МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Э. БАУМАНА

Факультет: Информатика и системы управления
Кафедра: Информационная безопасность (ИУ8)

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Лабораторная работа №1 на тему:
«Матричные игры с нулевой суммой. Смешанные стратегии»

Вариант 4

Преподаватель:
Коннова Н.С.

Студент:
Куликова А.В.

Группа:
ИУ8-21М

Цель работы

Изучить постановку антагонистической игры двух лиц в нормальной форме; найти решение игры за обоих игроков в смешанных стратегиях (стратегическую седловую точку).

Постановка задачи

Для игры, заданной матрицей стратегий C, требуется найти оптимальные смешанные стратегии обоих игроков, сведя матричную игру к задаче ЛП (прямой для одного игрока и двойственной для другого).

Задачи ЛП следует решать симплекс-методом, приводя начальные, промежуточные и конечные симплекс-таблицы. По окончании алгоритма полученные решения необходимо проверить на допустимость.

Ход работы

Матрица стратегий представлена в таблице 1.

Таблица 1 – матрица стратегий

Стратегии	b1	b2	b3	b4	b5
a1	16	3	14	4	8
a2	0	6	17	0	12
a3	10	3	4	16	2
a4	2	3	9	11	19

Результат программы представленной в приложении А:

```
Kulikova Alyona - v4
Matrix game:
 16.00   3.00  14.00   4.00   8.00
  0.00   6.00  17.00   0.00  12.00
 10.00   3.00   4.00  16.00   2.00
  2.00  10.00   9.00  11.00  19.00

data min_max:  10.00
```

data max_min: 3.00
(task) player №1:
F(U)=1.00u1 + 1.00u2 + 1.00u3 + 1.00u4 --> min
-16.00u1 + -0.00u2 + -10.00u3 + -2.00u4 <=-1.00
-3.00u1 + -6.00u2 + -3.00u3 + -10.00u4 <=-1.00
-14.00u1 + -17.00u2 + -4.00u3 + -9.00u4 <=-1.00
-4.00u1 + -0.00u2 + -16.00u3 + -11.00u4 <=-1.00
-8.00u1 + -12.00u2 + -2.00u3 + -19.00u4 <=-1.00

simplex table:

	Si0	x1	x2	x3	x4
x5	-1.000	-16.000	-0.000	-10.000	-2.000
x6	-1.000	-3.000	-6.000	-3.000	-10.000
x7	-1.000	-14.000	-17.000	-4.000	-9.000
x8	-1.000	-4.000	-0.000	-16.000	-11.000
x9	-1.000	-8.000	-12.000	-2.000	-19.000
F	0.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000

simplex table:

	Si0	x5	x2	x3	x4
x1	0.062	-0.062	0.000	0.625	0.125
x6	-0.812	-0.188	-6.000	-1.125	-9.625
x7	-0.125	-0.875	-17.000	4.750	-7.250
x8	-0.750	-0.250	0.000	-13.500	-10.500
x9	-0.500	-0.500	-12.000	3.000	-18.000
F	0.062	-0.062	-1.000	-0.375	-0.875

simplex table:

	Si0	x7	x2	x3	x4
x1	0.071	-0.071	1.214	0.286	0.643
x6	-0.786	-0.214	-2.357	-2.143	-8.071
x5	0.143	-1.143	19.429	-5.429	8.286
x8	-0.714	-0.286	4.857	-14.857	-8.429
x9	-0.429	-0.571	-2.286	0.286	-13.857
F	0.071	-0.071	0.214	-0.714	-0.357

simplex table:

	Si0	x9	x2	x3	x4
x1	0.125	-0.125	1.500	0.250	2.375
x6	-0.625	-0.375	-1.500	-2.250	-2.875
x5	1.000	-2.000	24.000	-6.000	36.000
x8	-0.500	-0.500	6.000	-15.000	-1.500

x7	0.750	-1.750	4.000	-0.500	24.250
F	0.125	-0.125	0.500	-0.750	1.375

simplex table:

	Si0	x8	x2	x3	x4
x1	0.250	-0.250	0.000	4.000	2.750
x6	-0.250	-0.750	-6.000	9.000	-1.750
x5	3.000	-4.000	0.000	54.000	42.000
x9	1.000	-2.000	-12.000	30.000	3.000
x7	2.500	-3.500	-17.000	52.000	29.500
F	0.250	-0.250	-1.000	3.000	1.750

simplex table:

	Si0	x6	x2	x3	x4
x1	0.333	-0.333	2.000	1.000	3.333
x8	0.333	-1.333	8.000	-12.000	2.333
x5	4.333	-5.333	32.000	6.000	51.333
x9	1.667	-2.667	4.000	6.000	7.667
x7	3.667	-4.667	11.000	10.000	37.667
F	0.333	-0.333	1.000	0.000	2.333

simplex table:

	Si0	x6	x8	x3	x4
x1	0.250	0.000	-0.250	4.000	2.750
x2	0.042	-0.167	0.125	-1.500	0.292
x5	3.000	0.000	-4.000	54.000	42.000
x9	1.500	-2.000	-0.500	12.000	6.500
x7	3.208	-2.833	-1.375	26.500	34.458
F	0.292	-0.167	-0.125	1.500	2.042

simplex table:

	Si0	x6	x8	x5	x4
x1	0.028	0.000	0.046	-0.074	-0.361
x2	0.125	-0.167	0.014	0.028	1.458
x3	0.056	0.000	-0.074	0.019	0.778
x9	0.833	-2.000	0.389	-0.222	-2.833
x7	1.736	-2.833	0.588	-0.491	13.847
F	0.208	-0.167	-0.014	-0.028	0.875

simplex table:

	Si0	x6	x8	x5	x3
x1	0.054	0.000	0.012	-0.065	0.464

```
x2   0.021  -0.167   0.153  -0.007  -1.875
x4   0.071   0.000  -0.095   0.024   1.286
x9   1.036  -2.000   0.119  -0.155   3.643
x7   0.747  -2.833   1.907  -0.820 -17.804
 F   0.146  -0.167   0.069  -0.049  -1.125

simplex table:
      Si0     x6      x2      x5      x3
x1   0.052   0.013  -0.078  -0.065   0.610
x8   0.136  -1.091   6.545  -0.045 -12.273
x4   0.084  -0.104   0.623   0.019   0.117
x9   1.019  -1.870  -0.779  -0.149   5.104
x7   0.487  -0.753 -12.481  -0.734   5.597
 F   0.136  -0.091  -0.455  -0.045  -0.273
F=0.136 uv: 0.052 0.000 0.000 0.084
(task) player №2:
F(V)=-1.00v1 + -1.00v2 + -1.00v3 + -1.00v4 + -1.00v5 --> min
16.00v1 + 3.00v2 + 14.00v3 + 4.00v4 + 8.00v5 <=1.00
0.00v1 + 6.00v2 + 17.00v3 + 0.00v4 + 12.00v5 <=1.00
10.00v1 + 3.00v2 + 4.00v3 + 16.00v4 + 2.00v5 <=1.00
2.00v1 + 10.00v2 + 9.00v3 + 11.00v4 + 19.00v5 <=1.00

simplex table:
      Si0     x1      x2      x3      x4      x5
x6   1.000  16.000   3.000  14.000   4.000   8.000
x7   1.000   0.000   6.000  17.000   0.000  12.000
x8   1.000  10.000   3.000   4.000  16.000   2.000
x9   1.000   2.000  10.000   9.000  11.000  19.000
 F   0.000   1.000   1.000   1.000   1.000   1.000

simplex table:
      Si0     x6      x2      x3      x4      x5
x1   0.062   0.062   0.188   0.875   0.250   0.500
x7   1.000  -0.000   6.000  17.000   0.000  12.000
x8   0.375  -0.625   1.125  -4.750  13.500  -3.000
x9   0.875  -0.125   9.625   7.250  10.500  18.000
 F  -0.062  -0.062   0.812   0.125   0.750   0.500

simplex table:
      Si0     x6      x9      x3      x4      x5
x1   0.045   0.065  -0.019   0.734   0.045   0.149
x7   0.455   0.078  -0.623  12.481  -6.545   0.779
```

```
x8   0.273  -0.610  -0.117  -5.597  12.273  -5.104
x2   0.091  -0.013   0.104   0.753   1.091   1.870
 F  -0.136  -0.052  -0.084  -0.487  -0.136  -1.019
F=-0.136 uv: 0.045 0.091 0.000 0.000 0.000

data F1:   7.333

data F2:   7.333
P: 0.381 0.000 0.000 0.619
Q: 0.333 0.667 0.000 0.000 0.000
```

Выводы

В ходе проделанной работы была изучена работа постановки антагонистической игры двух лиц в нормальной форме. Найдено решение игры за обоих игроков в смешанных стратегиях (стратегическую седловую точку).

Симплекс-метод один из эффективных и простых алгоритмов для решения ЗЛП и некоторых задач теории игр, которые возможно представить, как симплекс-таблицы.

Симплекс-метод является быстрым и выполняется за относительно малое количество итераций.

Контрольные вопросы

1. Определение матричной игры с нулевой суммой.

Матричная игра называется игрой с нулевой суммой, если в этой игре выигрыш одного игрока равняется проигрышу другого игрока

2. Верхняя и нижняя цена игры. Теорема о минимаксе.

Нижняя цена игры α — это максимальный выигрыш, который мы можем гарантировать себе, в игре против разумного противника, если на протяжении всей игры будем использовать одну и только одну стратегию (такая стратегия называется "чистой").

Верхняя цена игры β — это минимальный проигрыш, который может гарантировать себе игрок "B", в игре против разумного противника, если на протяжении всей игры он будет использовать одну и только одну стратегию.

Теорема о минимаксе. Пусть (C_{ij}) - произвольная матрица m×n, тогда

$$\max_{i \in A} \min_{j \in B} c_{ij} \le \min_{j \in B} \max_{i \in A} c_{ij},$$

где A=1,…,m; B=1,…,n.

3. Цена игры. Теорема о седловой точке.

Цена игры значение выигрыша одного игрока и проигрыша другого в седловой точке игры. Если верхняя и нижняя цены игры равны, их значения называются ценой игры.

Теорема о седловой точке. Для (C_{ij}) произвольной матрицы m×n

$$\max_{i\in A}\min_{j\in B} c_{ij} = \min_{j\in B}\max_{i\in A} c_{ij},$$

где $A = \overline{1, m},\ B = \overline{1, n},$

тогда и только тогда, когда (C_{ij}) имеет седловую точку (i_0, j_0), для которой Ci0j0 является одновременно минимальным элементом строки и максимальным элементом столбца, и

$$\max_{i\in A}\min_{j\in B} c_{ij} = \min_{j\in B}\max_{i\in A} c_{ij} = c_{i_0 j_0}$$

- цена игры.

Стратегии обоих противников в задачах с седловой точкой называются оптимальными и не зависят от дополнительно полученной информации.

4. Основная теорема прямоугольных игр.

Основная теорема прямоугольных игр (теорема Д. фон Неймана) утверждает, что каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий, то есть всегда имеет место равенство. Пусть задана матрица стратегий

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

и выбраны стратегии x = (x_1, x_2, …, x_m) ∈ S_m , y = (y_1, y_2, …, y_n) ∈ S_n , математическое ожидание выигрыша игрока A имеет вид

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j;$$

тогда

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} E(X, Y) = \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} E(X, Y) = E(X^*, Y^*),$$

где (X^*, Y^*) - стратегическая седловая точка.

5. Смешанные стратегии.

Смешанные стратегии. Если игровая задача не имеет седловой точки, то на практике конкурирующие игроки применяют смешанные стратегии, т.е. попеременно использует две или более стратегий.

По определению, X*- оптимальная частота выбора стратегий для игрока A,

Y*- оптимальная частота выбора стратегий для игрока B, если

$$E(x, y^*) \leq E(x^*, y^*) \leq E(x^*, y),$$

где E-математическое ожидание выигрыша.

Приложение A

Ссылка на исходный код: https://github.com/Kulikova-A18/gameTheoryAndOperationsResearch_lab1