一. 填空题(每空 2 分，共 20 分）

1. 设 A, B 相互独立，$P(A\cup B)=0.6$，$P(A)=0.4$，则 $P(B)=$___。
   解： $0.6=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)[1-P(A)]=0.4+0.6P(B)$，从而 $P(B)=\frac{1}{3}$。

2. 设每人血清中有病毒的概率为 r，今混合 100 人的血清，则混合血清中无病毒的概率为___。
   解： 混合血清中无病毒，则所有人都没有病毒，概率为 $(1-r)^{100}$。

3. 设甲乙两种药片外观一样，甲占 $\frac{4}{5}$，乙占 $\frac{1}{5}$ 的药片混在一起，若甲种药片的次品率为 0.05，乙种药片的次品率为 0.025，先从中任取一片，则它是次品的概率为___。
   解： 全概率公式，药品为次品记为 A，药品为甲乙分别记为 B_1, B_2，则

$$\begin{aligned}P(A) &= P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)\\ &= 0.8\times 0.05+0.2\times 0.025=0.045\end{aligned}$$

4. 设随机变量 $X\sim N(2,4)$，且 $P(X>a)=\frac{1}{2}$，则 $a=$___。
   解： 显然 a 为均值 2。

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则常数 A 为___。
   解： 根据概率密度函数的规范性，在整个直线上积分应该为 1,

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_0^1 Ax^2dx=\frac{A}{3}$$

   因此 $A=3$。

6. 某地区白血病的发病率为 0.0001，该地区每 10 万人中患白血病的平均人数为____。

解： 平均人数即期望，$100000 \times 0.0001 = 10$。

7. 设顾客在某银行窗口等待服务的时间 X（以分钟计算）服从指数分布，其概率密度为$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$，现有某顾客在窗口等待服务，若等待时间超过 10 分钟，他就离开，则他未等到服务而离开的概率是___。如果他一个月要到银行 5 次，用 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，则 Y 服从____分布（要求写出分布参数），他一个月内至少有一次未等到服务的概率 $P(Y \geq 1) =$ ____。
解： 其为等到服务而离开的概率为

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= \int_{10}^{\infty} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx \\ &= \int_{2}^{\infty} e^{-t}dt \\ &= e^{-2} \end{aligned}$$

其一个月内未等到服务而离开窗口的次数服从参数为 $5, e^{-2}$ 的二项分布，即 $Y \sim b(5, e^{-2}) \approx b(5, 0.1353)$。一个月内至少有一次未等到服务而离开窗口的概率为

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \\ &= 1 - (1 - e^{-2})^5 - 5 \times e^{-2}(1 - e^{-2})^4 \\ &\approx 0.1484 \end{aligned}$$

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的一组样本，为使 $\hat{\sigma}^2 = k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$ 是总体方差 σ^2 的无偏估计量，则常数 k 的值为___。
解： 由于 $E[X_{i+1} - X_i] = 0$，

$$E[X_{i+1} - X_i]^2 = D[X_{i+1} - X_i] = DX_{i+1} + DX_i = 2\sigma^2$$

若其为无偏估计量，则 $E(\hat{\sigma}^2) = 2(n-1)\sigma^2 = \sigma^2$，因此 $k = \frac{1}{2(n-1)}$。

二. 单选题（每题 2 分）

1. 已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B|A)=0.9$，则 $P(A|B)$=(　)
   A)　0.30　B)　0.45　C)　0.54　D)　0.75
   解： 根据 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(B|A)$，代入得
   $$0.5\times 0.9=0.6\times P(B|A)\Rightarrow P(B|A)=0.75$$

2. 设 A,B 互不相容，且 $P(A)\neq 0$，则(　)
   A)　$P(B|A)=P(B)$　B)　$P(B|A)=0$
   C)　$P(B|A)=P(A)$　D)　$P(B|A)=1$
   解： 由定义 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，而 $P(A)>0$，A,B 互不相交，因此 $P(AB)=0\Rightarrow P(B|A)=0$。

3. 设随机变量 $X\sim N(1,\sigma^2)$ 且 $P(1\leq X\leq 3)=0.3$，则 $P(X\leq -1)=($　$)$。
   A)　0.10　B)　0.20　C)　0.30　D)　0.50
   解： $P(X\leq -1)=P(X\leq 1)-P(-1\leq X\leq 1)=0.5-0.3=0.2$。

4. 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 p，则此人 4 次射击恰好有 2 次命中目标的概率为 (　)。
   A)　$3p(1-p)^2$　B)　$6p(1-p)^2$　C)　$3p^2(1-p)^2$　D)　$6p^2(1-p)^2$
   解： 射中目标的次数 X 服从二项分布 $b(4,p)$，那么 $P(X=2)=C_4^2p^2(1-p)^2=6p^2(1-p)^2$。

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(-3,4)$，$Y\sim N(2,9)$，则 $D(X-2Y)=$(　)。
   A)　-14　B)　-7　C)　32　D)　40
   解： $D(X-2Y)=D(X)+D(-2Y)=DX+4DY=4+4\times 9=40$。

6. 设两个随机变量相互独立且服从相同分布：$P(X=-1)=P(Y=-1)=\frac{1}{2}$，$P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$，则下列各式成立的是（　）。

A) $P(X=Y)=\frac{1}{2}$ B) $P(X=Y)=1$

C) $P(X+Y=0)=\frac{1}{4}$ D) $P(XY=1)=\frac{1}{4}$

解：根据独立性，我们有：

(a) $P(X=Y)=P(X=Y=1)+P(X=Y=-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$;

(b) $P(X+Y=0)=P(X=1,Y=-1)+P(X=-1,Y=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$;

(c) $P(XY=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$。

7. 对于任意两个随机变量 X 与 Y，若 $E(XY)=EXEY$，则必有(　)。

A) $D(X+Y)=DX+DY$ B) $D(XY)=DXDY$

C) X 与 Y 相互独立 D) X 与 Y 不独立

解：由 $D(X+Y)=DX+DY+2\text{cov}(X,Y)$ 以及

$$\text{cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]=E(XY)-EXEY=0$$

从而 $D(X+Y)=DX+DY$。这说明 X 和 Y 是不相关的，但不一定独立。

8. 设随机变量 X 服从自由度为 n 的 t-分布，即 $X\sim t(n)$（$n>1$），$Y=\frac{1}{X^2}$，则(　)。

A) $Y\sim\mathcal{X}^2(n)$ B) $Y\sim\mathcal{X}^2(n-1)$ C) $Y\sim\mathcal{F}(n,1)$ D) $Y\sim\mathcal{F}(1,n)$

解：设 U,V 独立，U 服从标准正态分布，V 服从 $\mathcal{X}^2(n)$ 分布。则 $\frac{U}{\sqrt{V/n}}$ 服从 t-分布，而

$$\frac{V/n}{U^2}\sim\mathcal{F}(n,1)$$

9. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$（$n>1$）独立同分布，且方差 $\sigma^2>0$。令随机变量 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，则(　)

A) $D(X_1+Y)=\frac{n+3}{n}\sigma^2$ B) $D(X_1-Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$

C) $\text{cov}(X_1,Y)=\frac{3}{n}\sigma^2$ D) $\text{cov}(X_1,Y)=\frac{n+6}{n}\sigma^2$

解：

$$
\begin{aligned}
D(X_1+Y) &= D[\frac{n+1}{n}X_1+\frac{1}{n}X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_n] \\
&= [\frac{n+1}{n}^2+\frac{1}{n^2}\times(n-1)]\sigma^2 \\
&= \frac{n+3}{n}\sigma^2 \\
D(X_1-Y) &= D[\frac{n-1}{n}X_1-\frac{1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n] \\
&= [\frac{n-1}{n}^2+\frac{1}{n^2}\times(n-1)]\sigma^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2 \\
\mathrm{cov}(X_1,Y) &= \mathrm{cov}(X_1,\frac{1}{n}X_1)+\sum_{i=2}^{n}\mathrm{cov}(X_1,\frac{1}{n}X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sigma^2
\end{aligned}
$$

10. 在假设检验中，用 α 和 β 分别表示犯第一类错误和第二类错误的概率，则当样本容量一定时，下列结论正确的是( )。

A) α 减小 β 也减小　B) α 和 β 其中一个减小时，另一个往往会增大

C) α 增大 β 也增大　D) α 减小 β 也减小，α 增大 β 也增大

解：假设检验中，两类错误发生的概率是相互制约的，一个减小则另一个增加。

三. 解答题（每题 10 分）

1. 从一副扑克牌的 13 张红桃中，连续有放回地抽取三次，求下列事件的概率：

   (a) 没有同号；

   (b) 全同号：

   (c) 至少有两张同号。

   解：全部的抽取方式的排列有 13^3 种，

   (a) 没有同号的排列有 $P_13^3 = 13 \times 12 \times 11$ 种，概率为 $\frac{13\times12\times11}{13^3} = \frac{132}{169}$;

   (b) 全部同号的排列有 13 种，概率为 $\frac{13}{13^3} = \frac{1}{169}$；

   (c) 至少有两张同号，则其逆事件为没有同号，概率为 $1 - \frac{132}{169} = \frac{37}{169}$。

2. 盒中有 8 片同型号的钥匙，其中只有一片可以打开箱锁。从中随机地取一片开锁，若不能打开箱锁，则从盒子中再取一片，直到打开锁为止。假设已用过的锁不再重复。求：

   (a) 到打开箱为止，开锁次数 X 的分布率;

   (b) 开锁次数 X 的数学期望；

   (c) 开锁不超过三次的概率。

   解： 直接利用古典概型，将 8 把钥匙排列，总共有 8种方式，

   (a) 对 $k = 1, 2, \cdots, 8$，正确的钥匙排在 k 个的方式有 $1 \times 7!$ 种，概率为 $P(X = k) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}$;

   (b) 开锁次数的数学期望为 $EX = \sum_{k=1}^{8} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{8}k = \frac{36}{8} = 4.5$;

   (c) 开锁不超过三次的概率为 $P(X \leq 3) = \frac{3}{8}$。

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(x^2+1)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$，求：

(a) X 的分布函数 $F(X)$;

(b) $Y = \ln X$ 的概率函数。

解：

(a) 当 $x > 0$ 时，X 的分布函数为:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{0}^{x} \frac{2}{\pi(t^2+1)}dt \\ &= \frac{2}{\pi}\arctan x \end{aligned}$$

因此，分布函数为 $F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\arctan x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$。

(b) Y 的分布函数 $G(y)$ 为：

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(X \leq e^y) \\ &= \frac{2}{\pi}\arctan e^y \end{aligned}$$

其密度函数为：$g(y) = G'(y) = \frac{2}{\pi}\frac{e^y}{1+e^{2y}}$。

4. 已知某炼铁厂在生产正常的情况下，铁水含碳量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。某日测了 9 炉铁水，测得其平均含碳量$\overline{x} = 6.97$，样本方差 $s^2 = 0.0361$，问：是否可以认为该日炼铁厂的铁水含碳量的均值是 7?（显著水平 $\alpha = 0.05$）
参考数值：

$$\begin{aligned} t_{0.025}(8) = 2.31, &\qquad t_{0.05}(8) = 1.86, \\ t_{0.05}(9) = 1.83, &\qquad t_{0.025}(10) = 2.23 \\ \mathcal{X}^2_{0.975}(8) = 2.180, &\qquad \mathcal{X}^2_{0.025}(8) = 17.5, \\ \mathcal{X}^2_{0.95}(8) = 2.73, &\qquad \mathcal{X}^2_{0.05}(8) = 15.5 \end{aligned}$$

解：

(a) 原假设 $H_0 : \mu = \mu_0 = 7$，备择假设 $H_1 : \mu \neq \mu_0$

(b) 统计值

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}} = \frac{6.97 - 7}{\sqrt{0.0361/9}} = -\frac{1}{19} \approx -0.0526$$

(c) t 服从 $t(8)$ 分布，拒绝域为 $(-\infty, -t_{0.025}(8)) \cup (t_{0.025}(8), \infty) = (-\infty, -2.31) \cup (2.31, \infty)$;

(d) t 的观测值不在拒绝域中，因此接受原假设，可以认为该日炼铁厂的铁水含碳量均值是 7。

5. 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+\frac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(a) 求 X,Y 的边缘概率密度，并判断 X,Y 是否相互独立；

(b) 求 $P(X+Y\ge 1)$;

(c) 求 X,Y 的协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)$。

解：

(a) 当 $0\le x\le 1$ 时，X 的边缘密度为：

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \\ &= \int_0^2 x^2+\frac{1}{3}xy\,dy \\ &= 2x^2+\frac{2}{3}x \end{aligned}$$

类似的，$0\le y\le 2$ 时，其边缘密度为:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \\ &= \int_0^1 x^2+\frac{1}{3}xy\,dx \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{6}y \end{aligned}$$

因此它们的密度函数为：

$$f_X(x)=\begin{cases}2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y, & 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

显然，$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，从而 X,Y 不相互独立；

(b)

$$
\begin{aligned}
P(X+Y \geq 1) &= \int_0^1 [\int_{1-x}^2 x^2 + \frac{1}{3}xy\,dy]\,dx \\
&= \int_0^1 x^2(1+x) + \frac{1}{6}x[2^2-(1-x)^2]\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{5}{6}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2}x\,dx \\
&= \frac{5}{24} + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{65}{72}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_0^1 [2x^2 + \frac{2}{3}x]x\,dx \\
&= \frac{2}{4} + \frac{2}{9} = \frac{13}{18} \\
EY &= \int_0^2 [\frac{1}{3} + \frac{1}{6}y]y\,dy \\
&= \frac{2}{3} + \frac{8}{6\times 3} = \frac{10}{9} \\
E(XY) &= \int_0^1 [(\int_0^2 x^2 + \frac{1}{3}xy)xy\,dy]\,dx \\
&= \int_0^1 [2x^3 + \frac{1}{3}\frac{8}{3}x^2]\,dx \\
&= \frac{2}{4} + \frac{8}{9}\frac{1}{3} = \frac{43}{54} \\
\mathrm{cov}(X,Y) &= E(XY) - EXEY \\
&= \frac{43}{54} - \frac{13}{18}\frac{10}{9} = -\frac{1}{162}
\end{aligned}
$$

6. 设总体 X 的概率密度为 $f(x,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x > 1 \\ 0, & x \le 1 \end{cases}$，其中未知参数 $\beta > 1$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自总体 X 的简单样本的观测值，求：

(a) β 的矩估计值；

(b) β 的最大似然估计值。

解：

(a) 矩估计：

$$\begin{aligned} \nu_1 &= EX = \int_1^{\infty} \frac{\beta}{x^{\beta+1}} x\,dx \\ &= -\beta \frac{x^{1-\beta}}{\beta - 1} |_1^{\infty} \\ &= \frac{\beta}{\beta - 1} \\ &\Rightarrow \beta = 1 + \frac{1}{\nu_1 - 1} \end{aligned}$$

从而，矩估计值为 $\hat{\beta} = 1 + \frac{1}{\bar{x} - 1}$

(b) 最大似然估计：似然函数为

$$L(\beta) = \Pi_{i=1}^{n} \frac{\beta}{x_i^{\beta+1}}$$

从而，

$$0 = \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta} - \ln x_i$$

其解为最大似然估计值 $\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$。