15/16(一)浙江工业大学高等数学 A 考试试卷 A

学院：________ 班级：_______ 姓名:_________ 学号:_________

任课教师:_________

题号	一	二	三	四	五	总 分
得分						

一、填空选择题（每小题 3 分）：

1．当 $k=$ __2__ 时，$f(x)=\begin{cases} k+x^2 & x\le 0 \\ x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin 2x & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续。

2．设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的__同阶或 1 阶__无穷小。

3．设 $y=\sin\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$，则 $\frac{dy}{dx}=$____。$-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

4．设 $x+y=e^{xy}$，则 $\frac{dy}{dx}=$___。$\frac{ye^{xy}-1}{1-xe^{xy}}$

5．曲线 $y=f(x)$ 在点 (x,y) 处的切线斜率为 $4x^3$，且该曲线通过点 $A(1,6)$，则该曲线方程是______。$y=x^4+5$

6．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}=$______。$\frac{1}{2e}$

7．设 $\int f(x)dx=x^2+c$，则 $\int f(x-x^2)dx=$______。$-\frac{2}{3}x^3+x^2+c$

8．设线性无关函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解，则该方程的通解是____。$y=c_1(y_3-y_1)+c_2(y_3-y_2)+y_3$ 或………..

9．设 $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ B ）

（A）可去间断点；（B）跳跃间断点；（C）第二类间断点；（D）连续点。

10．函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，满足 $f(x)\le g(x)$，则在区间 $[a,b]$ 内（ C ）

（A）$f'(x)\le g'(x)$；（B）函数 $h(x)=g(x)-f(x)$ 单调；

（C）$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$；（D）方程 $g(x)-f(x)=0$ 至少有一个根。

二、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．设 $\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}$，求：$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解： $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{t}$ 3 分 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1+t^2}{t^3}$ 6 分

2．设 $e < a < b < e^2$，证明：$\dfrac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b-a} > \dfrac{4}{e^2}$

解： 由中值定理有 $\dfrac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b-a} = \dfrac{2\ln\xi}{\xi}$ $e < a < \xi < b < e^2$ 2 分

记 $g(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ $g'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{x^2} < 0$ $e < x < e^2$ 4 分

所以 $g(x) > g(e^2) = \dfrac{4}{e^2}$，$\dfrac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b-a} = \dfrac{2\ln\xi}{\xi} > \dfrac{4}{e^2}$，$e < a < b < e^2$ 6 分

3．证明：$2e^{-\frac{1}{4}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}dx \le 2e^2$

解： 记 $f(x) = e^{x^2-x}$，易知 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大最小值分别是 $f(2) = e^2$

$f(\dfrac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{4}}$，即在区间 $[0,2]$ 上有 $e^{-\frac{1}{4}} < e^{x^2-x} < e^2$ 4 分

由定积分性质可得 $2e^{-\frac{1}{4}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}dx \le 2e^2$ 6 分

4．求：$\int_0^\pi \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$

解： $\int_0^\pi \sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \int_0^\pi |\sin x + \cos x|\,dx$ 2 分

$= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\sin x + \cos x)dx - \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} (\sin x + \cos x)\,dx = 2\sqrt{2}$ 6 分

5．求：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+x}{1+\cos^2 x}dx$

解： $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+x}{1+\cos^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+\cos^2 x}dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{1+\cos^2 x}dx$ 2 分

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+\cos^2 x}dx \underset{=\!=\!=}{t = \tan x} 2\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{2+t^2}dt = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ 6 分

三、试解下列各题（每小题 8 分）：

1．设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ x & 1\le x\le 2 \end{cases}$，求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在[0，2]上的表达式，并讨论 $F(x)$ 在(0，2)内的连续性与可导性。

解： $F(x)=\int_0^x t^2dt=\frac{1}{3}x^3 \qquad 0\le x<1$， 2 分

$F(x)=\int_0^1 t^2dt+\int_1^x tdt=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6} \qquad 1\le x\le 2$

所以 $F(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 & 0\le x<1 \\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6} & 1\le x\le 2 \end{cases}$ 5 分

又，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$， $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x=1$ 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，从而 $f(x)$ 在(0，2)内的连续性，进而可知 $F(x)$ 在(0，2)内的连续可导。 8 分

2．设曲线 $y=\sin x$ 相应于 $0\le x\le\pi$ 的一段，直线 $y=0$ 所围成的图形为 A，求：（1）图形 A 的面积，（2）图形 A 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积。

解：（1）$A=\int_0^\pi \sin xdx=2$ 3 分

（2）$V=\int_0^\pi 2\pi x\sin xdx=2\pi^2$ 8 分

或 $V=\int_0^1 \pi(\pi-\arcsin y)^2dy-\int_0^1\pi\arcsin^2 ydy=2\pi^2$

3．已知抛物线 $y=-px^2+qx$（其中 $p>0$，$q>0$）在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切，问常数 p 和 q 为何值时此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积 S 为最大？

解： 由抛物线 $y=-px^2+qx$ 与直线 $x+y=5$ 相切，可知切点满足

$\begin{cases} -2px+q=-1 \\ x+y=5 \\ y=-px^2+qx \end{cases}$ 由此可得 $p=\frac{(q+1)^2}{20}$ 3 分

或，由抛物线与直线相切，一元二次方程 $-px^2+qx=5-x$ 只有一个实根，

$b^2-4ac=0$ 可得 $p=\frac{(q+1)^2}{20}$

又，抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积 $S=\int_0^{\frac{q}{p}}(-px^2+qx)dx=\frac{q^3}{6p^2}$ 5 分

即，$S(q)=\dfrac{200q^3}{3(q+1)^4}$，　令 $S'(q)=0$，　得唯一驻点 $q=3$，

从而当 $q=3$，$p=\dfrac{4}{5}$，时面积 $S(q)$ 最大　　8 分

四、试解下列各题（每小题 6 分）：

1．求微分方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=3$ 的特解。

解： 令 $y'=p$，　有 $\dfrac{1}{p}dp=\dfrac{2x}{1+x^2}dx$，　积分得 $y'=p=c_1(1+x^2)$　　4 分

再积分有　$y=c_1(x+\dfrac{1}{3}x^3)+c_2$，

从而满足初始条件的特解为　$y=3x+x^3+1$　　6 分

2．设函数 $f(x)$ 连续可导，且满足 $f(x)=e^x+\int_0^x(t-x)f(t)dt$，求 $f(x)$。

解： 积分方程两边求导二次得　$f''(x)=e^x-f(x)$　　2 分

二阶常系数微分方程　$f''(x)+f(x)=e^x$　的通解为

$$f(x)=c_1\sin x+c_2\cos x+\frac{1}{2}e^x \qquad 5 分$$

由积分方程得初始条件 $f(0)=1,\ f'(0)=1$，从而有

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x+e^x) \qquad 6 分$$

五、（4 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上可导，$f(0)=0$，$f(1)=2$，$f(2)=-2$，试证：至少存在一个 $\xi\in[0,2]$，使 $f'(\xi)=0$。

解： 因为 $f(1)=2$，$f(2)=-2$，

故可由介值定理知，存在 $c\in(1,2)\subset[0,2]$ 使 $f(c)=0$　　2 分

又，$f(0)=0$，

由罗尔定理知存在 $\xi\in(0,c)\subset[0,2]$ 使 $f'(\xi)=0$　　4 分