

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP GIỮA KÌ GIẢI TÍCH 1

Kuma Shiomi

November 3, 2025

Lời mở đầu

-Các nhà toán học cổ đại (chủ yếu làm việc với hình học) đã luôn đau đầu vì hai bài toán: tìm tiếp tuyến của một đường cong bất kỳ, và tính diện tích dưới một đường cong. Archimedes đã có một số kết quả nổi bật với phương pháp vét cạn. Nhưng phải cho tới thế kỉ XVII, với đại số của Viéte, hình học giải tích của Descartes và Fermat cùng với mối quan tâm dâng cao về chuyển động của các thiên thể mới thúc đẩy mạnh mẽ việc khai thác mảnh đất hoang này với đỉnh cao là các công trình của Newton và Leibniz. -Một cách tự nhiên để tiếp cận giải tích là thông qua hình học giải tích, tức là hình học với các tọa độ, phương trình thay vì các lập luận logic thuần tuý như trong hình học Euclid cổ điển. Cụ thể hơn, các đối tượng hình học như điểm, đường thẳng, đường cong,... sẽ được mô tả bởi các hàm số cùng phương trình qua đó ta có thể thực hiện các phép toán đại số. -Sự ra đời và phát triển của giải tích xoay quanh hình học và vật lý với muôn vàn vấn đề thú vị mà có thể nói tóm gọn: Giải tích là toán học của sự thay đổi. -Mục đích của tài liệu là để ghi lại một vài thu hoạch về bộ môn biên soạn bởi một sinh viên đại học trường VinUniversity, nên có thể sẽ có những sự sai sót, xin hãy thông cảm. -Tài liệu gồm nội dung lý thuyết và bài tập phục vụ cho việc ôn tập học phần Giải tích I cho kì thi giữa kì tại Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông hy vọng có thể giúp đỡ được phần nào trong việc ôn tập và chuẩn bị cho kì thi. - Cấu trúc đề thi giữa kì như dự đoán của mình sẽ gồm:

- 1 bài tìm giới hạn (\lim)
- 1 bài đạo hàm bậc cao
- 1 bài tích phân
- 1 bài khai triển Taylor
- 1 bài dãy Fourier

Contents

1 CHƯƠNG I: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ	5
1.1 Số thực	5
1.1.1 Các tính chất cơ bản của tập số thực	5
1.1.2 Giá trị tuyệt đối	5
1.2 Số phức	6
1.2.1 Định nghĩa và các dạng số phức	6
1.2.2 Các phép toán trên tập số phức	6
1.2.3 Công thức Moivre	7
1.3 Dãy số thực	7
1.3.1 Định nghĩa dãy số	7
1.3.2 Giới hạn của dãy số	7
1.3.3 Tính chất của dãy hội tụ	7
1.3.4 Dãy đơn điệu	8
1.3.5 Số e	8
1.3.6 Nguyên lý Cauchy	8
1.4 Các giới hạn cơ bản cần nhớ	8
2 CHƯƠNG II: HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ	9
2.1 Các khái niệm cơ bản về hàm số	9
2.1.1 Định nghĩa hàm số	9
2.1.2 Các loại hàm số đặc biệt	9
2.2 Các hàm số sơ cấp cơ bản	9
2.2.1 Hàm lũy thừa	9
2.2.2 Hàm mũ	10
2.2.3 Hàm logarit	10
2.2.4 Hàm lượng giác	10
2.2.5 Hàm lượng giác ngược	10
2.3 Giới hạn của hàm số	10
2.3.1 Định nghĩa giới hạn	10
2.3.2 Các giới hạn đáng nhớ	11
2.4 Đại lượng vô cùng bé và vô cùng lớn	11
2.4.1 Đại lượng vô cùng bé (VCB)	11
2.4.2 Đại lượng vô cùng lớn (VCL)	11
2.5 Sự liên tục của hàm số	12
2.5.1 Định nghĩa	12
2.5.2 Các tính chất	12
3 CHƯƠNG III: PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ	13
3.1 Đạo hàm của hàm số	13
3.1.1 Định nghĩa	13
3.1.2 Bảng đạo hàm các hàm số cơ bản	13
3.1.3 Quy tắc tính đạo hàm	13
3.2 Vi phân của hàm số	14
3.2.1 Định nghĩa	14
3.3 Đạo hàm và vi phân cấp cao	14

3.3.1	Đạo hàm cấp cao	14
3.3.2	Vi phân cấp cao	14
3.4	Các định lý về giá trị trung bình	14
3.4.1	Định lý Fermat	14
3.4.2	Định lý Rolle	14
3.4.3	Định lý Lagrange	15
3.4.4	Định lý Cauchy	15
3.5	Công thức Taylor và khai triển Maclaurin	15
3.5.1	Công thức Taylor	15
3.5.2	Công thức Maclaurin	15
3.6	Quy tắc L'Hospital	16
3.7	Sự biến thiên và khảo sát hàm số	16
3.7.1	Tính đơn điệu	16
3.7.2	Cực trị	16
3.7.3	Tính lồi, lõm và điểm uốn	16
3.7.4	Tiệm cận	16
4	CHƯƠNG 4: PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN	17
4.1	Tích phân bất định	17
4.1.1	Nguyên hàm và tích phân bất định	17
4.1.2	Tính chất của tích phân bất định	17
4.1.3	Bảng nguyên hàm cơ bản	18
4.2	Các phương pháp tính tích phân bất định	18
4.2.1	Phương pháp đổi biến số	18
4.2.2	Phương pháp tích phân từng phần	19
4.3	Tích phân xác định	19
4.3.1	Định nghĩa tích phân xác định	19
4.3.2	Điều kiện khả tích	19
4.3.3	Tính chất của tích phân xác định	20
4.3.4	Định lý giá trị trung bình	20
4.3.5	Công thức Newton-Leibniz	20
4.4	Các phương pháp tính tích phân xác định	20
4.4.1	Phương pháp đổi biến số	20
4.4.2	Phương pháp tích phân từng phần	20
4.5	Tích phân hàm hữu tỉ	21
4.5.1	Phân tích hàm hữu tỉ	21
4.5.2	Tích phân các phân thức tối giản	21
4.6	Tích phân hàm lượng giác	21
4.6.1	Tích phân $\int R(\sin x, \cos x) dx$	21
4.6.2	Tích phân $\int \sin^m x \cos^n x dx$	21
4.7	Ứng dụng của tích phân xác định	22
4.7.1	Tính diện tích hình phẳng	22
4.7.2	Tính độ dài đường cong	22
4.7.3	Tính thể tích vật thể	22
4.7.4	Tính diện tích mặt tròn xoay	23
4.8	Tích phân suy rộng	23
4.8.1	Tích phân suy rộng loại 1 (cận vô hạn)	23
4.8.2	Tiêu chuẩn hội tụ loại 1	23

4.8.3	Tích phân suy rộng loại 2 (hàm không bị chặn)	23
5	PHẦN BÀI TẬP ÔN TẬP	24
5.1	Bài tập Chương 1: Giới hạn của dãy số	24
5.1.1	Bài tập về số thực và số phức	24
5.1.2	Bài tập về giới hạn dãy số	24
5.2	Bài tập Chương 2: Hàm số một biến số	25
5.2.1	Bài tập về các khái niệm cơ bản	25
5.2.2	Bài tập về giới hạn hàm số	26
5.2.3	Bài tập về tính liên tục	26
5.3	Bài tập Chương 3: Phép tính vi phân	27
5.3.1	Bài tập tính đạo hàm	27
5.3.2	Bài tập về quy tắc L'Hospital	28
5.3.3	Bài tập về cực trị	28
5.3.4	Bài tập khảo sát hàm số	28
5.4	BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 4	28
5.4.1	Bài tập tích phân bất định	28
5.4.2	Bài tập tích phân xác định	29
5.4.3	Bài tập ứng dụng	29
5.4.4	Bài tập tích phân suy rộng	29
6	ĐỀ THI THỬ	30
6.1	Đề thi thử số 1	30
6.2	Đáp án đề thi thử số 1	30
6.3	Đề thi thử số 2	32
6.4	Đáp án đề thi thử số 2	32

1 CHƯƠNG I: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1.1 Số thực

1.1.1 Các tính chất cơ bản của tập số thực

Định nghĩa 1.1 (Số vô tỉ). *Một số biểu diễn dưới dạng thập phân vô hạn không tuần hoàn, hay không thể biểu diễn dưới dạng tỉ số của hai số nguyên được gọi là số vô tỉ.*

Định nghĩa 1.2 (Số thực). *Tất cả các số hữu tỉ và số vô tỉ tạo thành tập hợp số thực, ký hiệu là \mathbb{R} .*

Tính chất 1: Tập \mathbb{R} là một trường giao hoán với hai phép cộng và nhân: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Tính chất 2: Tập \mathbb{R} được xếp thứ tự toàn phần.

Tính chất 3: Tập \mathbb{R} là một tập đầy.

1.1.2 Giá trị tuyệt đối

Định nghĩa 1.3 (Giá trị tuyệt đối). *Giá trị tuyệt đối của số thực x , được ký hiệu $|x|$, là số thực không âm xác định như sau:*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Tính chất của giá trị tuyệt đối:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \max\{x, -x\}$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |xy| = |x||y|$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$ (bất đẳng thức tam giác)
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$

1.2 Số phức

1.2.1 Định nghĩa và các dạng số phức

Định nghĩa 1.4 (Số phức). Cho $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, một số biểu diễn dưới dạng $z = x + iy$, trong đó $i^2 = -1$ được gọi là một số phức. Tập các số phức được ký hiệu là \mathbb{C} .

- $x = \operatorname{Re}(z)$ được gọi là phần thực của z
- $y = \operatorname{Im}(z)$ được gọi là phần ảo của z
- Môđun: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r \geq 0$
- Argument: $\operatorname{Arg}(z) = \theta$ với $\cos \theta = \frac{x}{|z|}$ và $\sin \theta = \frac{y}{|z|}$

Các dạng biểu diễn số phức:

1. **Dạng đại số (chính tắc):** $z = x + iy$
2. **Dạng lượng giác:** $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$
3. **Dạng mũ (Euler):** $z = re^{i\theta}$

1.2.2 Các phép toán trên tập số phức

Cho $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ và $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

1. Phép cộng:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2. Phép trừ:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

3. Phép nhân:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

4. Phép chia:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0$$

5. Số phức liên hợp:

$$\bar{z} = x - iy = r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

1.2.3 Công thức Moivre

Định lý 1.1 (Công thức Moivre). *Với mọi $n \in \mathbb{Z}$:*

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Hệ quả - Công thức khai triển:

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \cos^n \theta - C_n^2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots \\ \sin n\theta &= C_n^1 \cos^{n-1} \theta \sin \theta - C_n^3 \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots\end{aligned}$$

1.3 Dãy số thực

1.3.1 Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 1.5 (Dãy số thực). *Một dãy số thực là một ánh xạ từ \mathbb{N} vào \mathbb{R} :*

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto u_n$$

Ký hiệu dãy số: (u_n) hoặc $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$

1.3.2 Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1.6 (Dãy số hội tụ). *Dãy số (u_n) được gọi là hội tụ đến giới hạn $a \in \mathbb{R}$ nếu:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

Ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow \infty$

Định nghĩa 1.7 (Dãy số phân kỳ). *Dãy số (u_n) phân kỳ nếu nó không hội tụ đến một giới hạn hữu hạn.*

Các trường hợp đặc biệt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ nếu $\forall M > 0, \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow u_n > M$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ nếu $\forall M > 0, \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow u_n < -M$

1.3.3 Tính chất của dãy hội tụ

Định lý 1.2 (Tính duy nhất của giới hạn). *Nếu dãy (u_n) hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.*

Định lý 1.3 (Tính bị chặn). *Nếu dãy (u_n) hội tụ thì (u_n) bị chặn.*

Định lý 1.4 (Các phép toán với giới hạn). *Cho $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b$. Khi đó:*

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \pm v_n) = a \pm b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (*nếu $b \neq 0$*)
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$

1.3.4 Dãy đơn điệu

Định nghĩa 1.8 (Dãy đơn điệu). • Dãy (u_n) tăng nếu $u_n \leq u_{n+1}, \forall n$

- Dãy (u_n) giảm nếu $u_n \geq u_{n+1}, \forall n$
- Dãy (u_n) đơn điệu nếu nó tăng hoặc giảm

Định lý 1.5 (Định lý Weierstrass). Mọi dãy số đơn điệu và bị chặn đều hội tụ.

1.3.5 Số e

Định nghĩa 1.9 (Số e). Số e được định nghĩa là giới hạn:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828\dots$$

Tính chất:

- e là số vô tỉ
- $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
- $2 < e < 3$

1.3.6 Nguyên lý Cauchy

Định lý 1.6 (Nguyên lý Cauchy). Dãy (u_n) hội tụ khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon$$

1.4 Các giới hạn cơ bản cần nhớ

Các giới hạn cơ bản

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (p > 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

2 CHƯƠNG II: HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

2.1 Các khái niệm cơ bản về hàm số

2.1.1 Định nghĩa hàm số

Định nghĩa 2.1 (Hàm số). Cho X là tập con không rỗng của \mathbb{R} . Một ánh xạ f từ X vào \mathbb{R} được gọi là **hàm số** của một biến số:

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

- X gọi là **tập xác định** của f
- $f(X)$ gọi là **tập giá trị** của f
- x gọi là **đối số**, $y = f(x)$ gọi là **hàm số**

2.1.2 Các loại hàm số đặc biệt

1. Hàm số chẵn và hàm số lẻ:

- Hàm $f(x)$ chẵn: $f(-x) = f(x), \forall x \in X$
- Hàm $f(x)$ lẻ: $f(-x) = -f(x), \forall x \in X$

2. Hàm số tuần hoàn:

- Hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T > 0$ nếu:

$$f(x + T) = f(x), \forall x \in X$$

3. Hàm số đơn điệu:

- Hàm $f(x)$ tăng: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Hàm $f(x)$ tăng ngắt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Hàm $f(x)$ giảm: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Hàm $f(x)$ giảm ngắt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

4. Hàm số bị chặn:

- Hàm $f(x)$ bị chặn trên: $\exists A : f(x) \leq A, \forall x \in X$
- Hàm $f(x)$ bị chặn dưới: $\exists B : f(x) \geq B, \forall x \in X$
- Hàm $f(x)$ bị chặn: $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M, \forall x \in X$

2.2 Các hàm số sơ cấp cơ bản

2.2.1 Hàm lũy thừa

$$y = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2.2.2 Hàm mũ

$$y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1$$

Đặc biệt: $y = e^x$

2.2.3 Hàm logarit

$$y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$$

Đặc biệt: $y = \ln x$ (logarit tự nhiên)

Tính chất:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
4. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$
5. $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

2.2.4 Hàm lượng giác

- $y = \sin x$: Xác định trên \mathbb{R} , lẻ, tuần hoàn với chu kỳ 2π , $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $y = \cos x$: Xác định trên \mathbb{R} , chẵn, tuần hoàn với chu kỳ 2π , $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $y = \tan x$: Xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, lẻ, tuần hoàn với chu kỳ π
- $y = \cot x$: Xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, lẻ, tuần hoàn với chu kỳ π

2.2.5 Hàm lượng giác ngược

- $y = \arcsin x$: $x \in [-1, 1]$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $y = \arccos x$: $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$
- $y = \arctan x$: $x \in \mathbb{R}$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- $y = \text{arccot } x$: $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, \pi)$

2.3 Giới hạn của hàm số

2.3.1 Định nghĩa giới hạn

Định nghĩa 2.2 (Giới hạn tại một điểm). Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ và a là điểm tự của X . Ta nói f có giới hạn là L khi x tiến tới a nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Định nghĩa 2.3 (Giới hạn một phía). • *Giới hạn phải:* $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

- *Giới hạn trái:* $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Định lý 2.1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

2.3.2 Các giới hạn đáng nhớ

Các giới hạn cơ bản cần nhớ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} &= e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a \quad (a > 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} &= \alpha \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e\end{aligned}$$

2.4 Đại lượng vô cùng bé và vô cùng lớn

2.4.1 Đại lượng vô cùng bé (VCB)

Định nghĩa 2.4 (VCB). *Hàm $\alpha(x)$ được gọi là đại lượng vô cùng bé khi $x \rightarrow a$ nếu:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

So sánh các VCB: Cho $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCB khi $x \rightarrow a$, $\beta(x) \neq 0$:

- Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$: α là VCB bậc cao hơn β , ký hiệu $\alpha = o(\beta)$
- Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$: α và β là VCB cùng bậc
- Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$: α và β là VCB tương đương, ký hiệu $\alpha \sim \beta$

Các VCB tương đương thường dùng khi $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\sin x &\sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x \\ 1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1 + x) \sim x \\ (1 + x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a\end{aligned}$$

2.4.2 Đại lượng vô cùng lớn (VCL)

Định nghĩa 2.5 (VCL). *Hàm $f(x)$ được gọi là đại lượng vô cùng lớn khi $x \rightarrow a$ nếu:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Quan hệ giữa VCB và VCL: Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \rightarrow a$ và $\alpha(x) \neq 0$ thì $\frac{1}{\alpha(x)}$ là VCL khi $x \rightarrow a$ và ngược lại.

2.5 Sự liên tục của hàm số

2.5.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.6 (Hàm liên tục tại một điểm). *Hàm f liên tục tại a nếu:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

hay tương đương:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Định nghĩa 2.7 (Hàm liên tục trên một khoảng). *Hàm f liên tục trên khoảng (a, b) nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc (a, b) .*

2.5.2 Các tính chất

Định lý 2.2 (Phép toán với hàm liên tục). *Nếu f và g liên tục tại a thì:*

1. $f \pm g$ liên tục tại a
2. $f \cdot g$ liên tục tại a
3. $\frac{f}{g}$ liên tục tại a ($nếu g(a) \neq 0$)

Định lý 2.3 (Tính chất của hàm liên tục trên đoạn). *Nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì:*

1. f bị chặn trên $[a, b]$
2. f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a, b]$
3. f nhận mọi giá trị trung gian (Định lý giá trị trung gian)

Định lý 2.4 (Định lý giá trị trung gian - Bolzano). *Nếu f liên tục trên $[a, b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$*

3 CHƯƠNG III: PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM SỐ MỘT BIÊN SỐ

3.1 Đạo hàm của hàm số

3.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3.1 (Đạo hàm tại một điểm). *Hàm f khả vi tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:*

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Giới hạn này được gọi là *đạo hàm* của f tại a , ký hiệu: $f'(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$, $y'(a)$

Ý nghĩa hình học: $f'(a)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại điểm $(a, f(a))$.

Phương trình tiếp tuyến: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Ý nghĩa vật lý: $f'(a)$ biểu thị vận tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm $t = a$.

3.1.2 Bảng đạo hàm các hàm số cơ bản

Bảng đạo hàm

1. $(c)' = 0$	8. $(\cos x)' = -\sin x$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$	10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
4. $(e^x)' = e^x$	11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
7. $(\sin x)' = \cos x$	14. $(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

3.1.3 Quy tắc tính đạo hàm

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương:

$$\begin{aligned} (u \pm v)' &= u' \pm v' \\ (uv)' &= u'v + uv' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0) \\ (cu)' &= cu' \quad (c \text{ là hằng số}) \end{aligned}$$

2. Đạo hàm của hàm hợp:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

3. Đạo hàm của hàm ngược: Nếu $y = f(x)$ có hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ thì:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

3.2 Vi phân của hàm số

3.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3.2 (Vi phân). *Vi phân của hàm f tại a là:*

$$df(a) = f'(a) \cdot h$$

trong đó $h = dx$ là số gia của đổi số.

Ta cũng viết: $df = f'(x)dx$ hay $dy = y'dx$

Tính chất:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$
2. $d(uv) = vdu + udv$
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
4. $d(cu) = cdu$

3.3 Đạo hàm và vi phân cấp cao

3.3.1 Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa 3.3. *Đạo hàm cấp n của f , ký hiệu $f^{(n)}$, được định nghĩa quy nạp:*

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f' \\ f^{(n)} &= (f^{(n-1)})', \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Công thức Leibniz:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

3.3.2 Vi phân cấp cao

Định nghĩa 3.4. *Vi phân cấp n :*

$$d^n f = f^{(n)}(dx)^n$$

3.4 Các định lý về giá trị trung bình

3.4.1 Định lý Fermat

Định lý 3.1 (Fermat). *Nếu f đạt cực trị tại a và f khả vi tại a thì $f'(a) = 0$.*

3.4.2 Định lý Rolle

Định lý 3.2 (Rolle). *Nếu f liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

3.4.3 Định lý Lagrange

Định lý 3.3 (Lagrange - Định lý giá trị trung bình). Nếu f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Hệ quả:

- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$ thì f là hàm hằng trên (a, b)
- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ thì f tăng ngặt trên (a, b)
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ thì f giảm ngặt trên (a, b)

3.4.4 Định lý Cauchy

Định lý 3.4 (Cauchy). Nếu f, g liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

3.5 Công thức Taylor và khai triển Maclaurin

3.5.1 Công thức Taylor

Định lý 3.5 (Taylor). Nếu f có đạo hàm đến cấp $n + 1$ trên (a, b) chứa điểm x_0 thì với mọi $x \in (a, b)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

trong đó $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ với c nằm giữa x_0 và x .

3.5.2 Công thức Maclaurin

Trường hợp $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

Khai triển Maclaurin các hàm thường gặp:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

3.6 Quy tắc L'Hospital

Định lý 3.6 (L'Hospital). Cho $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (hoặc $= \infty$) và $g'(x) \neq 0$ trong lân cận của a .

Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ thì $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Các dạng vô định: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0

3.7 Sự biến thiên và khảo sát hàm số

3.7.1 Tính đơn điệu

Điều kiện đủ để hàm đơn điệu:

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ thì f tăng ngặt trên (a, b)
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ thì f giảm ngặt trên (a, b)

3.7.2 Cực trị

Điều kiện cần: Nếu f đạt cực trị tại x_0 và f khả vi tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Điều kiện đủ thứ nhất:

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì f đạt cực tiểu tại x_0
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì f đạt cực đại tại x_0

Điều kiện đủ thứ hai: Giả sử $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$:

- Nếu $f''(x_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0
- Nếu $f''(x_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_0

3.7.3 Tính lồi, lõm và điểm uốn

- Hàm f lồi trên (a, b) nếu $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$
- Hàm f lõm trên (a, b) nếu $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$
- Điểm x_0 là điểm uốn nếu $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0

3.7.4 Tiệm cận

1. **Tiệm cận đứng:** $x = a$ là tiệm cận đứng nếu:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

2. **Tiệm cận ngang:** $y = b$ là tiệm cận ngang nếu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

3. **Tiệm cận xiên:** $y = ax + b$ là tiệm cận xiên nếu:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$$

4 CHƯƠNG 4: PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

4.1 Tích phân bất định

4.1.1 Nguyên hàm và tích phân bất định

Định nghĩa 4.1 (Nguyên hàm). *Hàm $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng (a, b) nếu:*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

Định nghĩa 4.2 (Tích phân bất định). *Tập hợp tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên (a, b) được gọi là tích phân bất định của $f(x)$, ký hiệu:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và C là hằng số tùy ý.

4.1.2 Tính chất của tích phân bất định

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C$
4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
5. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ (k là hằng số, $k \neq 0$)

4.1.3 Bảng nguyên hàm cơ bản

Bảng nguyên hàm

1. $\int 0 dx = C$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$
13. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
14. $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

4.2 Các phương pháp tính tích phân bất định

4.2.1 Phương pháp đổi biến số

Định lý 4.1 (Đổi biến dạng 1). Nếu $x = \varphi(t)$ và φ khả vi liên tục thì:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Định lý 4.2 (Đổi biến dạng 2). Nếu đặt $t = \psi(x)$ thì:

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt \Big|_{t=\psi(x)}$$

Các phép đổi biến thường dùng:

- Chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$: đặt $x = a \sin t$ hoặc $x = a \cos t$
- Chứa $\sqrt{a^2 + x^2}$: đặt $x = a \tan t$
- Chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$: đặt $x = \frac{a}{\cos t}$
- Chứa $\sqrt[n]{ax + b}$: đặt $t = \sqrt[n]{ax + b}$

4.2.2 Phương pháp tích phân từng phần

Định lý 4.3 (Tích phân từng phần).

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Nguyên tắc chọn u và dv :

Thứ tự ưu tiên chọn u : **Logarit** → **Đa thức** → **Lượng giác** → **Mũ**

Các dạng thường gặp:

1. $\int P_n(x)e^{ax}dx$: Chọn $u = P_n(x)$, $dv = e^{ax}dx$
2. $\int P_n(x) \sin(ax)dx$ hoặc $\int P_n(x) \cos(ax)dx$: Chọn $u = P_n(x)$
3. $\int P_n(x) \ln x dx$: Chọn $u = \ln x$, $dv = P_n(x)dx$
4. $\int e^{ax} \sin(bx)dx$ hoặc $\int e^{ax} \cos(bx)dx$: Tích phân từng phần 2 lần

4.3 Tích phân xác định

4.3.1 Định nghĩa tích phân xác định

Định nghĩa 4.3 (Tích phân xác định). Cho hàm f khả tích trên $[a, b]$. Tích phân xác định của f trên $[a, b]$ là:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

trong đó $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Quy ước:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

4.3.2 Điều kiện khả tích

Điều kiện đủ:

1. Hàm liên tục trên $[a, b]$ thì khả tích
2. Hàm đơn điệu và bị chặn trên $[a, b]$ thì khả tích
3. Hàm liên tục từng khúc trên $[a, b]$ thì khả tích

4.3.3 Tính chất của tích phân xác định

1. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
2. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
3. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $c \in (a, b)$
4. Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
5. Nếu $f(x) \leq g(x)$ trên $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
6. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$
7. Nếu $m \leq f(x) \leq M$ trên $[a, b]$ thì:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

4.3.4 Định lý giá trị trung bình

Định lý 4.4 (Định lý giá trị trung bình). *Nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

4.3.5 Công thức Newton-Leibniz

Định lý 4.5 (Công thức Newton-Leibniz). *Nếu f liên tục trên $[a, b]$ và F là một nguyên hàm của f thì:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

4.4 Các phương pháp tính tích phân xác định

4.4.1 Phương pháp đổi biến số

Định lý 4.6 (Đổi biến trong tích phân xác định). *Nếu $x = \varphi(t)$, φ' liên tục, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ thì:*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

4.4.2 Phương pháp tích phân từng phần

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx$$

4.5 Tích phân hàm hữu tỉ

4.5.1 Phân tích hàm hữu tỉ

Hàm hữu tỉ: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ với P, Q là đa thức

Bước 1: Nếu $\deg P \geq \deg Q$ thì chia đa thức

Bước 2: Phân tích $Q(x)$ thành tích các thừa số

Bước 3: Phân tích thành tổng các phân thức tối giản

4.5.2 Tích phân các phân thức tối giản

Loại 1: $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx$

- Nếu $n = 1$: $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$

- Nếu $n > 1$: $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$

Loại 2: $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$ với $p^2 - 4q < 0$

Đặt $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$

4.6 Tích phân hàm lượng giác

4.6.1 Tích phân $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Phép đổi biến vạn năng: $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Các trường hợp đặc biệt:

- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$: đặt $t = \cos x$
- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$: đặt $t = \sin x$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$: đặt $t = \tan x$

4.6.2 Tích phân $\int \sin^m x \cos^n x dx$

- m lẻ: Đặt $t = \cos x$

- n lẻ: Đặt $t = \sin x$

- m, n đều chẵn: Dùng công thức hạ bậc:

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \sin x \cos x &= \frac{\sin 2x}{2}\end{aligned}$$

4.7 Ứng dụng của tích phân xác định

4.7.1 Tính diện tích hình phẳng

A. Toạ độ Descartes:

- Diện tích giới hạn bởi $y = f(x)$, trục Ox , $x = a$, $x = b$:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

- Diện tích giới hạn bởi $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$:

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

B. Phương trình tham số:

Nếu đường cong cho bởi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_0, t_1]$ thì:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t) dt$$

C. Toạ độ cực:

Nếu đường cong cho bởi $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ thì:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$$

4.7.2 Tính độ dài đường cong

A. Toạ độ Descartes:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

B. Phương trình tham số:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

C. Toạ độ cực:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

4.7.3 Tính thể tích vật thể

A. Công thức tổng quát:

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

trong đó $S(x)$ là diện tích thiết diện

B. Thể tích vật thể tròn xoay:

1. Quay quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

2. Quay quanh trục Oy :

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

4.7.4 Tính diện tích mặt tròn xoay

A. Quay quanh trục Ox :

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

B. Quay quanh trục Oy :

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

4.8 Tích phân suy rộng

4.8.1 Tích phân suy rộng loại 1 (cận vô hạn)

Định nghĩa 4.4. 1. $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$

$$2. \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x) dx$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Nếu giới hạn tồn tại và hữu hạn thì tích phân **hội tụ**, ngược lại tích phân **phân kỳ**

4.8.2 Tiêu chuẩn hội tụ loại 1

Định lý 4.7 (Tiêu chuẩn so sánh). Nếu $0 \leq f(x) \leq g(x)$ trên $[a, +\infty)$ thì:

- $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ
- $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx$ phân kỳ

Tích phân mẫu:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{hội tụ} & \text{nếu } \alpha > 1 \\ \text{phân kỳ} & \text{nếu } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

4.8.3 Tích phân suy rộng loại 2 (hàm không bị chặn)

Định nghĩa 4.5. Nếu f không bị chặn tại b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Tích phân mẫu:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \begin{cases} \text{hội tụ} & \text{nếu } \alpha < 1 \\ \text{phân kỳ} & \text{nếu } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

5 PHẦN BÀI TẬP ÔN TẬP

5.1 Bài tập Chương 1: Giới hạn của dãy số

5.1.1 Bài tập về số thực và số phức

Bài 1. Chứng minh rằng $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Bài 2. Tìm cận trên đúng và cận dưới đúng (nếu tồn tại) của tập:

$$E = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Bài 3. Cho $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - i$. Tính:

- a) $z_1 + z_2$
- b) $z_1 \cdot z_2$
- c) $\frac{z_1}{z_2}$
- d) $|z_1|, |z_2|$

Bài 4. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác và dạng mũ:

- a) $z_1 = 1 + i$
- b) $z_2 = -\sqrt{3} + i$
- c) $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$

Bài 5. Sử dụng công thức Moivre tính:

- a) $(1 + i)^{10}$
- b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$

5.1.2 Bài tập về giới hạn dãy số

Bài 6. Bằng định nghĩa, chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của các dãy:

- a) $u_n = \frac{n}{n+1}$
- b) $u_n = \frac{n-1}{4n+1}$
- c) $u_n = \frac{3+(-3)^n}{4^n}$

Bài 7. Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n-1}{5n^2-n+3}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+3^n}{2^n+3^{n+1}}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Bài 8. Cho dãy số xác định bởi:

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 2)$$

Chứng minh dãy hội tụ và tìm giới hạn.

Bài 9. Xét sự hội tụ của các dãy số:

a) $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

b) $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

Bài 10. Chứng minh rằng:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{1}{2}$

5.2 Bài tập Chương 2: Hàm số một biến số

5.2.1 Bài tập về các khái niệm cơ bản

Bài 11. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

b) $y = \ln(x^2 - 1)$

c) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

d) $y = \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Bài 12. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = x^2 + |x|$

b) $y = \frac{x}{x^2-1}$

c) $y = x^3 + \sin x$

Bài 13. Tìm hàm ngược của các hàm số:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = e^{x+1}$

c) $y = \frac{x+1}{x-1}$

5.2.2 Bài tập về giới hạn hàm số

Bài 14. Tính các giới hạn:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 - x + 5}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

Bài 15. Tính các giới hạn lượng giác:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

Bài 16. Tính các giới hạn mũ và logarit:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0)$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Bài 17. Tính các giới hạn dạng 0^0 , 1^∞ , ∞^0 :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

5.2.3 Bài tập về tính liên tục

Bài 18. Xét tính liên tục của các hàm số:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 4 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

Bài 19. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

Bài 20. Chứng minh phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt.

5.3 Bài tập Chương 3: Phép tính vi phân

5.3.1 Bài tập tính đạo hàm

Bài 21. Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

b) $y = (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$

c) $y = \frac{x^2 - 1}{x+1}$

d) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

e) $y = e^{x^2}$

f) $y = \ln(x^2 + 1)$

g) $y = \sin(2x + 1)$

h) $y = x^x$ ($x > 0$)

Bài 22. Tính đạo hàm của các hàm số hợp:

a) $y = e^{\sin x}$

b) $y = \ln(\cos x)$

c) $y = \sin^3(2x)$

d) $y = e^{x^2+1}$

e) $y = \arctan(e^x)$

Bài 23. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:

a) $y = x^2 - 3x + 2$ tại điểm có hoành độ $x = 1$

b) $y = \sin x$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{4}$

c) $y = e^x$ tại điểm có hoành độ $x = 0$

Bài 24. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số:

a) $y = x^4 - 2x^3 + x$

b) $y = e^{2x}$

c) $y = \sin(3x)$

d) $y = \ln x$

5.3.2 Bài tập về quy tắc L'Hospital

Bài 25. Tính các giới hạn bằng quy tắc L'Hospital:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

5.3.3 Bài tập về cực trị

Bài 26. Tìm cực trị của các hàm số:

a) $y = x^3 - 3x + 2$

b) $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

c) $y = \frac{x^2}{x-1}$

d) $y = x - \ln(1 + x)$

Bài 27. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn cho trước:

a) $y = x^3 - 3x + 1$ trên $[-2, 2]$

b) $y = \sin x + \cos x$ trên $[0, 2\pi]$

c) $y = xe^{-x}$ trên $[0, 3]$

5.3.4 Bài tập khảo sát hàm số

Bài 28. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

c) $y = x^2 e^{-x}$

5.4 BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 4

5.4.1 Bài tập tích phân bất định

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a) $\int (3x^2 + 2x - 1) dx$

b) $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx$

c) $\int x e^x dx$

d) $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

Bài 2. Dùng phương pháp đổi biến:

- a) $\int x\sqrt{1+x^2}dx$
 b) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$
 c) $\int \cos^3 x dx$

Bài 3. Dùng phương pháp tích phân từng phần:

- a) $\int x \sin x dx$
 b) $\int x^2 e^x dx$
 c) $\int \ln x dx$

5.4.2 Bài tập tích phân xác định

Bài 4. Tính các tích phân xác định:

- a) $\int_0^1 (x^2 + 1)dx$
 b) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$
 c) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$
 d) $\int_0^1 xe^x dx$

Bài 5. Tích phân hàm hữu ti:

- a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx$
 b) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$

Bài 6. Tích phân hàm lượng giác:

- a) $\int \sin^2 x dx$
 b) $\int \tan^2 x dx$
 c) $\int \sin x \cos x dx$

5.4.3 Bài tập ứng dụng

Bài 7. Tính diện tích hình phẳng:

- a) Giới hạn bởi $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$
 b) Giới hạn bởi $y = \sin x$ và trục Ox từ $x = 0$ đến $x = \pi$

Bài 8. Tính thể tích vật thể tròn xoay:

Quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$ quanh trục Ox

Bài 9. Tính độ dài đường cong $y = \ln x$ từ $x = 1$ đến $x = e$

5.4.4 Bài tập tích phân suy rộng

Bài 10. Xét sự hội tụ và tính (nếu hội tụ):

- a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$
 b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
 c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

6 ĐỀ THI THỬ

6.1 Đề thi thử số 1

Câu 1 (2 điểm): Giới hạn

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n-5}{2n^2-n+1}$ (0.5 điểm)

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$ (0.5 điểm)

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$ (0.5 điểm)

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$ (0.5 điểm)

Câu 2 (2 điểm): Đạo hàm bậc cao

Cho hàm số $y = x^3 e^x$. Tính:

a) $y'(x)$ (1 điểm)

b) $y''(x)$ (1 điểm)

Câu 3 (2 điểm): Tích phân

Tính các tích phân sau:

a) $\int (3x^2 - 2x + 5) dx$ (1 điểm)

b) $\int x \sin x dx$ (1 điểm)

Câu 4 (2 điểm): Khai triển Taylor

Khai triển hàm số $f(x) = e^x$ theo công thức Taylor đến cấp 3 tại điểm $x_0 = 0$.

Câu 5 (2 điểm): Fourier

Tìm chuỗi Fourier của hàm số $f(x) = x$ trên khoảng $(-\pi, \pi)$.

6.2 Đáp án đề thi thử số 1

Câu 1:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n-5}{2n^2-n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{=} = \frac{3}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$

Câu 2:

a) $y' = (x^3)'e^x + x^3(e^x)' = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2e^x(3+x)$

b) $y'' = (x^2e^x(3+x))' = (x^2)'e^x(3+x) + x^2(e^x)'(3+x) + x^2e^x(3+x)'$
 $= 2xe^x(3+x) + x^2e^x(3+x) + x^2e^x = e^x(6x + 2x^2 + x^2(3+x) + x^2)$
 $= e^x(6x + 2x^2 + 3x^2 + x^3 + x^2) = e^x(x^3 + 6x^2 + 6x)$

Câu 3:

a) $\int (3x^2 - 2x + 5)dx = x^3 - x^2 + 5x + C$

b) $\int x \sin x dx$. Đặt $u = x, dv = \sin x dx$
 $\Rightarrow du = dx, v = -\cos x$
 $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$

Câu 4:

$f(x) = e^x, f(0) = 1$

$f'(x) = e^x, f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x, f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^x, f'''(0) = 1$

Công thức Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Câu 5:Hàm $f(x) = x$ là hàm lẻ trên $(-\pi, \pi)$, nên $a_0 = 0$ và $a_n = 0$ với mọi n .

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$

Tích phân từng phần:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx) dx \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-\pi \cos(n\pi)}{n} = \frac{-2 \cos(n\pi)}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Vậy chuỗi Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \dots$$

6.3 Đề thi thử số 2

Câu 1 (2 điểm): Giới hạn

Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (0.5 điểm)
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (0.5 điểm)
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ (0.5 điểm)
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ (0.5 điểm)

Câu 2 (2 điểm): Đạo hàm bậc cao

Cho hàm số $y = \sin(2x)$. Tính:

- a) $y'(x)$ (0.5 điểm)
- b) $y''(x)$ (0.5 điểm)
- c) $y'''(x)$ (0.5 điểm)
- d) $y^{(4)}(x)$ (0.5 điểm)

Câu 3 (2 điểm): Tích phân

Tính các tích phân sau:

- a) $\int x^2 e^x dx$ (1 điểm)
- b) $\int_0^\pi \sin^2 x dx$ (1 điểm)

Câu 4 (2 điểm): Khai triển Taylor

Khai triển hàm số $f(x) = \ln(1+x)$ theo công thức Maclaurin đến cấp 4.

Câu 5 (2 điểm): Fourier

Tìm các hệ số a_0, a_1, b_1 trong khai triển Fourier của hàm số $f(x) = |x|$ trên khoảng $(-\pi, \pi)$.

6.4 Đáp án đề thi thử số 2

Câu 1:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{4(x/2)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x/2}\right]^2 = e^2$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (giới hạn cơ bản)

Câu 2:

- a) $y' = 2 \cos(2x)$
- b) $y'' = -4 \sin(2x)$

c) $y''' = -8 \cos(2x)$

d) $y^{(4)} = 16 \sin(2x)$

Câu 3:a) $\int x^2 e^x dx$. Tích phân từng phần hai lần:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C \end{aligned}$$

b) $\int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

Câu 4:

$f(x) = \ln(1+x), f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}, f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, f''(0) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, f'''(0) = 2$

$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, f^{(4)}(0) = -6$

Công thức Maclaurin:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^5)$$

Câu 5:Hàm $f(x) = |x|$ là hàm chẵn, nên $b_n = 0$ với mọi n .

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x dx$

Tích phân từng phần:

$$a_1 = \frac{2}{\pi} [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi} [0 - (-\cos x)]_0^\pi = \frac{2}{\pi} [-((-1) - 1)] = \frac{4}{\pi}$$

$b_1 = 0$ (do hàm chẵn)