# 2011 浙江工业大学高等数学(上)考试试卷 A

学院 ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

任课教师 ____________

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | | | |

一、填空题（每小题 3 分）：

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & x<0 \\ a+x & x\ge 0 \end{cases}$，使得 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $a=$ $1$。

2. 当 $x\to 0$ 时， $\tan x-\sin x$ 与 $ax^3$ 是等价无穷小，则 $a=$ $\frac{1}{2}$。

3. 设 $y=x^2\sqrt{1+x^2}$，则 $y'=$ $2x\sqrt{1+x^2}+\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$。

4. 设 $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=t\cos t \end{cases}$，则 $\frac{dy}{dx}=$ $\frac{\cos t-t\sin t}{1+\cos t}$。

5. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y^2-2xy+9=0$ 所确定，则 $\frac{dy}{dx}=$ $\frac{y}{y-x}$。

6. 设 $y=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$，则 $y'=$ $\frac{1-\ln x}{x^2}\cdot x^{\frac{1}{x}}$。

7. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)-2x)}{x}=0$，则 $f'(0)=$ $2$。

8. 函数 $y=x^3-6x^2+9x-4$ 单调减少的区间是 $(1,3)$。

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]=$ $\int_0^1 \sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$。

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}=$ $\frac{1}{2}e^{-1}$。

11. $\int x\ln x dx=$ $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$。

12. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx=$ $2\sqrt{2}$。

13. 微分方程 $y''+y'+y=0$ 的通解是 $y=e^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$。

二、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x\sin 3x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot(-2x^2)}{x\cdot 3x}=-\frac{1}{3}$$

2．设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+x}{x})^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^{t}dt$，求常数 $a$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=e^{a}$$

$$\int_{-\infty}^{a}te^{t}dt=te^{t}\Big|_{-\infty}^{a}-\int_{-\infty}^{a}e^{t}dt$$

$$=ae^{a}-e^{a}$$

$\therefore\ ae^{a}-e^{a}=e^{a}\quad \therefore a=2$

3．求 $\int\dfrac{\sin x}{1+\sin x}dx$

$$=\int\left(1-\frac{1}{1+\sin x}\right)dx$$

$$=x-\int\frac{dx}{1+\sin x}$$

$$=x-\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx$$

$$=x-\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=x-\int\sec^2 x\,dx-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}dx$$

$$=x-\tan x+\frac{1}{\cos x}+C$$

4．求微分方程 $y''-ay'^2=0$，$x=0$ 时 $y=0,y'=-1$ 的特解。

令 $y'=p$

$p'-ap^2=0$

$$\int\frac{dp}{p^2}=\int a\,dx$$

$$-\frac{1}{p}=ax+c$$

$\because x=0$ 时 $y'=-1$

即 $x=0$ 时 $p=-1$

$\therefore c=1$

$$\therefore p=-\frac{1}{ax+1}$$

$$y'=-\frac{1}{ax+1}$$

当 $a\neq 0$ 时 $y=-\frac{1}{a}\ln|ax+1|+C_1$

而 $x=0$ $y=0$ $\therefore C_1=0$

$$y=-\frac{1}{a}\ln|ax+1|$$

当 $a=0$ 时 $y'=-1$ $y=-x+C_1$

$x=0,y=0$ 代入 得 $C_1=0$

$y=-x$

三、（8 分）设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内具有三阶连续导数，如果 $f''(x_0)=0$，而 $f'''(x_0)\neq 0$，试问 $(x_0,f(x_0))$ 是否为拐点？为什么？请证明。

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}$$

不妨设 $f'''(x_0)>0$，则 $\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$

由保号性 $\exists\ \mathring{U}(x_0,\delta)$ 有 $\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$

则当 $x\in \mathring{U}_-(x_0,\delta)$ 时，$f''(x)<0$

$x\in \mathring{U}_+(x_0,\delta)$ 时 $f''(x)>0$

$\therefore (x_0,f(x_0))$ 为拐点.

四、（8 分）设 $f(x)$ 连续，$f(x)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,x-\sqrt[4]{1-x^2}\int_{-1}^{1}f^2(x)dx$，试求：$\int_{-1}^{1}f^2(x)dx$

令 $\int_{-1}^{1}f^2(x)dx=A$

则 $f(x)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}x-\sqrt[4]{1-x^2}A$，代入

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{4\pi}x^2-2\sqrt{\frac{3}{4\pi}}x\cdot\sqrt[4]{1-x^2}A+\sqrt{1-x^2}A^2\right)dx=A$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{4\pi}x^2+\sqrt{1-x^2}A^2\right)dx=A$$

$$\therefore \frac{2}{4\pi}+A^2\cdot\frac{\pi}{2}=A$$

$$A=\frac{1}{\pi}$$

五、（8 分）设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt$，证明：（1）$f(x)$ 是以 $\pi$ 为周期的周期函数；

（2）$2-\sqrt{2}\le f(x)\le\sqrt{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

(1) $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,dt$

$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt+\int_{x+\pi}^{x}|\sin t|\,dt+\int_{x+\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,dt$

$\because |\sin t|$ 以 $\pi$ 为周期

$\therefore \int_{x+\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,dt=\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt$　$\int_{x+\pi}^{x}|\sin t|\,dt=-\int_x^{x+\pi}|\sin t|\,dt=-\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt$

$\therefore f(x+\pi)=f(x)$

(2) $\because f(x)$ 以 $\pi$ 为周期　$\therefore$ 只需考虑 $x\in[0,\pi]$ 内.

$f'(x)=|\sin(x+\frac{\pi}{2})|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|=0$　$x=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi$.

$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt=1$　$f(\frac{\pi}{4})=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}|\sin t|\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\,dt=\sqrt{2}$

$f(\frac{3}{4}\pi)=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin t\,dt-\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin t\,dt=2-\sqrt{2}$.　$f(\pi)=-\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin t\,dt=1$

$\therefore 2-\sqrt{2}\le f(x)\le\sqrt{2}$　$x\in(-\infty,\infty)$

六、（4 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f''(x)<0$，证明：$\int_a^b f(x)dx\le(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

证：令 $F(t)=\int_a^t f(x)\,dx-(t-a)f(\frac{a+t}{2})$　$(t\ge a)$

$F'(t)=f(t)-f(\frac{a+t}{2})-(t-a)f'(\frac{a+t}{2})\cdot\frac{1}{2}$

$=f'(\xi)\cdot\frac{t-a}{2}-\frac{t-a}{2}f'(\frac{a+t}{2})$　$\frac{a+t}{2}\le\xi\le t$

$=\frac{t-a}{2}\left[f'(\xi)-f'(\frac{a+t}{2})\right]$

$\because f''(x)<0$　$\therefore f'(x)\downarrow$　$\therefore f'(\xi)\le f'(\frac{a+t}{2})$

当 $t\ge a$ 时. $F'(t)\le 0$

$\therefore F(b)\le F(a)$　即 $\int_a^b f(x)\,dx\le(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

七、（9 分）设 $y=f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的连续非负函数，过点 $(2,\frac{2}{9})$，若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1,x=t,\ (t>1)$ 及 $x$ 轴所围成的图形绕 $x$ 轴旋转而成的旋转体体积为：$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$，求曲线 $y=f(x)$ 的表达式。

$V(t)=\int_1^t \pi f(x)\,dx=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$

两边求导 $\pi f^2(t)=\frac{\pi}{3}[2tf(t)+t^2f'(t)]$

则 $f(x)$ 是 $\begin{cases}2xy+x^2y'=3y^2\\ y|_{x=2}=\frac{2}{9}\end{cases}$ 的解.

$y'+\frac{2}{x}y=\frac{3y^2}{x^2}$

两边同除 $y^2$，令 $z=\frac{1}{y}$，则得 $\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=-\frac{3}{x^2}$

先求 $\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=0$ 的解 可得 $z=Cx^2$

令 $z=C(x)\cdot x^2$ 代入

$C'(x)x^2=-\frac{3}{x^2}$

$C'(x)=-\frac{3}{x^4}$

$C(x)=\frac{1}{x^3}+C.$

$z=\frac{1}{x}+Cx^2$

即 $\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+Cx^2$ 再把 $y(2)=\frac{2}{9}$ 代入 得 $C=1$

$\therefore\ y=\frac{x}{x^3+1}$

**勘误:一填空题第 7 题改为:**

7. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2x}{x}=0$，则 $f'(0)=$____________。