08 浙江工业大学高等数学期中考试试卷 A

学院：________ 班级：_______ 姓名：_________ 学号：_________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得 分								

一、填空题（每小题 4 分）：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{2x}=$ __e^{-4}__。

2. 当 $k=$__1__时，$f(x)=\begin{cases} k+x^2 & x\le 0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续。

3. 若函数 $f(x)$ 在 a 的一个邻域 $U(a)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的__必要__（充分、必要、充分必要）条件。

4. 函数 $f(x)=x-\ln(1+x)$ 的单调增加区间是__$[0,+\infty)$__。

5. 设 $y=xe^{-\sin x}$，则 $dy=$__$e^{-\sin x}\cdot(1-x\cos x)dx$__。

6. 设 $f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$__$n!(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$__。

7. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=3$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+2)-f(x)]=$__6__。 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+2)-f(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}f'(\xi)\cdot 2=\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)\cdot 2=6$

8. 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，$\Delta y=f(x_0+h)-f(x_0)$，则当 $h\to 0$ 时，$\Delta y-dy$ 是 h 的__高阶__无穷小。

二、判断下列各命题（结论）是否正确（在括弧内填入√或×）（每小题 3 分）：

1. 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$，$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 也存在（ × ） 反例：$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x^k\sin\dfrac{1}{x} & x\ne 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，则当 $k>1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可导。（ √ ） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^k\sin\frac{1}{x}}{x}=0$ $k>1$

3. 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且满足 $f(x)\le g(x)$，则在区间 $[a,b]$ 上有 $f'(x)\le g'(x)$。（ × ） 反例：$f(x)=2x$ $g(x)=x-3$ $x\in[3,4]$ $f(x)<g(x)$ 但 $f'(x)>g'(x)$

4. 设 $f(x)=(x^2-3x+2)\sin x$，则方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有 3 个根。（ √ ）

$f(0)=0$ $f(1)=0$ $f(2)=0$ $f(\pi)=0$

5．如果某质点做直线运动，其位置函数是 $s=s(t)$，如果质点的运动速度是单调减少的，则 $s=s(t)$ 的图形是一条（向上）凸弧。（ √ ）

三、试解下列各题（每小题 7 分）：

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}$ 。

$$①\ =\lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{-x^2}+\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(-e^{-x^2}+\frac{\sin x}{2x}\right)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$②\ =\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2+o(x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

2．求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[(a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}})/2]^{2x}$，（其中 $a>0,b>0$）

$$①\ =\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}-1+1\right]^{\frac{2}{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}-2}}\right\}^{\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}-2}{2}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}e^{x(a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}-2)}=\lim_{t\to 0}e^{\frac{a^t+b^t-2}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0}e^{a^t\ln a+b^t\ln b}=e^{\ln ab}=ab$$

$$②\ =\lim_{x\to\infty}e^{2x\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}}=\lim_{t\to 0}e^{\frac{2\ln\frac{a^t+b^t}{2}}{t}}=\lim_{t\to 0}e^{2\cdot\frac{a^t\ln a+b^t\ln b}{\frac{a^t+b^t}{2}}\cdot\frac{1}{2}}=ab$$

3．讨论函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}-2}$ 的连续性，并指出间断点的类型。

$x=0,\ \frac{1}{\ln 2}$ 为间断点，当 $x\neq 0$ 且 $x\neq\frac{1}{\ln 2}$ 连续

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}-2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+2e^{-\frac{1}{x}}}{1-2e^{-\frac{1}{x}}}=1\qquad\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}-2}=\frac{2}{-2}=-1$$

$\therefore x=0$ 为跳跃间断点

$$\lim_{x\to\frac{1}{\ln 2}}\frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}-2}=\infty$$

$\therefore x=\frac{1}{\ln 2}$ 为第二类间断点.

四、试解下列各题（每小题 7 分）：

1．设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求：$y'(0)$，$y''(0)$

$$e^y\cdot y'+y+xy'=0 \qquad y'=-\frac{y}{e^y+x}$$

又 $x=0$ 时 $y=1$ $\therefore$ $y'(0)=-\frac{1}{e}$

$$y''=-\frac{y'(e^y+x)-y\,(e^y\cdot y'+1)}{(e^y+x)^2} \qquad \therefore y''(0)=-\frac{-\frac{1}{e}e-(e\cdot -\frac{1}{e}+1)}{e^2}=\frac{1}{e^2}$$

2．设 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$，求：$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}$$

五、（6 分）求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有佩亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式。

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+o(x^3)$$

$$f'(x)=\sec^2x \qquad f''(x)=2\sec^2x\tan x \qquad f'''(x)=4\sec^2x\tan^2x+2\sec^4x$$

$$f(0)=0 \qquad f'(0)=1 \qquad f''(0)=0 \qquad f'''(0)=2$$

$$\therefore \tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

六、（6 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0\,,2]$ 上可导，$f(0)=0$，$f(1)=2$，$f(2)=-2$，试证：至少存在一个 $\xi\in[0,2]$，使 $f'(\xi)=0$。

证明：$\because f(1)=2 \quad f(2)=-2$

$\therefore$ 由零点定理得 $\exists\, \xi_1\in(1,2)$ 有 $f(\xi_1)=0$

又 $\because f(0)=0$

$\therefore$ 由 Rolle 中值定理得 $\exists\, \xi\in[0,2]$，使 $f'(\xi)=0$.

[$f(x)$ 在 $[0,2]$ 可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $[0,2]$ 连续]

七、（6）设 $g(x)$ 二阶连续可导，且 $g(0)=0$，$g'(0)\neq 0$，$f(x)=(1-\cos x)g(x)$，证明曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处必出现拐点。

证明：（分析：只需证明 $f''(x)$ 在 0 两边异号）

$$f'(x)=\sin x\, g(x)+(1-\cos x)\,g'(x)$$

$$f''(x)=\cos x\, g(x)+2\sin x\, g'(x)+(1-\cos x)\,g''(x)$$

$$f''(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\, g(x)+2\sin x\, g'(x)+(1-\cos x)\,g''(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{g(x)-g(0)}{x}+2g'(0)+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot g''(x)}{x}$$

$$=3g'(0)\neq 0$$

$\therefore \exists\, \mathring{U}(0)$ 有 $\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x}\neq 0$ 即 $\dfrac{f''(x)}{x}\neq 0$

$\therefore$ 在 0 两边 $f''(x)$ 异号

$\therefore y=f(x)$ 在 $x=0$ 处必出现拐点.