Y=y_3)$得

$\frac{1}{4}=(a+\frac{3}{8})\frac{1}{2}$，即$a=\frac{1}{8}$，故$b=\frac{1}{8}$

Y的分布律为

Y	y_1	y_2	y_3
P	1/4	1/4	1/2

四.解答下列各题（每小题 10 分,共 30 分）

1.解： $E(X)=\frac{1}{8}\int_0^2 dx\int_0^2 x(x+y)dy=\frac{7}{6}, E(Y)=\frac{7}{6}$，

$E(X^2)=\frac{1}{8}\int_0^2 dx\int_0^2 x^2(x+y)dy=\frac{5}{3}, E(Y^2)=\frac{5}{3}$，

$Var(X)=\frac{5}{3}-\frac{49}{36}=\frac{11}{36}=Var(Y).$

$E(XY)=\frac{1}{8}\int_0^2 dx\int_0^2 xy(x+y)dy=\frac{4}{3},$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{9}{36}=-\frac{1}{36}$，

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=-\frac{1}{36}\cdot\frac{36}{11}=-\frac{1}{11}$ 。

2. 解：（1） σ^2的置信度 1−α的置信区间为$[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}]$，

计算得 σ^2的置信度 95%的置信区间为[707.22，3104.4].

(2) $H_0:\mu\le 1800, H_1:\mu>1800,$

选取统计量 $t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

$\alpha=0.05$**时，拒绝域为**$t>t_{0.05}(15)=1.753$，

计算得

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{1832-1800}{36/4}\approx 3.556>t_{0.05}(15)=1.753，$$

所以拒绝H_0，可以认为灯泡的平均寿命显著的大于 1800。

3． 解：似然函数为$L(\alpha)=(\alpha+1)^n(x_1\ x_2\cdots x_n)^\alpha$

$$\ln L(\alpha)=\ln[(\alpha+1)^n(x_1\ x_2\cdots x_n)^\alpha]=n\ \ln(1+\alpha)+\alpha\sum_{i=1}^n\ln\ x_i$$

令$(\ln L(\alpha))'=\frac{n}{1+\alpha}+\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$解得$\hat{\alpha}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^n\ln x_i}-1.$

所以参数α的最大似然估计量为$\hat{\alpha} = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i} - 1$.

五、本大题两个小题任选一题作答（6 分）

1. 设X_1, X_2, X_3, X_4为来自总体$N(1, \sigma^2)$的样本，求统计量$\dfrac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$的分布。

解　因X_1, X_2, X_3, X_4是来自总体$N(1, \sigma^2)$的样本，所以X_1, X_2, X_3, X_4相互独立且均服从正态分布$N(1, \sigma^2)$。由正态分布的叠加原理知：$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$；

$$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1),\ X_3 + X_4 - 2 \sim N(0, 2\sigma^2);\ \frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1),$$

故$(\dfrac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma})^2 \sim \chi^2(1)$, 且$\dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$与$(\dfrac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma})^2$相互独立，

故由 t 分布的定义知：

$$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \Bigg/ \sqrt{(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma})^2} = \frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} \sim t(1).$$

2 解：设$X_i\ (i = 1, 2, \cdots, 1200)$为第$i$笔销售收入实际少收的金额，

则$X_1, X_2, \cdots, X_{1200}$相互独立，服从同一分布$U(0, 0.1)$，

且$E(X_i) = 0.05, Var(X_i) = 1/1200$，

$$E(\sum_{i=1}^{1200} X_i) = \sum_{i=1}^{1200} E(X_i) = 60, Var(\sum_{i=1}^{1200} X_i) = \sum_{i=1}^{1200} Var(X_i) = 1,$$

由中心极限定理$\sum_{i=1}^{1200} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(60, 1)$

$$P(\sum_{i=1}^{1200} X_i \le 62) = P(\frac{\sum_{i=1}^{1200} X_i - 60}{1} \le \frac{62 - 60}{1}) \approx \Phi(2) = 0.9772$$

浙江工业大学 2013 - 2014 学年第二学期
概率论与数理统计参考答案

一. 填空题（每空 3 分，共 30 分）

1. $\underline{\ \frac{1}{3}\ }$
2. $\underline{\ \frac{3}{7}\ }$
3. $\underline{\ \frac{1}{4}\ }$
4. $\underline{\ \ 1\ \ }$
5. $\underline{\ \ 9\ \ }$，$\underline{\ \ 13\ \ }$
6. $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$
7. $\underline{\ 0.9544\ }$
8. $\underline{\ (2,1)\ }$，$\underline{\ \ 1\ \ }$

二. 选择题（每题 2 分，共 10 分）

1. C
2. D
3. A
4. B
5. B

三. 解答题（共 60 分）

1. 解：

1) $P(X=\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{6}{C_6^3}=0.3$；

2)

X	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$
p	0.3	0.6	0.1

3) $EX=\frac{\sqrt{3}}{4}[1\times 0.3+2\times 0.6+3\times 0.1]=\frac{9\sqrt{3}}{20}$；

4) $EX^2=\frac{3}{16}[1\times 0.3+4\times 0.6+9\times 0.1]=\frac{27}{40}$；
$Var(X)=EX^2-(EX)^2=\frac{27}{400}$。

2. 解：

1）$1=\int_0^1 Cx(1-x)dx=C(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\Rightarrow C=6$；

2）$x<0, F(x)=0$；$x>1, F(x)=1$；$0\le x\le 1$，$F(x)=\int_0^x 6(s-s^2)ds=3x^2-2x^3$；

3）$0<y<1$，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P((2X-1)^2\le y)=P(\frac{1-\sqrt{y}}{2}\le X\le \frac{1+\sqrt{y}}{2})=\frac{3}{2}\sqrt{y}-\frac{1}{2}y\sqrt{y}$；从而

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}\frac{1-y}{\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

3. 解：

1）$1=\int_0^1\int_0^1 Cx(1-y)dxdy=\frac{C}{4}\Rightarrow C=4$；

2）

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_0^1 4x(1-y)dy=2x,\ \ 0<x<1\\ f_Y(y)&=\int_0^1 4x(1-y)dx=2(1-y),\ \ 0<y<1\\ f(x,y)&=f_X(x)f_Y(y)\end{aligned}$$

因此，X,Y 独立。

3）

$$\begin{aligned}P(X<Y)&=\int_0^1\int_0^y 4x(1-y)dxdy\\ &=\int_0^1 2y^2(1-y)dy=2(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

4. 解：

矩估计：$EX=0\times(1-\theta)+2\times\theta-\theta^2)+3\times\theta^2=\theta^2+2\theta$，$\theta=\sqrt{1+EX}-1$，$\hat{\theta}=\sqrt{1+\overline{X}}-1=\sqrt{\frac{12}{5}}-1$；

极大似然估计：$L(\theta)=(1-\theta)^2(\theta-\theta^2)^2\theta^2=\theta^4(1-\theta)^4$，极大似然估计 $\tilde{\theta}$ 为最大值点 $\frac{1}{2}$。

5. 解：

$H_0 : \mu = \mu_0 = 20$，$H_1 : \mu \neq \mu_0$

$t = \frac{\overline{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = 2$；

拒绝域为 $(-\infty, -2.1315) \cup (2.1315, \infty)$；

t 的值不在拒绝域中，认为该机器生产的螺丝长度正常。

浙江工业大学 2014 - 2015 学年第一学期
概率论与数理统计试卷

姓名：__________学号：__________ 班级：__________任课教师：__________

一. 填空题 (每空 2 分，共 22 分)

1. $\underline{\quad 0.4 \quad}$
2. $\underline{\frac{5}{9}\quad}$
3. $\underline{\quad 2 \quad}$
4. $\underline{\quad 3 \quad}$，$\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$
5. $\underline{\frac{1}{3}\quad}$
6. $\underline{\ 0.8186\ }$
7. $\underline{\quad 2 \quad}$，$\underline{\quad \sqrt{2} \quad}$，$\underline{\quad 2 \quad}$
8. $\underline{\ \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\ }$

二. 选择题 (每题 3 分，共 18 分)

1. B
2. D
3. B
4. A
5. C
6. B

三. 解答题（共 60 分）

1.（8 分）**解：** A 表示带菌，B 表示阳性，则

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\
&= \frac{0.1\times 0.95}{0.1\times 0.95+0.9\times 0.01} \\
&= \frac{95}{104} \\
&\approx 0.9135
\end{aligned}
$$

2.（8 分）**解：**

Y	0	6
0	0.6	0.4

$EY^2 = 6^2\times 0.4+0 = 14.4$。

3.（12 分，每小题 4 分）**解：**

1）

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&= \int_0^1 cxdx + \int_1^2 c(3-x)dx \\
&= \frac{c}{2}+\frac{3c}{2} = 2c \\
&\Rightarrow c = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2）

$$\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\
&= \int_0^1 cx^2dx + \int_1^2 c(3-x)xdx \\
&= \frac{c}{3} + \frac{9}{2}c - \frac{7}{3}c = \frac{5}{4} \\
EX^2 &= \int_0^1 cx^3dx + \int_1^2 c(3-x)x^2dx \\
&= \frac{c}{4} + 7c - \frac{15}{4}c = \frac{7}{4} \\
Var(X) &= EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

3）对 $0 < y < 4$，$h(y) = \sqrt{y}$，

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(h(y))|h'(y)| \\
&= \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < y < 1 \\ \frac{3}{4\sqrt{y}} - \frac{1}{4}, & 1 < y < 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

4. (12 分) 每小题 4 分**解：**

1)

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^1 \int_0^y A(2x+y)dxdy \\ &= \int_0^1 2Ay^2 dy = \frac{2A}{3} \\ &\Rightarrow A = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}P(X+Y<1) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{1-x} A(2x+y)dydx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2Ax(1-2x) + \frac{A}{2}[(1-x)^2 - x^2]dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}A + Ax - 4Ax^2 dx = \frac{5}{24}A = \frac{5}{16}\end{aligned}$$

3)

$$f_X(x) = \int_x^1 A(2x+y)dy = 3x(1-x) + \frac{3}{4}(1-x^2) = \frac{3}{4} + 3x - \frac{15}{4}x^2, \quad 0<x<1$$

$$f_Y(y) = \int_0^y A(2x+y)dx = 3y^2, \quad 0<y<1$$

$f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X, Y 不独立。

5.（10 分）**解：**

1）矩估计：

$$EX = \int_2^{\infty} \lambda x e^{-\lambda(x-2)} dx = \frac{1}{\lambda} + 2$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{EX - 2}$$

故矩估计 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}-2}$。

2）极大似然估计：

$$L(\lambda) = \Pi_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda(x_i-2)}$$
$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} - (x_i - 2) = 0$$

得极大似然估计 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}-2}$。

6.（10 分）**解：** $H_0 : \mu = (\leq)\mu_0 = 900$，$H_1 : \mu > \mu_0$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \approx 5.06$$

拒绝域为 $(1.8331, \infty)$，

在拒绝域中，拒绝原假设，该肥料显著地提高了农作物的产量。

浙江工业大学 2014 - 2015 学年第二学期
概率论与数理统计参考答案

姓名：__________学号：__________ 班级：__________任课教师：__________

一. 填空题 (每空 2 分，共 28 分)

1. $\underline{\quad 0.2\quad}$

2. $\underline{\frac{8}{15}}$

3. $\underline{-\frac{2}{3}}$ ， $\underline{\frac{4}{3}}$

4. $\underline{\frac{1}{2}}$ ， $\underline{-\frac{1}{2}}$ ， $\underline{\begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}}$

5. $\underline{\quad 103\quad}$ ， $\underline{\frac{56}{5}}$

6. $\underline{\quad 3\quad}$ ， $\underline{\frac{2}{3}}$

7. $\underline{\frac{5}{9}}$

8. $\underline{\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)}$

9. $\underline{2\Phi(1) - 1}$

二. 选择题 (每题 3 分，共 12 分)

1. B
2. B
3. D
4. C

三. 解答题 (共 60 分)

1. 解:

1) $c=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$; $a=3b$, $a+b=\frac{1}{3}$, 从而$b=\frac{1}{12}$, $a=\frac{1}{4}$;

2)

X \ Y	-1	0	1	
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	

3) $P(X+Y>1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{3}$。

2. 解:

1) $1=\int_0^1 c(1-x^2)dx=c[1-\frac{1}{3}]\Rightarrow c=\frac{3}{2}$;

2) $EX=\int_0^1 xc(1-x^2)dx=c[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}]=\frac{3}{8}$;

$EX^2=\int_0^1 x^2c(1-x^2)dx=c[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]=\frac{1}{5}$;

$Var(X)=EX^2-(EX)^2=\frac{19}{320}$;

3) $X=\sqrt{Y}$, 从而

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}[\frac{1}{\sqrt{y}}-\sqrt{y}], & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

3. 解:

1) $1=\int_0^1\int_0^1 c(1+y)dxdy=\frac{3}{2}c\Rightarrow c=\frac{2}{3}$;

2) $P(X<Y)=\int_0^1\int_0^y c(1+y)dxdy=c\int_0^1 y(1+y)dy=\frac{5}{6}c=\frac{5}{9}$;

3) $EX=\int_0^1\int_0^1 xc(1+y)dxdy=\frac{1}{2}$; $EY=\int_0^1\int_0^1 yc(1+y)dy=\frac{5}{9}$;

$$EXY=\int_0^1\int_0^1 xyc(1+y)dxdy=\frac{1}{2}c\int_0^1 y(1+y)dy=\frac{5}{18}$$

从而 $Cov(X,Y)=EXY-EX\,EY=0$, 即 $\rho=0$。

4. **解：**

矩估计：$EX = \int_0^1 x\alpha x^{\alpha-1}dx = \frac{\alpha}{\alpha+1}$，从而 $\alpha = \frac{EX}{1-EX}$，即矩估计为 $\tilde{\alpha} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$；

极大似然估计：$L(\alpha) = \Pi_{i=1}^{n}\alpha x_i^{\alpha-1}$，

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{\alpha} + \ln x_i] = 0$$

可得极大似然估计为 $\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$。

5. **解：** $H_0 : \mu = \mu_0 = 1000$，$H_1 : \mu \neq \mu_0$；
$t = \frac{\bar{x}=\mu_0}{s/\sqrt{n}} = -1.8$；
拒绝域为 $(-\infty, -2.1315) \cup (2.1315, \infty)$；
不在拒绝域中，可以认为这批鱼的平均重量为 1000 克。

浙江工业大学 2015-2016 学年第一学期概率统计试卷参考答案

一填空题

1. 0.2
2. 0.25
3. 0.1
4. 0.5
5. 10
6.

U	0	1
P	0.16	0.84

V	0	1
P	0.64	0.36

7. 9　　3
8. [10.02,11.98]

二 选择题

1. C　2. D　3. B　4. D　5. C

三　解答题

1. 以 A 表示事件“产品出厂”；以 B 表示事件“产品需进一步调试”

   由全概率公式，得

$$\alpha=P\left(A\mid B\right)P\left(B\right)+P\left(A\mid\overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right)=0.8\times0.3+1\times0.7=0.94$$

   根据二项分布，得

$$\beta=C_{100}^{2}\left(1-0.94\right)^{2}0.94^{98}=0.04144168$$

2. 以题意可得 X 的分布律为

X	-1	1	2
P	0.3	0.5	0.2

   得 $Y=X^2$+1 的分布律

Y	2	2	5
P	0.3	0.5	0.2

   合并相同的项有

Y	2	5
P	0.8	0.2

$$E(Y)=2\times0.8+5\times0.2=2.6$$

$$E(Y^2)=2^2\times0.8+5^2\times0.2=8.2$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2=8.2-2.6^2=1.44$$

3. 1) X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int f(x,y)dy$$

如果 0<x<1,有

$$f_X(x)=\int f(x,y)dy=\int_0^1(2-x-y)dy=\frac{3}{2}-x$$

否则

$$f_X(x)=0$$

于是

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}-x & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$$

类似地

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}-y & 0<y<1\\ 0 & else\end{cases}$$

显然

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

所以， X 和 Y 不独立。

2) $P(X>2Y)=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}x}(2-x-y)dy=\frac{7}{24}$

4 由 $EX=\overline{X}$，而

$$EX=\int_0^\theta\frac{x\left(6\theta x-6x^2\right)}{\theta^3}dx=\frac{\theta}{2}$$

得 $\hat{\theta}=2\overline{X}$

5 似然函数为

$$L(\theta)=P(X=3)P(X=1)P(X=3)P(X=0)P(X=3)P(X=1)P(X=2)P(X=3)$$
$$=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

取对数得

$$\ln L(\theta)=6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)+\ln 4$$

求导，

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{2\left(12\theta^2-14\theta+3\right)}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}=0$$

注意到$0<\theta<\dfrac{1}{2}$， 得 $\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$

6 $H_0:\sigma_0^2=1.6^2$ $H_1:\sigma_0^2\neq 1.6^2$

当H_0成立时， 统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

计算， $\chi_0^2=\dfrac{(9-1)\times 1.1^2}{1.6^2}=3.78<\chi_{0.025}^2(8)=17.535$，

接受原假设。

7 记 $X_i=\begin{cases}1 & 第i个的士发生事故\\ 0 & 第i个的士无事故\end{cases}$

出事故的 的士数 $X=\sum_{i=1}^{500}X_i\sim B(500,0.004)$

保险公司一年赚钱不小于 200000 元的事件为

$\left\{500\times 800\geq 500\times 800-50000X\geq 200000\right\}$

即 **事件{0≤*X*≤4}，** 从而有

$$
\begin{aligned}
P(0 < X < 4) &= P\left(0 < \sum_{i=1}^{500} X_i < 4\right) \\
&= P\left(\frac{0-500\times 0.004}{\sqrt{500\times 0.004\times(1-0.004)}} < \frac{\sum_{i=1}^{500} X_i - E\sum_{i=1}^{500} X_i}{\sqrt{Var\sum_{i=1}^{500} X_i}} < \frac{4-500\times 0.004}{\sqrt{500\times 0.004\times(1-0.004)}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{1.992}}\right) - \Phi\left(\frac{-2}{\sqrt{1.992}}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{1.992}}\right) - 1 \\
&= 2\Phi(1.42) - 1 \\
&= 2\times 0.9222 - 1 = 0.8444
\end{aligned}
$$

浙江工业大学 2015 - 2016 学年第二学期
概率论与数理统计试卷

一. 填空题，每空 3 分。

1. $\underline{\quad 0.1 \quad}$；

2. $\underline{\quad 0.5 \quad}$；

3. $\underline{\quad 0.2 \quad}$；

4. $\underline{\quad \frac{1}{24} \quad}$；

5. $\underline{\quad 4 \quad}$；

6. $\underline{\begin{cases} 1-3^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}}$；

7. $\underline{\quad 0.05 \quad}$；

8. $\underline{\quad \frac{5}{9} \quad}$；

9. $\underline{\quad \sqrt{\frac{3}{2}} \quad}$；

10. $\underline{\quad (9.46, 12.54) \quad}$.

二. 选择题，每题 3 分。

1. C

2. B

3. B

4. D

三. 解答题，共 58 分。

1. (8 分) **解：**A_1, A_2, A_3, A_4 分别表示“乘火车”、“乘轮船”、“乘汽车”、“乘飞机”，B 表示迟到，则

$$P(A_1|B) = \frac{0.3 \times \frac{1}{4}}{0.3 \times \frac{1}{4} + 0.2 \times \frac{1}{3} + 0.1 \times \frac{1}{12}} = 0.5.$$

即乘火车的概率为 0.5。

2. (10 分) **解：**一只零件的寿命大于 1500 小时的概率为

$$\int_{1500}^{\infty} \frac{1000}{x^2}\, dx = \frac{2}{3},$$

则 5 只零件中至少有两只寿命大于 1500 小时的概率为

$$1 - (\frac{1}{3})^5 - C_5^1 (\frac{2}{3})(\frac{1}{3})^4 = 1 - \frac{11}{3^5} = \frac{232}{243} \approx 0.955.$$

3. (10 分) **解：**

(a)

$$1 = \int_0^1 \int_0^2 c(6-x-y)\, dydx = c\int_0^1 12 - 2x - 2\, dx = c[10-1] = 9c$$

从而 $c = \frac{1}{9}$；

(b)

$$\begin{aligned} P(X \geq \frac{1}{2}, Y > 1) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^2 c(6-x-y)\, dydx \\ &= c\int_{\frac{1}{2}}^1 6 - x - \frac{3}{2} dx \\ &= c[\frac{9}{4} - \frac{3}{8}] = \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

4. (10 分) **解：**

$$\begin{aligned} a+b+c &= \frac{1}{2} \\ c &= 2a \\ ab &= \frac{1}{64} \end{aligned}$$

解得

$$\begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}, \begin{cases} a = \frac{1}{24} \\ b == \frac{3}{8} \\ c = \frac{1}{12}. \end{cases}$$

5. (10 分) **解：**

(a) 矩估计：

$$EX = \int_1^2 \theta x\, dx + \int_2^3 (1-\theta)x\, dx = \frac{5}{2} - \theta$$

$$\theta = \frac{5}{2} - EX$$

矩估计 $\hat{\theta} = \frac{5}{2} - \bar{X}$；

(b) 极大似然估计：

$$L(\theta) = \theta^N\ (1-\theta)^{n-N}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n-N}{1-\theta} = 0$$

解得极大似然估计 $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$。

6. (10 分) **解：**

(a) $H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2=5000$，$H_1:\ \sigma^2\neq\sigma_0^2$；

(b) $\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}(n-1)s^2=46$；

(c) 拒绝域为 $(0,11.52)\cup(44.313,\infty)$；

(d) 在拒绝域中，拒绝原假设，可以认为这批电池寿命的波动性有显著变化。

2016/2017学年第2学期概率试卷答案

一、填空.

1. $\dfrac{1}{3}$　　2. $(1-r)^{10}$　　3. 0.045

4. 2　　5. 3, 0.6　　6. $\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 97}}e^{-\frac{x^2}{194}},\ -\infty<x<\infty$

7. $e^{-2}, B(5,e^{-2})$　　8. $\frac{1}{2n-2}$　　9. $\frac{1}{4}$　　10. $\frac{3}{4}$

二、选择题.

1. B　　2. C　　3. B　　4. A　　5. A　　6. C

三、计算题.

1. 解：(1)记X表示开锁需要的次数,则

$P(X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{8}$

(2)

$$
\begin{aligned}
&P\{\max X,Y\ge 0\}=1-P\{\max X,Y<0\}\\
=&P\{X\ge 0,Y\ge 0\}+P\{X\ge 0,Y\le 0\}+P\{X\le 0,Y\ge 0\}\\
=&\frac{3}{7}+P\{X\ge 0\}-P\{X\ge 0,Y\ge 0\}+P\{Y\ge 0\}-P\{X\ge 0,Y\ge 0\}\\
=&\frac{3}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{5}{7}
\end{aligned}
$$

2. 解:(1)X的分布函数是$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(s)ds$

当$x>0$时,

$F(x)=\int_0^x\dfrac{2}{\pi(t^2+1)}dt=\dfrac{2}{\pi}\arctan x$

当$x\le 0$时,F(x)=0.

$$
F(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\arctan x, & \text{当}x>0\text{时},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}
$$

(2)因为

$F(y)=P(Y\le y)=P(\ln X\le y)=P(X\le e^y)=\int_{-\infty}^{e^y}f(x)dx$

关于y求导,得概率密度函数

$f(y)=\frac{2e^y}{\pi(e^{2y}+1)},\ -\infty<y<\infty.$

3. 解：(1)X的边缘概率密度函数是

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 8xydy=4x(1-x^2), & 当0\le x\le 1时,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

Y的边缘概率密度函数是

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^y 8xydy=4y^3, & 当0\le y\le 1时,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

(2)因为$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,故变量X和Y不是相互独立.

(3)

$$P(X+Y\ge 1)=\iint_{X+Y\ge 1}f(x,y)\,dx\,dy=\int_{1/2}^1 dy\int_{1-y}^y 8xydx=\frac{5}{6}.$$

4. 解：(1)由 $EX=\int_1^{+\infty}\frac{x\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1}$,得

$\beta=\frac{EX}{EX-1}$,

所以β的矩估计量是$\hat{\beta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$.

(2)令极大似然函数是

$$L=\prod_{i=1}^n\frac{\beta}{x_i^{\beta+1}}=\frac{\beta^n}{\prod_{i=1}^n x_i^{\beta+1}}$$

取对数, 得

$$\ln L=n\ln(\beta)-(\beta+1)\sum_{i=1}^n\ln(x_i),$$

关于β求导,得

$$\frac{d\ln L}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^n\ln(x_i),$$

令上式等于0,解此方程, 得其极大值点是

$$\beta=\frac{n}{\sum_{i=1}^n\ln(x_i)},$$

β的极大似然估计是$\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^n\ln(X_i)}$.

5.解：(1)因为$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$,

所以μ的置信度为95%的置信区间是

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)).$$

将$\bar{x}=6.97,s=0.194,n=9,t_{0.025}(8)=2.31$代入上式,得

μ的置信度为95%的置信区间是$(6.8209,7.1191)$.

(2)因为$7\in(6.8209,7.1191)$,所以生产铁水含碳量正常($\alpha=0.05$).

四、 解：由题意, 得

$$Var(X)=Var(Y)=\sigma^2,$$

则

$$\begin{aligned}
Var(U)&=Var(aX+bY)=(a^2+b^2)\sigma^2,\\
Var(V)&=Var(aX-bY)=(a^2+b^2)\sigma^2,\\
Var(U+V)&=Var(2aX)=4a^2\sigma^2,\\
Cov(U,V)&=\frac{Var(U+V)-Var(U)-Var(V)}{2}=(a^2-b^2)\sigma^2\\
\rho_{UV}&=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(V)}}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.
\end{aligned}$$