1. Граф[1] Европы $\mathcal{E} = \langle V, E\rangle$ определяется следующим образом: каждая вершина $v \in V$ — страна Европы; две вершины смежны ($\{u, v\} \in E$), если соответствующие страны граничат. Обозначим за $\mathcal{E}^*$ наибольшую компоненту связности графа $\mathcal{E}$.
   (a) Нарисуйте граф Европы $\mathcal{E}$ и докажите его планарность, показав, что он плоский.
   (b) Найдите: $|V|$, $|E|$, $\delta(\mathcal{E}^*)$, $\Delta(\mathcal{E}^*)$, $\mathrm{rad}(\mathcal{E}^*)$, $\mathrm{diam}(\mathcal{E}^*)$, $\mathrm{center}(\mathcal{E}^*)$.
   (c) Найдите наименьшую вершинную раскраску[2] Z графа $\mathcal{E}$.
   (d) Найдите наибольшее независимое множество X графа $\mathcal{E}$ и докажите, что оно максимально.
   (e) Найдите наибольшее паросочетание M графа $\mathcal{E}$ и докажите, что оно максимально.
   (f) Найдите наименьшее вершинное покрытие R графа $\mathcal{E}$ и докажите, что оно минимально.
   (g) Найдите наименьшее рёберное покрытие F графа $\mathcal{E}^*$ и докажите, что оно минимально.
   (h) Найдите кратчайший замкнутый путь, содержащий все рёбра[3] графа $\mathcal{E}^*$.
   (i) Добавьте весовую функцию $w : E \to \mathbb{R}$, обозначающую расстояние между столицами. Найдите минимальное остовное дерево T для наибольшей компоненты связности взвешенного графа $\mathcal{E}_w = \langle V, E, w\rangle$.
2. Докажите, что в каждом r-регулярном ($r > 0$) (n, m)-двудольном графе $n = m$.
3. Докажите, что связный граф $G = \langle V, E\rangle$ — дерево *тогда и только тогда, когда*[4] $|E| = |V| - 1$.
4. Докажите «неравенство треугольника» для связного графа $G = \langle V, E\rangle$:

$$\forall x, y, z \in V \ \ \mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z) \geq \mathrm{dist}(x, z)$$

Шпаргалочка

* Граф G — это пара $\langle V, E\rangle$ из множества вершин V и множества рёбер E.
* $S^k = S \times \cdots \times S = \{\langle s_1, \ldots, s_k\rangle \mid s_1, \ldots, s_k \in S\}$ — множество k-кортежей (Декартова k-степень S).
* $S^{(k)} = \{\{s_1, \ldots, s_k\} \mid s_1 \neq \cdots \neq s_k \in S\}$ — множество всех подмножеств S размера k.
* В простом **направленном** графе $E \subseteq V^2$. В простом **ненаправленном** графе $E \subseteq V^{(2)}$.
* $\delta(G) = \min\limits_{v \in V} \deg(v)$ — **минимальная степень**, $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V} \deg(v)$ — **максимальная степень**.
* Граф называется r-**регулярным**, если все его вершины имеют одинаковую степень r.
* **Расстояние** $\mathrm{dist}(v, w)$ между двумя вершинами — длина кратчайшего пути $v \rightsquigarrow w$.
* **Независимое множество** $X \subseteq V$ — множество попарно несмежных вершин.
* **Паросочетание** $M \subseteq E$ — множество попарно несмежных рёбер.
* **Вершинное покрытие** $R \subseteq V$ — множество вершин, которые покрывают все рёбра графа: $\{u, v\} \in E \to u \in R \vee v \in R$.
* **Рёберное покрытие** $F \subseteq E$ — множество рёбер, которые покрывают все вершины графа.
* Различайте **наибольшие** и **максимальные** штуки!
  — Некоторая штука A^* называется **наибольшей** («глобальный максимум»), если не существует другой штуки A, такой, что $|A| > |A^*|$.
  — Некоторая штука A' называется **максимальной** («локальный максимум»), если не существует другой штуки A, такой, что $A \supset A'$ (в некоторых случаях пишут $A \succ A'$).
  — Аналогично определяются **наименьшие** и **минимальные** штуки.

---

[1] Здесь и далее под «графом» подразумевается «простой ненаправленный и невзвешенный граф», если не указано иное.

[2] Так как граф $\mathcal{E}$ планарный, то точно существует 4-раскраска, однако, она может быть не наименьшей!

[3] Задача китайского почтальона.

[4] Чтобы доказать $A \leftrightarrow B$ («*тогда и только тогда*»), необходимо доказать как $A \to B$, так и $B \to A$.