Задача 7

Пусть A — квадратная матрица такая, что ОСЛУ = 0 имеет ровно одно решение. Показать, что если B — матрица, а b — столбец чисел (оба той же высоты, что и A), то система $(A|B)$ = имеет бесконечное число решений. Опишите главные и свободные неизвестные.

Решение

Пусть A имеет размер $n \times n$, B – $n \times k$. Приведем часть A матрицы $A|B$ к улучшенному ступенчатому виду. Тогда можно заметить, что:

$$rk(A|B) = rk(A).$$

Также

$$rk(A) = n,$$

т.к система имеет одно решение. Количество неизвестных системы $A|B$ равно $n+k$, ранг равен n. Так как $n < n+k$, система $A|B$ имеет бесконечное число решений.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = b' - B'_1 x_{n+1} - ... - B'_k x_k.$$

Задача 8

Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ произвольная матрица, переменные $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$. Показать, что число главных неизвестных системы $Ax = 0$ совпадает с числом главных неизвестных системы $Ay = 0$ (Замечание: тут можно пользоваться тем, что количество главных переменных корректно определено и не зависит от ступенчатого вида.)

Решение

Число главных неизвестных определяется рангом системы. Так как $rk(A) = rk(A^T)$, то число главных неизвестных совпадает.