Математический анализ
Типовой расчет №1
Неопределенные и определенные интегралы
ФИТиП ИС
1 курс 3 модуль

Кулешова Екатерина Дмитриевна
M3103

02.2020 - 03.2020

1 Найти интегралы

а) $\int e^{5x-1}\,\mathrm{d}x = (*)$

Используем теорему о замене переменной в неопределенном интеграле, чтобы получить табличный интеграл:

$$\text{Замена: } \begin{bmatrix} t = 5x-1 \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{5} \end{bmatrix} \quad => \quad (*) \quad = \quad \frac{1}{5}\int e^t\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{1}{5}(e^t \quad + \quad C) \quad = \quad \frac{e^{5x-1}}{5} \quad + \quad C$$

б) $\int \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x = (*)$

Используем теорему о замене переменной в неопределенном интеграле, чтобы получить табличный интеграл:

$$\text{Замена: } \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} \quad => \quad (*) \quad = \quad \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t^2}} \quad = \quad 3\sqrt[3]{t} \quad + \quad C \quad = \quad 3\sqrt[3]{\sin x} \quad + \quad C$$

в) $\int \dfrac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = (*)$

Преобразуем исходное выражение, ставим знаменатель под знак интеграла, в оставшейся части выделим полные квадраты, благодаря чему получаем два табличных интеграла:

$$(*) = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}} - \frac{8}{\sqrt{3-2x-x^2}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-2x-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x+1)^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\big(3-2x-x^2\big)}{\sqrt{3-2x-x^2}} - 4\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = -\sqrt{3-2x-x^2} - 4\arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

2 Найти интегралы с помощью интегрирования по частям и замены переменной

а) $\int x \;\log_3(1-x)\,\mathrm{d}x = (*)$

Под знаком интеграла стоит произведение полинома на трансцендентную функцию - это типовая ситуация. Избавляемся от трансцендентности, интегрируя по частям, где за u берем эту функцию, ее производная будет уже алгебраической функцией:

$$\text{Интегрируем по частям: } \left[\begin{array}{r|l} u = \log_3(1-x) & \mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}x}{(1-x)\ln 3} \\ v = \dfrac{x^2}{2} & \mathrm{d}v = x\;\,\mathrm{d}x \end{array}\right] => (*) = \frac{x^2}{2}\;\log_3(1-x) - \left(\int \frac{-x}{(1-x)\ln 3}\,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \frac{x^2}{2}\;\log_3(1-x) - \frac{1}{\ln 3}\int\left(1 - \frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\;\log_3(1-x) - \frac{x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int \frac{\mathrm{d}(1-x)}{1-x} =$$
$$= \frac{x^2}{2}\;\frac{\ln(1-x)}{\ln 3} - \frac{x}{\ln 3} - \frac{\ln|1-x|}{\ln 3} + C = \frac{x^2}{2}\;\log_3(1-x) - \log_3|1-x| - \frac{x}{\ln 3} + C =$$
$$= \frac{\frac{2x^2}{2}\log_3(1-x) - 2\log_3|1-x|}{2} - \frac{x}{\ln 3} + C = \frac{\frac{x^2}{2}\log_3(1-x)^2 - \log_3(1-x)^2}{2} - \frac{x}{\ln 3} + C = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right)\log_3(1-x)^2 - \frac{x}{\ln 3} + C$$

б) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = (*)$

Избавимся от иррациональности, заменяя знаменатель дроби, после чего разложим дробь на слагаемые - табличные интегралы:

$$\text{Замена: } \left[\begin{array}{c} t = 1+\sqrt{x},\ \sqrt{x} = t-1 \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} \\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ \mathrm{d}t = 2\,(t-1)\ \mathrm{d}t \end{array}\right] => (*) = 2\int \frac{(t-1)^2}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-2t+1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int \left(t-2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 2\int t\,\mathrm{d}t - 4\int \mathrm{d}t + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = t^2 - 4t + 2\ln t + C = \left(1+\sqrt{x}\right)^2 - 4\left(1+\sqrt{x}\right) + 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C =$$

$$= 1 + 2\sqrt{x} + x - 4 - 4\sqrt{x} + 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C = 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + x - 2\sqrt{x} + C$$

3 Найти неопределенные интегралы от рациональных функций

$$\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x^2+3)\,(x+3)^2}\,\mathrm{d}x = (*)$$

Проверим, является ли данная дробь правильной

$$(*) \quad = \quad \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x^2+3)\,(x^2+6x+9)} \quad = \quad \frac{x^3+9x^2+21x+21}{x^4+6x^3+9x^2+3x^2+18x+27} \quad = \quad \frac{x^3+9x^2+21x+21}{x^4+6x^3+12x^2+18x+27}$$

Степень знаменателя больше степени числителя, значит дробь правильная. Разложим ее на простейшие слагаемые методом неопределенный коэфициентов (по теореме о разложении):

$$\frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x^2+3)\,(x+3)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2} = \frac{(Ax+B)\,(x+3)^2 + C\left(x^2+3\right)(x+3) + D\left(x^2+3\right)}{(x^2+3)\,(x+3)^2} =>$$

$$x^3+9x^2+21x+21 = (Ax+B)\,(x+3)^2 + C\left(x^2+3\right)(x+3) + D\left(x^2+3\right) =$$

$$= A\left(x^3+6x^2+9x\right) + B\left(x^2+6x+9\right) + C\left(x^3+3x^2+3x+9\right) + D\left(x^2+3\right)$$

Коэффициенты перед степенями x удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 21 = 9B+9C+3D \\ x^1 & 21 = 9A+6B+3C \\ x^2 & 9 = 6A+B+3C+D \\ x^3 & 1 = A+C \end{array} =>$$

Решим данную систему методом Гаусса, и найдем коэффициенты после обратного прохода:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) => A = 1,\ B = 2,\ C = 0,\ D = 1$$

$$(*) = \int \left(\frac{x+2}{x^2+3} + \frac{1}{(x+3)^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2+3\right)}{x^2+3} + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3}\right) + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2+3\right)}{x^2+3} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3} + \int \frac{\mathrm{d}(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{x+3} + C$$

4 Найти неопределенные интегралы

$$\int \frac{\sin x}{(1-\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = (*)$$

Используя универсальную тригонометрическую подтановку, сведем к интегралу от рациональной функции, которую потом разложим на простейшие слагаемые и получим табличные интегралы:

$$\text{Замена:}\left[\begin{array}{c} tg\left(\frac{x}{2}\right)=t \\ dx=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] => (*) = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\left(1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} =$$

$$= 4\int \frac{t\left(1+t^2\right)}{(1+t^2-2t+1-t^2)\,(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(2-2t)\,(1+t^2)} = 2\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1-t)\,(1+t^2)}$$

Степень знаменателя больше степени числителя, значит дробь правильная. Разложим ее на простейшие слагаемые методом неопределенный коэфициентов (по теореме о разложении):

$$\frac{2t}{(1-t)\,(1+t^2)} = \frac{A}{1-t}+\frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A\left(1+t^2\right)+(Bt+C)\,(1-t)}{(1-t)\,(1+t^2)} = \frac{A\left(1+t^2\right)+B\left(t-t^2\right)+C\,(1-t)}{(1-t)\,(1+t^2)}$$

Коэффициенты перед степенями t удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 0=A+C \\ x^1 & 2=B-C \\ x^2 & 0=A-B \end{array} \quad => \ A=1,\ B=1,\ C=-1$$

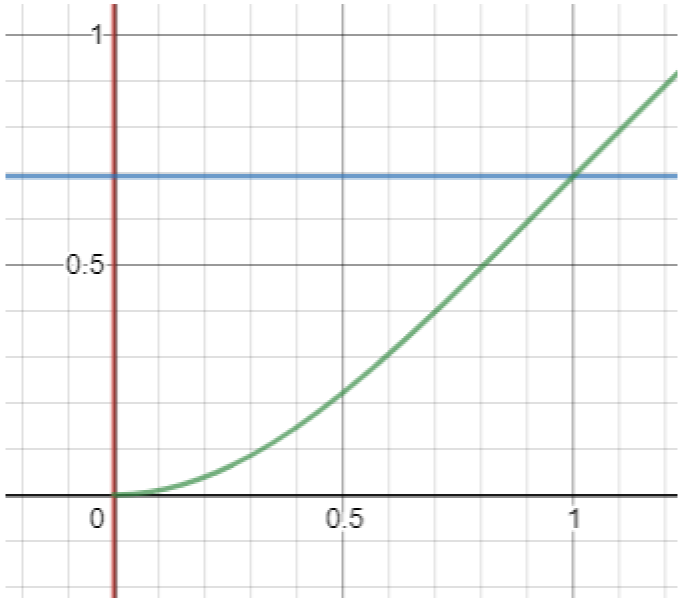
$$(*) = \int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{t-1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int\frac{\mathrm{d}(1-t)}{1-t}+\frac{1}{2}\int\frac{2t-2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int\frac{\mathrm{d}(1-t)}{1-t}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(1+t^2\right)}{1+t^2}-\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} =$$

$$= -\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|-arctg\,(t)+C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+tg^2\frac{x}{2}}{\left(1-tg\frac{x}{2}\right)^2}\right)-\frac{x}{2}+C = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2tg\frac{x}{2}}{\left(1-tg\frac{x}{2}\right)^2}\right)-\frac{x}{2}+C$$

5 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x=\sqrt{e^y-1},\ x=0,\ y=\ln 2$$

Если область D ограничена сверху кривой $x=\Phi\,(y)$, а снизу кривой $x=\phi\,(y)$, причём $\phi\,(y)\le\Phi\,(y)\,,\ y\in[a,b]$, то площадь области можно вычислить по формуле: $S=\int_a^b\left(\Phi\,(y)-\phi\,(y)\right)$ Судя по графику, ограниченная область задается неравенствами: $0\le x\le\sqrt{e^y-1},\ 0\le y\le\ln 2$ (в данном случае удобно интегрировать по y).



Т.к $x = \phi\left(y\right) = 0$, то вычитаемое зануляется, и его можно не учитывать:

$$=> \ S = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^y - 1}\, \mathrm{d}y$$

$$\text{Замена:} \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{e^y - 1},\ e^y = t^2 + 1 \\ \mathrm{d}t = \dfrac{e^y}{2\sqrt{e^y - 1}}\, \mathrm{d}y = \dfrac{t^2+1}{2t}\, \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}y = \dfrac{2t\, \mathrm{d}t}{t^2+1} \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c|l} y & t \\ -- & ------------ \\ 0 & 0 \\ \ln 2 & \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = \sqrt{2-1} = 1 \end{array}$$

$$=> S = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\, \mathrm{d}t = 2\int_0^1 \left(\frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t = 2\int_0^1 \mathrm{d}t - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\left(t\right)|_0^1 - 2arctg\left(t\right)|_0^1 =$$

$$= 2\left(1 - 0 - arctg1 + arctg0\right) = 2\left(1 - 0 - \frac{\pi}{4} + 0\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

6 Вычислить длины дуг кривых, заданных:

а) Уравнениями в прямоугольной системе координат $y = 3 + ch\left(x\right),\ 0 \leq x \leq 1$

Если кривая задана в прямоугольной системе координат, уравнением $y = f(x)$ где $x \in [a, b]$, то ее длинанаходится по формуле: $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2}\, \mathrm{d}x$.
Используя данную формулу, вычислим длину кривой:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 + sh^2x}\, \mathrm{d}x$$

Перейдем от гиперболического синуса к экспоненте, чтобы получить табличные интегралы:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4 + \left(e^{2x} - 2e^x\ e^{-x} + e^{-2x}\right)}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{e^x}\sqrt{4e^{2x} + e^{4x} - 2e^{2x} + 1}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{e^x}\sqrt{2e^{2x} + e^{4x} + 1}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{e^x}\sqrt{\left(e^{2x}+1\right)^2}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{e^x}\left(e^{2x} + 1\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x} = \frac{1}{2}\left(e^x\right)|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x} = \frac{1}{2}\left(e - 1\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x}$$

Найдем вторую часть интеграла помощью замены:

$$\text{Замена: } \begin{bmatrix} t = e^x \\ \mathrm{d}t = e^x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{e^x} = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{c|l} x & t \\ - & - \\ 0 & 1 \\ 1 & e \end{array} \qquad => \frac{1}{2}(e-1) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x} = \frac{1}{2}(e-1) + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^e = \frac{1}{2}\left(e - 1 - \frac{1}{e} + 1\right) = \frac{e^2-1}{2e}$$

б) Параметрически $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}, \ \dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{4}$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \xi(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, где $\alpha < \beta$, то ее длина находится по формуле: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\phi'(t)\right)^2 + \left(\xi'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t$. Здесь, естественно, предполагается, что функции $\phi(t), \xi(t)$ и их производные непрерывны на промежутке $[\alpha, \beta]$

Используя данную формулу, вычислим длину кривой:

$$L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(-12\cos^2 t\ \sin t)^2 + \left(12\sin^2 t\ \cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 12\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^4 t\ \sin^2 t + \sin^4 t\ \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 12\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t\ \cos t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 12\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t\ \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$\text{Замена: } \begin{bmatrix} u = sint \\ \mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{c|l} t & u \\ -- & --- \\ \pi/6 & 1/2 \\ \pi/4 & \sqrt{2}/2 \end{array} \qquad => 12\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t\ \cos t\,\mathrm{d}t = 12\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u\,\mathrm{d}u =$$

$$= 6\ u^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

в) В полярных координатах $\rho = 5e^{5\phi/12}, \ 0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{3}$

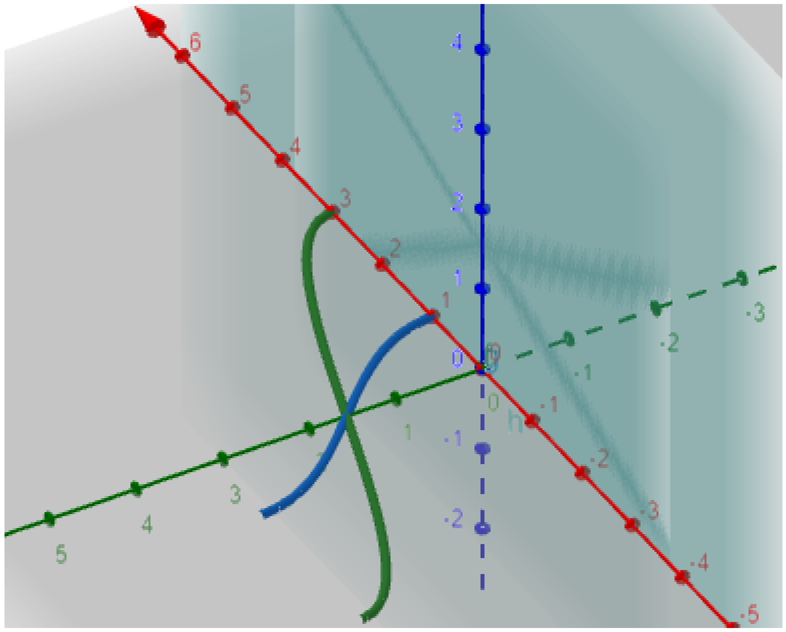
Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\phi)$, $\alpha \le \phi \le \beta$, Причем, функция $\rho = \rho(\phi)$ и ее производная непрерывны на промежутке $[\alpha, \beta]$, то ее длина находится по формуле: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\phi) + \left(\rho'(\phi)\right)^2}\,\mathrm{d}\phi$

Используя данную формулу, вычислим длину кривой:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\rho^2(\phi) + \left(\rho'(\phi)\right)^2}\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{25e^{5\phi/6} + \left(\frac{25}{12}\ e^{5\phi/12}\right)^2}\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{25e^{5\phi/6} + \frac{25^2}{144}\ e^{5\phi/6}}\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= 5\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{e^{5\phi/6} + \frac{25}{144}\ e^{5\phi/6}}\,\mathrm{d}\phi = \frac{5}{12}\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{5\phi/12}\sqrt{12^2+5^2}\,\mathrm{d}\phi = \frac{13*5}{12}\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{5\phi/12}\,\mathrm{d}\phi = \frac{65}{12} * \frac{12}{5}\left(e^{5\phi/12}\right)|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= 13\left(e^{5*\pi/12*3} - e^{5*0/12}\right) = 13\left(e^{5\pi/36} - 1\right)$$



7 Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций (Вокруг оси Оу):

$$y = \arccos\left(\frac{x}{3}\right),\ y = \arccos x,\ y = 0$$

Если объем V тела существует и $S = S(x)$, $0 \le a \le x \le b$, есть площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке x, то $V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$. Добавим к этому условие, что криволинейная трапеция вращается вокруг оси Oy: $V_y = 2\pi \int_a^b x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x$ Наше тело имеет выколотую сердцевину, поэтому найдем полный объем и объем внутренней части, после чего вычтем второе из первого. Используя данную формулу, вычислим объем четверти тела вращения(всилу симметричности фигуры):

$$V = \frac{1}{4}*2\pi\int_0^3\left|x\ \arccos\left(\frac{x}{3}\right)\right|\mathrm{d}x - \frac{1}{4}*2\pi\int_0^1|x\ \arccos x|\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(\left|\int_0^3 x\ \arccos\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x\right| - \left|\int_0^1 x\ \arccos x\,\mathrm{d}x\right|\right)$$

$$\int_0^3 x\ \arccos\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x = (1),\ \int_0^1 x\ \arccos x\,\mathrm{d}x = (2)$$

Под знаком интеграла стоит произведение полинома на трансцендентную функцию - это типовая ситуация. Избавляемся от трансцендентности, интегрируя по частям, где за u берем эту функцию, ее производная будет уже алгебраической функцией:

Интегрируем по частям: $$\left[\begin{array}{r|l} u = \arccos\left(\dfrac{x}{3}\right) & \mathrm{d}u = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}} = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} \\ v = \dfrac{x^2}{2} & \mathrm{d}v = x\ \ \mathrm{d}x \end{array}\right] =>$$

$$(1) = \left(\frac{x^2}{2}\arccos\left(\frac{x}{3}\right)\right)\Bigg|_0^3 - \int_0^3 -\frac{x^2}{2\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{3^2}{2}\arccos(1) - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{-x^2}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Выделим целую часть и снова проинтегрируем по частям:

$$-\frac{1}{2}\int_0^3\left(\frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{9}{\sqrt{9-x^2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\Bigg|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{9}{2}(\arcsin 1 - \arcsin 0) - \frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Интегрируем оставшийся интеграл по частям: $I = \displaystyle\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

Интегрируем по частям: $$\left[\begin{array}{r|l} u = \sqrt{9-x^2} & \mathrm{d}u = -\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} \\ v = x & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{array}\right] => I = \left(x\sqrt{9-x^2}\right)\Big|_0^3 + \int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_0^3\frac{-x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int_0^3\left(\frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{9}{\sqrt{9-x^2}}\right)\mathrm{d}x = -\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x + 9\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} =$$

$$= 9\left(\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right)\Bigg|_0^3 - \int_0^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x + 9\left(\arcsin(1) - \arcsin(0)\right) = -I + \frac{9\pi}{2} =>$$

$$2I = \frac{9\pi}{2} => I = \frac{9\pi}{4} \qquad (1) = \frac{9\pi}{4} - \frac{1}{2}I = \frac{9\pi}{8}$$

Теперь аналогично раскроем второй интеграл:

Интегрируем по частям: $$\left[\begin{array}{r|l} u = \arccos(x) & \mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = \dfrac{x^2}{2} & \mathrm{d}v = x\ \ \mathrm{d}x \end{array}\right] => (2) = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}I$$

Интегрируем по частям: $$\left[\begin{array}{r|l} u = \sqrt{1-x^2} & \mathrm{d}u = -\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{array}\right] =>$$

$$I = \left(x\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x = (\arcsin x)\big|_0^1 - \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -I + \frac{\pi}{2} => \qquad 2I = \frac{\pi}{2} => I = \frac{\pi}{4} \qquad (2) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}I = \frac{\pi}{8}$$

Вернемся к исходному интегралу: $\quad V = \dfrac{\pi}{2}\left((1) - (2)\right) = \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{9\pi}{8} - \dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\pi^2}{2}$