Bachelier模型报告

华泰长城资本管理公司—吕麦多

1. 模型假设

假设标的资产价格为S，股息派发率q，波动率为常数， 是标准布朗运动，无风险利率r，标的资产满足以下随机微分方程：

在风险中性测度下，该表达式可以转化为

注意到，常规的B-S模型下，仍满足几何布朗运动，而此模型股价幂次不构成乘法群。

1. 模型定价PDE推导

采用动态对冲法，在一个很小的内对冲风险。构造以下投资组合：持有一份期权v,卖空k（未知）份股票，则投资组合价值

由Ito引理展开，有

取 , 记为, 即为标准B-S Greek。

由无套利假设，该投资组合收益率为无风险证券收益率

即

记为Bachelier方程

1. PDE与鞅的关系:

假设S连续股息派发，股息派发率为常数q，则Bachelier方程

成立的充要条件是在风险中性测度Q下为鞅(martingale)，则

证明:

由Ito引理，

由表达式知引理显然成立

1. 非路径依赖型衍生品定价公式
2. 到期日股价解析解

对于非路径依赖型衍生品，定价仅取决于到期日股价,设敲定价为K.

由Bachelier的SDE表达式结合伊藤引理的积分形式，令,有

由ito等距，上式等价于

注意到这是一个正态分布

均值

方差可以通过ito等距公式计算，

更进一步，股价等价于以下表达式：

时，由L-Hospital法则方程退化为

1. 欧式香草看涨期权定价公式

=

其中,为标准正态分布的CDF

从解的结构来看，该式分为的部分与E的部分，可以直接得到另外两类期权的定价结构：

敲定价为E，未来支付为的欧式看涨期权(记为股价期权)价格为

敲定价为E，未来支付为的欧式看涨期权(Binary)价格为

1. 欧式香草看跌期权定价公式

期权平价公式(put-call parity) 不依赖于股价模型假设，同样适用于此处，直接可得欧式看跌期权定价公式

假设股票连续股息派发，派发率为q，对于欧式香草期权有以下平价公式：

得到以下香草看跌期权公式：

对于欧式Binary期权有以下平价公式：

得到以下Binary看跌期权公式：

对于欧式股价期权有以下平价公式：

得到以下股价看跌期权公式：

1. Greeks 见程序
2. q=0的特殊情况

股价满足以下随机微分方程：

解股价SDE得

均值,标准差,

满足偏微分方程

得到以下定价公式：

香草看涨期权

二元看涨期权

香草看跌期权

二元看跌期权

1. r=q的特殊情况

均值,标准差

满足偏微分方程

得到以下定价公式：

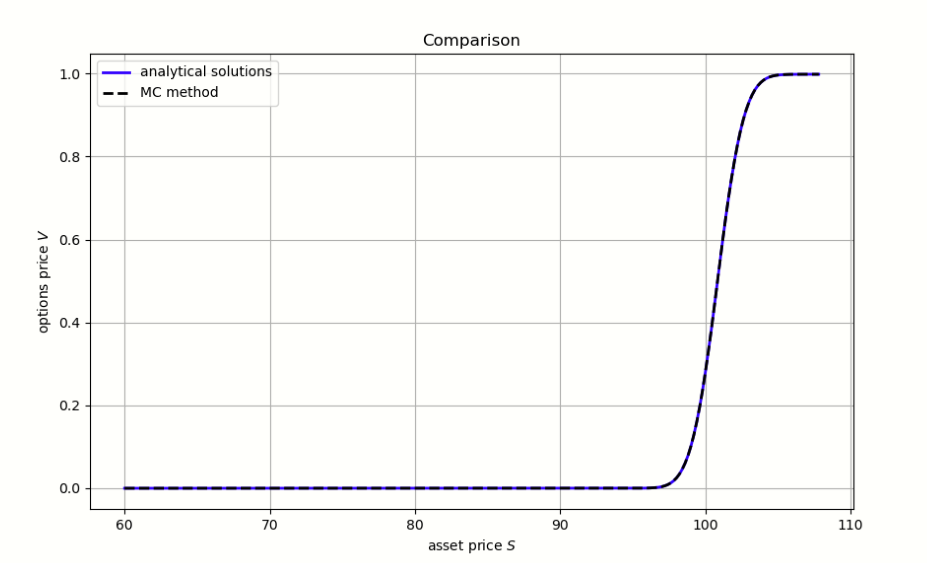
香草看涨期权

二元看涨期权

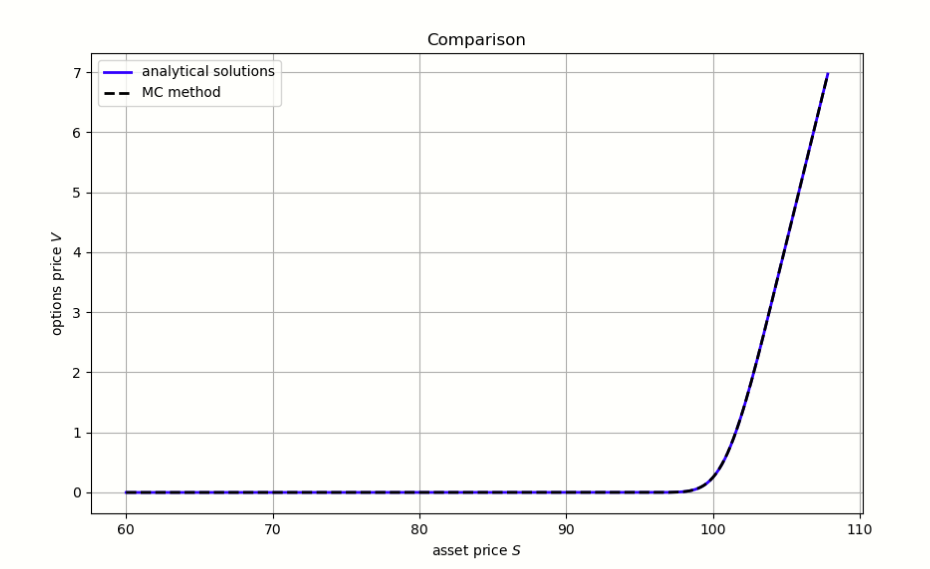
香草看跌期权

二元看跌期权

1. 解析解和MC方法验证



二元看涨期权



香草看涨期权

参数：option\_type='C',spot=S,strike=101,r=0.02,val\_date=1,end\_date=1/12,vol=5

二者结果几乎相等。

1. 路径依赖型衍生品定价公式

本部分讨论Barrier期权，以向上敲入看涨期权为例,敲入价为B，行权价为E，支付函数为以下表达式：

1. PDE解法：

注意到，如果存在,使得，此时该期权退化为0,已经有解析表达式。这为我们提供了一个边界条件

其他情况，仍然满足Bachelier方程

与边界条件

1. SDE解法：

在用MC方法模拟时，只需要用一个Bool值标记是否最大值超过障碍，其他部分与前述类似。

1. r=q的特殊情况下一些Barrier期权的解析解

为记号简便，我们将方程改写为以下形式：

这是标准布朗运动，我们先考虑向上敲出看涨期权

记，有

有以下引理：

同分布于

因此密度函数

记,

原式

=

=

=

经计算

整理即得Barrier期权在r=q时的解析表达式。

1. 加密网格相关理论

本部分考虑向上敲出看涨期权，主要参考Pricing Financial Instruments: The Finite Difference Method ( Domingo Tavella, Curt Randall ) Chapter 5

假设无股息派发，即q=0。我们希望在障碍点附近加密。考虑对股价S做逆变换S=S(u)，u满足一定的性质，使得

u下的均匀网格即为S下的不均匀网格。

在该变换下，假设，带入Bachelier方程，经计算有

令 ,设该方程简化为

为了方便考虑边界条件的一致性，我们要求

由此转化后的方程依然满足边界条件

只需要将原有的BS框架下的求解代码重新规定系数即可求解。

为实现加密效果，规定

其中是可以自行调整的参数。

A由程序解使得满足和两个边界条件

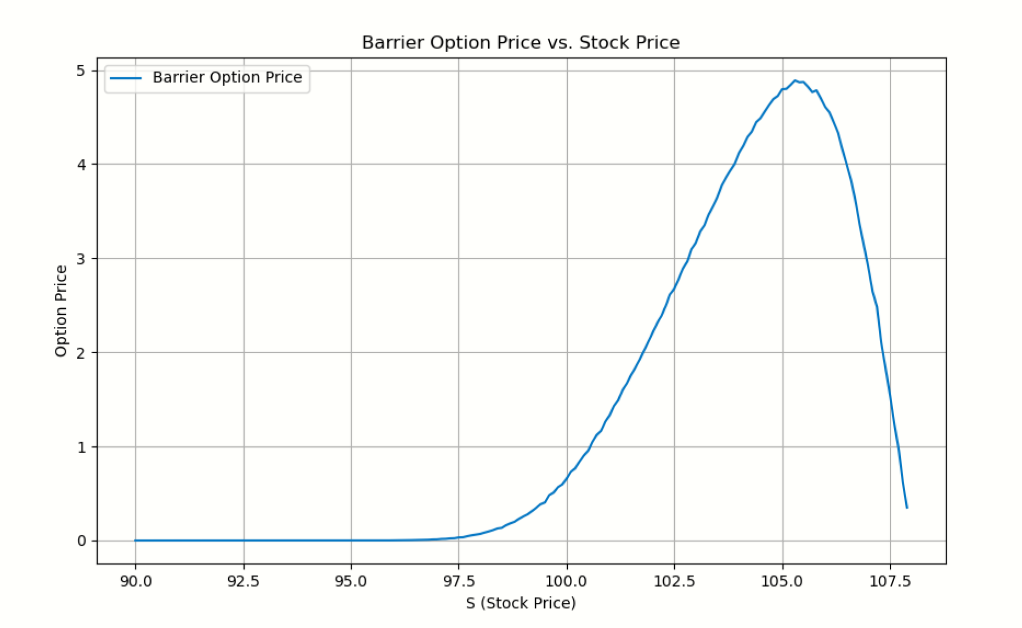
由此方程系数和可以完全求出，退化为类似的抛物型PDE解法。

1. 蒙卡、均匀网格与不均匀网格的求解对比

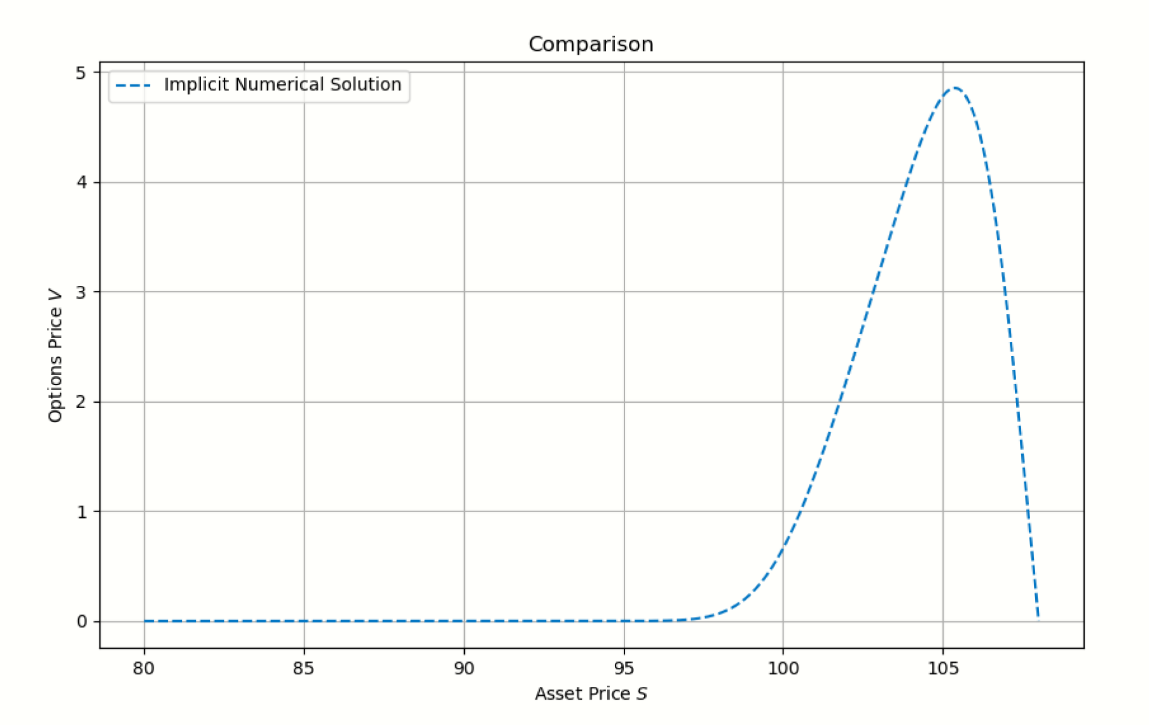
选择以下参数：

执行价K=100，到期时间T=1/12，障碍价B=108，无风险利率r=0.02, 波动率v=500%

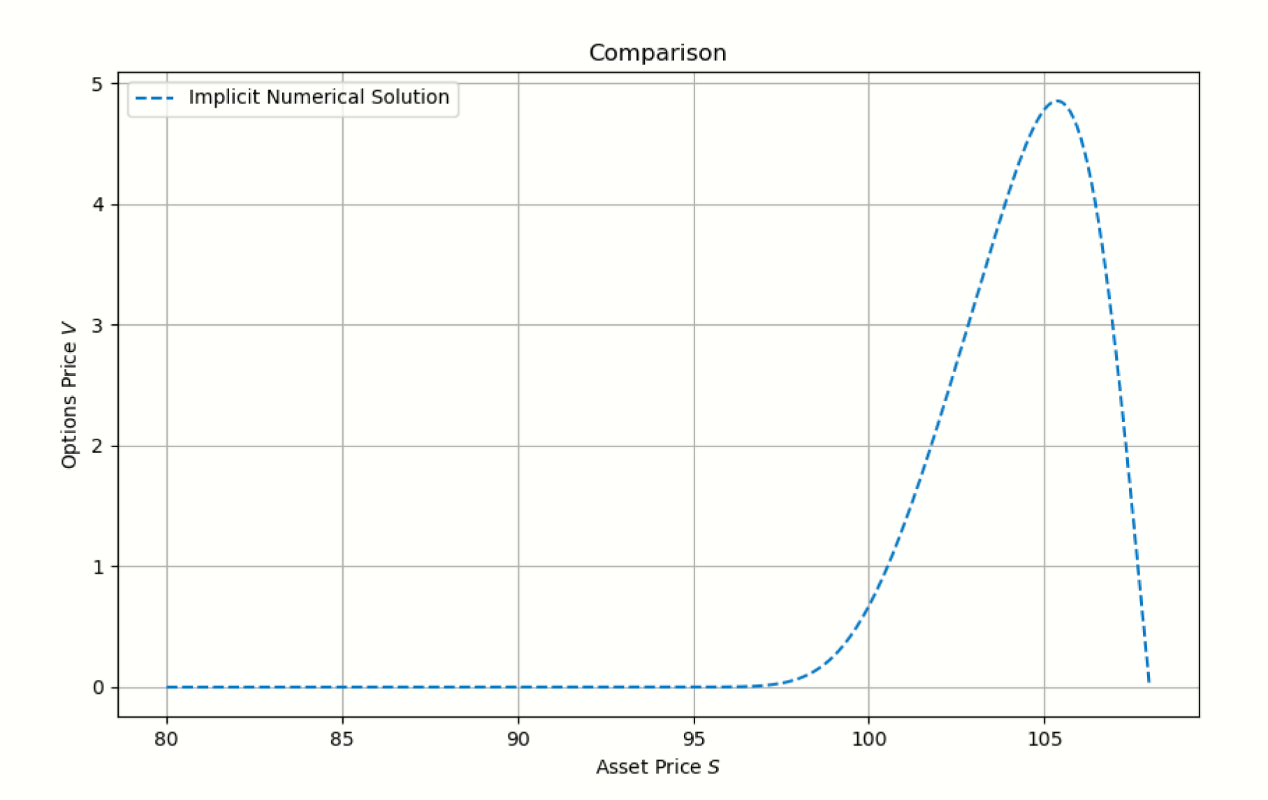
蒙特卡洛模拟：对于90至108每隔0.1单位模拟一次，模拟数量M=10000，时间间隔N=2000，得到以下结果：



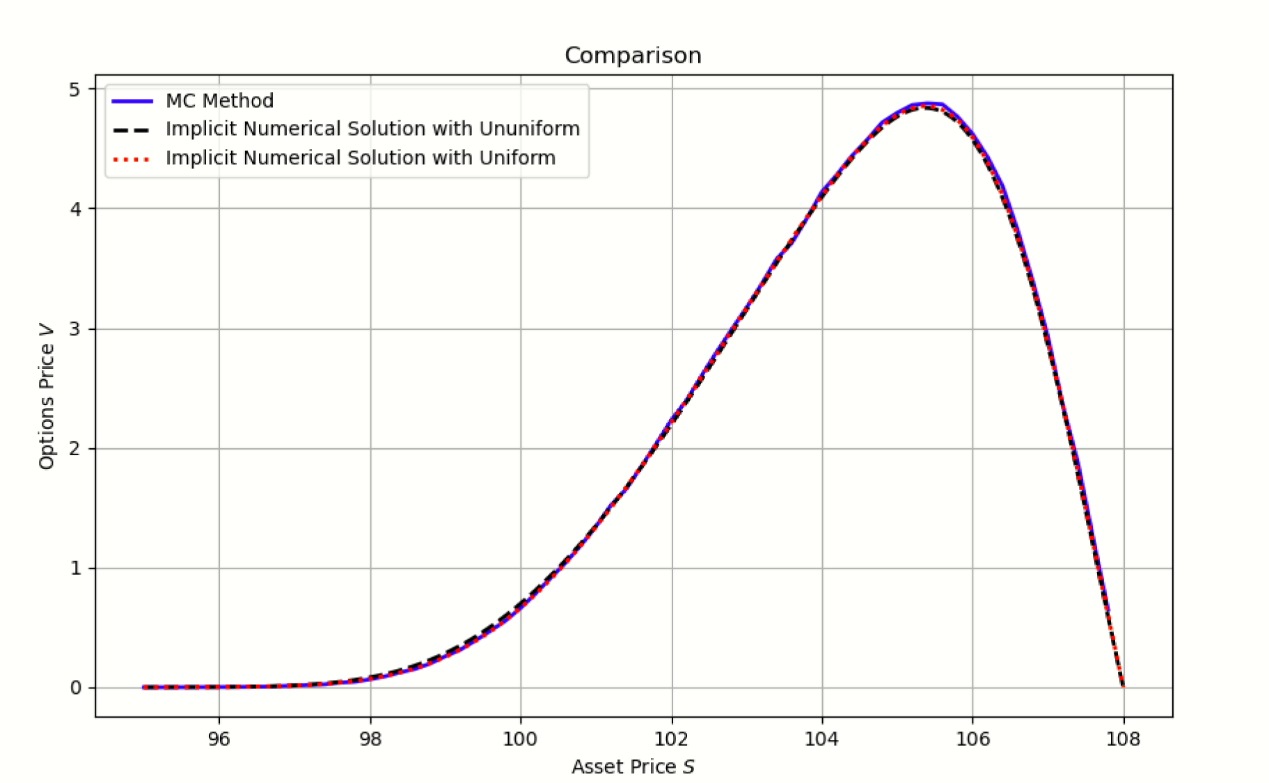
对于均匀网格，资产划分数s\_steps=2000,时间划分数t\_steps=1000，得到以下结果：



对于不均匀网格，，资产划分数s\_steps=2000,时间划分数t\_steps=1000，得到以下结果：



三者放到同一坐标系下：



在此模型下，三个方法定价结果类似。