浙江工业大学 2012 - 2013 学年第二学期
概率论与数理统计试卷

姓名：__________学号：__________ 班级：__________任课教师：__________

一. 填空题（每空 2 分，共 22 分）

1. 已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(A\cup B)=0.8$，则 $P(B|A)=$ _____。

2. 甲乙两人独立地进行投篮，假设甲乙的命中率分别为 0.5,0.6，每人投篮两次，设甲的投中次数为 X，乙的投中次数为 Y，则 $P(X=2, Y=1)=$ _____，$P(X=Y)=$ _____。

3. 已知某城市一年内发生火灾的次数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，若 $P(X=3)=2P(X=2)$，则其方差 $Var(X)=$ _____，$P(X=2|X\le 2)=$ _____。

4. 设 $X\sim N(2,\sigma^2)$，$P(1<X<3)=0.8$，则 $P(X<1)=$ _____。

5. 已知 $EX=-2, EY=3, Var(X)=4, Var(Y)=1, \rho(X,Y)=-0.5$，则 $E(X+2Y)=$ _____，$Var(X+2Y)=$ _____，由切比雪夫不等式，$P(1<X+2Y<7)$_____。

6. 设某物体长度的测量值 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现进行 9 次测量，得到样本均值 $\overline{x}=12.33$，样本方差 $s^2=17.64$，则其置信水平为 0.95 的区间估计为 __________。（$t_9(0.05)=1.8331, t_8(0.05)=1.8595, t_9(0.025)=2.2622, t_8(0.025)=2.3060$）

7. 设某物理量的一次测量结果服从分布 $N(\mu,0.1^2)$，现在进行 100 次独立测量，其平均值记为 $\overline{X}$，则根据中心极限定理，$P(\mu-0.01<\overline{X}<\mu+0.01)=$ _____。（$\Phi(1)=0.8413, \Phi(2)=0.9772$）

二. 选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. 设 A 为“零件长度合格”，B 为“零件直径不合格”，则 “零件长度或直径不合格”为（　）。
   A）$\overline{A}\cap B$　　B）$A\cap\overline{B}$　　C）$A\cup\overline{B}$　　D）$\overline{A}\cup B$

2. 设某电子元件的寿命服从参数为 λ 的指数，则当 λ 增加时，(　　)。

A） $P(X > \frac{1}{\lambda})$ 增加　　B） $P(X > \frac{1}{\lambda^2})$ 增加

C） $P(X < \frac{1}{\lambda})$ 增加　　D） $P(X < \frac{1}{\lambda^2})$ 增加

3. 设 $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$，$\mu_0$ 已知而 σ^2 未知，则下列哪个不是统计量。(　　)

A) $X_1 + X_2 + X_3$　　B） $X_1^2 - X_2X_3$

C) $(X_1 - \mu_0)^2 - \sigma^2$　　D） $(X_1 + X_2 - 2\mu_0^2)^2$

4. 设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 都是 θ 的相互独立的无偏估计，$Var(\hat{\theta}_1) = 3Var(\hat{\theta}_2)$，$U = a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2$，则下面哪组值使得 U 是 θ 的最有效的无偏估计。(　　)

A） $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$　　B） $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$

C） $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$　　D） $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4}$

5. 设 $X \sim P(2)$，$X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 是其样本，则根据大数定律，对任意 $\epsilon > 0$，(　　)。

A） $\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - 2| < \epsilon) = 1$

B） $\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) - 6| < \epsilon) = 0$

C） $\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - 3| > \epsilon) = 0$

D） $\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) - 4| < \epsilon) = 1$

6. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，$\sigma_0^2$ 已知，假设样本容量 n 和置信水平 $1 - \alpha$ 保持不变，则对于不同的样本观测值，总体均值 μ 的置信区间的长度(　　)。

A） 变长　　B） 变短　　C） 不变　　D） 不能确定

三. 计算题（共 60 分）

1. （12 分）已知盒中有 6 个小球，其中 4 个红球，2 个蓝球，现随机地从其中选取两个，其中红球的个数为 X，不放回，再从剩下的球中随机选取两个，其中蓝球的个数为 Y，

    1）给出 X, Y 的联合分布表；

    2）求 X, Y 的边缘分布；

    3）计算 $E(X-1)(Y-1)$。

2. (16 分) 已知连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x > \frac{\pi}{2} \\ A\sin x + B, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) 验证常数 $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$；

2) 求 X 的密度函数 $f(x)$；

3) 求 $P(-\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{6})$；

4) 求 $E\cos(X)$。

3. (12 分) 设两维随机变量 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} C(y+1), & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

1) 验证常数 $C = \frac{3}{2}$；

2) 求 $P(X < 2Y)$；

3) 求边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$，并判断独立性

4. (10 分) 设离散随机变量 X 的概率函数为

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!},\quad k=1,2,3,\cdots$$

求 $\lambda>0$ 的矩估计和极大似然估计。

5. (10 分) 某纯净水生产厂家用自动灌装机灌装纯净水，该自动灌装机灌装量服从 $N(\mu,0.5^2)$，现测量了 9 个样本的灌装量（单位：升）为：$18.0,17.7,17.6,18.4,18.1,18.5,17.9,18.4,18.3$，若标准灌装量为 18 升，取显著性水平 $\alpha=0.05$，问该灌装机是否工作正常？($Z_{0.025}=1.96,Z_{0.05}=1.65,t_8(0.05)=1.8595,t_8(0.025)=2.3060$)