06/07(一)高等数学 A 标准答案

一、1． $[1,+\infty)$； 2. $-1.$； 3. $\frac{1}{2}e^{-6x-3}+c$； 4. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x+c$

5. $x-1$； 6. $y=c_1+c_2x+c_3e^x$

二、1. B ； 2. A; 3. C; 4. B; 5. C

三、1. × ； 2. ×； 3. ×； 4. √

四、1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+1\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\sin\frac{2}{x}+1\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right]^{2\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}$ (3 分)

$=e^2$ (6 分)

2. $y'=\frac{t}{2}$ (3 分)

$y''=\frac{1+t^2}{4t}$ （6 分）

3. $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x\ln x}y=\frac{1}{x}$(一阶线性)（2 分）

$y=e^{-\int\frac{1}{x\ln x}dx}\left(\int\left(\frac{1}{x}e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}\right)dx+c\right)$ （4 分）

$=\frac{1}{\ln x}\left(\frac{\ln^2 x}{2}+c\right)$ （6 分）

五、每空 2 分

$f(x)$ 的奇偶性	奇	$f(x)$ 的单调性	单调增加
$f(x)$ 的极值点	无	$f(x)$ 图形的拐点	(0,0)
$f(x)$ 图形的水平渐近线		$y=\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	

六、 设切点 A 的坐标 (x_0,y_0)

切线方程为 $y-x_0{}^2=2x_0(x-x_0)$

即 $x=\frac{y+x_0{}^2}{2x_0}$

$\int_0^{x_0^2}\left(\frac{y+x_0^2}{2x_0}-\sqrt{y}\right)dy=\frac{1}{12}$ （2 分）

$\frac{x_0^3}{12}=\frac{1}{12}$，切点 A 的坐标为 $(1,1)$ （4 分）

切线方程为 $y=2x-1$ （5 分）

旋转体的体积=$\int_0^1 x^4 dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)^2 dx$ （8 分）

$=\frac{\pi}{30}$ （10 分）

七、令 $F(x)=\ln x-\frac{x}{e}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$

$F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$ 令 $F'(x)=0\Rightarrow x=e$ （3 分）

又 $x<e$ 时，$F'(x)>0$，$x>e$ 时，$F'(x)<0$ 所以 $x=e$ 是极大值点 （6 分）

$F(e)=\ln e-\frac{e}{e}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=2\sqrt{2}>0$

$F(0+0)=-\infty$ ， $F(+\infty)=-\infty$

所以有且仅有两个不同实根。（10 分）

八、由积分中值定理得 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(\xi_1)=f(0),\xi_1\in\left(\frac{2}{3},1\right)$ （2 分）

$f(x)$ 在 $[0,\xi_1]$ 上连续，在 $(0,\xi_1)$ 内可导，且 $f(\xi_1)=f(0)$

由罗尔定理得在 $(0,\xi_1)\subset(0,1)$ 内至少存在一个 ξ，使 $f'(\xi)=0$ （5 分）

九、（1）原式可化为 $(x+1)f'(x)=\int_0^x f(t)dt-(x+1)f(x)$ ，又 $f'(x)$ 可导

等式两边求导并化简得：$(x+2)f'(x)+(x+1)f''(x)=0$ （*）

且满足 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$

解初值问题（令 $f'(x)=p$，$f''(x)=p'$ 带入（*））得

$f'(x)=p=-\frac{e^{-x}}{x+1}$ （4 分）

（2）因为当 $x\geq 0$ 时，$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{x+1}<0$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减， $f(x) \le f(0)=1$

令 $F(x)=f(x)-e^{-x}$

$$F'(x)=f'(x)+e^{-x}=\frac{xe^{-x}}{x+1}>0$$

$F(x) \ge F(0)=0$，即 $f(x) \ge e^{-x}$

故有 $e^{-x} \le f(x) \le 1$ （8 分）