

Kacper Kula

Zadanie numeryczne nr 7

Omówienie

Problem polega na znalezieniu i wykreśleniu wielomianu interpolacyjnego stopnia n , $W_n(x)$ na przedziale $x \in \langle -1, 1 \rangle$ dla funkcji $y(x) = \frac{1}{1+50x^2}$ dla:

(b) jednorodnych węzłów interpolacji, tj. $x_i = -1 + 2 * \frac{i}{n+1}$ dla $i = 0, 1, \dots, n$

(b) węzłów $x_i = \cos(\frac{2i+1}{2(n+1)} * \pi)$ dla $i = 0, 1, \dots, n$

Ponadto, porównamy zachowanie obu tych metod dla dużych wartości n i innych przykładowych funkcji.

Narzędziem do napisania programu rozwiązującego zadanie jest język Python oraz biblioteka pythona służąca do tworzenia wykresów – matplotlib.

Do sprawdzenia poprawności programu wykorzystana została biblioteka z zakresu algebry liniowej - numpy.

Interpolacja

Opis

Interpolacja jest jedną z metod obliczania przybliżonych wartości funkcji. Zakłada się, że obliczono wartości jakiejś funkcji w kilku punktach zwanych węzłami (czyli wartości tej funkcji w punktach węzłowych są znane). Interesuje nas natomiast przybliżenie wartości naszej funkcji w punktach nie będących węzłami.

W zagadnieniu interpolacji przyjmujemy n węzłów x_i i wartości im odpowiadające $f(x_i)$ dla $i=0, 1, \dots, n$ i szukamy wielomianu $w(x)$, którego wartości będą zgadzały się z wartościami $f(x_i)$.

Można udowodnić, że istnieje dokładnie jeden taki wielomian $w(x)$ i można go wyznaczyć stosując wzory interpolacyjne Lagrange'a.

Wzory interpolacyjne Lagrange'a

Wielomiany L_0, L_1, \dots, L_n nazywamy wielomianami podstawowymi Lagrange'a i definiujemy następująco:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1}) \cdot (x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdot (x_i-x_1) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)}$$

Posiadając wielomiany L_0, L_1, \dots, L_n możemy z łatwością obliczyć wielomian interpolacyjny $w(x)$ korzystając w wzoru interpolacyjnego Lagrange'a:

$$w(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + \dots + L_n(x) \cdot y_n, \text{ gdzie } y_i = f(x_i)$$

Problemy z interpolacją

Mimo, że wartości wielomianu w węzłach interpolowanych są poprawne, to zdarzają się sytuacje, w których przybliżenie wielomianu pomiędzy węzłami jest bardzo niedokładne.

Jednym z konsekwencji korzystania z wielomianowej interpolacji jest efekt Rungego, w którym wartości na krańcach interpolowanego przedziału są drastycznie niedokładne.

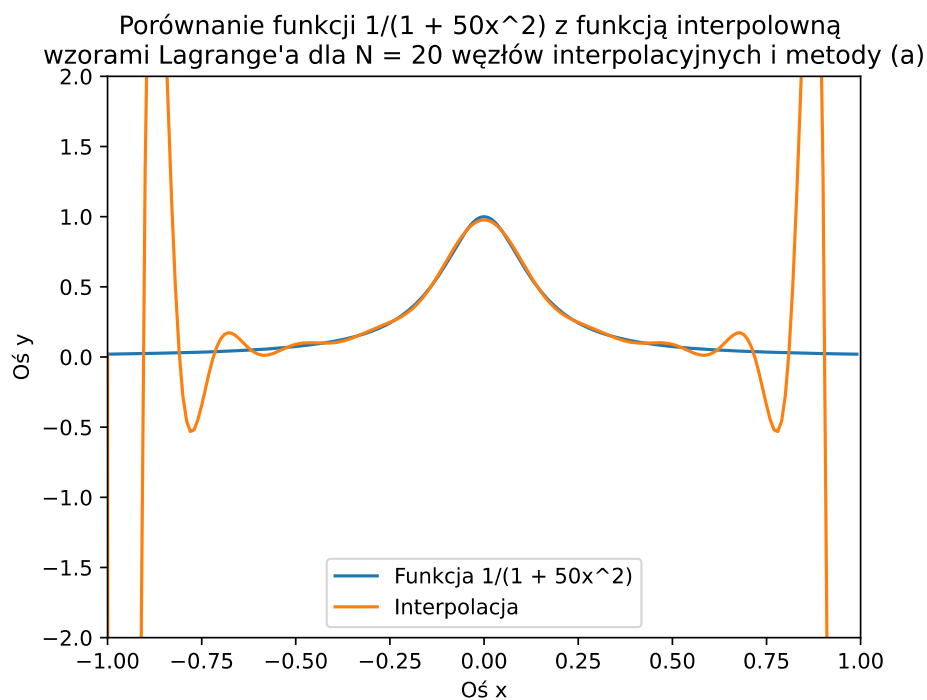
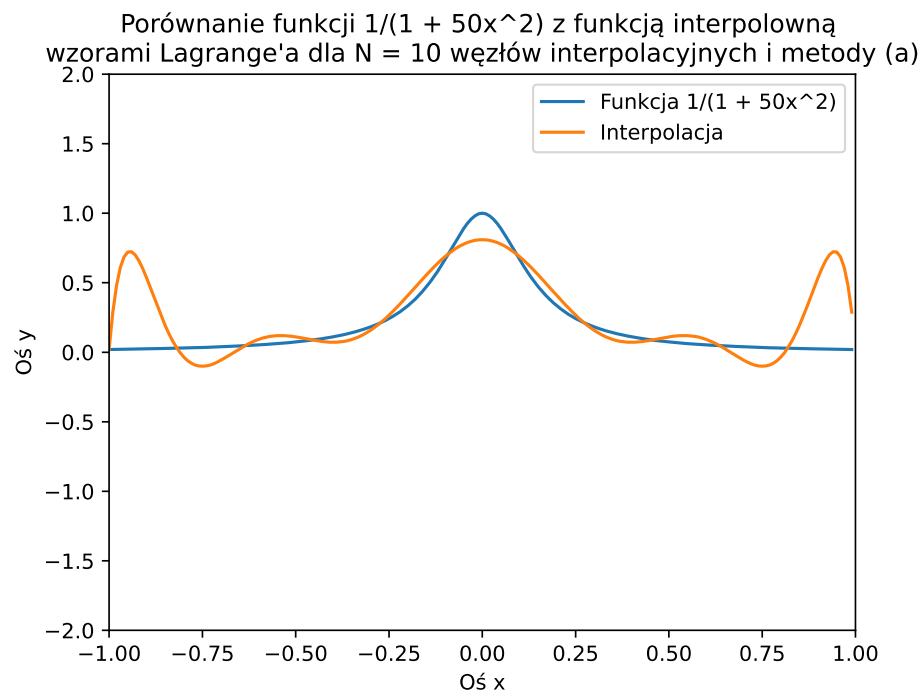
Problem ten wynika z równomiernego rozmieszczenia węzłów interpolacyjnych, więc efekt ten można zniwelować odpowiednio je dobierając, na przykład stosując węzły Czebyszewa z metody **(b)**.

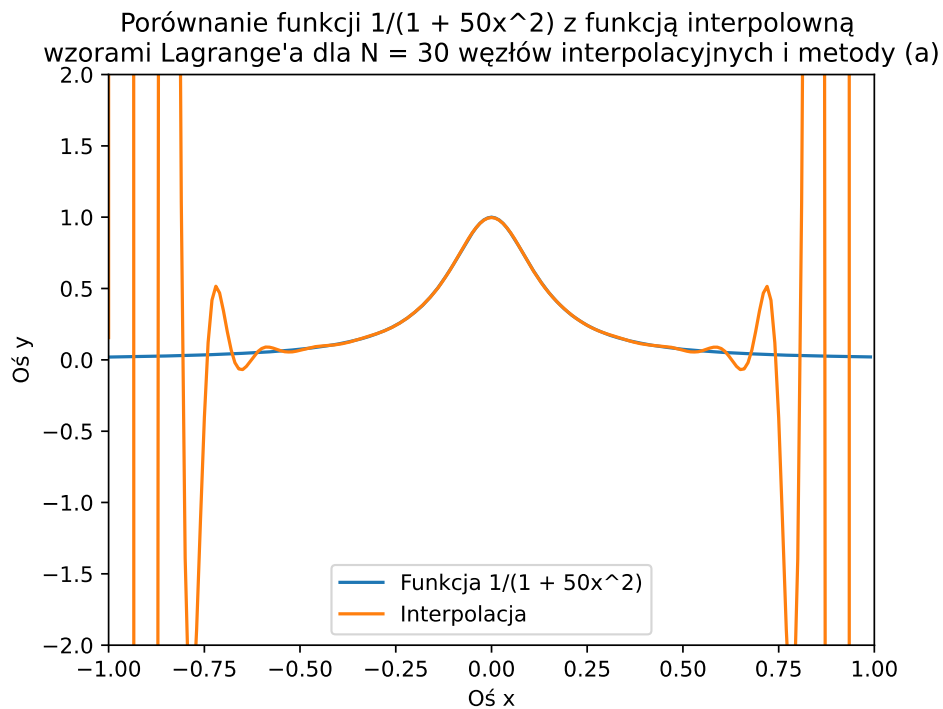
Efekty poprawnego doboru węzłów zaobserwujemy na wykresach dla metody **(a)** i **(b)**.

Porównanie wyników

Dla metod **(a)** i **(b)** porównałem zachowanie funkcji $y(x) = \frac{1}{1+50x^2}$ i interpolowanego wielomianu dla różnego doboru parametru N - liczby węzłów interpolacji.

Wykresy dla metody (a)



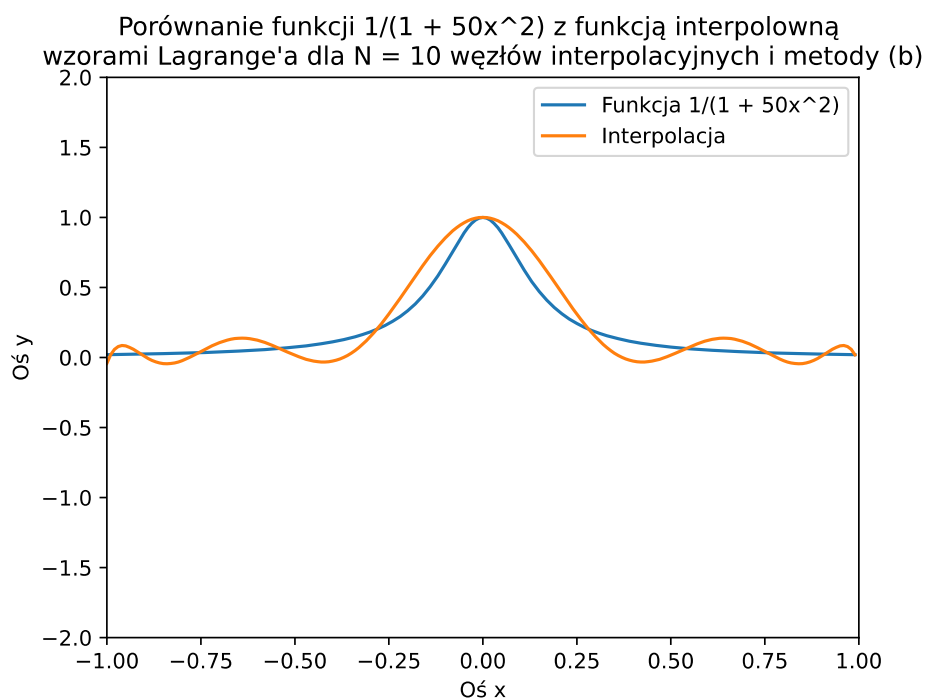


Wnioski dla metody (a)

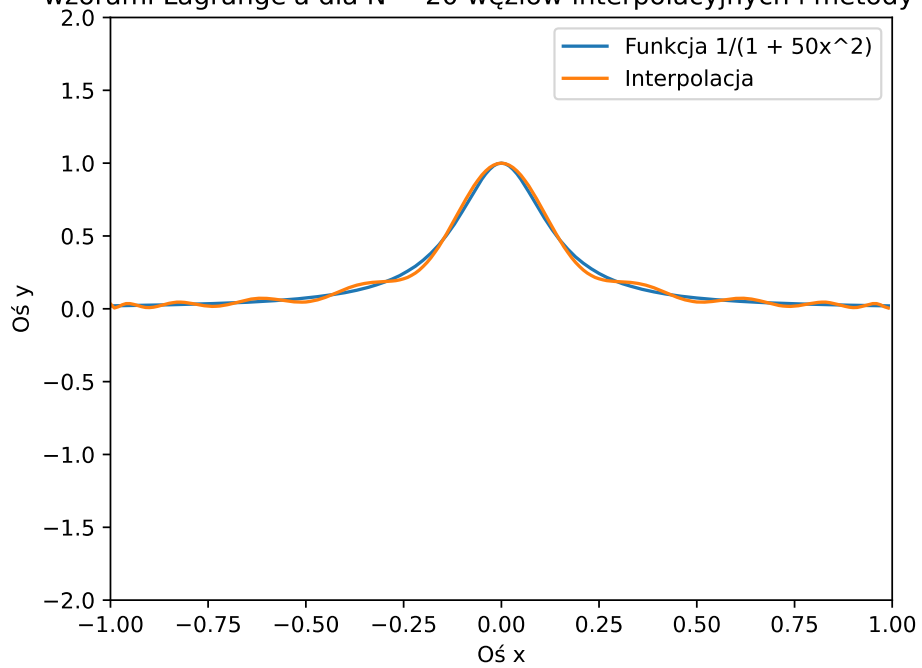
Wraz z wzrostem liczby węzłów interpolacyjnych efekt Rungego, czyli drastyczna niedokładność na końcach przedziału była coraz bardziej zauważalna, mimo, że dokładność przybliżenia była zadowalająca, to tak przybliżony wielomian posiada drastyczną wadę.

Dla czytelności wykresów, na osi OY wartości zawężyłem do zakresu $[-2, 2]$, jednak maksymalny moduł wartości wielomianu interpolacyjnego dla $N = 20$ wyniósł 50, a dla $N = 30$ wyniósł ponad 4000.

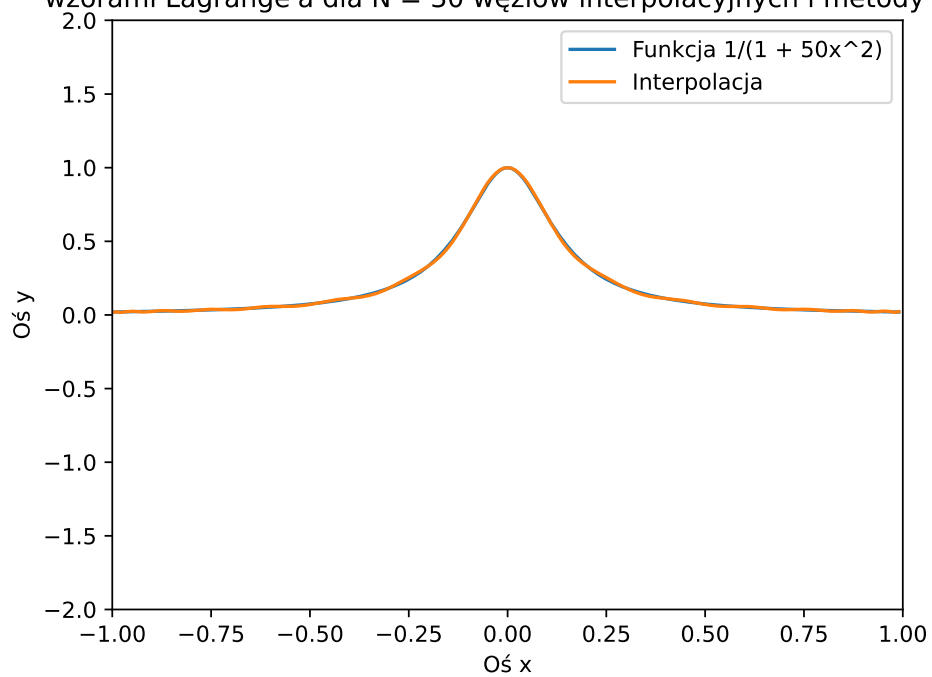
Wykresy dla metody (b)

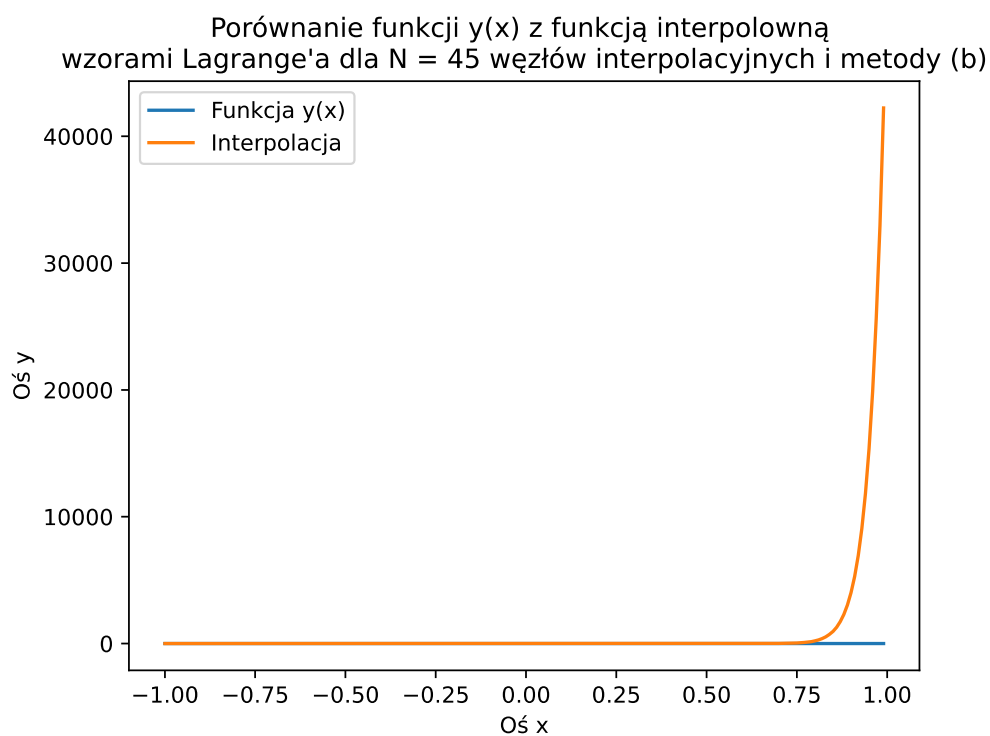
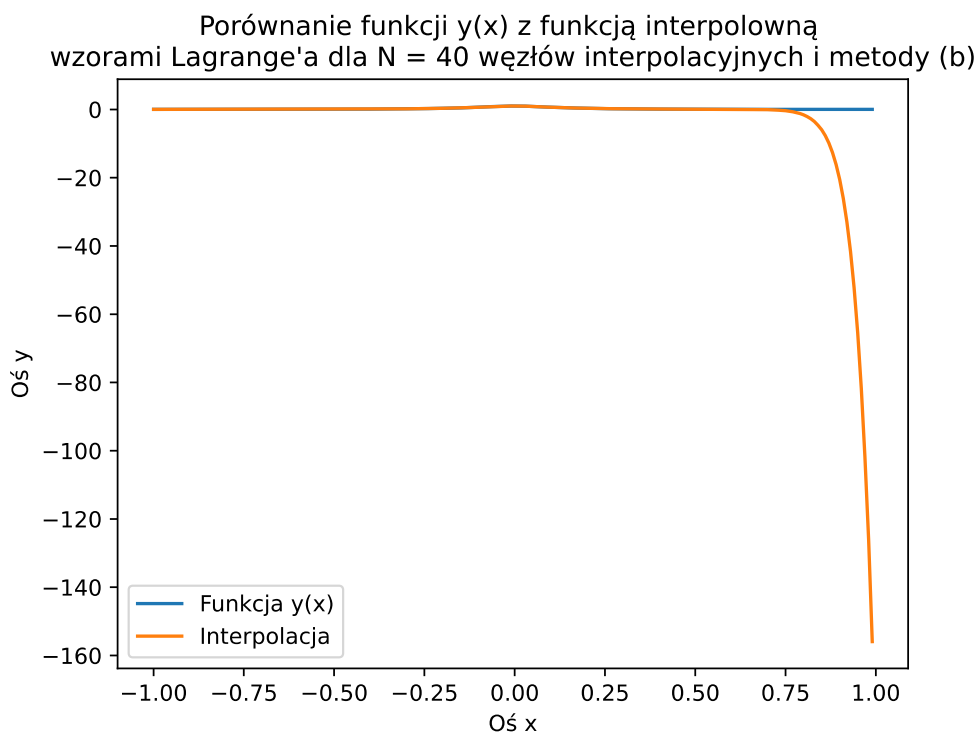


Porównanie funkcji $1/(1 + 50x^2)$ z funkcją interpolowaną wzorami Lagrange'a dla $N = 20$ węzłów interpolacyjnych i metody (b)



Porównanie funkcji $1/(1 + 50x^2)$ z funkcją interpolowaną wzorami Lagrange'a dla $N = 30$ węzłów interpolacyjnych i metody (b)





Wnioski dla metody (b)

Wraz z wzrostem liczby węzłów dokładność wielomianu interpolacyjnego rośnie, a efekt Rungego jest niezauważalny dla odpowiednich wartości N .

Odpowiedni dobór węzłów interpolacyjnych znacznie usprawnił dokładność naszego przybliżenia.

Trzeba jednak zauważyć, że dla N wysokiego rzędu na końcu przedziału błąd również się pojawiał, mimo odpowiedniego doboru węzłów interpolacyjnych. Już dla $N = 40$ błąd okazał się znaczący, a dla $N = 45$ był on rzędu 10^4 .

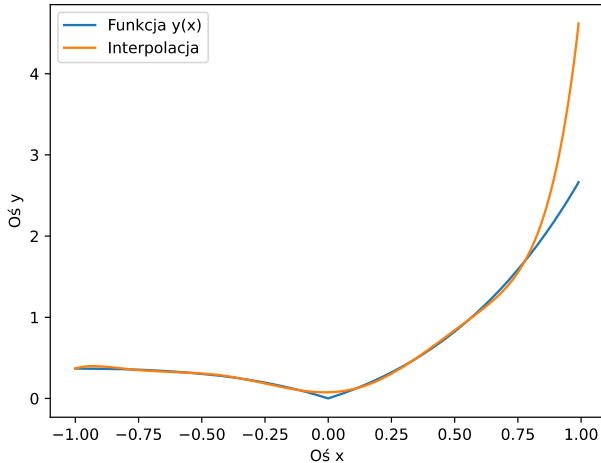
Porównanie wyników innych funkcji

W celu potwierdzenia wniosków przeprowadziłem interpolację również dla innych funkcji. Wcześniejsze obserwacje okazały się poprawne.

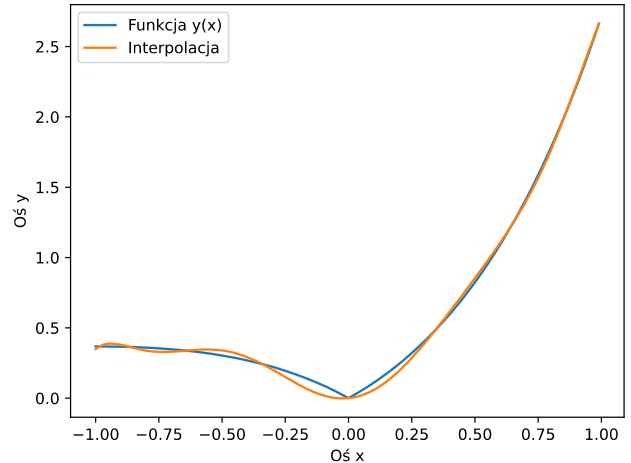
Przykład 1

Dla przykładu pierwszego określiłem $y(x)$ następująco: $y(x) = e^x * |x|$.

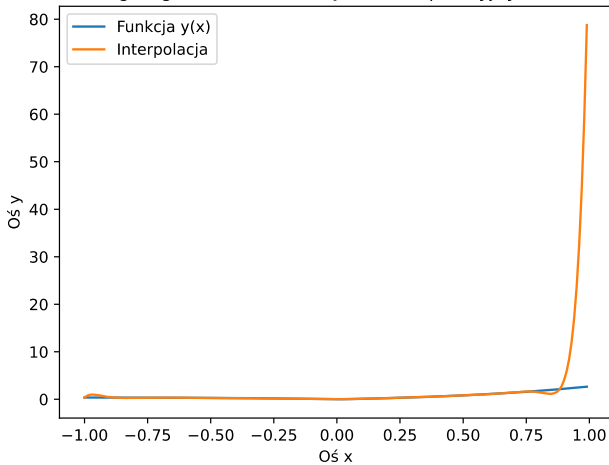
Porównanie funkcji $y(x)$ z funkcją interpolowaną wzorami Lagrange'a dla $N = 8$ węzłów interpolacyjnych i metody (a)



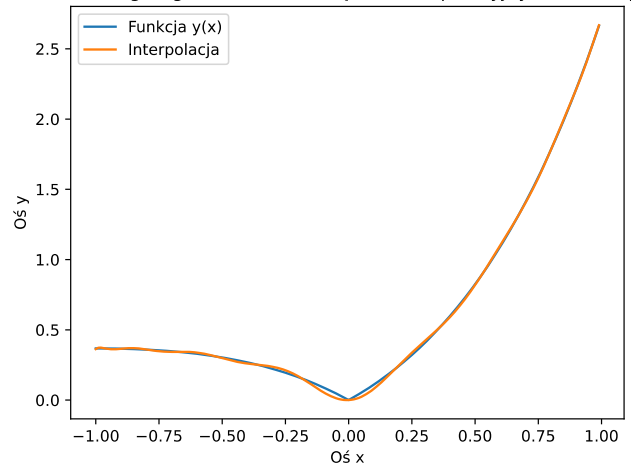
Porównanie funkcji $y(x)$ z funkcją interpolowaną wzorami Lagrange'a dla $N = 8$ węzłów interpolacyjnych i metody (b)



Porównanie funkcji $y(x)$ z funkcją interpolowaną wzorami Lagrange'a dla $N = 16$ węzłów interpolacyjnych i metody (a)



Porównanie funkcji $y(x)$ z funkcją interpolowaną wzorami Lagrange'a dla $N = 16$ węzłów interpolacyjnych i metody (b)



Przykład 2

Dla przykładu drugiego określiłem $y(x)$ następująco: $y(x) = \frac{1}{2+x^5}$.

Jak widać efekt Rungego nie zawsze będzie dokuczliwy – dla tej funkcji i pewnego doboru niskiej wartości N w metodzie **(a)** nie występuje on, a przybliżenie jest zadowalające.

