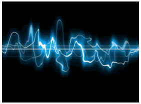


信号与系统的时域分析

W. W. Cheng

Institute of Signal Processing & Transmission

September 1, 2022

基本内容

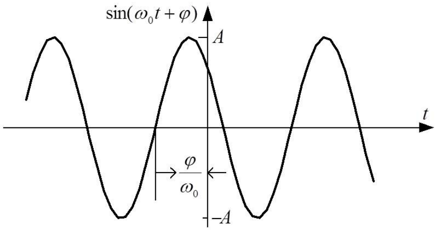
- 典型连续时间信号
- 连续时间信号的基本运算
- 信号的时域分解
- 连续系统的零输入响应
- 连续系统的冲激响应
- 连续系统的零状态响应
- 卷积的图解和卷积积分
- 卷积积分的性质
- 复合系统的冲激响应

典型连续时间信号

- 正弦信号

$$f(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

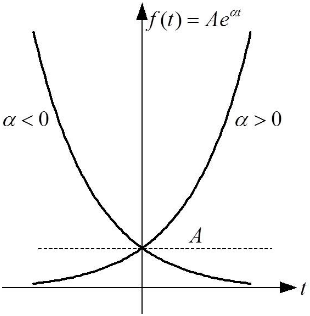
A: 振幅，ω_0: 角频率，φ: 初相位.



典型连续时间信号

- 实指数信号

$$f(t) = Ae^{\alpha t}$$

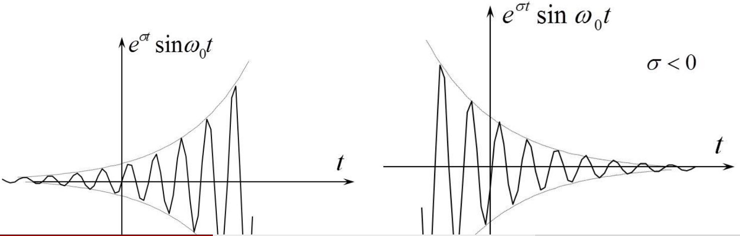


- 复指数信号:

$$f(t) = e^{st}$$

$s = \sigma + j\omega$ 为复数，也称作复频率.

  - 当 $s = 0$，$e^{st} = 1$，为直流信号.
  - 当 $\omega = 0$，$e^{st} = e^{\sigma t}$，为单调增长或者衰减的实指数信号.
  - 当 $\sigma = 0$，$e^{st} = e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$，实部为等幅余弦，虚部为等幅正弦的信号.
  - 一般情况下，$e^{st} = e^{\sigma t}e^{j\omega t} = e^{\sigma t}\cos\omega t + e^{\sigma t}j\sin\omega t$，实部为增长($\sigma > 0$) 或者衰减($\sigma < 0$)的余弦信号，虚部为增长($\sigma > 0$)或者衰减($\sigma < 0$)的正弦的信号.

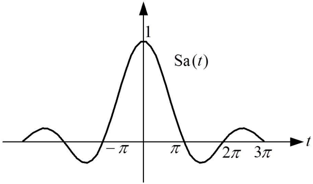


典型连续时间信号

- 抽样(Sample)信号

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

.

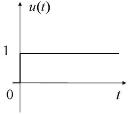


抽样信号具有下列性质:

- $Sa(0) = 1$
- $Sa(k\pi) = 0$, $k = \pm 1, \pm 2, \cdots$
- $\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t)dt = \pi$

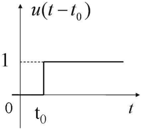
单位阶跃信号

$$\mu(t)=\begin{cases}0, t<0\\ 1, t>0\end{cases}$$

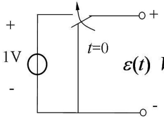


延迟单位阶跃信号

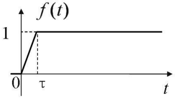
$$\mu(t-t_0)=\begin{cases}0, t<t_0\\ 1, t>t_0\end{cases}$$



单位阶跃信号可以看作某些在极短的时间 τ 内由 0 变到 1 的信号当$\tau\to 0$的极限,



, $\mu(0^-)=0$, $\mu(0^+)=1$,

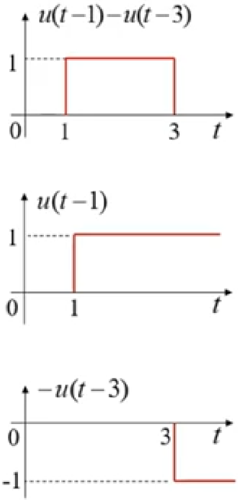


阶跃信号的作用

- 应用阶跃信号以及延迟的阶跃信号可以表示任意的矩形信号.
- 截断信号，使其成为单边信号.

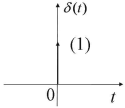
$$f(t) = 3\sin(5t)$$

$$f(t)\mu(t) = 3\sin(5t)\mu(t)$$



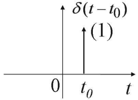
单位冲激信号，工程定义

$$\delta(t)=\begin{cases}0, t\neq 0\\ \infty, t=0\end{cases},\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$



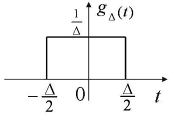
延迟单位冲激信号

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0, t\neq t_0\\ \infty, t=t_0\end{cases},\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$



单位冲激信号可以看成是某些普通函数的极限:

左图中$\triangle\to 0$



$$\lim_{\triangle\to 0} g_{\triangle}(t)\longrightarrow\delta(t)$$

严格的数学定义

作为一个广义函数，单位冲激函数$\delta(t)$ 作用于任意在$t=0$ 时连续的普通函数$\varphi(t)$ 的效果是对$\varphi(t)$ （测试函数或赋值函数）赋于下面的值：

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t)dt \\
&= \int_{0^-}^{0^+} \varphi(t)\delta(t)dt \\
&= \varphi(0)\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt \\
&= \varphi(0)
\end{aligned}
$$

冲激函数的性质

- 筛选特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t-t_0)dt \to \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t_0)\delta(x)dt = \varphi(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \pi t \delta(t)dt = \sin \pi t|_{t=0} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \pi t \delta(t-\frac{1}{4})dt = \sin \pi t|_{t=\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin t \delta(t-\frac{\pi}{6})dt = \sin t|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{1}^{2} e^{-\alpha t}\delta(t)dt = 0, ?$$

- 注意：积分区间不一定都是$(-\infty, +\infty)$，但只要积分区间不包括冲激信号$\delta(t-t_0)$ 的$t=t_0$ 时刻，则积分结果必为零.

- 抽样特性

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)\delta(t-t_0)]\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)[f(t)\varphi(t)]dt=f(t_0)\varphi(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(t_0)\delta(t-t_0)]\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)[f(t_0)\varphi(t)]dt=f(t_0)\varphi(t_0)$$

两个广义函数对测试函数$\varphi(t)$ 有相同的赋值效果，故它们二者等价

当$t_0=0$, $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$

$$\sin\pi t\delta(t)=\sin\pi t|_{t=0}\delta(t)=0$$

$$\sin\pi t\delta(t-\tfrac{1}{4})=\sin\pi t|_{t=\frac{1}{4}}\delta(t-\tfrac{1}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t-\tfrac{1}{4})$$

冲激函数的性质

- 单位冲激函数为偶函数

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

证明：

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t)\varphi(t)dt \quad &\to \int_{\infty}^{-\infty} \delta(\tau)\varphi(-\tau)(-d\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\varphi(-\tau)(d\tau) \\
&= \varphi(0^-) \\
&= \varphi(0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt
\end{aligned}$$

- 尺度变换

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t), \qquad \delta(\alpha t - t_0) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t - \frac{t_0}{\alpha})$$

α, t_0 为常数，且$\alpha \neq 0$
证明：令$\alpha t = x$，当$\alpha > 0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha t)\varphi(t)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(\frac{x}{\alpha})dx = \frac{1}{\alpha}\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha}\delta(t)\varphi(t)dt$$

当$\alpha < 0$，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha t)\varphi(t)dt &= \int_{\infty}^{-\infty} \delta(x)\varphi(\frac{x}{\alpha})d(\frac{x}{\alpha}) = -\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(\frac{x}{\alpha})dx \\ &= -\frac{1}{\alpha}\varphi(0) = \frac{1}{|\alpha|}\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)\varphi(t)dt\end{aligned}$$

- 单位阶跃函数的导数是单位冲激函数

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \delta(t)$$

证明:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\frac{d\mu(t)}{dt}dt &= \varphi(t)\mu(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t)d\varphi(t) \\ &= \varphi(\infty) - \int_{0}^{\infty} d\varphi(t) = \varphi(\infty) - [\varphi(\infty) - \varphi(0)] \\ &= \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t)dt\end{aligned}$$

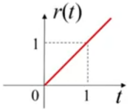
此外,

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{Bmatrix} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{Bmatrix} = \mu(t)$$

此结论解决了不连续函数在间断点处的求导问题.

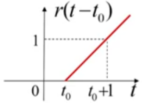
单位斜坡信号

$$r(t) = \begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$



延迟单位斜坡信号

$$r(t-t_0) = \begin{cases} t-t_0, t \geq t_0 \\ 0, t < t_0 \end{cases}$$



单位斜坡信号与单位阶跃信号之间的关系:

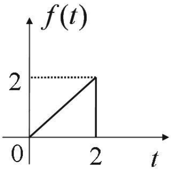
$$\frac{dr(t)}{dt} = \mu(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \mu(\lambda) d\lambda = r(t)$$

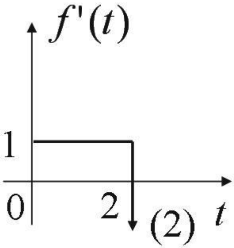
例

已知信号 $f(t)$ 的波形如图所示，试求 $f'(t)$，并画出其波形图

$$f(t) = t[\mu(t) - \mu(t-2)]$$



$$f'(t) = [\mu(t) - \mu(t-2)] + t[\delta(t) - \delta(t-2)]$$



连续时间信号的基本运算

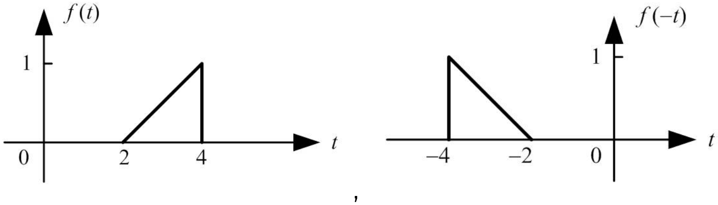
- 信号的翻转
- 信号的平移
- 信号的尺度变换
- 信号相加
- 信号相乘
- 信号的微分
- 信号的积分

连续时间信号的基本运算

- 翻转

$$f(t) \longrightarrow f(-t)$$

从波形上看， $f(-t)$ 是 $f(t)$ 的波形相对于纵轴的镜像(180 度翻转).

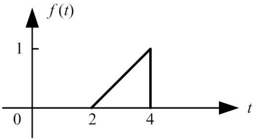


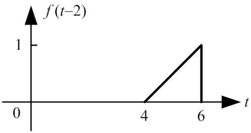
连续时间信号的基本运算

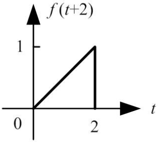
- 时移

$$f(t) \longrightarrow f(t \pm t_0)(t_0 > 0)$$

从波形上看， $f(t \pm t_0)$ 是把 $f(t)$的波形向左（右）移动 t_0

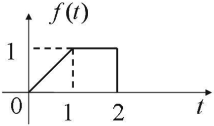


,


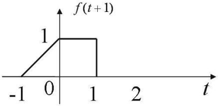
,


注意：替换时定义域中的 t 也要替换。

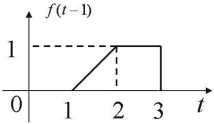
时移举例：



$$f(t)=\begin{cases}0,t<0\\ t,0<t<1\\ 1,1<t<2\\ 0,t>2\end{cases}$$

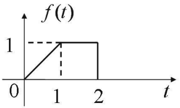


$$f(t+1)=\begin{cases}0,t+1<0 & \to t<-1\\ t+1,0<t+1<1 & \to -1<t<0\\ 1,1<t+1<2 & \to 0<t<1\\ 0,t+1>2 & \to t>1\end{cases}$$

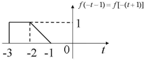


$$f(t-1)=\begin{cases}0,t-1<0 & \to t<1\\ t-1,0<t-1<1 & \to 1<t<2\\ 1,1<t-1<2 & \to 2<t<3\\ 0,t-1>2 & \to t>3\end{cases}$$

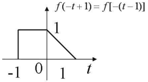
翻转与时移运算：



$$f(t)=\begin{cases}0,t<0\\ t,0<t<1\\ 1,1<t<2\\ 0,t>2\end{cases}$$



$$f(-t-1)=\begin{cases}0,-t-1<0 & \rightarrow t>-1\\ -t-1,0<-t-1<1 & \rightarrow -2<t<-1\\ 1,1<-t-1<2 & \rightarrow -3<t<-2\\ 0,-t-1>2 & \rightarrow t<-3\end{cases}$$



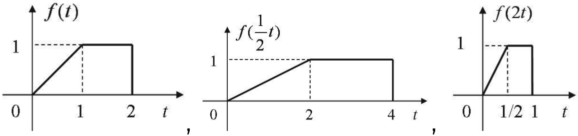
$$f(-t+1)=\begin{cases}0,-t+1<0 & \rightarrow t>1\\ -t+1,0<-t+1<1 & \rightarrow 0<t<1\\ 1,1<-t+1<2 & \rightarrow -1<t<0\\ 0,-t+1>2 & \rightarrow t<-1\end{cases}$$

连续时间信号的基本运算

- 尺度变换

$$f(t) \longrightarrow f(at)$$

当 $a > 0$ 时，从波形上看，$f(at)$ 是把 $f(t)$ 的波形以坐标原点为基准，沿时间轴压缩（或扩展）至原来的 $\frac{1}{a}$ 倍.



连续时间信号的基本运算

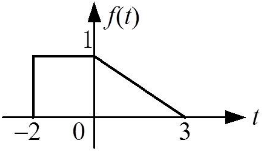
- 混合运算

$$f(-\alpha t \pm b) = f[-\alpha(t \mp \frac{b}{a})]$$

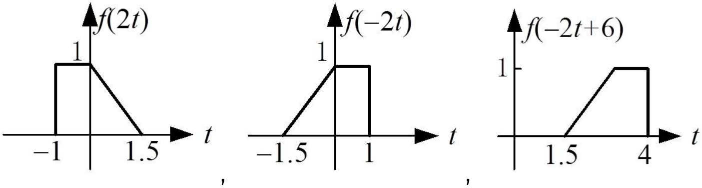
涉及到翻转、展缩以及平移运算

- 混合运算举例

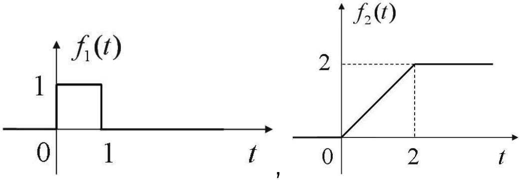
已知信号 $f(t)$ 如下，求信号 $f(-2t+6)$ 的波形，



$f(t)$，先缩 1/2 倍变成 $f(2t)$；再翻转成 $f(-2t)$，最后右移 3 个单位变成 $f(-2(t-3))$

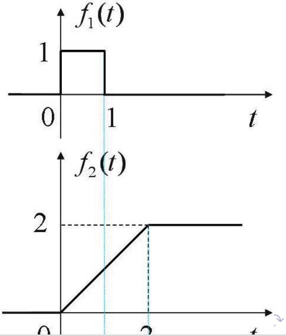


- 信号的相加与相乘 两个信号相加与相乘，是将它们在同一瞬间的值相加或相乘。



$$f_1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, 0 < t < 1 \\ 0, t > 1 \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ t, 0 < t < 2 \\ 1, t > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, t < 0 \\ t, 0 < t < 1 \\ t, 1 < t < 2 \\ 1, t > 2 \end{cases}$$

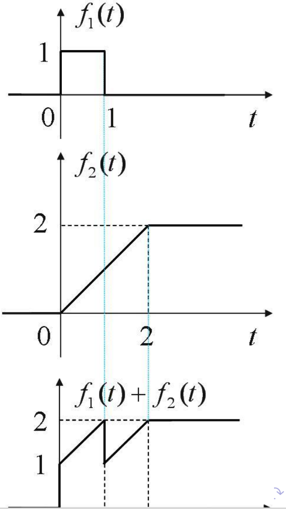


相加

$$f_1(t)=\begin{cases}0,t<0\\1,0<t<1\\0,t>1\end{cases}$$

$$f_2(t)=\begin{cases}0,t<0\\t,0<t<2\\1,t>2\end{cases}=\begin{cases}0,t<0\\t,0<t<1\\t,1<t<2\\1,t>2\end{cases}$$

$$f_1(t)+f_2(t)=\begin{cases}0,t<0\\1+t,0<t<1\\t,1<t<2\\1,t>2\end{cases}$$

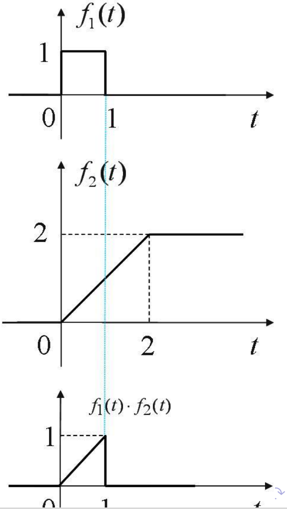


相乘

$$f_1(t)=\begin{cases}0, t<0\\1, 0<t<1\\0, t>1\end{cases}$$

$$f_2(t)=\begin{cases}0, t<0\\t, 0<t<2\\1, t>2\end{cases}=\begin{cases}0, t<0\\t, 0<t<1\\t, 1<t<2\\1, t>2\end{cases}$$

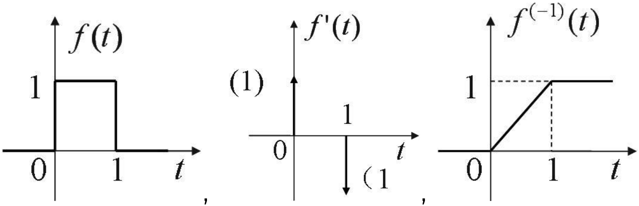
$$f_1(t)\cdot f_2(t)=\begin{cases}0, t<0\\t, 0<t<1\\0, t>1\end{cases}$$



- 信号的导数：记作，

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

它是信号 $f(t)$ 在任意时刻的变化率. 在 $f(t)$ 的不连续点处，导数中会有冲激函数 $\delta(t)$



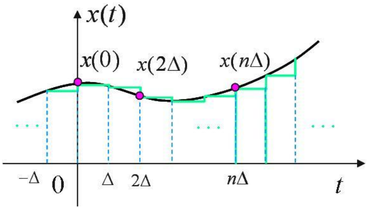
信号的积分：记作，

$$f^{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

从图形上看，它在任意 t 时刻的值是从$-\infty$ 到 t 区间,$f(t)$ 与时间轴所包围的面积。

信号的脉冲分解

- 通常情况下,信号分解成基本信号($\delta(t)$, $e^{j\omega t}$,e^{st},$\delta[k]$,$\cdots$)的线性组合
- 连续信号分解为单位冲激信号($\delta(t)$)的线性组合



如图所示,任意波形的信号都可以用沿横向等间隔的折线来近似,折线中的每一条横向线段都可以看作一个矩形脉冲。其中在 $t = n\triangle$ 时刻出现的矩形脉冲高度为 $x(n\triangle)$ 宽度为 $\triangle$

$$
\begin{aligned}
x(t) \simeq \quad & \cdots + x(0)[\mu(t) - \mu(t-\triangle)] + x(\triangle)[\mu(t-\triangle) - \mu(t-2\triangle)] \\
& + \cdots + x(n\triangle)[\mu(t-n\triangle) - \mu(t-n\triangle-\triangle)] + \cdots
\end{aligned}
$$

脉冲分解

$$x(t) \simeq \quad \cdots + x(0)\frac{[\mu(t) - \mu(t-\triangle)]}{\triangle}\triangle + x(\triangle)\frac{[\mu(t-\triangle) - \mu(t-2\triangle)]}{\triangle}\triangle$$
$$+ \cdots + x(n\triangle)\frac{[\mu(t-n\triangle) - \mu(t-n\triangle-\triangle)]}{\triangle}\triangle + \cdots$$

$$x(t) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\triangle)\frac{[\mu(t-n\triangle) - \mu(t-n\triangle-\triangle)]}{\triangle}\triangle$$

当 $\triangle \to 0$, 即 $\triangle \to d\tau$, $n\triangle$ 成为新的变量 τ, 求和变成对于连续变量 τ 的定积分，即

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

信号分解为$\delta(t)$ 的物理意义与实际应用

- $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- 物理意义：
  不同的信号都可以分解为冲激序列 $\delta(t-\tau)$ 之和，信号不同只是它们的系数 $x(\tau)$ 不同。

- 实际应用：
  当求解信号 $x(t)$ 通过 LTI 系统产生的响应时，只需求解冲激信号通过该系统产生的响应，然后利用线性时不变系统的特性，进行迭加和延时即可求得信号 $x(t)$ 产生的响应 $y(t)$.

零输入响应

- 系统的零输入响应是输入信号 $x(t)$ 为零，仅由系统的初始状态单独作用而产生的输出响应，数学模型：

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{'}(t) + a_0 y(t) = 0$$

  求解方法：
  - 根据微分方程的特征根确定零输入响应的形式
  - 再由初始条件确定待定系数

零输入响应

齐次解方程解的形式由齐次方程的特征根确定.

- 特征根是不等实根 $s_1, s_2, \cdots, s_n$

$$y(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t}$$

- 特征根是相等实根, $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = s$

$$y(t) = K_1 e^{st} + K_2 t e^{st} + \cdots + K_n t^{n-1} e^{st}$$

- 特征根是成对共轭复根, $s = \sigma_i + j\omega_i$

$$y(t) = e^{\sigma_i t}(K_1 \cos\omega_i t + K_1 \sin\omega_i t) + \cdots e^{\sigma_i t}(K_2 \cos\omega_i t + K_2 \sin\omega_i t)$$

例：已知某线性时不变系统的动态方程式为；

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y(t)=4x(t),t>0$$

系统的初始状态为 $y(0^-)=1$，$y^{'}(0^-)=3$，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。

解：系统的特征方程为 $s^2+5s+6=0$，系统的特征根：$s_1=-2$, $s_2=-3$

系统的通解：

$$y_{zi}(t)=K_1e^{-2t}+K_2e^{-3t}$$

初始条件：

$y(0^-)=y_{zi}(0^-)=K_1+K_2=1$，$y^{'}(0^-)=y_{zi}^{'}(0^-)=-2K_1-3K_2=3$

得 $K_1=6,K_2=-5$，系统特解为

$$y_{zi}(t)=6e^{-2t}-5e^{-3t},t>0$$

例：已知某线性时不变系统的动态方程式为；

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y(t)=\frac{dx}{dt}+3x(t),t>0$$

系统的初始状态为 $y(0^-)=1$，$y^{'}(0^-)=3$，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。

解：系统的特征方程为 $s^2+4s+4=0$，系统的特征根：$s_1=s_2=-2$，两个相等实根。
系统的通解：

$$y_{zi}(t)=K_1e^{-2t}+K_2te^{-2t}$$

初始条件：
$y(0^-)=y_{zi}(0^-)=K_1=1$，$y^{'}(0^-)=y^{'}_{zi}(0^-)=-2K_1+K_2=3$
得$K_1=1$,$K_2=5$，系统特解为

$$y_{zi}(t)=e^{-2t}+5te^{-2t},t>0$$

例：已知某线性时不变系统的动态方程式为;

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+5y(t)=4\frac{dx}{dt}+3x(t), t>0$$

系统的初始状态为 $y(0^-)=1$，$y^{'}(0^-)=3$，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。

解：系统的特征方程为 $s^2+2s+5=0$，系统的特征根： $s_1=-1+2j$, $s_2=-1-2j$，两个共轭复根。
系统的通解：

$$y_{zi}(t)=e^{-t}(K_1\cos 2t+K_2\sin 2t)$$

初始条件：
$y(0^-)=y_{zi}(0^-)=K_1=1$，$y^{'}(0^-)=y^{'}_{zi}(0^-)=-K_1+2K_2=3$
得$K_1=1$,$K_2=2$，系统特解为

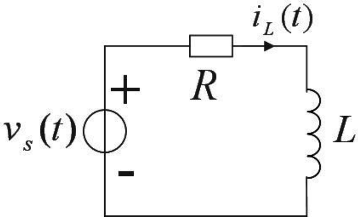
$$y_{zi}(t)=e^{-t}(\cos 2t+2\sin 2t), t>0$$

连续时间系统的单位冲激响应

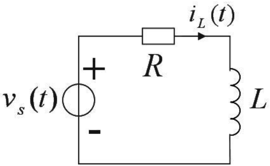
- 连续时间系统单位冲激响应的定义，对于一个初始状态为零的系统 $S\{q_n(0^-)=0\}$，

$$x(t)=\delta(t)\longrightarrow y(t)=h(t)$$

- 冲激响应的物理解释，以一个简单电路为例，



- 冲激响应的物理解释



描述该电路的微分方程：

$$Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = v_s(t)$$

当 $i_L(0^-) = 0$, $v_s(t) = \delta(t)$ 时，则 $i_L(t) = h(t)$，即

$$Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = \delta(t)$$

对上式从 $t = 0^-$ 到 $t = 0^+$ 取定积分，

$$Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = \delta(t)$$

对上式从$t = 0^-$ 到$t = 0^+$ 取定积分，

$$R\int_{0^-}^{0^+} i_L(t)dt + Li_L(0^+) - Li_L(0^-) = 1$$

因为 $i_L(t)$ 有限，所以，$\int_{0^-}^{0^+} i_L(t)dt = 0$, 且 $i_L(0^-) = 0$,
所以

$$i_L(0^+) = \frac{1}{L}$$

电感电流在冲激信号作用下，从零跃变到 $1/L$. 当 $t \geq 0$ 时，电路是一个零输入响应，容易算得;

$$i_L(t) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\mu(t) = h(t)$$

从微分方程求解

设描述连续系统的 n 阶微分方程为，

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t)$$

若求冲激响应 $h_0(t)$, 则上式中 $x(t) = \delta(t)$,

$$a_n h_0^{(n)}(t) + a_{n-1} h_0^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 h_0'(t) + a_0 h_0(t) = \delta(t)$$

- 当 $t \geq 0^+$ 时，$h_0(t)$ 实际上是一个特殊的零输入响应，所以对于 $h_0(t)$ 的 n 线性齐次微分方程，只需要找到 n 个初始值就可以得到特解.
- 对于因果系统，$h_0(0^-) = h_0'(0^-) = \cdots = h_0^{n-1}(0^-) = 0$.
- 等式左边应该含有冲激函数项 $\delta(t)$，则右边只能包含在 $h_0^{(n)}(t)$ 中，否则会出现冲激函数的导数高阶项. 由此可推得 $h_0^{(n-1)}(t)$ 中含有阶跃函数项，其余各项应该是正幂函数项.

即有;

$$h_0^{(n-1)}(0^+) \neq h_0^{(n-1)}(0^-)$$
$$h_0^{(n-2)}(0^+) = h_0^{(n-2)}(0^-) = 0, \cdots h_0^{'}(0^+) = h_0^{'}(0^-) = 0, h_0(0^+) = h_0(0^-$$

由此对方程两边取定积分,

$$a_n \int_{0^-}^{0^+} h_0^{(n)}(t)dt + a_{n-1} \int_{0^-}^{0^+} h_0^{(n-1)}(t)dt + \cdots + a_0 \int_{0^-}^{0^+} h_0(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)$$

上式中只有第一项不为零, 其余各项都为零, 即,

$$a_n[h_0^{(n-1)}(0^+) - h_0^{(n-1)}(0^-)] = 1 \longrightarrow h_0^{(n-1)}(0^+) = \frac{1}{a_n}$$

,

由此得到 n 个初始条件,

$$\begin{cases} h_0^{n-2}(0^+) = h_0^{n-3}(0^+) = \cdots = h_0(0^+) = 0 \\ h_0^{(n-1)}(0^+) = \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$$

例: 已知某系统的微分方程如下，试求其冲激响应式为;

$$y^{''}(t)+3y^{'}(t)+2y(t)=x(t)$$

解，冲激响应满足的方程，

$$h^{''}(t)+3h^{'}(t)+2h(t)=\delta(t)$$

即

$$h^{''}(t)+3h^{'}(t)+2h(t)=0, t>0$$

特征方程 $\lambda^2+3\lambda+2=0$, $\longrightarrow$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_1=-2$,齐次方程的通解

$$h(t)=(k_1e^{-t}+k_2e^{-2t})\mu(t)$$

代入初始条件;

$$\begin{cases} h^{'}(0^+)=\dfrac{1}{a_2}=1 \\ h(0^+)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1+k_2=0 \\ -k_1-2k_2=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1=1 \\ k_2=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^{'}(0^+) = \dfrac{1}{a_2} = 1 \\ h(0^+) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 - 2k_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{cases}$$

所以系统的冲激响应为:

$$h(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\mu(t)$$

一般系统的冲激响应

$$
\begin{aligned}
& a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{'}(t) + a_0 y(t) \\
&= b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 x^{'}(t) + b_0 x(t)
\end{aligned}
$$

此时，系统的冲激响应所应当满足的微分方程为：

$$
\begin{aligned}
& a_n h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 h^{'}(t) + a_0 h(t) \\
&= b_m \delta^{(m)}(t) + b_{m-1} \delta^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \delta^{'}(t) + b_0 \delta(t)
\end{aligned}
$$

为此，可假设一个新的系统，其冲激响应对应的方程为

$$
a_n h_0^{(n)}(t) + a_{n-1} h_0^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 h_0^{'}(t) + a_0 h_0(t) = \delta(t)
$$

$$a_n h_0^{(n)}(t) + a_{n-1} h_0^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 h_0'(t) + a_0 h_0(t) = \delta(t)$$

根据线性性和时不变性，

$$\begin{aligned}
&\delta(t) \longrightarrow h_0(t) \\
&b_0\delta(t) \longrightarrow b_0 h_0(t) \\
&b_j\delta^{(j)}(t) \longrightarrow b_j h_0^{(j)}(t) \\
&\sum_j b_j\delta^{(j)}(t) \longrightarrow \sum_j b_j h_0^{(j)}(t)
\end{aligned}$$

所以原方程中的冲激响应为

$$h(t) = \sum_j b_j h_0^{(j)}(t)$$

例：已知某系统的微分方程如下，试求其冲激响应式为；

$$2y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 2x'(t) + x(t)$$

解，设新的冲激响应满足的方程，

$$2h_0''(t) + 4h_0'(t) + 4h_0(t) = \delta(t)$$

特征方程 $2\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0, \longrightarrow, \lambda_{1,2} = -1 \pm j$,齐次方程的通解

$$h_0(t) = (k_1 e^{-t} \sin t + k_2 e^{-t} \cos t)\mu(t)$$

代入初始条件；

$$\begin{cases} h'(0^+) = \dfrac{1}{a_2} = \dfrac{1}{2} \\ h(0^+) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{2} \\ k_2 = 0 \end{cases}$$

所以

$$h_0(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin t\mu(t)$$

原来方程描述的系统的冲激响应为，

$$\begin{aligned} h(t) &= 2h_0'(t) + h_0(t) \\ &= -e^{-t}\sin t\mu(t) + e^{-t}\cos t\mu(t) + \frac{1}{2}e^{-t}\sin t\mu(t) \\ &= e^{-t}\cos t\mu(t) - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t\mu(t) \end{aligned}$$

连续系统的零状态响应

当系统的初始状态为零时，由系统的外部激励 $x(t)$ 产生的响应称为系统的零状态响应，用 $y_{zs}(t)$ 表示。

求解系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 方法;

- 直接求解初始状态为零的微分方程
- 卷积法：(利用信号分解和线性时不变系统的特性求解)

卷积法求解系统零状态响应 $y_{zs}(t)$ 的思路

- 时不性

$$\delta(t) \to h(t), \qquad \delta(t-\tau) \to h(t-\tau)$$

- 齐次

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \to x(\tau)h(t-\tau)$$

- 叠加性

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad \to y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

卷积积分

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

- 计算卷积时，$x(t)$ 换成 $x(\tau)$， $h(t)$ 换成 $h(t-\tau)$.
- τ 是积分变量，表示冲激信号出现的时刻，可以在 $(-\infty, \infty)$ 连续变化.
- t 是积分参变量，在积分过程中可视为定值，表示所考察的响应时刻.
- 卷积值 $y(t)$ 是时间的函数，随考察时刻的变化，卷积值也在变化.
- 对于任意线性时不变系统，一旦求得其冲激响应 $h(t)$ (系统特征的表征)，可以用卷积法求得在任意激励 $x(t)$下的零状态响应 $y_{zs}(t)$.

卷积积分上下限

- 卷积积分上下限的确定

  当 $x(t)$, $h(t)$ 都是有始函数时，即，

$$x(t) = f_1(t)\mu(t-t_1), \qquad h(t) = f_2(t)\mu(t-t_2)$$

则，

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\mu(\tau-t_1)f_2(t-\tau)\mu(t-\tau-t_2)d\tau \end{aligned}$$

当

$$\tau - t_1 < 0, \longrightarrow \mu(\tau - t_1) = 0$$
$$t - \tau - t_2 < 0, \longrightarrow \mu(t - \tau - t_2) = 0$$

卷积积分的计算

$$\tau - t_1 < 0, \longrightarrow \mu(\tau - t_1) = 0, \quad t - \tau - t_2 < 0, \longrightarrow \mu(t - \tau - t_2) = 0$$

所以上述积分表达式中，变量 τ 的取值范围为

$$t_1 < \tau < t - t_2$$

所以积分的上限为 $t - t_2$, 而积分的下限为 t_1.
对于 t 而言，应当满足 $t > t_1 + t_2$ 时，积分结果才不为零，其含义是：t_1 时刻的激励所引起的响应要再延迟 t_2 时间才能出现, 所以响应 $y(t)$ 出现的最早时刻为 $t_1 + t_2$,

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\mu(\tau - t_1) f_2(t - \tau)\mu(t - \tau - t_2) d\tau \\ &= \int_{t_1}^{t - t_2} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \mu(t - t_1 - t_2) \end{aligned}$$

例，计算卷积 $x(t) * h(t)$, $x(t) = \mu(t)$, $h(t) = e^{-t}\mu(t)$.
解: 这里 $x(t)$, $h(t)$ 都是有始函数时, 即,

$$x(t) = f_1(t)\mu(t - t_1), \qquad h(t) = f_2(t)\mu(t - t_2)$$

$f_1(t) = 1$, $t_1 = 0$, $f_2(t) = e^{-t}$, $t_2 = 0$, 则

$$\begin{aligned} y(t) \quad &= x(t) * h(t) = \int_{t_1}^{t-t_2} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\mu(t - t_1 - t_2) \\ &= \int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau\mu(t) \\ &= (1 - e^{-t})\mu(t) \end{aligned}$$

例: 已知某LTI 的动态方程式为; $\frac{dy}{dt}+3y(t)=2x(t)$, 系统的冲激响应为 $h(t)=2e^{-3t}\mu(t)$, $x(t)=3\mu(t)$, 试求系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$
解:

$$
\begin{aligned}
y_{zs}(t) &= x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}3\mu(t)\cdot 2e^{-3(t-\tau)}\mu(t-\tau)d\tau \\
&= \begin{cases}\int_{0}^{t}3\cdot 2e^{-3(t-\tau)}d\tau, t>0 \\ 0, t<0\end{cases} \\
&= \begin{cases}2(1-e^{-3t}), t>0 \\ 0, t<0\end{cases} \\
&= 2(1-e^{-3t})\mu(t)
\end{aligned}
$$

卷积的图解

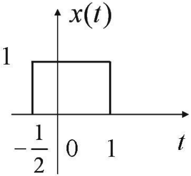
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

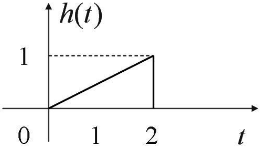
- 卷积的图解的计算步骤
  - 将 $x(t)$ 和 $h(t)$ 中的自变量由 t 改为 τ，τ 成为函数的自变量
  - 把其中一个信号翻转、平移；

$$h(\tau) \longrightarrow h(-\tau) \longrightarrow h(-(\tau - t)) = h(t-\tau)$$

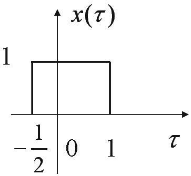
  - 将 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 相乘，对乘积后的图形积分；

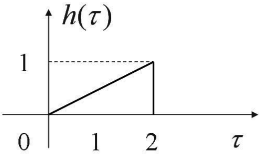
例，已知信号 $x(t)=\mu(t+\frac{1}{2})-\mu(t-1)$，冲激响应 $h(t)=\frac{1}{2}t[\mu(t)-\mu(t-2)]$，波形分别如下，试求卷积 $x(t)*h(t)$



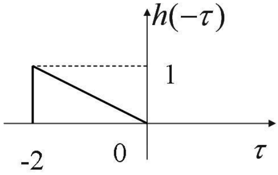


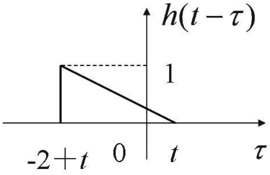
解: (1) 换元

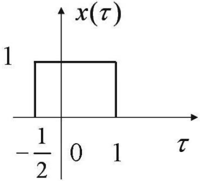




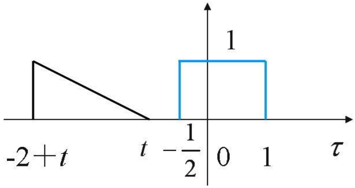
(2) 翻转、平移



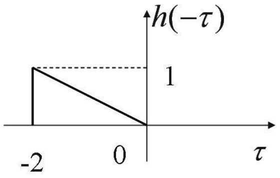


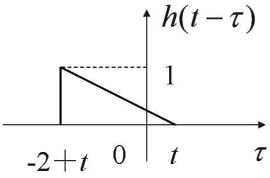


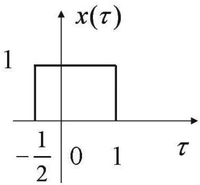
(3) 将 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 相乘, 对乘积后的图形积分

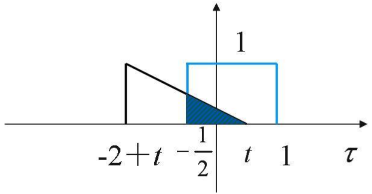


当 $t < -\frac{1}{2}$,
$y(t) = 0$



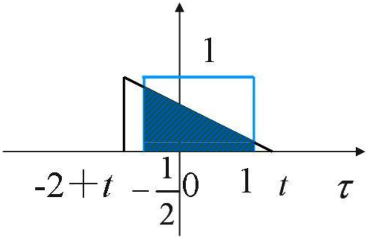






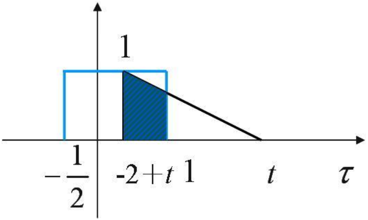
当 $-\frac{1}{2} < t < 1$,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-1/2}^{t} 1 \times \frac{1}{2}(t-\tau)d\tau \\
&= \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} + \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$



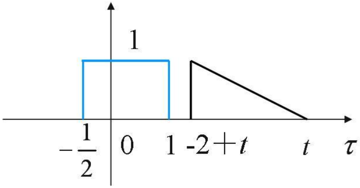
当 $1 < t < \frac{3}{2}$,

$$
\begin{aligned}
y(t) \quad &= \int_{-1/2}^{1} 1 \times \frac{1}{2}(t-\tau)d\tau \\
&= \frac{3}{4}t - \frac{3}{16}
\end{aligned}
$$



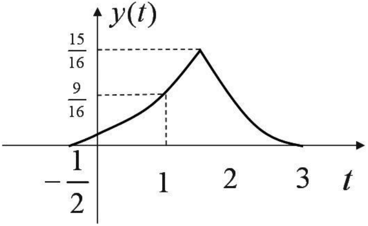
当 $\frac{3}{2} < t < 3$,

$$
\begin{aligned}
y(t) \quad &= \int_{t-2}^{1} 1 \times \frac{1}{2}(t-\tau)d\tau \\
&= -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$



当 $t>3$,

$$y(t)=0$$



$y(t)$ 的曲线图.

卷积的性质

- 交换律

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

证明: 令 $t - \tau = \lambda$, 有

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)(-d\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda \\ &= h(t) * x(t) \end{aligned}$$

卷积的性质

- 分配律

$$[h_1(t)+h_2(t)]*x(t)=h_1(t)*x(t)+h_2(t)*x(t)$$

- 结合律

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

- 卷积微分与积分 $(y(t)=x(t)*h(t))$
  - 微分性质 $y^{'}(t)=x^{'}(t)*h(t)=x(t)*h^{'}(t)$

$$\begin{aligned} y^{'}(t) &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h^{'}(t-\tau)d\tau \\ &= x(t)*h^{'}(t) \end{aligned}$$

同理可证 $y^{'}(t)=x(t)^{'}*h(t)$

卷积的性质

- 卷积微分与积分 $(y(t) = x(t) * h(t))$
  - 积分性质 $y^{(-1)}(t) = x^{(-1)}(t) * h(t) = x(t) * h^{(-1)}(t)$

$$
\begin{aligned}
y^{(-1)}(t) &= \int_{-\infty}^{t} y(\lambda) d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{t} \left\{ \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) h(\lambda - \tau) d\tau \right\} d\lambda \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{t} h(\lambda - \tau) d\lambda \right\} d\tau \\
&= x(t) * h^{(-1)}(t)
\end{aligned}
$$

同理可证 $y^{(-1)}(t) = x^{(-1)}(t) * h(t)$

- 微积分性质

$$y(t)=x(t)*h(t)=x^{(-1)}(t)*h^{'}(t)=x^{'}(t)*h^{(-1)}(t)$$

$$\begin{aligned}
y(t) \quad &= x(t)*h(t)=\left\{\int_{-\infty}^{t}x^{'}(\tau)d\tau+x(-\infty)\right\}*h(t)\\
&= x^{'}(t)*h^{(-1)}(t)+h(t)*x(-\infty)\\
&= x^{'}(t)*h^{(-1)}(t)+\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(-\infty)d\tau\\
&= x^{'}(t)*h^{(-1)}(t)+x(-\infty)\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

当 $x(-\infty)=0$ 或者 $\int_{-\infty}^{\infty}h(t)dt=0$，则 $y(t)=x^{'}(\tau)*h^{(-1)}(t)$. 同理，$x(t)$ 和 $h(t)$ 交换位置，可得 $y(t)=x^{(-1)}(\tau)*h^{'}(t)$. 该性质可推广为，

$$y(t)=x^{(-i)}(t)*h^{i}(t)=x^{i}(t)*h^{(-i)}(t)$$

卷积的性质

- 含有冲激函数 $\delta(t-t_0)$ 的卷积，
  根据信号的时域分解以及卷积的定义，

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)*\delta(t)$$

此外，

$$x(t)*\delta(t-t_1)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-t_1-\tau)d\tau=x(t-t_1)$$

冲激函数的重现性质
结合卷积微积分性质还可以得到

$$x(t)*\delta^{'}(t)=x^{'}(t)$$

$$x(t)*\mu(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

利用卷积性质简化卷积计算

例 已知 $x(t)=\sin t\mu(t)$， $h(t)=\delta^{'}(t)+\mu(t)$，试求 $x(t)*h(t)$

解:

$$
\begin{aligned}
x(t)*h(t) \quad &= \sin t\mu(t)*[\delta^{'}(t)+\mu(t)] \\
&= \sin t\mu(t)*\delta^{'}(t)+\sin t\mu(t)*\mu(t) \\
&= \frac{d}{dt}[\sin t\mu(t)]+[\int_{0}^{t}\sin\tau d\tau]\mu(t) \\
&= \sin t\delta(t)+\cos t\mu(t)+[1-\cos t]\mu(t) \\
&= \mu(t)
\end{aligned}
$$

利用卷积性质简化卷积计算

例 已知 $x(t)=e^{-t}\mu(t)$, $h(t)=\mu(t)-\mu(t-2)$, 试求 $x(t)*h(t)$

解:

$$\begin{aligned} x(t)*h(t) &= x^{(-1)}(t)*h^{'}(t)=x^{(-1)}(t)*[\delta(t)-\delta(t-2)] \\ &= x^{(-1)}(t)-x^{(-1)}(t-2) \end{aligned}$$

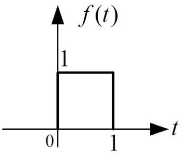
因为,

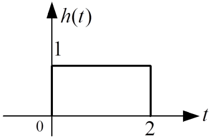
$$\begin{aligned} x^{(-1)}(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}\mu(\tau)d\tau=\int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau\cdot\mu(t) \\ &= (1-e^{-t})\mu(t) \end{aligned}$$

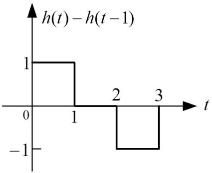
所以,

$$\begin{aligned} x(t)*h(t) &= x^{(-1)}(t)-x^{(-1)}(t-2) \\ &= (1-e^{-t})\mu(t)-[1-e^{-(t-2)}]\mu(t-2) \end{aligned}$$

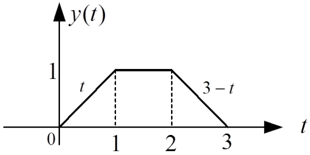
例：利用微积分特性以及冲激重现特性计算$y(t) = f(t) * h(t)$



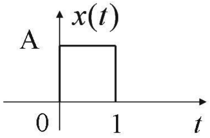


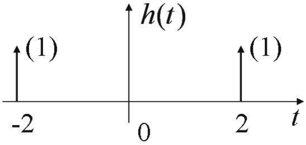


$$y^{'}(t) = f^{'}(t) * h(t)$$
$$f^{'}(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$$
$$y^{'}(t) = f^{'}(t) * h(t) = h(t) - h(t-1)$$
$$y(t) = \int_0^t [y^{'}(\tau)]d\tau$$



例：如图所示，系统输入$x(t)$，冲激响应$h(t)$ 如下，利用冲激重现特性计算$y(t)=x(t)*h(t)$

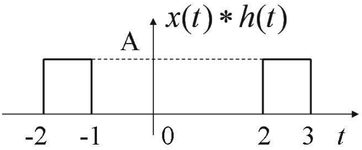




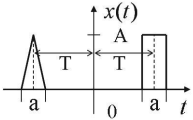
解：，根据冲激函数的重现性质，

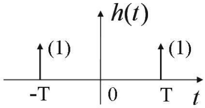
$$x(t)*\delta(t-t_1)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-t_1-\tau)d\tau=x(t-t_1)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)*h(t) \\ &= x(t)*[\delta(t+2)+\delta(t-2)] \\ &= x(t+2)+x(t-2) \end{aligned}$$



例：如图所示，$x(t)$, $h(t)$ 如下, 计算$y(t) = x(t) * h(t)$

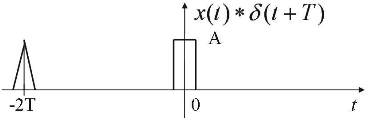




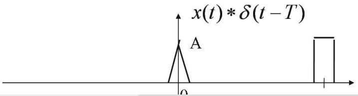
解：，根据冲激函数的重现性质，

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * [\delta(t+T) + \delta(t-T)] = x(t+T) + x(t-T)$$

$x(t+T)$



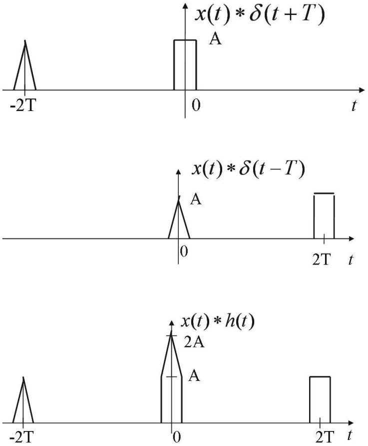
$x(t-T)$



$$x(t+T)$$

$$x(t-T)$$

$$y(t) = x(t+T) + x(t-T)$$



卷积的性质

- 卷积的时移,

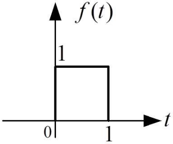
$$
\begin{aligned}
&y(t) = x(t) * h(t) \\
&x(t) * h(t - t_0) = x(t - t_0) * h(t) = y(t - t_0)
\end{aligned}
$$

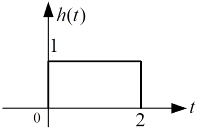
证明,

$$
\begin{aligned}
x(t) * h(t - t_0) \quad &= x(t) * [h(t) * \delta(t - t_0)] \\
&= [x(t) * h(t)] * \delta(t - t_0) = y(t) * \delta(t - t_0) \\
&= y(t - t_0)
\end{aligned}
$$

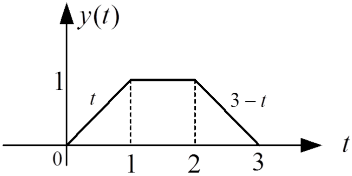
$$
x(t - t_1) * h(t - t_2) = x(t - t_2) * h(t - t_1) = y(t - t_1 - t_2)
$$

利用位移特性以及$\mu(t) * \mu(t) = r(t)$ 计算$y(t) = f(t) * h(t)$



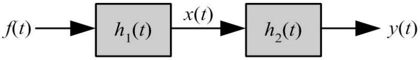


$$
\begin{aligned}
y(t) \quad &= f(t) * h(t) = [\mu(t) - \mu(t-1)] * [\mu(t) - \mu(t-2)] \\
&= \mu(t) * \mu(t) - \mu(t) * \mu(t-2) - \mu(t-1) * \mu(t) + \mu(t-1) * \mu(t-2 \\
&= r(t) - r(t-1) - r(t-2) + r(t-3)
\end{aligned}
$$



复合系统的冲激响应

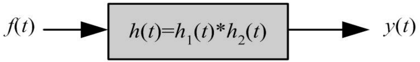
- 级联系统



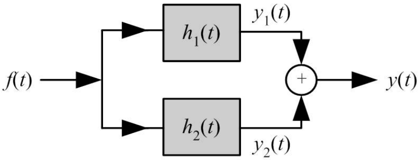
$$
\begin{aligned}
x(t) &= f(t) * h_1(t) \\
y(t) &= x(t) * h_2(t) = f(t) * h_1(t) * h_2(t)
\end{aligned}
$$

根据卷积积分结合律，有

$$y(t) = f(t) * h_1(t) * h_2(t) = f(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = f(t) * h(t)$$



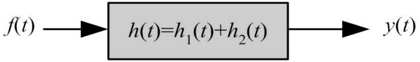
- 并联系统



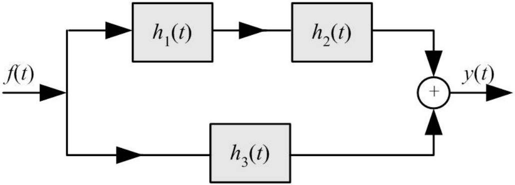
$$y_1(t) = f(t) * h_1(t), \qquad y_2(t) = f(t) * h_2(t)$$
$$y(t) = f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t)$$

根据卷积积分分配律，有

$$y(t) = f(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = f(t) * h(t)$$



例： 如图所示，试求该系统的冲激响应，其中 $h_1(t)=e^{-3t}\mu(t)$, $h_2(t)=\delta(t-1)$ $h_3(t)=\mu(t)$.



解：子系统 $h_1(t)$ 与 $h_2(t)$ 级联，$h_3(t)$ 支路与 $h_1(t)$、$h_1(t)$ 级联支路并联.

$$\begin{aligned} h(t) &= h_1(t) * h_2(t) + h_3(t) \\ &= \delta(t-1) * e^{-3t}\mu(t) + \mu(t) \\ &= e^{-3(t-1)}\mu(t-1) + \mu(t) \end{aligned}$$

连续系统的全响应

例： 某线性时不变系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)$, 激励 $x(t)=(1+e^{-t})\mu(t)$, 初始状态 $y(0^-)=1$, $y'(0^-)=1$, 求系统的全相应 $y(t)$.

解： 特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$, 特征根 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$ 为两个不等实根, 零输入响应的形式为,

$$y_{zi}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$$

代入初始条件, $y(0^-)=1$, $y'(0^-)=1$, 解得,

$$y_{zi}(t)=3e^{-t}-2e^{-2t}, t\geq 0$$

系统的冲激响应为,

$$h(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\mu(t)$$

零状态响应为,

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= x(t)*h(t)=(1+e^{-t})\mu(t)*(e^{-t}-e^{-2t})\mu(t) \\ &= (\frac{1}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+te^{-t})\mu(t) \end{aligned}$$

系统的全响应=零输入响应+零状态响应,

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} + te^{-t},\ t \geq 0$$

✠ 一般而言,齐次微分方程的通解由其特征方程决定,在系统分析中称为自然响应或者固有响应,例如零输入响应以及冲激响应.非齐次方程(含有激励项)的特解由外部激励引起,通常具有与外部激励相同的函数形式(模式),在系统分析中称为强制响应.

系统的全响应=零输入响应+零状态响应,

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} + te^{-t},\ t \geq 0$$

- 一般而言,齐次微分方程的通解由其特征方程决定,在系统分析中称为自然响应或者固有响应,例如零输入响应以及冲激响应.非齐次方程(含有激励项)的特解由外部激励引起,通常具有与外部激励相同的函数形式(模式),在系统分析中称为强制响应.(全响应=自然响应+强制响应)

- 此外,在系统分析中称 $t \to \infty$ 时趋于 0 的响应为暂态响应, $t \to \infty$ 时依然存在的响应为稳态响应.(全响应=暂态响应+稳态响应)

在上述例题全响应的各项中, $\frac{1}{2}$ 为稳态响应. $e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} + te^{-t}$ 为暂态响应. $-\frac{3}{2}e^{-2t}$ 是自然响应的一部分. e^{-t} 中同时包含自然响应以及强制响应. $\frac{1}{2} + te^{-t}$ 则为强制响应的一部分.