1 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1 МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Do there exist square matrices A and B such that $AB - BA = I$

Докажем от противного. Пусть существуют квадратные матрицы A и B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Найдем их произведения:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + ... + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + ... + a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + ... + a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + ... + a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + ... + a_{n1}b_{1n} & \cdots & a_{1n}b_{11} + ... + a_{nn}b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{n1} + ... + a_{n1}b_{nn} & \cdots & a_{1n}b_{n1} + ... + a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

Элементы главной диагонали матрицы $AB - BA$ должны равняться 1:

$$\begin{cases} 0 + ... + a_{1n}b_{n1} - a_{n1}b_{1n} - ... - 0 = 1 \\ \cdots \\ 0 + ... + a_{n1}b_{1n} - a_{1n}b_{n1} - ... - 0 = 1 \end{cases}$$

Сложим первое уравнение системы с последним и получим противоречие:

$$0 \neq 2$$

Значит, не существуют такие матрицы A и B, удовлетворяющие равенству $AB - BA = I$ $\square$.