

# Różowe wierzchołki

Paweł Putra

April 18, 2025

## 1 Wstęp

*Różowy wierzchołek to taki, że zawsze istnieje rozwiązanie optymalne, które go nie zawiera.*

### 1.1 Nowe redukcje

#### 1.1.1 Redukcja pierwotna

*Jeśli dla krawędzi  $(u, v) \in E$  zachodzi:*

- $N[u] \subseteq N[v]$
- $v$  nie jest różowy
- nie istnieje **czerwona** krawędź  $(u, w)$  gdzie  $w \neq v$  (bo mówi o istnieniu usuniętego sąsiada  $u$ , który nie jest w  $N[v]$ )

to pokoloruj  $u$  na różowo.

#### 1.1.2 Redukcja dla pojedynczego wierzchołka

*Jeśli istnieje różowy wierzchołek, który jest zdominowany - usuń go z grafu.*

#### 1.1.3 Redukcja sąsiedztwa

*Jeśli istnieje **niezdominowany** nieróżowy wierzchołek  $v$ , że całe  $N(v)$  jest różowe, weź go do rozwiązania i usuń  $N[v]$  z grafu.*

## 1.2 Wpływ na AlberSimpleRule1

Było: *Jeśli istnieje **czarna** krawędź, której oba końce są zdominowane - usuń ją.*

Teraz z różowymi wierzchołkami mamy dodatkowo:

- *Jeśli istnieje **czarna** krawędź, której oba końce są różowe - usuń ją.*

- Jeśli istnieje **czerwona** krawędź  $(u, v)$ , taka, że  $u$  jest różowy, dodaj  $v$  do rozwiązania i usuń wierzchołki  $u$  i  $v$ .
- **Test:** Jeśli istnieje **czerwona** krawędź, której oba końce są różowe, mamy sprzeczność - instancja jest niepoprawna.

### 1.3 Wpływ na AlberSimpleRule{2, 3, 4}

Zauważmy, że usuwany w redukcji wierzchołek  $u$  nie może być różowy, bo musi być zdominowany, a więc nie może go być w grafie po redukcji z (1.1.2). Zostaje więc spojrzeć co się dzieje jak w sąsiedztwie są różowe wierzchołki.

#### 1.3.1 AlberSimpleRule2 (usuwanie zdominowanego liścia)

Bez zmian, różowy sąsiad nie przeszkadza usunąć wierzchołka  $u$ .

#### 1.3.2 AlberSimpleRule3.1

Było: Jeśli istnieje zdominowany wierzchołek  $u$  o stopniu 2, z niezdominowanymi sąsiadami  $v$  oraz w połączonymi krawędzią, usuń  $u$  z grafu.

Można było tak zrobić, bo mieliśmy gwarancję, że jeśli istnieje optymalny zbiór dominujący zawierający wierzchołek  $u$  to można go podmienić na któregoś z sąsiadów bez utraty optymalności.

Jeśli wierzchołki  $v$  i  $w$  są różowe, to nie mamy takiej gwarancji, w szczególności gdy  $V = \{u, v, w\}$  to jedyny zbiór dominujący to  $\{u\}$ .

Zatem nowa reguła brzmi:

Jeśli istnieje zdominowany wierzchołek  $u$  o stopniu 2, z niezdominowanymi sąsiadami  $v$  oraz w połączonymi krawędzią, z **których conajwyżej jeden jest różowy**, usuń  $u$  z grafu.

#### 1.3.3 AlberSimpleRule3.2

Było: Jeśli istnieje zdominowany wierzchołek  $u$  o stopniu 2, z niezdominowanymi sąsiadami  $v_1$  oraz  $v_2$  ze wspólnym sąsiadem  $w$  ( $w \neq u$ ), usuń  $u$  z grafu.

Można było tak zrobić, bo mieliśmy gwarancję, że jeśli istnieje optymalny zbiór dominujący zawierający wierzchołek  $u$  to można go podmienić na  $w$  bez utraty optymalności.

Jeśli wierzchołek  $w$  jest różowy, to nie mamy takiej gwarancji.

Zatem nowa reguła brzmi:

Jeśli istnieje zdominowany wierzchołek  $u$  o stopniu 2, z niezdominowanymi sąsiadami  $v_1$  oraz  $v_2$  ze wspólnym **nieróżowym** sąsiadem  $w$  ( $w \neq u$ ), usuń  $u$  z grafu.

### 1.4 Wpływ na ForcedEdgeRule

Czerwona krawędź  $(u, v)$  oznacza, że w optymalnym rozwiązaniu  $S$  musi być conajmniej jeden element zbioru  $\{u, v\}$ .

Oznaczając krawędź  $(u, v)$  jako czerwoną oznaczamy również  $N[u] \cap N[v]$  jako zdominowane, bo będą zdominowane przez  $u$  lub  $v$ .

### 1.4.1 Wierzchołki o stopniu 2

Jeśli istnieje **czarny** wierzchołek  $u$  o stopniu 2, taki, że jego sąsiedzi  $v$ ,  $w$  są połączeni krawędzią, to:

- **Test:** Zakładając aplikowanie redukcji (1.1.3) przed tą, nie istnieje sytuacja, w której zarówno wierzchołek  $v$  jak i  $w$  jest różowy.
- jeśli obie krawędzie wierzchołka  $u$  są czarne, oznacz krawędź  $(v, w)$  jako czerwoną i usuń wierzchołek  $u$ .
- **Test:** Zakładając aplikowanie redukcji (1.2) przed tą, nie istnieje sytuacja, w której jakiś koniec czerwonej krawędzi jest różowy.
- jeśli tylko krawędź  $(u, w)$  jest czerwona, weź  $w$  do rozwiązania i usuń wierzchołek  $u$ .
- jeśli tylko krawędź  $(u, v)$  jest czerwona, weź  $v$  do rozwiązania i usuń wierzchołek  $u$ .
- jeśli obie krawędzie są czerwone - **nie rób nic** (pomysł: ściągnąć do jednego niezdominowanego wierzchołka  $g$ , wtedy  $g \in S' \implies \{v, w\} \subseteq S$ , a  $g \notin S' \implies u \in S$ ).

Czyli pod założeniem wyczerpania poprzednich redukcji bez zmian.

## 1.5 Wpływ na AlberMainRule1

Ta redukcja polega na zachłannym wzięciu wierzchołka  $v$  jeśli jego sąsiedztwo spełnia odpowiednie kryteria.

**Dodatek:** Rozważany wierzchołek nie może być różowy.

## 1.6 Wpływ na AlberMainRule2

Ta redukcja polega na zachłannym wzięciu wierzchołka  $v$  i/lub  $w$  jeśli ich sąsiedztwo spełnia odpowiednie kryteria.

**Dodatek:** Rozważane wierzchołki nie mogą być różowe.