**基于拉格朗日插值方法的GPS IGS精密星历插值分析**

(浙江工业大学 计算机科学与技术学院、软件学院)

摘要：GPS数据处理中，为使用IGS精密星历获取GPS卫星精确的、更高釆样率的轨道位置，必须 对精密星历进行插值。本文介绍拉格朗日插值方法的基本原理，并对其插值结果进行详细的分析讨论， 得出几点有益结论。

关键词：拉格朗日插值，IGS，精密星历。

Analysis of interpolation results on GPS IGS precise ephemeris

based on Lagrange interpolation

(Institute of Computer Science and Technology, Institute of Software,ZJUT)

**Abstract：**In GPS data processing, we must interpolate the precise ephemeris provided by IGS for getting precise and more sampling position of GPS satellites. The paper simply introduces the basic principle of Lagrange interpolation； analyses the interpolation results in detail, and also gets some helpful conclusions.

**Key words:** Lagrange interpolation. International GPS service(IGS). Precise ephemeris.

在利用GPS进行科学实验、数据处理和工程实践中，正确获取GPS卫星精确的轨道位置，是其需首要解决的基础问题。IGS 发布的精密星历提供我们所需的重要信息。IGS精密星历主要提供卫星精确的轨道位置。而GPS接收机的采样率一般为30 s或者15 s，甚至更密，因此，要想利用某一时刻的卫星位置，就必须对精密星历进行高精度的插值。本文简单介绍了 拉格朗日插值方法的基本原理，以精密星历中固定采样率的卫星坐标为基础，将其作为插值所需的节点，对其插值结果进行详细的分析和总结。

1 拉格朗日插值方法原理

已知y=f(x)上n+1个点(xi,yi)(i=0,1,2,···,n)，设x0<x1<x2<···<xn ，Ln(x)满足插值条件：Ln(xi)=yi(i=0,1,2,···,n)；

令满足 ，

从而可得拉格朗日插值多项式：

(1)一阶拉格朗日多项式(线性插值 n=1)

即

这是线性函数。用过两点(x0,y0)、(x1,y1)的线性函数y=L1(x)近似代替y=f(x)。

(2)2阶拉格朗日多项式(二次插值/抛物线插值 n=2)



这是二次函数。用过三点(xi,yi)(i=0,1,2)的二次函数(抛物线)y=L2(x)近似代替y=f(x)。

(3)n阶拉格朗日多项式(全区间拉格朗日插值)



Lagrange插值多项式的基函数仅仅与节点有关，不随函数值f(xi)的改变而改变。

已知卫星坐标函数x=f(t)的n+1个插值节点为t0,t1,...,tn，插值节点上卫星的坐标分别为x0,x1,...,xn，那么对于插值区间内任意观测时刻t，可以用拉格朗日多项式来计算卫星的坐标：



利用该式在X,Y,Z方向上分别进行插值处理，就可以得到任意时刻的卫星坐标，由于拉格朗日插值在插值区间的中间部分效果很好，在靠近两段位置容易出现不收敛的现象，即“龙格”现象，所以应尽可能使插值点位于插值区间的中间部分。

2 实例分析

数据来源于2002-10-27的IGS精密星历，以PRN 编号为1的GPS卫星为例进行探讨，在01：00:00至05：45：00的坐标值作为分析对象。本文选用了 20个时刻的卫星坐标作为插值节点，利用前文所述的拉格朗日插值方法对其插值结果进行分析。坐标值如表1所示。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **表1 IGS精密星历坐标值 km** | | | |
| 时刻 | X | Y | Z |
| 1:00:00 | 20 715. 168 881 | -2 164. 830 431 | -16 341. 037 400 |
| 01:15:00 | 22 262. 163 674 | -1 277. 419 947 | -14 295. 928 237 |
| 01:30:00 | 23 623. 391 045 | -564. 440 896 | -12 002. 766 280 |
| 01:45:00 | 24 760. 008 511 | -8. 256 861 | -9 501. 700 830 |
| 02:00:00 | 25 638. 989 236 | 415. 574 865 | -6 836. 354 516 |
| 02:15:00 | 26 234. 338 681 | 737. 129 504 | -4 053. 033 123 |
| 02:30:00 | 26 528. 042 822 | 990. 726 910 | -1 199. 899 097 |
| 02:45:00 | 26 510. 713 906 | 1 213. 386 898 | 1 673. 875 027 |
| 03:00:00 | 26 181. 912 099 | 1 443. 190 158 | 4 518. 957 573 |
| **03:15:00**  **(内插时刻)** | **25 550. 134 199** | **1 717. 609 714** | **7 286. 698 056** |
| 03:30:00 | 24 632. 473 549 | 2 071. 877 768 | 9 929. 943 099 |
| 03:45:00 | 23 453. 967 430 | 2 537. 450 266 | 12 403. 815 314 |
| 04:00:00 | 22 046. 659 656 | 3 140. 626 774 | 14 666. 443 967 |
| 04:15:00 | 20 448. 415 987 | 3 901. 376 515 | 16 679. 637 677 |
| 04:30:00 | 18 701. 538 385 | 4 832. 413 079 | 18 409. 490 807 |
| 04:45:00 | 16 851. 230 624 | 5 938. 550 789 | 19 826. 916 527 |
| 05:00:00 | 14 943. 972 372 | 7 216. 365 108 | 20 908. 100 806 |
| 05:15:00 | 13 025. 861 406 | 8 654. 168 549 | 21 634. 872 662 |
| 05:30:00 | 11 140. 984 188 | 10 232. 302 300 | 21 994. 986 982 |
| **05:45:00**  **(外插时刻)** | **9 329. 873 581** | **11 923. 732 699** | **21 982. 317 115** |

内插采用的插值策略为：选取中间节点03：15：00作为内插时刻，假定其坐标未知，一次插值选取中间节点前一时刻和后一时刻作为插值节点，二次插值选取中间节点前一时刻和后2个时刻作为插值节点，三次插值选取中间节点前2个时刻和后2个时刻作为插值节点，以此类推,直至所有节点均参与插值。

拉格朗日插值方法是通过给定n+1个互异的插值节点，求一条n次代数曲线近似表示待插值的函数曲线，属于代数插值的范畴。表2给出了拉格朗日插值法不同阶数的内插插值结果及其与真值的差值。

结果显示：随着插值阶数的增大，插值结果迅速收敛；当插值阶数为9阶时，插值精度最高，达到亚毫米量级，由于IGS事后精密星历的精度优于5 cm，因此，9阶内插插值结果完全满足精密定位对轨道的要求；随着插值阶数的继续增大，插值结果岀现小幅震荡，精度也相对地越来越差。

图1显示了部分插值阶数的内插结果与真值的差值，形象直观地表达了插值结果的变化情况。

**表2 拉格朗日不同阶数的内插插值结果及其与真值的差值**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 阶数 | X /km | 差值/mm | Y /km | 差值/mm | Z /km | 差值/mm |
| 1 | 25 407. 192 824 | -142 941 375 | 1 757. 533 963 | 39 924 249 | 7 224.450 336 | -62 247 720 |
| 2 | 25 541. 788 438 666 7 | -8 345 760 | 1 707. 124 398 666 *67* | -10 485 315 | 7 301. 657 185 333 33 | 14 959 129 |
| 3 | 25 548. 810 209 333 3 | -1 323 990 | 1 718. 239 09 | 629 376 | 7 286. 318 724 5 | -379 332 |
| 4 | 25 550. 040 458 5 | -93 740. 5 | 1 717. 471 701 6 | -138 012 | 7 286. 771 122 5 | 73 066. 5 |
| 5 | 25 550. 119 959 1 | -14 239.9 | 1 717. 617 479 5 | 7 765. 5 | 7 286. 695 645 2 | -2 410. 8 |
| 6 | 25 550. 133 124 257 1 | -1 074.7 | 1 717. 608 261 114 29 | -1 452.9 | 7 286. 698 334 571 43 | 1. 6 |
| 7 | 25 550. 134 057 657 1 | -141.3 | 1 717. 609 810 242 86 | 96.2 | 7 286. 698 035 571 43 | -20. 4 |
| 8 | 25 550. 134 187 214 3 | -11.8 | 1 717. 609 701 285 71 | -12.7 | *7* 286. 698 055 825 4 | -0. 174 6 |
| **9** | **25 550.134 199 25** | **0.250 0** | **1 717. 609 715 531 75** | **0.153 2** | **7 286. 698 055 956 35** | **-0. 043 7** |
| 10 | 25 550.134 200 084 4 | 1.084 4 | 1 717. 609 713 943 *72* | -0. 056 3 | 7 286. 698 056 114 72 | 1. 114 7 |
| 11 | 25 550.134 2005 249 | 1.524 9 | 1 717. 609 714 110 39 | 1. 110 4 | 7 286. 698 056 341 99 | 0. 342 0 |
| 12 | 25 550.134 200 393 9 | 1.393 9 | 1 717. 609 713 874 71 | -0. 125 3 | 7 286. 698 056 276 *22* | 0. 276 2 |
| 13 | 25 550.134 200 651 5 | 1.651 5 | 1 717. 609 713 969 11 | -0. 030 9 | *7* 286. 698 056 467 66 | 0. 467 7 |
| 14 | 25 550.134 200 515 8 | 1.515 8 | 1 717. 609 713 758 82 | -0. 241 2 | 7 286. 698 056 395 18 | 0. 395 2 |
| 15 | 25 550. 134 200 755 9 | 1.755 9 | 1 717*.* 609 713 856 *25* | -0. 143 8 | 7 286. 698 056 576 77 | 0. 576 8 |
| 16 | 25 550.134 200 618 5 | 1.618 5 | 1 717. 609 713 656 03 | -0. 344 0 | 7 286. 698 056 499 83 | 0. 499 8 |
| 17 | 25 550.134 200 843 6 | 1.843 6 | 1 717. 609 713 751 89 | -0. 248 1 | 7 286. 698 056 674 58 | 0. 674 6 |
| 18 | 25 550.134 200 707 6 | 1.707 6 | 1 717. 609 713 563 63 | -0. 436 4 | 7 286. 698 056 592 83 | 1. 592 8 |
| 真值 | **2S 550. 134 199** |  | **1 717. 609 714** |  | **7 286. 698 056** |  |

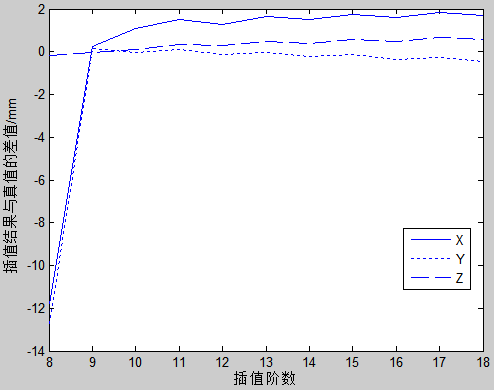


图1 8阶至18阶拉格朗日内插插值结果与真值的差值

外插采用的插值策略为：选取节点05：45：00作为外插时刻，假定其坐标未知，一次插值选取待插值节点前2个时刻作为插值节点，二次插值选取刖 3个时刻作为插值节点，以此类推，直至所有节点均参与插值。

表3给出了拉格朗日插值法不同阶数的外插插值结果及其与真值的差值。

结果显示：随着插值阶数的增大，插值结果迅速收敛；当插值阶数为9阶时，插值精度最高，达到分米级，甚至达到厘米、毫米级，但是，相对于内插结，精度依然较差，不能完全满足精密定位对轨道的要求；随着插值阶数的继续增大，插值结果出现明显偏差，精度急剧下降，阶数在15阶以上时，差值达到几十米甚至上百米。由于外插节点位于插值区间的端点，随着阶数的继续增大，舍入误差继续积累，反而导致插值结果出现较大误差，这也验证了高次插值中的龙格现象。

图2显示了部分插值阶数的外插结果与真值的差值,形象直观地表达了插值结果的变化情况。

**表3 拉格朗日不同阶数的外插插值结果及其与真值的差值**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 阶数 | X /km | 差值/m | Y /km | 差值/m | Z /km | 差值/m |
| 1 | 9 256.106 97 | -73 766.61 | 11 810. 436 051 | -113 296. 65 | 22 355. 101 302 | 372 784. 19 |
| 2 | 9 289. 340 718 | -40 532. 86 | 11 950. 766 361 | 27 033. 66 | 21 988. 443 766 | 6 126. 65 |
| 3 | 9 333.42 717 999 999 | 3 553. 6 | 11 931. 107 549 | 7 374. 85 | 21 976. 198 653 | -6 118, 46 |
| 4 | 9 331.41 586 500 001 | 1 542. 28 | 11 923. 136 224 | -596. 48 | 21 982.124 522 | -192. 59 |
| 5 | 9 329. 786 441 000 02 | -87. 14 | 11 923.427 849 | -304. 85 | 21 982. 407 342 | 90.23 |
| 6 | 9 329. 814 802 000 01 | -58.78 | 11 923. 743 564 | 10. 87 | 21 982. 319 911 999 9 | *2.* 797 |
| 7 | 9 329.875 029 999 98 | 1. 449 | 11 923. 743 776 | 11.08 | 21 982.316 223 999 7 | -0. 892 |
| 8 | 9 329. 875 596 999 96 | 2.016 | 11 923. 732 526 000 1 | -0.173 | 21 982. 317 206 999 9 | 0. 092 |
| **9** | **9 329. 873 620 998 97** | **0.040** | **11 923.732 198 999 8** | **-0.5** | **21 982.317 117 998 1** | **0.003** |
| 10 | 9 329. 873 708 995 13 | 0. 128 | H 923. 732 196 999 | -0.502 | *21* 982.317 233 995 8 | 0.119 |
| 11 | 9 329. 873 982 000 02 | 0. 401 | 11 923. 731 451 000 5 | -1. 248 | 21 982.317 509 999 | 0. 395 |
| 12 | 9 329. 874 484 000 15 | 0. 903 | 11 923. 730 082 001 3 | -2.617 | 21 982. 317 986 998 6 | 0.872 |
| 13 | 9 329. 875 696 988 92 | 2.116 | 11 923. *727* 799 000 1 | -4. 9 | 21 982. 318 769 996 8 | 1. 655 |
| 14 | 9 329. 878 604 017 61 | 5.023 | 11 923. 724 284 995 4 | -8.41 | 21 982. 320 016 972 7 | 2.902 |
| 15 | 9 329. 885 597 025 04 | 12.02 | 11 923. 719 324 997 6 | -13. 37 | 21 982. 322 202 001 2 | 5. 087 |
| 16 | 9 329. 902 344 116 45 | 28. 76 | 11 923. 712 813 013 8 | -19. 89 | 21 982. 326 930 115 3 | 9.815 |
| 17 | 9 329. 941 689 328 81 | 68,11 | 11 923. 704 451 059 1 | -28. 25 | 21 982. 339 081 152 7 | 21. 97 |
| 18 | 9 330. 031 326 029 3 | 157.7 | 11 923. 692 387 896 4 | -40. 31 | 21 982.371 878 313 7 | 54. 76 |
| 真值 | **9 329. 873 581** |  | **11 923. 732 699** |  | **21 982. 317 115** |  |

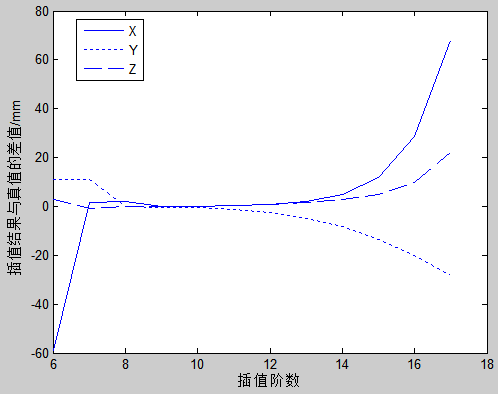


图2 6阶至17阶拉格朗日内插插值结果与真值的差值

3 结论

通过对上述不同阶数插值结果的比较分析，可以得出以下几点结论：

(1)内插插值方式，充分利用了待插节点前后的数据信息，能够充分体现待插节点附近卫星运动的基本规律，插值精度较高；外插插值方式，只利用了待插节点前或者待插节点后的数据信息，不能充分体现待插节点附近卫星运动的基本规律，插值精度较低；因此，在卫星数据允许的条件下，尽量选用待插节点位于中间的插值方式。

(2)GPS IGS精密星历的采样率为15 min，通过分析验证，当选取10个插值节点(前后各选取5 个)，即插值阶数为9阶时，插值效果最好，可以达到亚毫米量级，完全能够满足精密定位对轨道的要求；但是，随着插值阶数的增大，舍入误差会造成龙格现象的岀现，尤其是在外插插值方式时，因此，插值阶数越高，插值效果不一定更好。

(3)拉格朗日插值是代数插值，且原理简单易懂,，易于编程；当阶数为9阶时，插值精度完全满足各种应用对轨道的耍求。因此，在对GPSIGS精密星历进行插值时，可以首选拉格朗日插值方法。

参考文献

1. 何玉晶，杨力：基于拉格朗日插值方法的GPS IGS精密星历插值分析.
2. 万亚豪，张书毕，候东阳：GPS精密星历插值法与拟合法的精度分析.