




第二章 逻辑代数基础



逻辑代数是分析和设计数字电路的数学工具,本章讨论的内容:

1. 逻辑代数的运算、公式
2. 逻辑函数及其表达式
3. 化简逻辑函数的方法



逻辑：条件和结果之间的因果关系

逻辑代数：又称布尔代数，是描述和研究客观世界中事物间逻辑关系的数学

逻辑变量：逻辑代数中的变量

逻辑常量：逻辑代数中的常量

逻辑函数：如果逻辑变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的取值确定以后，逻辑变量 F 的取值也唯一的确定，则称 F 是 x_1, x_2, \dots, x_n 的逻辑函数。

记作：

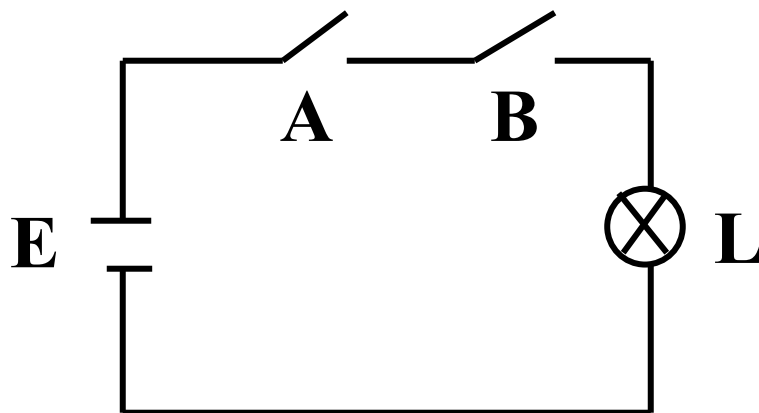
$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

逻辑函数可以用**真值表**、或**逻辑表达式**来描述

2.2 逻辑代数中的运算

2.2.1 3种基本逻辑运算

1) 与逻辑运算



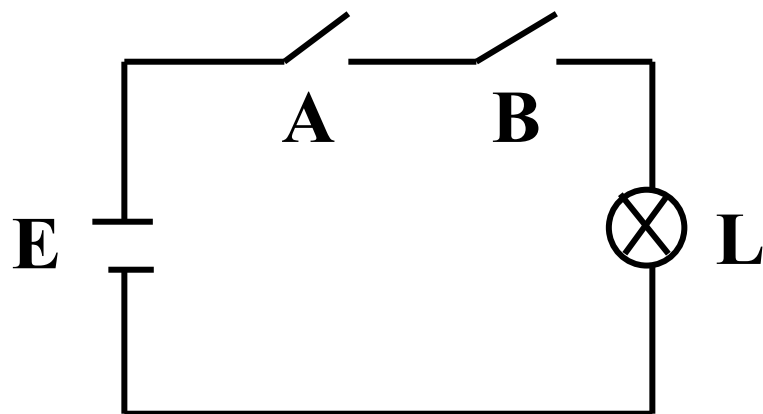
(a) 说明与逻辑的电路

设：开关 $\begin{cases} \text{打开—“0”} \\ \text{闭合—“1”} \end{cases}$ 灯 $\begin{cases} \text{灭—“0”} \\ \text{亮—“1”} \end{cases}$

2.2 逻辑代数中的运算

2.2.1 3种基本逻辑运算

1) 与逻辑运算



(a) 说明与逻辑的电路

设：开关 $\begin{cases} \text{打开—“0”} \\ \text{闭合—“1”} \end{cases}$ 灯 $\begin{cases} \text{灭—“0”} \\ \text{亮—“1”} \end{cases}$

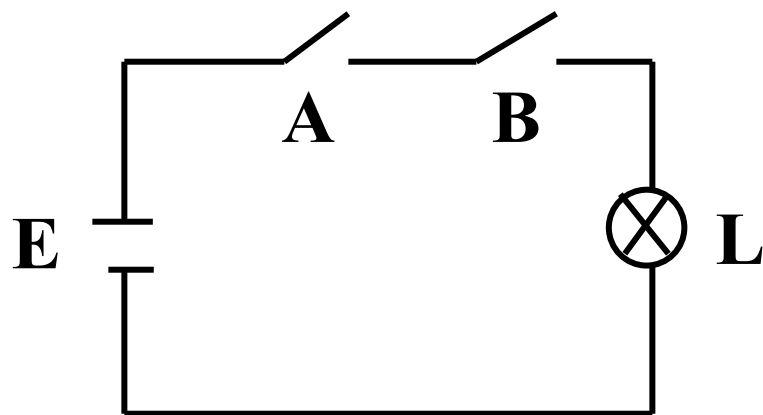
输 入		输出
A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

真值表

2.2 逻辑代数中的运算

2.2.1 3种基本逻辑运算

1) 与逻辑运算



(a) 说明与逻辑的电路

(1) 逻辑表达式: $F = A \cdot B$

(2) 算符

“ \cdot ” (或者 “ \times ”、“ \wedge ”、“ \cap ”、“AND”) 读作 “与” (或读作 “逻辑乘”)

(3) 运算规则

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

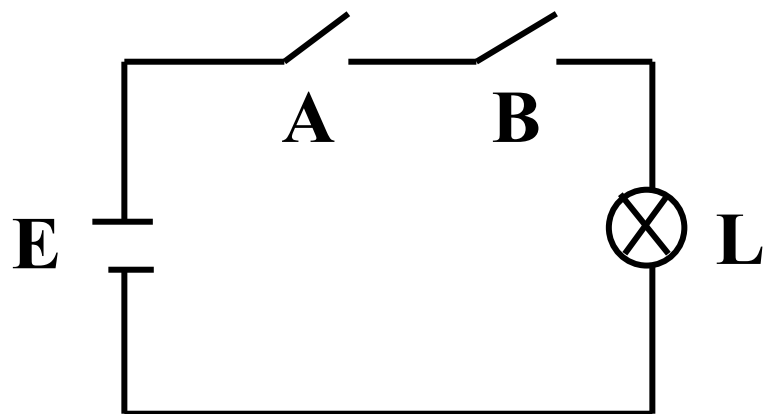
$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

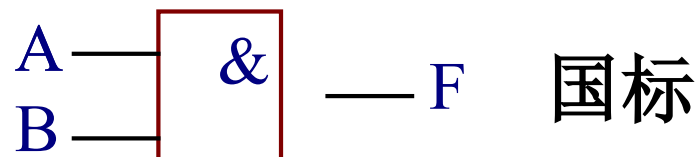
2.2 逻辑代数中的运算

2.2.1 3种基本逻辑运算

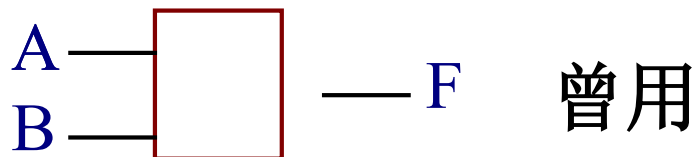
1) 与逻辑运算



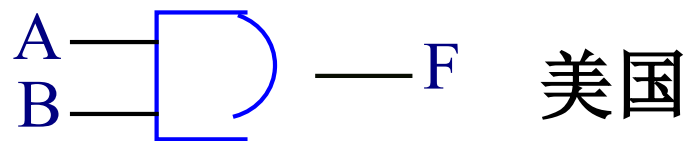
(a) 说明与逻辑的电路



国标



曾用



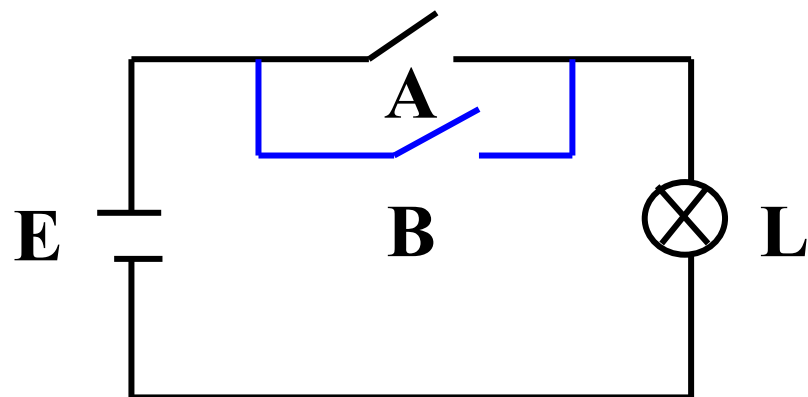
美国

逻辑符号

2.2 逻辑代数中的运算

2.2.1 3种基本逻辑运算

2) 或逻辑运算



(b) 说明或逻辑的电路

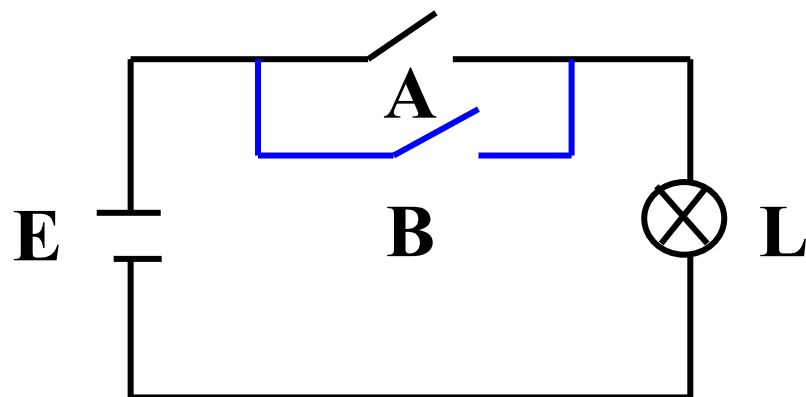
输 入		输出
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

真值表

2.2 逻辑代数中的运算

2.2.1 3种基本逻辑运算

2) 或逻辑运算



(b) 说明或逻辑的电路

(1) 逻辑表达式: $F = A + B$

(2) 算符

“+” (或者“ \vee ”、“ \cup ”、“OR”)读作“或” (或读作“逻辑加”)

(3) 运算规则

$$0 + 0 = 0$$

$$1 + 0 = 1$$

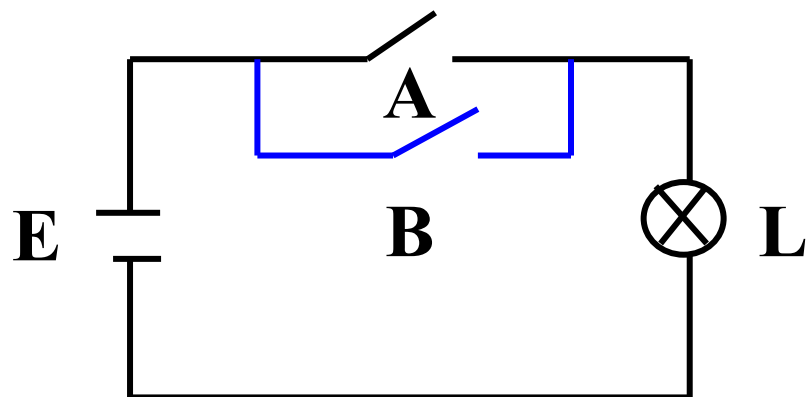
$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

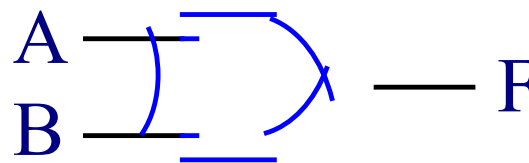
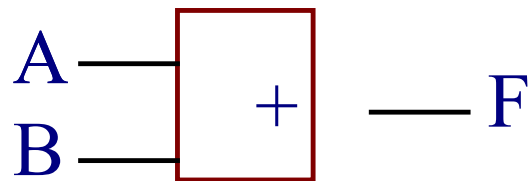
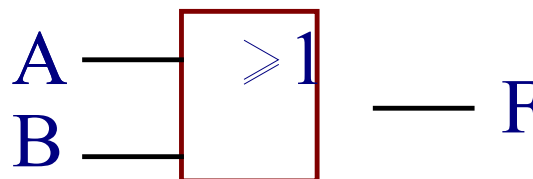
2.2 逻辑代数中的运算

2.2.1 3种基本逻辑运算

2) 或逻辑运算



(b) 说明或逻辑的电路

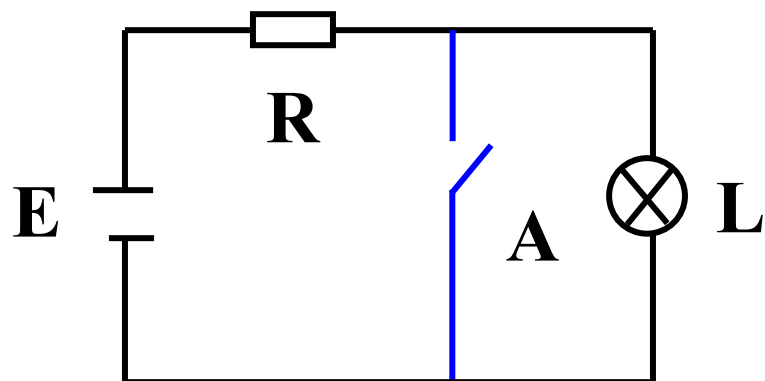


逻辑符号

2.2 逻辑代数中的运算

2.2.1 3种基本逻辑运算

3) 非逻辑运算



(c) 说明非逻辑的电路

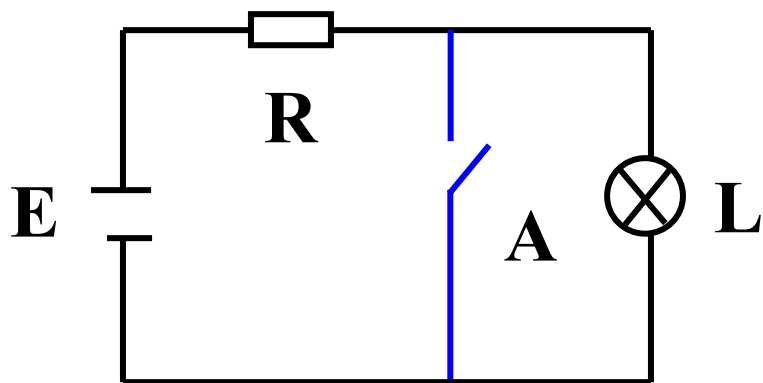
输入	输出
A	F
0	1
1	0

真值表

2.2 逻辑代数中的运算

2.2.1 3种基本逻辑运算

3) 非逻辑运算



(c) 说明非逻辑的电路

(1) 逻辑表达式: $F = \overline{A}$

(2) 算符

符号 “ $\overline{\quad}$ ” 读作 “非”

(3) 运算规则

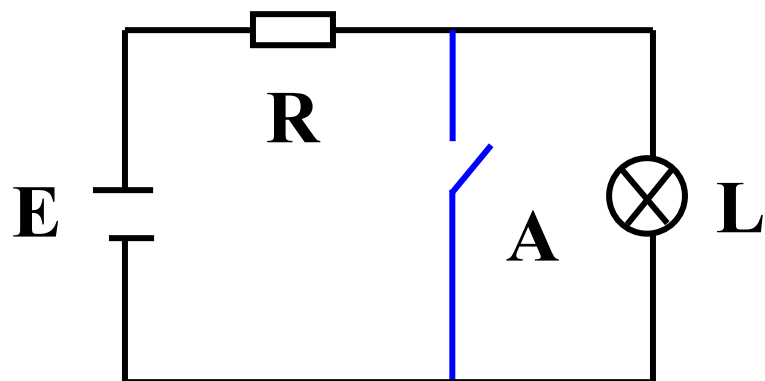
$$\overline{0} = 1$$

$$\overline{1} = 0$$

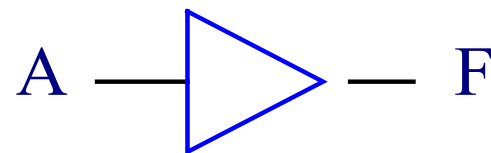
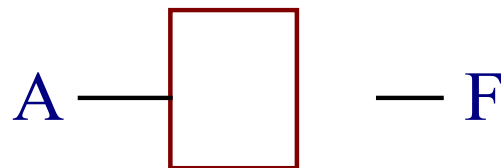
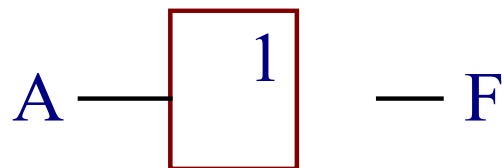
2.2 逻辑代数中的运算

2.2.1 3种基本逻辑运算

3) 非逻辑运算



(c) 说明非逻辑的电路



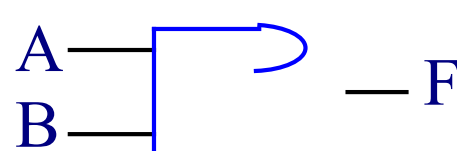
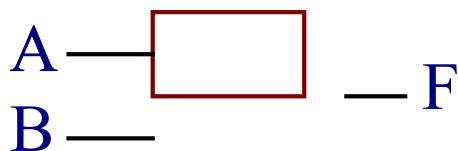
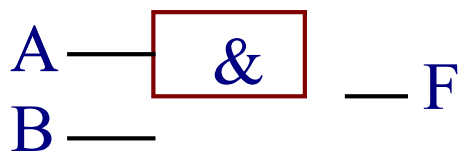
逻辑符号

2.2.2 复合逻辑运算

1) 与非运算:

(1) 逻辑表达式: $F = \overline{AB}$

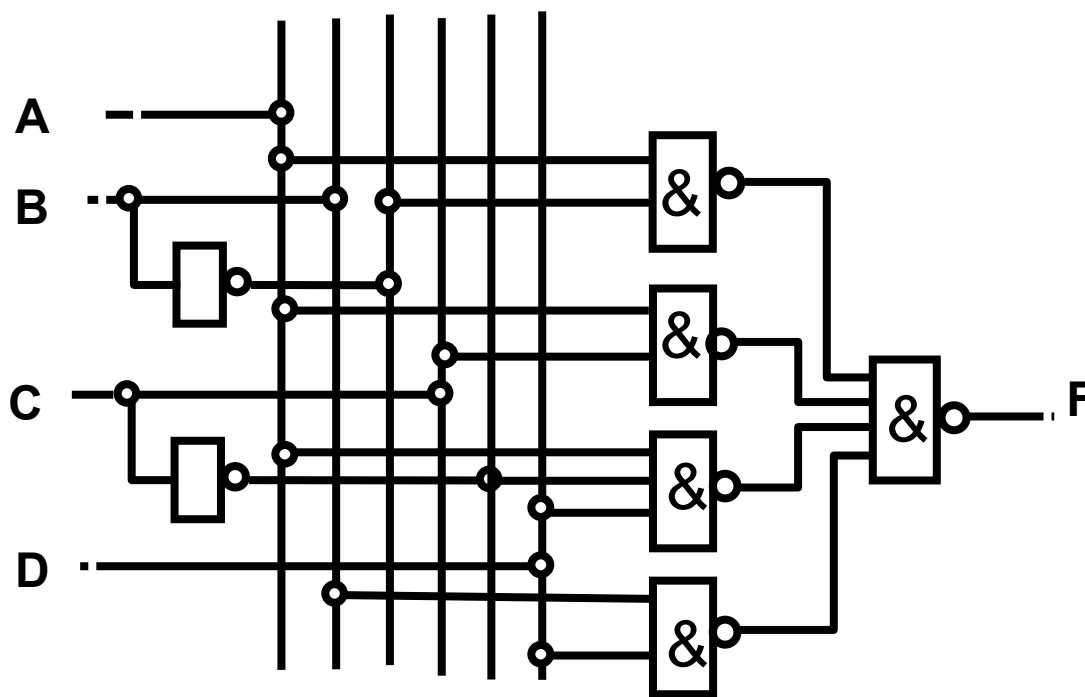
(2) 逻辑符号



2.2.2 复合逻辑运算

1) 与非运算:

$$F = \overline{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{ACD} \cdot \overline{BD}}$$

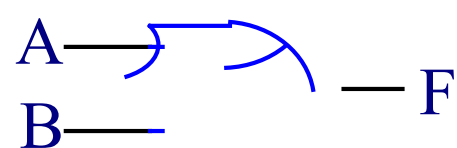
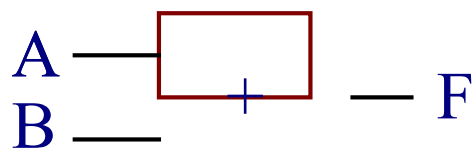
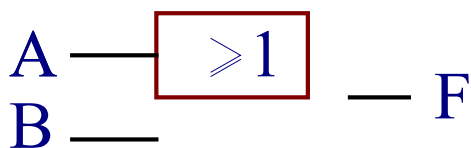


2.2.3 复合逻辑运算

2) 或非运算:

(1) 逻辑表达式: $F = \overline{A + B}$

(2) 逻辑符号



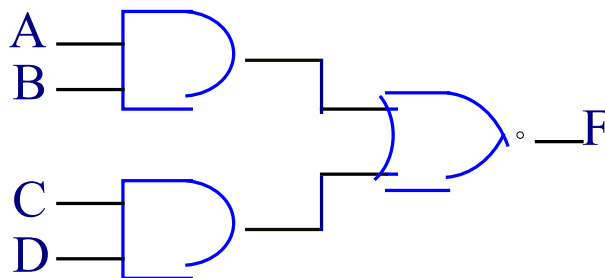
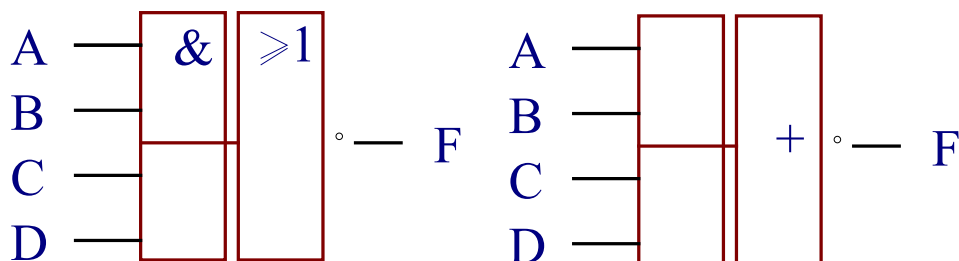
2.2.2 复合逻辑运算

3) 与或非运算:

(1) 逻辑表达式:

$$F = \overline{AB + CD}$$

(2) 逻辑符号

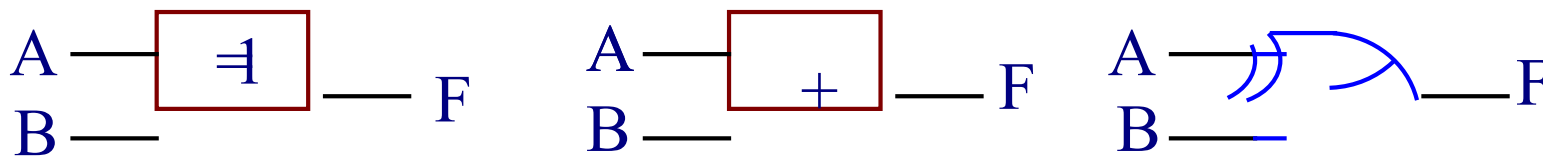


2.2.2 复合逻辑运算

4) 异或运算:

(1) 逻辑表达式: $F = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$

(2) 逻辑符号



“异或”门电路的用处:

(1) 可控的数码原/反码输出器 $A \oplus 0 = A$ $A \oplus 1 = \bar{A}$

(2) 作数码比较器

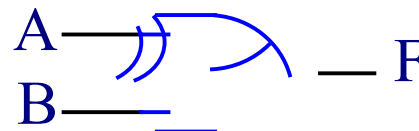
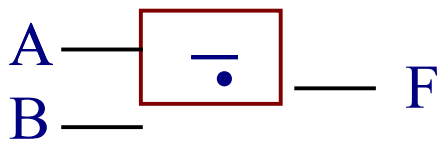
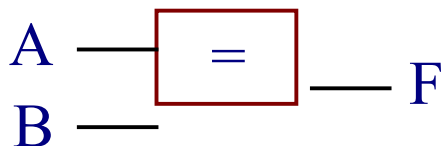
(3) 求两数码的算术和

2.2.2 复合逻辑运算

5) 同或运算:

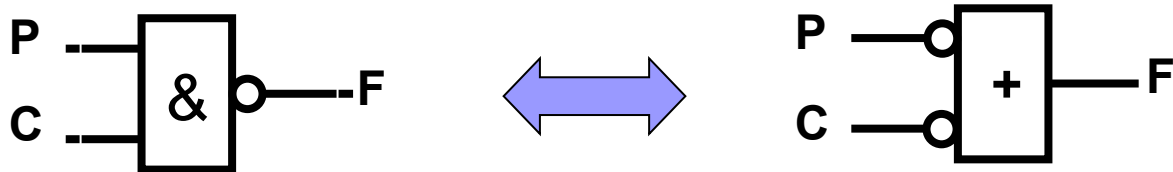
(1) 逻辑表达式: $F = A \odot B = \overline{A} \overline{B} + A B$

(2) 逻辑符号

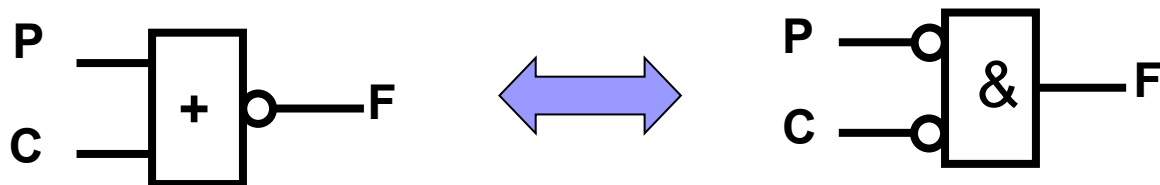


关于门电路符号的说明

先“与”后“非”和先“非”后“或”等价



先“或”后“非”和先“非”后“与”等价



2.3 逻辑代数的公式

2.3.1 基本公式

1.自等律

$$A + 0 = A$$

$$A \cdot 1 = A$$

2.吸收律

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot 0 = 0$$

3.重叠律

$$A + A = A$$

$$A \cdot A = A$$

4.互补律

$$A + \overline{A} = 1$$

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

5.还原律

$$\overline{\overline{A}} = A$$

6.交换律

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

2.3 逻辑代数的公式

2.3.1 基本公式

7.结合律

$$A + B + C$$

$$= (A + B) + C$$

$$= A + (B + C)$$

$$A \cdot B \cdot C$$

$$= (A \cdot B) \cdot C$$

$$= A \cdot (B \cdot C)$$

8.分配律

$$A \cdot (B + C)$$

$$= AB + AC$$

$$A + BC$$

$$= (A + B) \cdot (A + C)$$

9.反演律

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

基本定律的正确性可以用列真值表的方法加以证明。

2.3 逻辑代数的公式

2.3.2 异或、同或逻辑的公式

1) 异或运算、同或运算互为对偶运算
(参见课本page18)

2.3 逻辑代数的公式

2.3.2 异或、同或逻辑的公式

2) 多个变量的异或、同或间关系

(1) 偶数个变量的异或、同或互补

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n = \overline{A_1 \odot A_2 \odot \dots \odot A_n} \quad (n \text{ 为偶数})$$

(2) 奇数个变量的异或、同或相等

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n = A_1 \odot A_2 \odot \dots \odot A_n \quad (n \text{ 为奇数})$$

2.3 逻辑代数的公式

2.3.2 异或、同或逻辑的公式

3) 多个常量的异或、同或运算

(1) 异或时，起作用的是“1”的个数

$$0 \oplus 0 = 0 \quad 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$$1 \oplus 1 = 0 \quad 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

(2) 同或时，起作用的是“0”的个数

$$0 \odot 0 = 1 \quad 0 \odot 0 \odot 0 = 0$$

$$1 \odot 1 = 1 \quad 1 \odot 1 \odot 1 = 1$$

2.3 逻辑代数的公式

2.3.3 常用公式

1. 合并相邻项公式 $AB + A\bar{B} = A$

2. 消项公式 $A + AB = A$

3. 消去互补因子公式 $A + \bar{A}B = A + B$

4. 多余项（生成项）公式

$$AB + \bar{A}C + BC = AB + \bar{A}C$$

证明： $AB + \bar{A}C + BC = AB + \bar{A}C + (A + \bar{A})BC$

$$= AB + \bar{A}C + ABC + \bar{A}BC = AB + \bar{A}C$$

2.4 逻辑代数的基本规则

2.4.1 代入规则：

理论依据：任何一个逻辑函数也和任何一个逻辑变量一样，只有逻辑0和逻辑1两种取值。因此，可将逻辑函数作为一个逻辑变量对待。

利用代入规则可以扩大公式的应用范围。

2.4 逻辑代数的基本规则

2.4.2 反演规则:

F \longleftrightarrow $\overline{\overline{F}}$

\cdot \longleftrightarrow $+$

1 \longleftrightarrow 0

A \longleftrightarrow $\overline{\overline{A}}$

注意:

(1) 运用反演规则时，要注意运算的优先顺序（先括号、再相与，最后或），必要时可加或减扩号。

(2) 不属于单个变量上的非号，在变换时应保留

例1: 若 $F = \bar{A} \bar{B} + C D$,
试用反演规则求反函数 \bar{F} 。

解: $\bar{F} = (A + B) \cdot (\bar{C} + \bar{D})$

例2: 若 $F = \bar{A} + \overline{B+C} \cdot D$,
试用反演规则求反函数 \bar{F} 。

解: $\bar{F} = A \cdot \overline{\bar{B} \bar{C}} + \bar{D}$

常用关系式:

$$(1) \overline{\overline{F}} = F;$$

(2) 若 $F = G$, 则 $\overline{F} = \overline{G}$; 反之也成立。

2.4 逻辑代数的基本规则

2.4.3 对偶规则：

F		F'
·	\longleftrightarrow	+
1	\longleftrightarrow	0

注意：

运用对偶规则时，同样要注意运算的优先顺序（先括号、再相与，最后或），必要时可加或减扩号。

常用关系式:

(1) $(F')' = F;$

(2) 若 $F = G$, 则 $F' = G'$; 反之也成立。

F		$\overline{\mathbf{F}}$		F		F'
.	\longleftrightarrow	+		.	\longleftrightarrow	+
1	\longleftrightarrow	0		1	\longleftrightarrow	0
A	\longleftrightarrow	$\overline{\mathbf{A}}$				

将 \mathbf{F}' 中的变量原反互换后即可得到 $\overline{\mathbf{F}}$ ；
 将 $\overline{\mathbf{F}}$ 中的变量原反互换后即可得到 \mathbf{F}' 。

例1: 已知 $A \oplus 0 = A$, 则其对偶公式为:

$$A \odot 1 = A$$

例2: 已知 $F = A \oplus B$, 则其反函数可写为:

$$\overline{F} = \overline{A} \odot \overline{B}$$

$$\text{即 } \overline{A \oplus B} = \overline{A} \odot \overline{B}$$

与反演律 $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ 形式类似

内容回顾

- 什么是逻辑代数？有什么用？
- 逻辑代数有哪些运算？
- 逻辑代数有哪些公式？
- 逻辑代数有哪些规则？