信号与系统的基本概念

程维文

Institute of Signal Processing & Transmission

August 28, 2022

信号与系统的基本概念

- 信号分析
  - 核心是信号分解
  - 研究信号的表示、性质和特征
- 系统分析
  - 给定系统，已知输入，求输出
  - 研究系统的特征和功能
- 信号分析与系统分析是一个统一的整体
  - 从信号传输的角度来看：信号通过系统时，在系统的传递特性作用下，信号的时间特性和频率特性会发生相应的变化，从而变成了新的信号
  - 从系统响应的角度来看：系统的主要作用是对信号进行处理与传输。在输入信号的激励下，系统必然会作出相应的反响，其外在的表现形式就是会有一个对应的输出
  - 从数学的角度来看：时域分析中信号与系统的特性都可以表示为时间的函数，对它们也都可以用变换域的方法进行分析，只不过是各自变换域函数的物理意义不同而已

信号的定义与描述

- 信号：传递信息的载体，变化的物理量. (校园铃声、交通指示灯、烽火等). 可以用数学语言来定量描述（函数）.

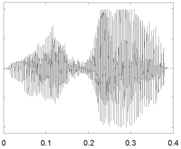


Figure: 语音信号“你好”的波形

Figure: 静止的单色图象：灰度随空间位置变化的信号 $f(x, y)$

Figure: 静止的彩色图象：RGB 随空间位置变化的信号 $I(x,y) = \begin{pmatrix} I_R(x,y) \\ I_G(x,y) \\ I_B(x,y) \end{pmatrix}$

信号的定义与描述

- 信号、信息、消息

  ✠ 信号 (Signal): 传递信息的载体，变化的物理量

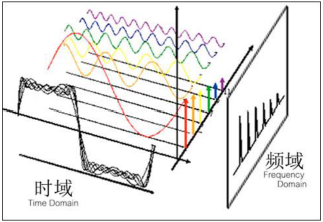
  ✠ 消息 (Message): 语言、文字、图像、数据等

  ✠ 信息 (Information): 消息中包含有一定数量的信息(获取的内容)

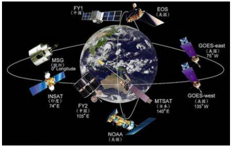
信号是消息的载体，是通信传输的对象.

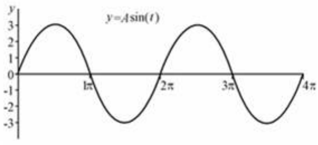
信号的定义与描述

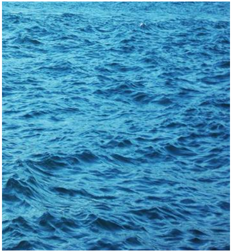
- 信号的特性
  - 时间特性：出现时间的先后、持续时间的长短、重复周期的大小、随时间变化的快慢等。（信号可以表示为时间 t 的函数）
  - 频率特性：各频率分量的相对大小、主要频率分量占有的范围等。（信号可以分解为许多不同频率的正弦分量）



- 确定信号和随机信号：
  - 确定信号：可以表示为时间 t 的确定函数，例如校园铃声、LC 振荡电路中的电流等具有固定规律的物理量.



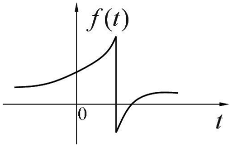




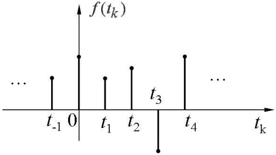
  - 随机信号：无法表示为时间 t 的确定函数，例如噪声、台风、放射性原子的衰变等，课堂上的嘈杂声?.

- 连续时间信号和离散时间信号；

连续时间信号：除若干个不连续点外，其它时刻都有定义，通常用函数 $f(t)$ 表示

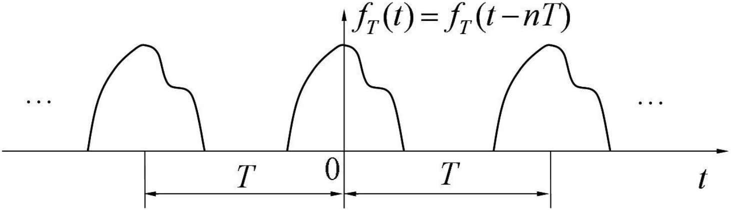


离散时间信号：仅在离散时刻有定义，通常用 $f(t_k)$, $f(k)$, $f(kT)$ 表示

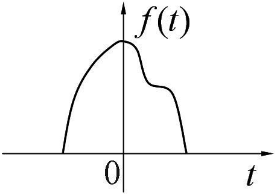


信号的分类

- 周期信号和非周期信号：
  - 周期信号：每隔一定时间重复出现且无始无终



  - 非周期信号：可看作周期趋于无穷大时的周期信号)



周期信号

周期信号的一般表达式

$$f(t) = f(t - nT), n \in Z \tag{1}$$

这里 T 为该信号的周期，是满足上式的最小非零正值。$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$，为该信号的角频率。

周期分别为 T_1, T_2 的两个周期信号相加，当 T_1, T_2 之间存在最小公倍数 T 时，所得到的信号仍然为周期信号，且其周期为 T。

即 $T = n_1T_1 = n_2T_2$，其中 n_1 和 n_2 为整数，或者说 n_2/n_1为有理数。

例

例：判断下列信号是否为周期信号，如果是周期信号，试计算其周期。

(1)$f_1(t) = 2 + 3\cos(\frac{2}{3}t + \theta_1) + 5\cos(\frac{7}{6}t + \theta_2)$
解：$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{7}{4}$, $f_1(t)$ 为周期信号，其周期 T 是 T_1, T_2 的最小公倍数12π

(2)$f_2(t) = 2\cos(2t + \theta_1) + 5\sin(\pi t + \theta_2)$
解：$T_1 = \pi$, $T_2 = 2$, $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2}$ 为无理数， $f_2(t)$不是周期信号.

(3)$f_3(t) = 3\cos(3\sqrt{2}t + \theta_1) + 7\cos(6\sqrt{2}t + \theta_2)$
解：$T_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{2}}$, $T_2 = \frac{2\pi}{6\sqrt{2}}$, $\frac{T_1}{T_2} = 2$ 为有理数， $f_3(t)$ 是周期信号. 周期为 $\frac{2\pi}{3\sqrt{2}}$

正弦序列的周期性

- 正弦序列信号：$x(k) = A\sin(\Omega_0 k + \varphi)$, $\Omega_0 = \omega_0 T$
- 余弦序列信号：$x(k) = A\cos(\Omega_0 k + \varphi)$, $\Omega_0 = \omega_0 T$

正弦序列不一定是周期序列, 必须满足周期信号的定义： $(f(k+N) = f(k))$

- 当 $\frac{2\pi}{\Omega_0} = N$是正整数时，正弦序列为周期序列，且周期为 N 。
- 当 $\frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{N}{m}$是有理数，正弦序列为周期序列，且周期为 $N = m\frac{2\pi}{\Omega_0}$
- 当 $\frac{2\pi}{\Omega_0}$是无理数时，正弦序列为非周期序列

能量信号、功率信号和非能量非功率信号

- 信号的能量：设信号电压或电流为 $f(t)$,它在 1Ω 的电阻上的瞬时功率为 $|f(t)|^2$, 在时间区间 $(-\infty,\infty)$ 内消耗的总能量定义为：

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt \tag{2}$$

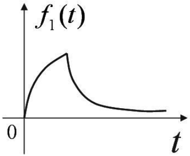
- 信号的平均功率：

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt \tag{3}$$

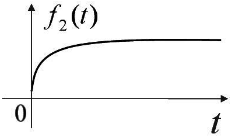
  - 能量信号： $0<E<\infty$, 此时 $P=0$;
  - 功率信号： $0<P<\infty$, 此时 $E\to\infty$;
  - 非能量非功率信号

典型的能量信号、功率信号和非能量非功率信号

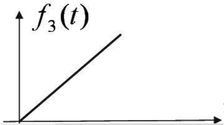
能量信号



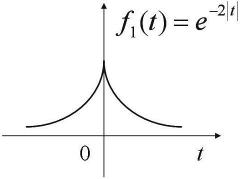
功率信号



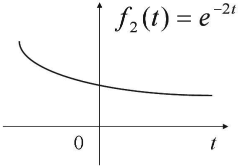
非能量非功率信号



例：判断下列信号是否为功率信号或能量信号



,



解：对信号 $f_1(t)$，有
$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} (e^{-2|t|})^2 dt = 1/2$, $P = 0$, 能量信号.
对信号 $f_2(t)$，有
$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} (e^{-2t})^2 dt = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{4}[e^{-4T} - e^{4T}] = \infty$,
$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E = \infty$
非能量非功率信号
一般来说，周期信号是功率信号，其平均功率可以在一个周期内计算。属于能量信号的非周期信号称为脉冲信号，它在有限时间范围内有一定的数值，而当$t \to \infty$ 时，数值为零；属于功率信号的非周期信号是当$|t| \to \infty$ 时仍然为有限值的一类信号.

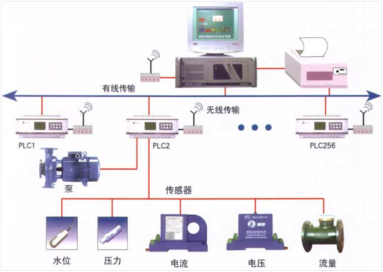
系统的基本概念

系统是由若干个互相关联的单元组成的具有一定功能的有机整体

- 系统、子系统、单元、元件
- 连接方式;
- 输入（激励）、输出（响应）

例如下面两个典型系统;

景区电子票务系统



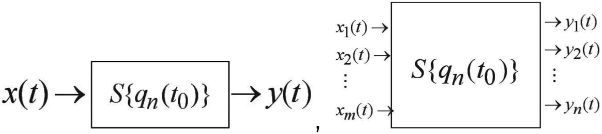
水厂自动供水监控系统

系统的数学模型

系统的模型是实际系统的近似化和理想化。一般来说，系统输入和输出之间的关系常用微分方程表示：

$$
\begin{aligned}
& a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\
&= b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 x'(t) + b_0 x(t) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

也可以用一个方框图表示系统



分别对应单输入-单输出系统和多输入-多输出系统, 在本课程中我们重点关注单输入-单输出系统。

系统的分类

- 连续时间系统与离散时间系统
- 线性系统和非线性系统；
  线性特性：是指齐次性和叠加性
  - 齐次性：
    若$x(t) \to y(t)$，则
    $kx(t) \to ky(t)$
  - 叠加性：
    若$x_1(t) \to y_1(t)$，$x_2(t) \to y_2(t)$ 则
    $x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$

  线性系统:
  若$x_1(t) \to y_1(t)$，$x_2(t) \to y_2(t)$ 则
  $k_1x_1(t) + k_2x_2(t) \to k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$

对于具有初始状态的系统，线性系统应当具有下列特性

- 分解性
  全响应＝零输入响应＋零状态响应
- 零输入响应，系统有多个初始状态时，零输入响应对每个初始状态呈线性
- 零状态线性，系统有多个输入时，零状态响应对每个输入呈线性。

例：已知某零状态系统激励与响应的关系为$y(t)=3x(t)+2$，是判断该系统是否为线性系统

解：设$x_1(t)\to y_1(t)=3x_1(t)+2$，$x_2(t)\to y_2(t)=3x_2(t)+2$
则：当$x_\alpha(t)=k_1x_1(t)+k_2x_2(t)$ 时，

$$y_\alpha(t)=3x_\alpha(t)+2=3[k_1x_1(t)+k_2x_2(t)]+2\neq k_1y_1(t)+k_2y_2(t)=k_1[3x_1(t)+2]+k_2[3x_2(t)+2]$$

不满足线性系统的条件，所以该系统是非线性的
实际上，该系统既不满足齐次性又不满足叠加性

$y(t)=q^2(0)+x^2(t)$ (零输入响应和零状态响应都不满足线性)

$y(t)=3q(0)logx(t)$ (因为不具有分解性)

$y(t)=q(0)\sin t+tx(t)$ (线性系统)

例：某系统由下列微分方程描述，是判断该系统是否为线性系统

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) + 5 = x(t), t > 0$$

解：设有两个输入$x_1(t)$，$x_2(t)$ 分别激励系统，它们的输出分别为$y_1(t)$，$y_2(t)$，有，

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + 10y_1(t) + 5 = x_1(t), t > 0$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + 10y_2(t) + 5 = x_2(t), t > 0$$

若系统为线性系统，则，当$x_1(t)$，$x_2(t)$ 同时激励系统时，其描述系统的方程为上述之和，

$$\frac{d[y_1(t) + y_2(t)]}{dt} + 10[y_1(t) + y_2(t)] + 10 = x_1(t) + x_2(t), t > 0$$

该市显然与描述系统的原方程不同，或者说，该系统不满足叠加性。因此，系统为非线性系统。

例： 某线性系统，已知输入 $x(t)=\mu(t)$，初始状态 $q_1(0)=1$，$q_2(0)=2$ 时， 输出 $y(t)=6e^{-2t}-5e^{-3t}$. 若初始状态不变，$x(t)=3\mu(t)$ 时，$y(t)=8e^{-2t}-7e^{-3t}$.

(1) 求 $x(t)=0$，$q_1(0)=1$，$q_2(0)=2$ 时，$y(t)=?$

(2) 求 $x(t)=2\mu(t)$，$q_1(0)=0$，$q_2(0)=0$ 时，$y(t)=?$

解：该系统含有初始状态，所以响应要分解成零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$： $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$. 设

$$y(t)=f(q_1(0),q_2(0))+g(x(t))$$

$f(q_1(0),q_2(0))$ 表示零输入响应 $y_{zi}(t)$，$g(x(t))$ 表示零状态响应 $y_{zs}(t)$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= f(q_1(0)=1,q_2(0)=2)+g(\varepsilon(t)) \\ &= 6e^{-2t}-5e^{-3t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= f(q_1(0)=1,q_2(0)=2)+g(3\varepsilon(t)) \\ &= f(q_1(0)=1,q_2(0)=2)+3g(\varepsilon(t)) \\ &= 8e^{-2t}-7e^{-3t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= f(q_1(0)=1, q_2(0)=2) + g(\varepsilon(t)) \\ &= 6e^{-2t} - 5e^{-3t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= f(q_1(0)=1, q_2(0)=2) + g(3\varepsilon(t)) \\ &= f(q_1(0)=1, q_2(0)=2) + 3g(\varepsilon(t)) \\ &= 8e^{-2t} - 7e^{-3t} \end{aligned}$$

得出，

$$\begin{aligned} y_{zi}(t) &= f(q_1(0)=1, q_2(0)=2) = 5e^{-2t} - 4e^{-3t} \\ y_{zs}(t) &= g(x(t)) = g(\varepsilon(t)) = e^{-2t} - e^{-3t} \end{aligned}$$

(1)$x(t)=0$, $q_1(0)=1, q_2(0)=2$ 时，系统响应为零输入响应，
$y_{zi}(t) = f(q_1(0)=1, q_2(0)=2) = 5e^{-2t} - 4e^{-3t}$.
(2) $x(t)=2\varepsilon(t)$, $q_1(0)=0, q_2(0)=0$ 时，零输入响应为零，
$y_{zi}(t) = f(q_1(0)=0, q_2(0)=0) = 0$, 而零状态响应为，

$$y_{zs} = g(x(t)) = g(2\varepsilon(t)) = 2g(\varepsilon(t)) = 2e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

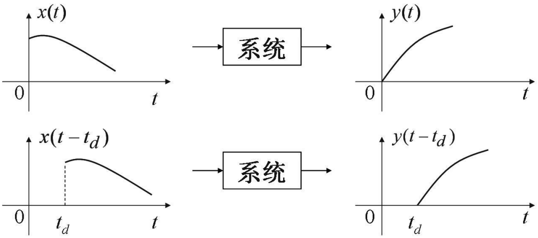
时不变和时变系统

时不变系统：系统零状态响应的特性不随时间的变化而改变，实际上是指系统的参数不随时间的推移而改变。数学语言为: 若

$$x(t) \to y(t)$$

则

$$x(t-t_d) \to y(t-t_d)$$



例：试判别下列系统是否为时不变系统

$$y(t) = tx(t), y(t) = \sin[x(t)]$$

解：$x(t) \to y(t) = tx(t)$

若$x_1(t) = x(t-t_d) \to y_1(t) = tx_1(t) = tx(t-t_d) \neq y(t-t_d) = (t-t_d)x(t-t_d)$

故为时变系统.

$x(t) \to y(t) = \sin[x(t)]$

若$x_1(t) = x(t-t_d) \to y_1(t) = \sin[x_1(t)] = \sin[(t-t_d) \quad = y(t-t_d) = \sin[x(t-t_d)]$

故为时不变系统.

系统的线性与时不变性是两个不同的概念，上面所说的是两种不同的分类方法，线性系统可以是时不变的，也可以是时变的；非线性系统也是如此。本课程只讨论线性时不变(LTI)系统，简称线性系统。描述线性时不变连续系统的数学模型是常系数线性微分方程，描述线性时不变离散系统的数学模型是常系数线性差分方程

因果系统和非因果系统

因果系统：是指响应不会超前于激励的系统，没有输入就没有输出。任何时刻的响应只取决于激励的现在与过去值，而与激励的将来值无关。如：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

实际系统都是因果系统，非因果系统不是真实系统，而是一种理想的系统。
例如，假设系统的数学模型为：

$$y(t) = x(t-1) + x(1-t)$$

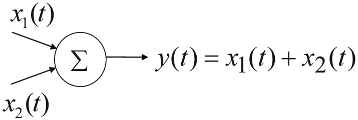
令$t = 0$. 则$y(0) = x(-1) + x(1)$
这也是一种非因果系统

连续系统的模拟

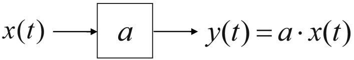
系统的模拟不是对系统的仿制，而是数学意义上的等效，是模拟系统与实际系统具有相同的的数学模型

基本运算器

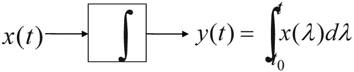
- 加法器



- 标量乘法器



- 积分器



连续系统的模拟图

根据微分方程（时域）绘模拟图

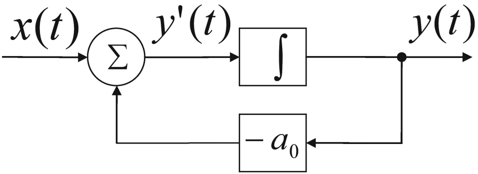
- 一阶系统的模拟，一阶系统的数学模型为

$$y'(t) + a_0 y(t) = x(t)$$

改写为

$$y'(t) = x(t) - a_0 y(t)$$

画系统的模拟图



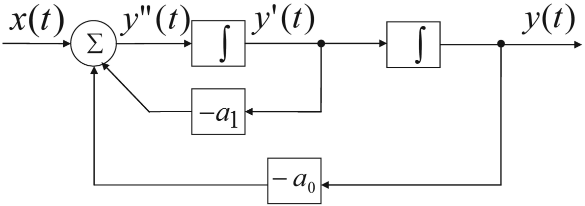
- 二阶系统的模拟，二阶系统的数学模型为

$$y^{''} + a_1 y^{'}(t) + a_0 y(t) = x(t)$$

改写为

$$y^{''}(t) = x(t) - a_1 y^{'}(t) - a_0 y(t)$$

画系统的模拟图



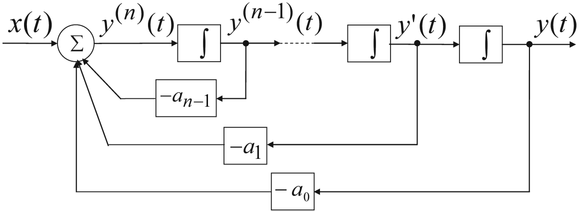
- n阶系统的模拟, n阶系统的数学模型为

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=x(t)$$

改写为

$$y^{(n)}(t)=x(t)-a_{n-1}y^{(n-1)}(t)-\cdots-a_1y'(t)-a_0y(t)$$

画系统的模拟图



- 一般系统的模拟，以二阶系统为例

$$y^{''} + a_1 y^{'}(t) + a_0 y(t) = b_1 x^{'}(t) + b_0 x(t)$$

假设一个新的系统,其微分方程为,

$$q^{''}(t) + a_1 q^{'}(t) + a_0 q(t) = x(t)$$

根据线性时不变系统的特性,

$$\begin{aligned} [b_0 q(t)]^{''} + a_1[b_0 q(t)]^{'} + a_0[b_0 q(t)] = b_0 x(t) \\ [b_1 q^{'}(t)]^{''} + a_1[b_1 q^{'}(t)]^{'} + a_0[b_1 q^{'}(t)] = b_1 x^{'}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

将上两式相加，对比原来方程得,

$$y(t) = b_1 q^{'} + b_0 q(t)$$

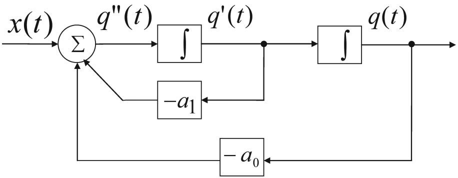
$$y^{''}+a_1y^{'}(t)+a_0y(t)=b_1x^{'}(t)+b_0x(t)$$

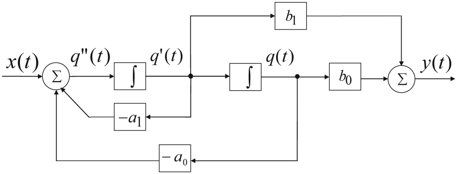
假设一个新的系统,其微分方程为,

$$q^{''}(t)+a_1q^{'}(t)+a_0q(t)=x(t)$$

$$y(t)=b_1q^{'}(t)+b_0q(t)$$

系统的模拟图





已知一个系统的微分方程如下，试画出其模拟图

$$y^3(t)+4y^{''}+10y^{'}(t)+3y(t)=x^{''}(t)+10x(t)$$

假设一个新的系统,其微分方程为,

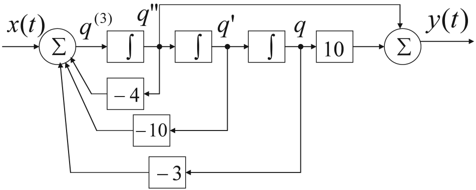
$$q^3(t)+4q^{''}+10q^{'}(t)+3q(t)=x(t)$$

$$y(t)=q^{''}(t)+10q(t)$$

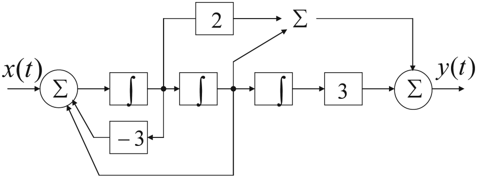
对于新的系统

$$q^3(t)=x(t)-4q^{''}-10q^{'}(t)-3q(t)$$

画系统模拟图：



已知一个系统的模拟图如下，试写出微分方程



设辅助函数$q(t)$ 如图，

$$q^3(t) + 3q^{''} - q^{'}(t) = x(t)$$

$$y(t) = 2q^{''}(t) + q^{'}(t) + 3q(t)$$

$$y^3(t) + 3y^{''} - y^{'}(t) = 2x^{''}(t) + x^{'}(t) + 3x(t)$$

本章要点

- 信号的分类能量信号、功率信号、非能量非功率信号
- 系统的分类，线性、时变性、因果性

HOMEWORK

1.1：
1-1(2,4)，1-2(1,3，5)，1-6

1.2：
1-8 (1)(2)(4)(5)(6)
1-9 (1)(2)(3)
1-11