系统的状态变量分析

W. W. Cheng

Institute of Signal Processing & Transmission

December 16, 2022

状态与状态空间

- 输入输出描述法：着眼于研究输入和输出信号之间的关系
- 状态变量描述法：研究系统一些内部变量的变化规律
- 系统状态基本概念
  - 系统的状态
    是指系统过去、现在和未来的状况，其本质是指系统的储能状态
  - 状态变量
    能够完全描述系统状态且数目最少的一组变量．常用 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$\cdots$，$x_n(t)$ 来表示．起始时刻 $t=t_0$ 的状态称为初始状态，用 $x_1(t_0)$，$x_2(t_0)$，$\cdots$，$x_n(t_0)$ 来表示．
  - 状态矢量
    一组状态变量可以用一个矢量来表示
    $\mathbf{x}(t)=[x_1(t),\ x_2(t),\cdots,\ x_n(t)]^T$

- 系统状态基本概念
  - 状态空间
    状态矢量所描述的空间，状态矢量所包含的状态变量的个数称为状态空间的维数，也称系统的复杂度阶数，简称系统的阶数
  - 状态轨迹
    状态矢量的端点随时间变化而描述的路径
- 状态变量分析法
  用状态变量来描述和分析系统的方法
  - 选定状态变量
  - 建立状态方程
    描述状态变量与激励之间关系的一阶微分或差分方程组
  - 建立输出方程
    描述输出与输入关系的一组代数方程
  - 求解状态方程和输出方程

状态方程的一般形式

- 对一个具有 m 个输入 p 个输出的 n 阶连续时间系统，可用一阶微分方程组表示:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}f_1 + b_{12}f_2 + \cdots + b_{1m}f_m \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + \cdots + b_{2m}f_m \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\
\dot{x}_n &= a_{11}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}f_1 + b_{n2}f_2 + \cdots + b_{nm}f_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}
$$

$$
\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{f}(t)
$$

状态方程的一般形式

- 对一个具有 m 个输入 p 个输出的 n 阶连续时间系统，输出方程：

$$
\begin{aligned}
y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}f_1 + d_{12}f_2 + \cdots + d_{1m}f_m \\
y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}f_1 + d_{22}f_2 + \cdots + d_{2m}f_m \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
y_p &= c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \cdots + c_{pn}x_n + d_{p1}f_1 + d_{p2}f_2 + \cdots + d_{pm}f_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{f}(t)
$$

状态方程的矩阵形式

- 连续时间系统的状态可用矩阵形式表示为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{f}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{f}(t)$$

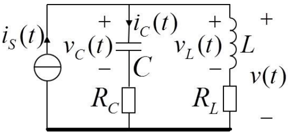
- 矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{p2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1} & d_{n2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \quad (2)$$

连续时间系统状态方程的建立

- 由电路建立状态方程
  - 选择独立的电容电压和电感电流作为状态变量
  - 对于含有独立电容支路的节点列写 KCL 方程
    对于含有独立电感的回路列写 KVL 方程
  - 消除非状态变量(中间变量)
  - 整理成状态方程和输出方程的标准形式
- 由模拟框图建立状态方程
- 由微分方程或系统函数建立状态方程



例， 电路如图所示，试列写该系统的状态方程和输出方程.

解：选 $v_c(t)$ 和 $i_L(t)$ 为状态变量，它们都是独立状态变量. 由 KCL，得

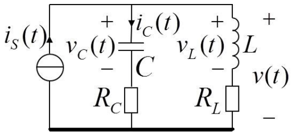
$$i_s(t) = i_c(t) + i_L(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} + i_L(t)$$

由 KVL，得

$$v_c(t) + R_C C\frac{dv_c(t)}{dt} = L\frac{di_L}{dt} + Ri_L(t)$$

整理上述两式，

$$\begin{cases} \dfrac{dv_c(t)}{dt} = -\dfrac{1}{C}i_L(t) + \dfrac{1}{C}i_s(t) \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L}v_c(t) - \dfrac{R_C + R_L}{l}i_L(t) + \dfrac{R_C}{L}i_s(t) \end{cases}$$



例, 电路如图所示, 试列写该系统的状态方程和输出方程.

解: 选 $v_c(t)$ 和 $i_L(t)$ 为状态变量, 它们都是独立状态变量. 由 KCL, 得

$$i_s(t) = i_c(t) + i_L(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} + i_L(t)$$

由 KVL, 得

$$v_c(t) + R_C C\frac{dv_c(t)}{dt} = L\frac{di_L}{dt} + Ri_L(t)$$

若以电路中的电压 $v(t)$ 和电流 $i_c(t)$ 为输出, 则输出方程为

$$\begin{cases} v(t) = v_c(t) - R_C i_L(t) + R_C i_S(t) \\ i_C(t) = \qquad\qquad -i_L(t) \quad + \quad i_s(t) \end{cases}$$

若令状态变量 $v_C(t) = x_1(t)$, $i_L(t) = x_2(t)$. 输入 $i_S(t) = f(t)$, 输出 $v(t) = y_1(t)$, $i_C(t) = y_2(t)$ 写成矩阵形式为,

$$\begin{cases} \dfrac{dv_c(t)}{dt} = & -\dfrac{1}{C}i_L(t) + \dfrac{1}{C}i_s(t) \\ \dfrac{di_L(t)}{dt} = \dfrac{1}{L}v_c(t) - \dfrac{R_C+R_L}{l}i_L(t) + \dfrac{R_C}{L}i_s(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_C+R_L}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ \frac{R_C}{L} \end{bmatrix} \cdot [f(t)]$$

输出矩阵为,

$$\begin{cases} v(t) = v_c(t) - R_C i_L(t) + R_C i_S(t) \\ i_C(t) = \quad -i_L(t) + i_s(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_C \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_C \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [f(t)]$$

从系统方程导出状态方程

例，某三阶系统微分方程为，

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = f(t)$$

导出其状态方程和输出方程，

解，选取状态变量为，

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dx_1}{dt} \\ x_3 = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dx_2}{dt} \end{cases}$$

状态矢量为，

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{bmatrix}$$

由系统微分方程,

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} = -4\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) + f(t) = \frac{dx_3}{dt}$$

所以状态方程为,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + f \end{cases}$$

写成标准矩阵形式,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}$$

输出方程为,

$$[y] = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0] \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}$$

从模拟图建立状态方程

- 根据系统的输入—输出方程或系统函数可以作出系统的时域或复频域模拟图，然后选择每一个积分器的输出端信号作为状态变量，最后得到系统的状态方程和输出方程.

- 由于系统函数可以写成不同的形式，所以模拟图也可以有不同的结构，于是状态变量的选择也就不同，因而状态方程和输出方程就会有几种不同的形式.

例，某三阶系统微分方程为，

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 8\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 19\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = 4\frac{df(t)}{dt} + 10f(t)$$

导出其状态方程和输出方程.

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 8\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 19\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = 4\frac{df(t)}{dt} + 10f(t)$$

- 该系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{4s + 10}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

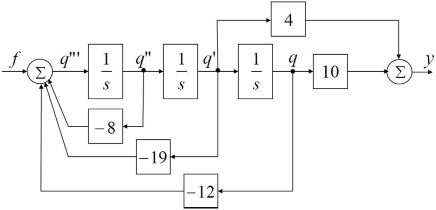
- 该系统的系统函数还可以写成并联形式

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} - \frac{2}{s+4}$$

- 该系统的系统函数还可以写成串联形式

$$H(s) = \frac{4}{s+1} \cdot \frac{1}{s+3} \cdot \frac{s+\frac{5}{2}}{s+4}$$

$$H(s)=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}$$



选取状态变量 $x_1=q$, $x_2=q^{'}$, $x_3=q^{''}$, 有

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-12x_1-19x_2-8x_3+f\end{cases}$$

输出方程,

$$y=10x_1+4x_2$$

状态方程,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -12x_1 - 19x_2 - 8x_3 + f \end{cases}$$

写成矩阵形式,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}$$

输出方程

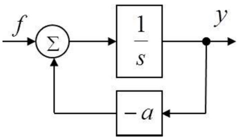
$$y = 10x_1 + 4x_2$$

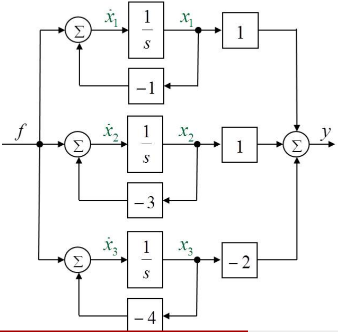
写成矩阵形式,

$$[y] = [10 \;\; 4 \;\; 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0] \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}$$

$$H(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}-\frac{2}{s+4}$$

该系统也可以由三个系统并联来表示，其中每一个子系统 $\frac{1}{s+a}=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{a}{s}}$ 的模拟图为，





所以整个系统的模拟图如图所示，选取状态变量 x_1,x_2,x_3 为每一个积分器的输出，则有

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+f\\ \dot{x}_2=-3x_2+f\\ \dot{x}_3=-4x_3+f\end{cases}$$

$$y=x_1+x_2-2x_3$$

状态方程,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + f \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + f \\ \dot{x}_3 = -4x_3 + f \end{cases}$$

写成矩阵形式,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}$$

输出方程

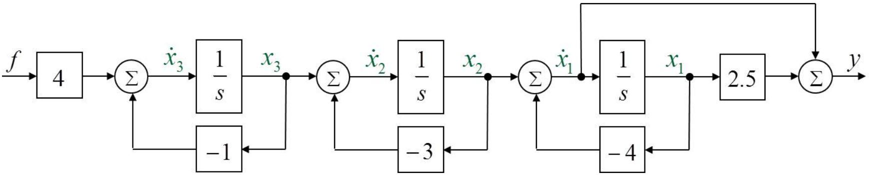
$$y = x_1 + x_2 - 2x_3$$

写成矩阵形式,

$$[y] = [1 \ 1 \ -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0] \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{4}{s+1} \cdot \frac{1}{s+3} \cdot \frac{s+\frac{5}{2}}{s+4}$$

该系统也可以由三个系统串联来表示，其模拟图为，



选取状态变量 x_1,x_2,x_3 为每一个积分器的输出，则有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 4f \end{cases}$$

$$y = 2.5x_1 + \dot{x}_1 = -1.5x_1 + x_2$$

状态方程,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 4f \end{cases}$$

写成矩阵形式,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}$$

输出方程

$$y = -1.5x_1 + x_2$$

写成矩阵形式,

$$[y] = [-1.5 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0] \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}$$

Homework 01: 7-8:(1)(三种方法) 7-9 7-10