13/14(一)浙江工业大学高等数学 A 考试试卷 A

学院：________ 班级：_______ 姓名:_________ 学号:_______

题 号	一	二	三	四	五	总 分
得 分						

一、填空选择题（每小题 3 分）

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ ___________。 2

2．设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{\pi x}{6}$，要使 $f(x)$ 处处连续，则应该补充定义 $f(0)=$____。$\dfrac{\pi}{6}$

3．设 $f'(x_0)=3$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$___________。6

4．设 $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$，则 $y'=$___________。$\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

5．曲线 $y=x^3+2x^2-5$ 上的切线斜率最小的点是_______。$\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{119}{27}\right)$

6．设 $f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$_____。$n!(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})$

7．设 $\int_1^x f(t)dt=a^{2x}-a^2$，$f(x)$ 为连续函数，则 $f(x)=$____。$2a^{2x}\ln a$

8．微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$ 的通解是 _____。$x+y+1=ce^y$

9．在微积分的众多公式中被认为最重要的一个是_____。牛顿—莱布尼兹公式

10． $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}=\dfrac{1}{2}$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的（ C ）

A） 拐点　　B）极大值　　C）极小值　　D）不能确定

11． 对于微分方程 $y''+3y'+2y=e^{-x}$，利用待定系数法求其特解 y^*时，下面特解设法正确的是（ B,C ）

A） $y^*=ae^{-x}$　　B） $y^*=(ax+b)e^{-x}$　　C） $y^*=axe^{-x}$　　D） $y^*=ax^2e^{-x}$

二、试解下列各题（每小题 5 分）

1．设 $(5y+2)^3=(2x+1)^5$，求：$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

$y'=\dfrac{2(2x+1)^4}{3(5y+2)^2}$，　　3 分　　$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\dfrac{2}{3}$

2．摆线的参数方程为$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$，求：$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$　　　2 分　　　$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = -\dfrac{1}{a(1 - \cos t)^2}$

3．$\displaystyle\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \tan \frac{x}{2} + c$$

或　$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx = -\cot x + \csc x + c$$

4．设 $f(2x) = (x - \frac{1}{2}) e^{x^2 - x}$，求：$\displaystyle\int_0^2 |f(x)| dx$

$$\int_0^2 |f(x)| dx \overset{x=2t}{=} 2\int_0^1 |f(2t)| dt = 2\int_0^1 \left| t - \frac{1}{2} \right| e^{t^2 - t} dt \overset{u=t-\frac{1}{2}}{=} 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |u| e^{u^2 - \frac{1}{4}} du$$

$$= 4\int_0^{\frac{1}{2}} u e^{u^2 - \frac{1}{4}} du = 2 - 2e^{-\frac{1}{4}}$$

5．解微分方程 $2x(ye^{x^2} - 1)dx + e^{x^2} dy = 0$，$y(0) = -4$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2} \cdot 2x$$

$$y = (x^2 + c)e^{-x^2}$$

$$y = (x^2 - 4)e^{-x^2}$$

三、试解下列各题（每小题 6 分）

1．当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时，证明不等式：$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1} > \dfrac{x_2}{x_1}$

令　$f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$，　2 分

$$f'(x) = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{x - \frac{1}{2}\sin 2x}{x^2 \cos^2 x} > 0$$

$f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调增加，所以 $\dfrac{\tan x_1}{x_1} < \dfrac{\tan x_2}{x_2}$　　$0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$

即：$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1} > \dfrac{x_2}{x_1}$

2．已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\int_{-\infty}^{c}te^{2t}dt$，求常数 c

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}=e^{2c}$　　2 分　　$\int_{-\infty}^{c}te^{2t}dt=\dfrac{1}{4}(2c-1)e^{2c}$

$e^{2c}=\dfrac{1}{4}(2c-1)e^{2c}$　　$c=\dfrac{5}{2}$

3．设 $f(x)$ 为连续函数，证明 $\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt$

$$\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt=\left(t\int_0^t f(u)du\right)_0^x-\int_0^x tf(t)dt$$

$$=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x tf(t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt$$

另解：　记 $F(x)=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，

求导可得 $F'(x)=0$，所以 $F(x)=F(0)=0$

所以 $\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt$

4．计算曲线 $y=\sin x\quad(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴所围图形分别绕 x 轴旋转及绕 y 轴旋转一周所成立体的体积

$$V_x=\int_0^{\pi}\pi\sin^2 xdx=\frac{\pi^2}{2}$$

$$V_y=\int_0^{\pi}2\pi x\sin xdx=2\pi^2$$

或 $V_y=\int_0^1\pi(\pi-\arcsin y)^2dy-\int_0^1\pi(\arcsin y)^2dy=2\pi^2$

5．设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，$F(1)=1,F(x)>0$，且 $f(x)\cdot F(x)=\dfrac{1}{2}xe^x\ (x\ge1)$，试求：$f(x)\quad(x\ge1)$

记 $y=F(x)$，则 $y'=f(x)$，从而有初值问题 $\begin{cases}y'y=\dfrac{1}{2}xe^x\\ y\big|_{x=1}=1\end{cases}$

分离变量，解方程得通解 $y^2=(x-1)e^x+c$，特解 $y^2=(x-1)e^x+1$　5 分

从而 $f(x)=y'=\dfrac{xe^x}{2\sqrt{(x-1)e^x+1}}$

四、（8 分）设 $S_1(t)$ 是曲线 $y=x^3$ 与直线 $x=0$ 及 $y=t\ \ (0<t<1)$ 所围的图形的面积，$S_2(t)$ 是曲线 $y=x^3$ 与直线 $x=1$ 及 $y=t\ \ (0<t<1)$ 所围的图形的面积，试求 t 为何值时 $S_1(t)+S_2(t)$ 最小？最小值是多少？

$S_1(t)=\int_0^t y^{\frac{1}{3}}dy=\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$，

$S_2(t)=\int_{t^{\frac{1}{3}}}^1 (x^3-t)dx=\frac{1}{4}-t+\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$

$S(t)=S_1(t)+S_2(t)=\frac{1}{4}-t+\frac{3}{2}t^{\frac{4}{3}}$

令：$S'(t)=2t^{\frac{1}{3}}-1=0$，得 $t=\frac{1}{8}$

当 $t=\frac{1}{8}$ 时，$S_1(t)+S_2(t)$ 最小，最小值是 $\frac{7}{32}$

五、（4 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f(a)=f(b)$，证明：至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)-f(a)=0$。

令：$F(x)=xf(x)-xf(a)$

利用罗尔定理可得结论