

## Problemas de aplicación, unidad 1

- Se dan a continuación una serie de problemas de aplicación de sistemas lineales apuntando al cierre de la unidad 1. Para uso en clases (y no copiar enunciados en pizarra...)

### 1. Sobre operatoria de matrices:

- a) Considere una matriz  $A$  de  $n \times n$  que satisface la relación  $A^2 - 2A + I = 0$  (matriz cero). Muestre que también cumple  $A^3 = 3A - 2I$  y  $A^4 = 4A - 3I$ .
- b) Compruebe la igualdad

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$$

y use esto para calcular

$$\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}^4 \quad y \quad \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}^7.$$

- c) Compruebe la igualdad

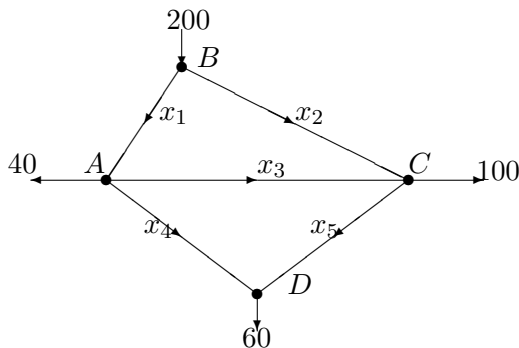
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

y use esto para calcular

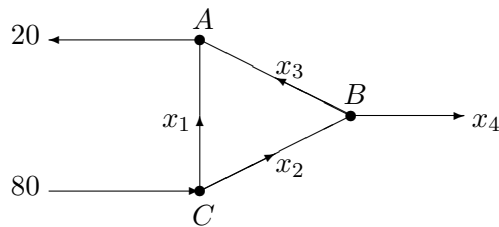
$$\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}^4.$$

2. Patrones de flujo: (En cada problema, plantee cada ecuación suponiendo que en cada punto el flujo de entrada es igual al flujo de salida.)

- a) Encontrar el patrón para el sistema de calles de la figura.



b) Considere el patrón de flujo siguiente.



Suponiendo que los flujos no son negativos, y que en cada intersección el flujo de entrada y salida son iguales, determinar el valor máximo de  $x_3$ .

3. Programación lineal para más de dos variables:

- a) Se desea una mezcla de crudo a partir de crudos de distintas procedencias. El árabe tiene 0.40 % de azufre, densidad 0.95 y cuesta \$155.000 la tonelada; el noruego tiene 0.38 % de azufre, densidad 0.89 y cuesta \$195.000 la tonelada; el venezolano tiene 0.41 % de azufre, densidad 0.92 y cuesta \$170.000 la tonelada. Si la mezcla debe contener 0.4 % de azufre y tener densidad 0.91, determinar la combinación que minimiza el precio de costo. *(las incógnitas son las proporciones de cada crudo; naturalmente, una ecuación es  $x + y + z = 1$ ; las otras están en el problema.)*
- b) Se desea una segunda mezcla con distintas procedencias. El árabe tiene 0.42 % de azufre, densidad 0.95 y cuesta \$155.000 la tonelada; el noruego tiene 0.39 % de azufre, densidad 0.89 y cuesta \$195.000 la tonelada; el venezolano tiene 0.43 % de azufre, densidad 0.92 y cuesta \$170.000 la tonelada. Si la mezcla debe contener 0.41 % de azufre y tener densidad 0.92, determinar la combinación que minimiza el precio de costo.

4. Modelos (muy, pero muy) básicos de economía.

- a) Un modelo económico sencillo tiene solo 2 sectores: bienes y servicios. El primero vende el 80 % de su producción a servicios y retiene el resto. El segundo vende el 70 % de su producción a bienes y retiene el resto. Determinar el precio de equilibrio para ingresos y gastos. *(Plantee cada ecuación igualando ingresos y gastos, y obtenga un sistema.)*
- b) Una economía tiene 3 sectores. El de carbón vende el 60 % de sus ingresos a electricidad y el 40 % al acero. La electricidad vende el 40 % al carbón, el 50 % al acero y retiene el resto. El de acero vende el 60 % al carbón, el 20 % a la electricidad y retiene el resto. Encontrar los precios de equilibrio.
- c) En una economía con 3 sectores, de la producción del sector químico se vende el 30 % a combustibles y el 50 % a maquinaria, reteniendo el resto. De la producción de combustibles se vende el 80 % a químicos y el 10 % a maquinaria, conservando el resto. Del sector maquinaria, se vende el 40 % a químicos y el 40 % a combustibles conservando el resto. Determinar un estado de precios en equilibrio.