Różowe wierzchołki

Paweł Putra

April 30, 2025

1 Wstęp

Różowy wierzchołek to taki, że zawsze istnieje rozwiązanie optymalne, które go nie zawiera.

1.1 Nowe redukcje

1.1.1 Redukcja pierwotna

Jeśli dla krawędzi $(u, v) \in E$ *zachodzi:*

- $N[u] \subseteq N[v]$
- v *nie jest różowy*
- *nie istnieje* ***czerwona*** *krawędź* (u, w) *gdzie* $w \neq v$ *(bo mówi o istnieniu usuniętego sąsiada* u*, który nie jest w* $N[v]$*)*

to pokoloruj u na różowo.

1.1.2 Redukcja dla pojedyńczego wierzchołka

Jeśli istnieje różowy wierzchołek, który jest zdominowany - usuń go z grafu.

1.1.3 Redukcja różowego sąsiedztwa

Jeśli istnieje ***niezdominowany*** *nieróżowy wierzchołek* v*, że całe* $N(v)$ *jest różowe, weź go do rozwiązania i usuń* $N[v]$ *z grafu.*

1.1.4 Redukcja zdominowanego sąsiedztwa

Jeśli istnieje nieróżowy wierzchołek v *to jeśli:*

- *całe* $N(v)$ *jest zdominowane*
- $N(v)$ *zawiera jakiś nieróżowy wierzchołek*
- *zachodzi jedno z:*
  - *z* v *nie wychodzą żadne czerwone krawędzie*
  - *z* v *wychodzi dokładnie jedna czerowna krawędź do nieróżowego wierzchołka*

to pokoloruj v na różowo.

1.2 Wpływ na AlberSimpleRule1

Było: *Jeśli istnieje* ***czarna*** *krawędź, której oba końce są zdominowane - usuń ją.*

Teraz z różowymi wierzchołkami mamy dodatkowo:

- *Jeśli istnieje* ***czarna*** *krawędź, której oba końce są różowe - usuń ją.*

- *Jeśli istnieje* ***czerwona*** *krawędź* (u, v)*, taka, że* u *jest różowy, dodaj* v *do rozwiązania i usuń wierzchołki* u *i* v*.*

- **Test:** *Jeśli istnieje* ***czerwona*** *krawędź, której oba końce są różowe, mamy sprzeczność - instancja jest niepoprawna.*

1.3 Wpływ na AlberSimpleRule{2, 3, 4}

Zauważmy, że usuwany w redukcji wierzchołek u nie może być różowy, bo musi być zdominowany, a więc nie może go być w grafie po redukcji z (1.1.2). Zostaje więc spojrzeć co się dzieje jak w sąsiedztwie są różowe wierzchołki.

1.3.1 AlberSimpleRule2 (usuwanie zdominowanego liścia)

Różowy niezdominowany sąsiad nie pozwala usunąć wierzchołka u.

1.3.2 AlberSimpleRule3.1

Było: *Jeśli istnieje zdominowany wierzchołek* u *o stopniu 2, z niezdominowanymi sąsiadami* v *oraz* w *połączonymi krawędzią, usuń* u *z grafu.*

Można było tak zrobić, bo mieliśmy gwarancję, że jeśli istnieje optymalny zbiór dominujący zawierający wierzchołek u to można go podmienić na któregoś z sąsiadów bez utraty optymalności.

Jeśli wierzchołki v i w są różowe, to nie mamy takiej gwarancji, w szczególności gdy $V = \{u, v, w\}$ to jedyny zbiór dominujący to $\{u\}$.

Zatem nowa reguła brzmi:

Jeśli istnieje zdominowany wierzchołek u *o stopniu 2, z niezdominowanymi sąsiadami* v *oraz* w *połączonymi krawędzią,* ***z których conajwyżej jeden jest różowy****, usuń* u *z grafu.*

1.3.3 AlberSimpleRule3.2

Było: *Jeśli istnieje zdominowany wierzchołek* u *o stopniu 2, z niezdominowanymi sąsiadami* v_1 *oraz* v_2 *ze wspólnym sąsiadem* w $(w \neq u)$*, usuń* u *z grafu.*

Można było tak zrobić, bo mieliśmy gwarancję, że jeśli istnieje optymalny zbiór dominujący zawierający wierzchołek u to można go podmienić na w bez utraty optymalności.

Jeśli wierzchołek w jest różowy, to nie mamy takiej gwarancji.

Zatem nowa reguła brzmi:

Jeśli istnieje zdominowany wierzchołek u *o stopniu 2, z niezdominowanymi sąsiadami* v_1 *oraz* v_2 *ze wspólnym* ***nieróżowym*** *sąsiadem* w $(w \neq u)$*, usuń* u *z grafu.*

1.3.4 AlberSimpleRule4

Było: *Jeśli istnieje zdominowany wierzchołek u o stopniu 3, z niezdominowanymi sąsiadami* v_1, v_2 *oraz* v_3, *takimi, że istnieją krawędzie* (v_1, v_2) *i* (v_2, v_3) *usuń u z grafu.*

Można było tak zrobić, bo mieliśmy gwarancję, że jeśli istnieje optymalny zbiór dominujący zawierający wierzchołek u to można go podmienić na v_2 bez utraty optymalności.

Jeśli wierzchołek v_2 jest różowy, to nie mamy takiej gwarancji.

Zatem nowa reguła brzmi:

Jeśli istnieje zdominowany wierzchołek u o stopniu 3, z niezdominowanymi sąsiadami v_1, v_2 *oraz* v_3, *takimi, że istnieją krawędzie* (v_1, v_2) *i* (v_2, v_3), ***oraz*** v_2 ***nie jest różowy***, *usuń u z grafu.*

1.4 Wpływ na ForcedEdgeRule

Czerwona krawędź (u, v) oznacza, że w optymalnym rozwiązaniu S musi być conajmniej jeden element zbioru $\{u, v\}$.

Oznaczając krawędź (u, v) jako czerwoną oznaczamy również $N[u] \cap N[v]$ jako zdominowane, bo będą zdominowane przez u lub v.

1.4.1 Wierzchołki o stopniu 2

Jeśli istnieje ***czarny*** *wierzchołek u o stopniu 2, taki, że jego sąsiedzi v, w są połączeni krawędzią, to:*

- ***Test:*** *Zakładając aplikowanie redukcji* (1.1.3) *przed tą, nie istnieje sytuacja, w której zarówno wierzchołek v jak i w jest różowy.*
- *jeśli obie krawędzie wierzchołka u są czarne, oznacz krawędź (v, w) jako czerwoną i usuń wierchołek u.*
- ***Test:*** *Zakładając aplikowanie redukcji* (1.2) *przed tą, nie istnieje sytuacja, w której jakiś koniec czerwonej krawędzi jest różowy.*
- *jeśli tylko krawędź (u, w) jest czerwona, weź w do rozwiązania i usuń wierzchołek u.*
- *jeśli tylko krawędź (u, v) jest czerwona, weź v do rozwiązania i usuń wierzchołek u.*
- *jeśli obie krawędzie są czerwone -* ***nie rób nic*** *(pomysł: ściągnąć do jednego niezdominowanego wierzchołka g, wtedy* $g \in S' \implies \{v, w\} \subseteq S$, *a* $g \notin S' \implies u \in S$*).*

Czyli pod założeniem wyczerpania poprzednich redukcji bez zmian, wpp. wystarczy nie aplikować redukcji jeśli zachodzą wyżej wymienione sytuacje.

1.5 Wpływ na AlberMainRule1

Ta redukcja polega na zachłannym wzięciu wierzchołka v jeśli jego sąsiedztwo spełnia odpowiednie kryteria.

Dodatek: *Rozważany wierzchołek nie może być różowy.*

1.6 Wpływ na AlberMainRule2

Ta redukcja polega na zachłannym wzięciu wierzchołka v i/lub w jeśli ich sąsiedztwo spełnia odpowiednie kryteria.

Dodatek: *Rozważane wierzchołki nie mogą być różowe.*