

## Семестровое задание

Куликова Д., БПМ-17-1

### Задание:

$$J(x) = \|x - a\|^2 \rightarrow \inf, \quad x \in X = \{x \in E^n: \|x\|^2 \leq 2\langle b, x \rangle, \|b\|^2 \leq \langle b, x \rangle\},$$

где  $a, b \in E^n$  – известные вектора.

Пример 1.

$$a = (2, -1, 1, 0, 1)^T,$$

$$b = (0, 1, 3, 0, -2)^T.$$

Пример 2.

$$a = (1, 2, 3, -1)^T,$$

$$b = (-1, 2, 0, 3)^T.$$

## 1 Аналитическое решение:

$$J(x) = \|x - a\|_{\mathbb{E}^n}^2 \rightarrow \inf,$$

$$x \in X = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x\|^2 \leq 2\langle b, x \rangle, \|b\|^2 \leq \langle b, x \rangle\},$$

где  $a, b \in \mathbb{E}^n$  - известные вектора,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}.$$

Числовые примеры:

Пример 1.  $a = (2, -1, 1, 0, 1)^T$ ,  
 $b = (0, 1, 3, 0, -2)^T$ .

$$\Rightarrow \|a\|^2 = 7, \quad \|b\|^2 = 14, \quad \langle a, b \rangle = 0.$$

Пример 2.  $a = (1, 2, 3, -1)^T$ ,  
 $b = (-1, 2, 0, 3)^T$ .

$$\Rightarrow \|a\|^2 = 15, \quad \|b\|^2 = 14, \quad \langle a, b \rangle = 0.$$

Данная задача равносильна задаче проектирования  $a$  на множество  $X$ .

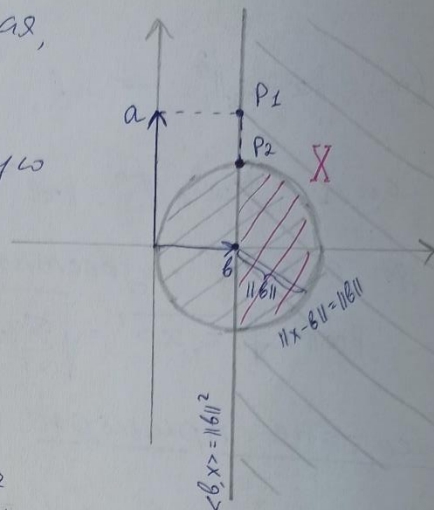
Рассмотрим множество  $X$ .

$\langle b, x \rangle = \|b\|^2$  - гиперплоскость с вектором нормали  $b$  и проходящая через точку  $b$ .

$$\|x\|^2 - 2\langle b, x \rangle = \|x - b\|^2 - \|b\|^2 \leq 0$$

$\Leftrightarrow \|x - b\| \leq \|b\|$  - шар с центром в точке  $b$  и радиусом  $\|b\|$ .

Таким образом, учитывая, что  $\langle a, b \rangle = 0$  в обоих примерах, получим следующую картинку.



Если  $\|a\| \leq \|b\|$ , то проекцией точки  $a$  на множество  $X$  будет являться проекция  $a$  на гиперплоскость  $\langle b, x \rangle = \|b\|^2$ , равная  $a+b$ .

Если  $\|a\| > \|b\|$ , то после проектирования на гиперплоскость полученную точку нужно спроецировать на шар. Получим точку  $p_2 = b + \frac{\|b\|}{\|a\|} a$ .

Пример 1:

$$\|a\| < \|b\|$$

$$\Rightarrow x_* = a + b = (2, 0, 4, 0, -1)^T$$

$$J_* = 14.$$

Пример 2:

$$\|a\| > \|b\|$$

$$\Rightarrow x_* = \frac{\|b\|}{\|a\|} a + b = \left( \sqrt{\frac{14}{15}} - 1, 2\sqrt{\frac{14}{15}} + 2, 3\sqrt{\frac{14}{15}}, 3 - \sqrt{\frac{14}{15}} \right)^T \approx (-0,034; 3,932; 2,898; 2,034)^T$$

$$J_* = \left( \sqrt{\frac{14}{15}} - 2 \right)^2 + 4 \cdot \frac{14}{15} + \left( 3\sqrt{\frac{14}{15}} - 3 \right)^2 + \left( 4 - \sqrt{\frac{14}{15}} \right)^2 =$$

$$= 15 \cdot \frac{14}{15} - 30\sqrt{\frac{14}{15}} + 29 = 43 - 2 \cdot \sqrt{210} \approx 14,017.$$

## 2 Численное решение:

Для численного решения задачи был использован экстраградиентный метод с постоянным шагом.

При решении для обоих тестовых примеров были выбраны следующие параметры:

1. Шаг  $\alpha = 0.001$ ;
2. Начальное приближение  $x_0 = b, \lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;
3. Метод останова -  $\|x_{k+1} - x_k\| + \|\lambda_{k+1} - \lambda_k\| < eps = 10^{-7}$ .

Результаты, полученные для первого тестового примера, представлены на рисунке 1. Найденное решение совпадает с аналитическим решением. На графике представлены зависимости значения функционала (голубая линия) и координат  $x$  от итерации.

```
x = [ 2. -0.  4.  0. -1.]  
lambda = [0.  2.]  
J(x) = 14.0
```

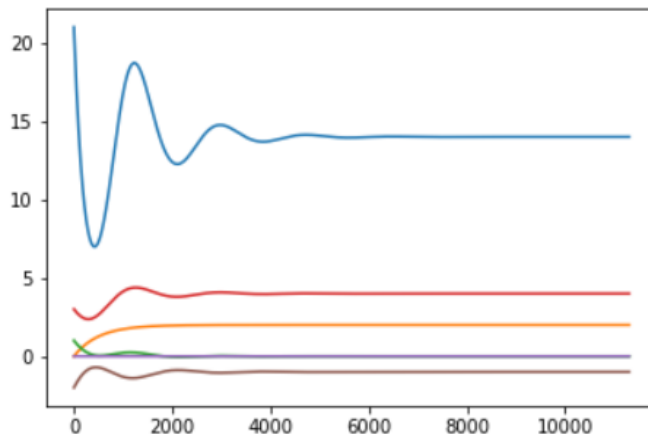


Рисунок 1 – Пример 1

На рисунке 2 представлены результаты для второго тестового случая. Найденное решение также совпадает с аналитическим. Обозначения на графике аналогичны первому примеру.

```
x = [-0.034  3.932  2.898  2.034]  
lambda = [0.035  2.  ]  
J(x) = 14.017
```

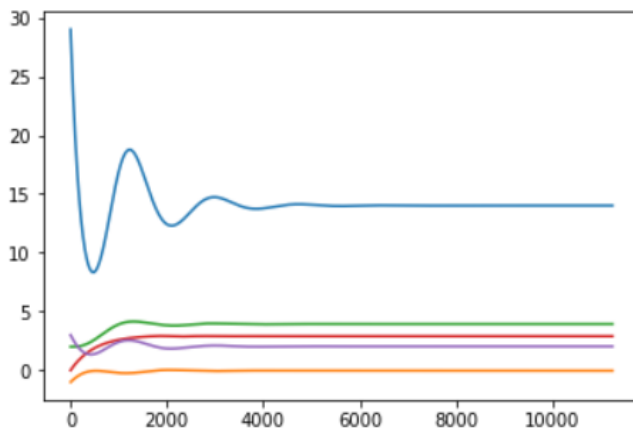


Рисунок 2 – Пример 2

### 3 Сравнение работы метода при разных параметрах

3.1. Сравним работу метода для разных значений шага. На рисунке 3 представлены полученные значения, слева - для первого тестового случая, справа – для второго. По таблицам видно, что в первом случае метод быстрее всего сходится при значении шага от 0.23 до 0.27, во втором случае – при 0.13.

Пример 1

№	Шаг	Число итераций
1	0.1	92
2	0.11	84
3	0.12	78
4	0.13	74
5	0.14	70
6	0.15	67
7	0.16	65
8	0.17	63
9	0.18	61
10	0.19	60
11	0.2	59
12	0.21	58
13	0.22	57
14	0.23	56
15	0.24	56
16	0.25	56
17	0.26	56
18	0.27	56
19	0.28	57
20	0.29	58
21	0.3	59
22	0.31	60
23	0.32	61
24	0.33	64
25	0.34	95

Пример 2

№	Шаг	Число итераций
1	0.01	1257
2	0.02	621
3	0.03	399
4	0.04	291
5	0.05	222
6	0.06	179
7	0.07	143
8	0.08	122
9	0.09	100
10	0.1	88
11	0.11	75
12	0.12	66
13	0.13	59
14	0.14	64
15	0.15	96
16	0.16	328

Рисунок 3 – Изменение шага

3.2. Рассмотрим теперь различные варианты начального приближения, зафиксировав для каждого из примеров значения шага, при котором совершается наименьшее число итераций.

Зададим вектор  $x_0 = kx_*$ , где  $k \in \{0.5, 0.99, 1, 1.01, 1.5\}$ , вектор  $\lambda_0 = \lambda_* + (l_1, l_2)^T$ , где  $l_1, l_2 \in \{-0.01, 0, 0.01\}$  ( $x_*, \lambda_*$  - решения соответствующих примеров). Полученные результаты представлены на рисунке 4.

Быстрее всего метод сходится в точках близких к решению.

Пример 1				
№	l1	l2	k	Число итераций
1	0	-0.01	0.5	54
2	0	0	0.5	54
3	0	0.01	0.5	54
4	0.01	-0.01	0.5	54
5	0.01	0	0.5	54
6	0.01	0.01	0.5	54
7	0	-0.01	0.99	40
8	0	0	0.99	40
9	0	0.01	0.99	40
10	0.01	-0.01	0.99	39
11	0.01	0	0.99	39
12	0.01	0.01	0.99	39
13	0	-0.01	1	17
14	0	0	1	1
15	0	0.01	1	17
16	0.01	-0.01	1	36
17	0.01	0	1	36
18	0.01	0.01	1	36
19	0	-0.01	1.01	40
20	0	0	1.01	40
21	0	0.01	1.01	40
22	0.01	-0.01	1.01	41
23	0.01	0	1.01	41
24	0.01	0.01	1.01	41
25	0	-0.01	1.5	54
26	0	0	1.5	54
27	0	0.01	1.5	54
28	0.01	-0.01	1.5	54
29	0.01	0	1.5	54
30	0.01	0.01	1.5	54

Пример 2				
№	l1	l2	k	Число итераций
1	-0.01	-0.01	0.5	58
2	-0.01	0	0.5	58
3	-0.01	0.01	0.5	58
4	0	-0.01	0.5	58
5	0	0	0.5	58
6	0	0.01	0.5	58
7	0.01	-0.01	0.5	58
8	0.01	0	0.5	58
9	0.01	0.01	0.5	58
10	-0.01	-0.01	0.99	44
11	-0.01	0	0.99	44
12	-0.01	0.01	0.99	44
13	0	-0.01	0.99	44
14	0	0	0.99	44
15	0	0.01	0.99	44
16	0.01	-0.01	0.99	44
17	0.01	0	0.99	44
18	0.01	0.01	0.99	44
19	-0.01	-0.01	1	40
20	-0.01	0	1	36
21	-0.01	0.01	1	40
22	0	-0.01	1	40
23	0	0	1	1
24	0	0.01	1	40
25	0.01	-0.01	1	40
26	0.01	0	1	36
27	0.01	0.01	1	40
28	-0.01	-0.01	1.01	44
29	-0.01	0	1.01	44
30	-0.01	0.01	1.01	44
31	0	-0.01	1.01	44
32	0	0	1.01	44
33	0	0.01	1.01	44
34	0.01	-0.01	1.01	44
35	0.01	0	1.01	44
36	0.01	0.01	1.01	44
37	-0.01	-0.01	1.5	55
38	-0.01	0	1.5	55
39	-0.01	0.01	1.5	55
40	0	-0.01	1.5	55
41	0	0	1.5	55
42	0	0.01	1.5	55
43	0.01	-0.01	1.5	55
44	0.01	0	1.5	55
45	0.01	0.01	1.5	55

Рисунок 4 – Изменение начального приближения

3.3.Рассмотрим два метода останова:

$$I - ||x_{k+1} - x_k|| + ||\lambda_{k+1} - \lambda_k|| < eps = 10^{-7}$$

$$II - |J(x_{k+1}) - J(x_k)| < eps = 10^{-7}$$

Пример	Метод останова	Число итераций
1	I	56
1	II	42
2	I	59
2	II	62

Рисунок 5 – Изменение метода останова

По рисунку 5 видно, что изменение метода останова незначительно влияет на число итераций. В первом тестовом примере метод сходится быстрее со вторым методом останова, а во втором примере – с первым методом останова.

Однако, при использовании второго метода останова также ухудшается точность решения (рис. 6).



Пример	Метод	x	J(x)
1	Аналит. реш.	[2, 0, 4, 0, -1]	14
1	I метод	[ 2. -0. 4. 0. -1.]	14.0
1	II метод	[ 2.000e+00 -2.000e-03 3.994e+00 0.000e+00 -9.960e-01]	13.946
2	Аналит.реш.	[-0.034, 3.932, 2.898, 2.034]	14.017
2	I метод	[-0.034 3.932 2.898 2.034]	14.017
2	II метод	[-0.035 3.933 2.898 2.036]	14.036

Рисунок 6 – Точность решения