

06/07(一)浙江工业大学高等数学 A(上)考试试卷

学院：_____ 班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

任课教师：_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一、填空题（本题满分 18 分，每小题 3 分）

- 1、函数 $y = x - \ln x$ 的单调增加区间是_____。
- 2、已知 $f'(3) = 2$ ，则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 3、设 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-3x} ，则 $\int f(2x+1)dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 4、不定积分 $\int \frac{x+1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 5、设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t)dt$ ，则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

~~6~~、微分方程 $y''' - y'' = 2$ 的通解是_____。

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

- 1、若函数 $y = f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$ ，则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，该函数在 $x = x_0$ 处的微分 dy 是（ ）

(A) 与 Δx 等价的无穷小； (B) 与 Δx 同阶的无穷小；
 (C) 比 Δx 低阶的无穷小； (D) 比 Δx 高阶的无穷小；
- 2、设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解，若 $f(x_0) > 0$ ，且 $f'(x_0) = 0$ ，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 （ ）

(A) 取得极大值； (B) 取得极小值；
 (C) 某个领域内单调增加； (D) 某个领域内单调减少；
- 3、在下列等式中，正确的结果是（ ）

(A) $\int f'(x)dx = f(x)$ ； (B) $\int d(fx) = f(x)$ ；
 (C) $\frac{d}{dx} \int f(x)dx \neq f(x)$ ； (D) $d \int f(x)dx \neq f(x)$ ；
- 4、 $x = 0$ 是 $f(x) = \frac{2}{1+e^x} + \frac{\sin x}{|x|}$ 的（ ）

- (A) 跳跃间断点; (B) 可去间断点; (C) 无穷间断点; (D) 连续点;
5、下列反常积分收敛的是 ()

(A) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$; (B) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$; (C) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$; (D) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

三、(8分) 判断下列各命题(结论)是否正确(在括弧内填入√或×):

- 1、若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$ 都存在, 则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在。()
- 2、若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则必有 $f'(x_0) = 0$ 。()
- 3、设 $f(x)$ 连续, 则等式 $\int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(a-x)dx$ 对任何实数 a 都成立。()
- 4、设 $f(x)$ 不恒为常数, 在闭区间 $[a,b]$ 上可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$ 。()

四、试解下列各题(本题满分 18 分, 每小题 6 分):

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + 1 \right)^x$ 。

2、设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$, 求 y', y'' 。

~~3~~、求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 满足条件 $y|_{x=e} = 1$ 的特解。

五、(10分) 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, -\infty < x < +\infty$, 且反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ 收敛于 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, 试讨论函数 $f(x)$ 的性态, 把结果填入下表(只需填入结果):

$f(x)$ 的奇偶性		$f(x)$ 的单调性	
$f(x)$ 的极值点		$f(x)$ 图形的拐点	
$f(x)$ 图形的水平渐近线			

六、(10分) 在曲线 $y = x^2$ ($x \geq 0$) 上某点 A 处作一切线, 使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$ 。

- 1、求切点 A 的坐标及切线方程;
- 2、求由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。

七、（8分）证明方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同实根。

八、（5分）设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且满足 $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$ ，证明：在 $(0, 1)$ 内至少存在一个 ξ ，使 $f'(\xi) = 0$ 。

~~九~~、（8分）设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导， $f(0) = 1$ ，且满足：

$$f'(x) + f(x) = \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt$$

1、求导函数 $f'(x)$ ；

2、证明：当 $x \geq 0$ 时，成立不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ 。