04/05 高等数学标准答案

一． 1 .2；　2 . $x=1$；　3.　$x^x(\ln x+1)dx$；　4.　$(0,2)$；

5． $\sin^2 x+C$ （或 $-\cos^2 x+C$ 或 $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$ ）

6. $\frac{2}{3}$；　7. $\sin \pi x$；　8． 4,　4；

二． 1.B　2.C　3.A or C　4.A

三． 1. $\frac{dy}{dx}=t$　(4 分)

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2t\sin t^2}$ （2 分）

2.　$x=\pm\sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}$, $x=\pm\sqrt{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}$ ，　（2 分）

$x=-\sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}$ ，　$x=\sqrt{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}$ 为极小值点；

$x=-\sqrt{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}$ ，　$x=\sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}$ 为极大值点．（3 分）

$f''(x)=0$， $x=\pm\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ （5 分）

$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}},6\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{4}}-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\right)$ 与 $\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}},-6\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\right)$ 为拐点．（6 分）

四． 1. $I=\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+2(1+x)^{\frac{1}{2}}+C$

2.＝ $\int_0^{\pi}\cos\sin^{\frac{3}{2}}xdx=\cdots=0$　（3 分）

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^{\frac{3}{2}}xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos x\sin^{\frac{3}{2}}x$ （4 分）

$=\frac{4}{5}$ （6 分）

五． 1.证明：建立直角坐标系

$y=\frac{r}{h}x \quad x\in[0,h]$ 与 $x=h, y=0$ 围成的平面图形饶 x 轴旋转即得半径为 r，高为 h 的正圆锥。所以 $V=\int_0^h \pi y^2 dx=\int_0^h \pi\frac{r^2}{h^2}x^2 dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

2.解：特征方程为 $r^2-2r=0 \quad r(r-2)=0\Rightarrow r_1=0, r_2=2.$（2 分）

所以齐次通解 $\bar{y}=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=C_1+C_2e^{2x}$（3 分）

又 λ 为一重特征根。设非齐次特解 $y^*=(ax+b)xe^{2x}$（5 分）

代入非齐次方程得 $4ax+2b+2a=x$

$$\therefore\begin{cases}4a=1\\a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow y^*=\frac{1}{4}x(x-1)e^{2x}$$

$\therefore$ 非齐次通解 $y=\bar{y}+y^*=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}x(x-1)e^{2x}$（6 分）

六、证明：$\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx=\int_0^1 x(1-x)df'(x)=x(1-x)f'(x)\ \Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)dx(1-x)$

$$=-\int_0^1 f'(x)(1-x-x)dx=-\int_0^1 f'(x)(1-2x)dx=\int_0^1(2x-1)df(x)$$

$$=(2x-1)f(x)\ \Big|_0^1-\int_0^1 f(x)d(2x-1)=f(1)+f(0)-2\int_0^1 f(x)dx$$

$$\therefore\int_0^1\left[2f(x)+x(1-x)f''(x)\right]dx=f(0)+f(1)$$

七、由 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)\Rightarrow b=\frac{1}{3}$（3 分）

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$（5 分）

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$（7 分）

八、如图建立坐标系

$\overline{AP}:\overline{Y}-1=\frac{y-1}{x}(X-0) \qquad ,y=f(x)$

$AP:\overline{Y}=f(z) \qquad$ 则 A=$\int_0^x\left(f(X)-(1+\frac{y-1}{x}X\right)dX=x^3$（3 分）

两边关于 x 求导

$$f(x)-1-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{2}xy'=3x^2 \Rightarrow y'-\frac{1}{x}y=\frac{-6x^2-1}{x}$$（4 分）

$$\Rightarrow y=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int-\frac{6x^2+1}{x}e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+c)=x(-6x+\frac{1}{x}+c)=-6x^2+cx+1$$（6 分）

又过（1，0）点$\Rightarrow c=5$

$\therefore y=-6x^2+5x+1 \qquad x\in[0,1]$（7 分）

九、证：$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+u(x))-\ln(1+v(x))}{u(x)-v(x)}=\lim_{x\to 0}\ln(\frac{1+u(x)}{1+v(x)})^{\frac{1}{u(x)-v(x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln[(1+\frac{u(x)-v(x)}{1+v(x)})^{\frac{1+v(x)}{u(x)-v(x)}}]^{\frac{1}{1+v(x)}}$$

$\because v(x)$ 为连续函数 $\qquad \therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+v(x)}=\frac{1}{1+v(0)}$

$\therefore$上式极限为$e^{\frac{1}{1+v(0)}}$

$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+u(x))-\ln(1+v(x))}{u(x)-v(x)}=\frac{1}{1+v(0)}$ 为非 0 常数 $\qquad$（$v(0)\neq -1$）

$\therefore \ln(1+u(x))-\ln(1+v(x))$ 与 $u(x)-v(x)$ 当 $x\to 0$ 时为同阶无穷小。