**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**им. Н.Э. БАУМАНА**

Факультет: Информатика и системы управления Кафедра: Информационная безопасность (ИУ8)

**ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

**Лабораторная работа №1 на тему:**

«Матричные игры с нулевой суммой. Смешанные стратегии»

Вариант 4

**Преподаватель:**

Коннова Н.С.

**Студент**:

Куликова А.В.

**Группа:**

ИУ8-21М

**Цель работы**

Изучить постановку антагонистической игры двух лиц в нормальной форме; найти решение игры за обоих игроков в смешанных стратегиях (стратегическую седловую точку).

**Постановка задачи**

Для игры, заданной матрицей стратегий С, требуется найти оптимальные смешанные стратегии обоих игроков, сведя матричную игру к задаче ЛП (прямой для одного игрока и двойственной для другого).

Задачи ЛП следует решать симплекс-методом, приводя начальные, промежуточные и конечные симплекс-таблицы. По окончании алгоритма полученные решения необходимо проверить на допустимость.

**Ход работы**

Матрица стратегий представлена в таблице 1.

Таблица 1 – матрица стратегий

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Стратегии | b1 | b2 | b3 | b4 | b5 |
| a1 | 16 | 3 | 14 | 4 | 8 |
| a2 | 0 | 6 | 17 | 0 | 12 |
| a3 | 10 | 3 | 4 | 16 | 2 |
| a4 | 2 | 3 | 9 | 11 | 19 |

Результат программы представленной в приложении А:

Kulikova Alyona - v4

Matrix game:

16.00 3.00 14.00 4.00 8.00

0.00 6.00 17.00 0.00 12.00

10.00 3.00 4.00 16.00 2.00

2.00 10.00 9.00 11.00 19.00

data min\_max: 10.00

data max\_min: 3.00

(task) player №1:

F(U)=1.00u1 + 1.00u2 + 1.00u3 + 1.00u4 --> min

-16.00u1 + -0.00u2 + -10.00u3 + -2.00u4 <=-1.00

-3.00u1 + -6.00u2 + -3.00u3 + -10.00u4 <=-1.00

-14.00u1 + -17.00u2 + -4.00u3 + -9.00u4 <=-1.00

-4.00u1 + -0.00u2 + -16.00u3 + -11.00u4 <=-1.00

-8.00u1 + -12.00u2 + -2.00u3 + -19.00u4 <=-1.00

simplex table:

Si0 x1 x2 x3 x4

x5 -1.000 -16.000 -0.000 -10.000 -2.000

x6 -1.000 -3.000 -6.000 -3.000 -10.000

x7 -1.000 -14.000 -17.000 -4.000 -9.000

x8 -1.000 -4.000 -0.000 -16.000 -11.000

x9 -1.000 -8.000 -12.000 -2.000 -19.000

F 0.000 -1.000 -1.000 -1.000 -1.000

simplex table:

Si0 x5 x2 x3 x4

x1 0.062 -0.062 0.000 0.625 0.125

x6 -0.812 -0.188 -6.000 -1.125 -9.625

x7 -0.125 -0.875 -17.000 4.750 -7.250

x8 -0.750 -0.250 0.000 -13.500 -10.500

x9 -0.500 -0.500 -12.000 3.000 -18.000

F 0.062 -0.062 -1.000 -0.375 -0.875

simplex table:

Si0 x7 x2 x3 x4

x1 0.071 -0.071 1.214 0.286 0.643

x6 -0.786 -0.214 -2.357 -2.143 -8.071

x5 0.143 -1.143 19.429 -5.429 8.286

x8 -0.714 -0.286 4.857 -14.857 -8.429

x9 -0.429 -0.571 -2.286 0.286 -13.857

F 0.071 -0.071 0.214 -0.714 -0.357

simplex table:

Si0 x9 x2 x3 x4

x1 0.125 -0.125 1.500 0.250 2.375

x6 -0.625 -0.375 -1.500 -2.250 -2.875

x5 1.000 -2.000 24.000 -6.000 36.000

x8 -0.500 -0.500 6.000 -15.000 -1.500

x7 0.750 -1.750 4.000 -0.500 24.250

F 0.125 -0.125 0.500 -0.750 1.375

simplex table:

Si0 x8 x2 x3 x4

x1 0.250 -0.250 0.000 4.000 2.750

x6 -0.250 -0.750 -6.000 9.000 -1.750

x5 3.000 -4.000 0.000 54.000 42.000

x9 1.000 -2.000 -12.000 30.000 3.000

x7 2.500 -3.500 -17.000 52.000 29.500

F 0.250 -0.250 -1.000 3.000 1.750

simplex table:

Si0 x6 x2 x3 x4

x1 0.333 -0.333 2.000 1.000 3.333

x8 0.333 -1.333 8.000 -12.000 2.333

x5 4.333 -5.333 32.000 6.000 51.333

x9 1.667 -2.667 4.000 6.000 7.667

x7 3.667 -4.667 11.000 10.000 37.667

F 0.333 -0.333 1.000 0.000 2.333

simplex table:

Si0 x6 x8 x3 x4

x1 0.250 0.000 -0.250 4.000 2.750

x2 0.042 -0.167 0.125 -1.500 0.292

x5 3.000 0.000 -4.000 54.000 42.000

x9 1.500 -2.000 -0.500 12.000 6.500

x7 3.208 -2.833 -1.375 26.500 34.458

F 0.292 -0.167 -0.125 1.500 2.042

simplex table:

Si0 x6 x8 x5 x4

x1 0.028 0.000 0.046 -0.074 -0.361

x2 0.125 -0.167 0.014 0.028 1.458

x3 0.056 0.000 -0.074 0.019 0.778

x9 0.833 -2.000 0.389 -0.222 -2.833

x7 1.736 -2.833 0.588 -0.491 13.847

F 0.208 -0.167 -0.014 -0.028 0.875

simplex table:

Si0 x6 x8 x5 x3

x1 0.054 0.000 0.012 -0.065 0.464

x2 0.021 -0.167 0.153 -0.007 -1.875

x4 0.071 0.000 -0.095 0.024 1.286

x9 1.036 -2.000 0.119 -0.155 3.643

x7 0.747 -2.833 1.907 -0.820 -17.804

F 0.146 -0.167 0.069 -0.049 -1.125

simplex table:

Si0 x6 x2 x5 x3

x1 0.052 0.013 -0.078 -0.065 0.610

x8 0.136 -1.091 6.545 -0.045 -12.273

x4 0.084 -0.104 0.623 0.019 0.117

x9 1.019 -1.870 -0.779 -0.149 5.104

x7 0.487 -0.753 -12.481 -0.734 5.597

F 0.136 -0.091 -0.455 -0.045 -0.273

F=0.136 uv: 0.052 0.000 0.000 0.084

(task) player №2:

F(V)=-1.00v1 + -1.00v2 + -1.00v3 + -1.00v4 + -1.00v5 --> min

16.00v1 + 3.00v2 + 14.00v3 + 4.00v4 + 8.00v5 <=1.00

0.00v1 + 6.00v2 + 17.00v3 + 0.00v4 + 12.00v5 <=1.00

10.00v1 + 3.00v2 + 4.00v3 + 16.00v4 + 2.00v5 <=1.00

2.00v1 + 10.00v2 + 9.00v3 + 11.00v4 + 19.00v5 <=1.00

simplex table:

Si0 x1 x2 x3 x4 x5

x6 1.000 16.000 3.000 14.000 4.000 8.000

x7 1.000 0.000 6.000 17.000 0.000 12.000

x8 1.000 10.000 3.000 4.000 16.000 2.000

x9 1.000 2.000 10.000 9.000 11.000 19.000

F 0.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000

simplex table:

Si0 x6 x2 x3 x4 x5

x1 0.062 0.062 0.188 0.875 0.250 0.500

x7 1.000 -0.000 6.000 17.000 0.000 12.000

x8 0.375 -0.625 1.125 -4.750 13.500 -3.000

x9 0.875 -0.125 9.625 7.250 10.500 18.000

F -0.062 -0.062 0.812 0.125 0.750 0.500

simplex table:

Si0 x6 x9 x3 x4 x5

x1 0.045 0.065 -0.019 0.734 0.045 0.149

x7 0.455 0.078 -0.623 12.481 -6.545 0.779

x8 0.273 -0.610 -0.117 -5.597 12.273 -5.104

x2 0.091 -0.013 0.104 0.753 1.091 1.870

F -0.136 -0.052 -0.084 -0.487 -0.136 -1.019

F=-0.136 uv: 0.045 0.091 0.000 0.000 0.000

data F1: 7.333

data F2: 7.333

P: 0.381 0.000 0.000 0.619

Q: 0.333 0.667 0.000 0.000 0.000

**Выводы**

В ходе проделанной работы была изучена работа постановки антагонистической игры двух лиц в нормальной форме. Найдено решение игры за обоих игроков в смешанных стратегиях (стратегическую седловую точку).

Симплекс-метод один из эффективных и простых алгоритмов для решения ЗЛП и некоторых задач теории игр, которые возможно представить, как симплекс-таблицы.

Симплекс-метод является быстрым и выполняется за относительно малое количество итераций.

**Контрольные вопросы**

1. Определение матричной игры с нулевой суммой.

Матричная игра называется игрой с нулевой суммой, если в этой игре выигрыш одного игрока равняется проигрышу другого игрока

2. Верхняя и нижняя цена игры. Теорема о минимаксе.

Нижняя цена игры α — это максимальный выигрыш, который мы можем гарантировать себе, в игре против разумного противника, если на протяжении всей игры будем использовать одну и только одну стратегию (такая стратегия называется "чистой").

Верхняя цена игры β — это минимальный проигрыш, который может гарантировать себе игрок "В", в игре против разумного противника, если на протяжении всей игры он будет использовать одну и только одну стратегию.

Теорема о минимаксе. Пусть (Cij) - произвольная матрица m×n, тогда

где А=1,…,m; B=1,…,n.

3. Цена игры. Теорема о седловой точке.

Цена игры значение выигрыша одного игрока и проигрыша другого в седловой точке игры. Если верхняя и нижняя цены игры равны, их значения называются ценой игры.

Теорема о седловой точке. Для (Cij) произвольной матрицы m×n

где

тогда и только тогда, когда (Cij) имеет седловую точку (i0, j0), для которой Сi0j0 является одновременно минимальным элементом строки и максимальным элементом столбца, и

- цена игры.

Стратегии обоих противников в задачах с седловой точкой называются оптимальными и не зависят от дополнительно полученной информации.

4. Основная теорема прямоугольных игр.

Основная теорема прямоугольных игр (теорема Д. фон Неймана) утверждает, что каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий, то есть всегда имеет место равенство. Пусть задана матрица стратегий

и выбраны стратегии x = (x1, x2, …, xm) ∈ Sm , y = (y1, y2, …, yn) ∈ Sn , математическое ожидание выигрыша игрока A имеет вид

тогда

где (X\*, Y\*) - стратегическая седловая точка.

5. Смешанные стратегии.

Смешанные стратегии. Если игровая задача не имеет седловой точки, то на практике конкурирующие игроки применяют смешанные стратегии, т.е. попеременно использует две или более стратегий.

По определению, X\*- оптимальная частота выбора стратегий для игрока А,

Y\*- оптимальная частота выбора стратегий для игрока В, если

где Е-математическое ожидание выигрыша.

**Приложение А**

Ссылка на исходный код: <https://github.com/Kulikova-A18/gameTheoryAndOperationsResearch_lab1>