第5讲 频率域滤波

1、图像的频域表示
2、频域滤波
3、频域滤波器的生成和应用
4、在频率域中直接生成滤波器

主讲：王成

图像处理与分析基础

1. 图像的频域表示

二维离散傅里叶变换

- $f(x,y)$表示一幅大小为$M\times N$像素的数字图像，其二维傅里叶变换(DFT)为：

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\mathrm{e}^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

- 其离散傅里叶反变换（IDFT）的形式为：

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\mathrm{e}^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

- 对于MatLab，F(1,1)和f(1,1)分别对应于数学量$F(0,0)$和$f(0,0)$，$F(0,0)$即频率域原点的值称为直流分量，它等于$f(0,0)$平均值的MN倍。

$F(u,v)$的性质

图像处理与分析基础

- $F(u,v)$是复数，令$R(u,v)$和$I(u,v)$分别表示$F(u,v)$的实部和虚部，则有：

$$|F(u,v)|=[R^2(u,v)+I^2(u,v)]^{1/2}$$

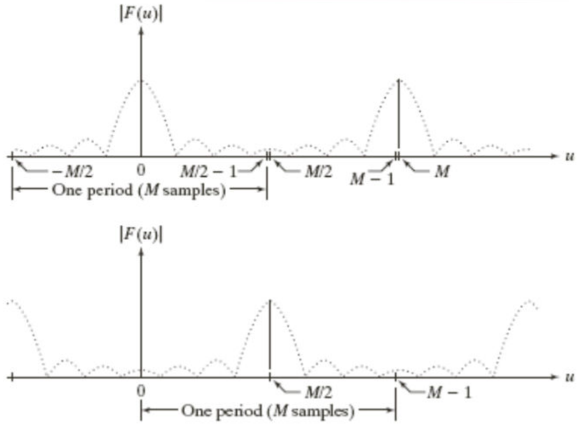
- 变换的相角定义为：

$$\varphi(u,v)=\arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

- 用极坐标表示：
- $$F(u,v)=|F(u,v)|\mathrm{e}^{-j\varphi(u,v)}$$
- 功率谱定义为：
- $$P(u,v)=|F(u,v)|^2=R^2(u,v)+I^2(u,v)$$
- 频谱关于原点对称：$|F(u,v)|=|F(-u,-v)|$
- DFT在u、v方向上是无穷周期的，周期由M和N决定：
- $$F(u,v)=F(u+k_1M,v+k_2N)$$

图像处理与分析基础

频谱的移动——变换前先将f(x)乘以(-1)^x



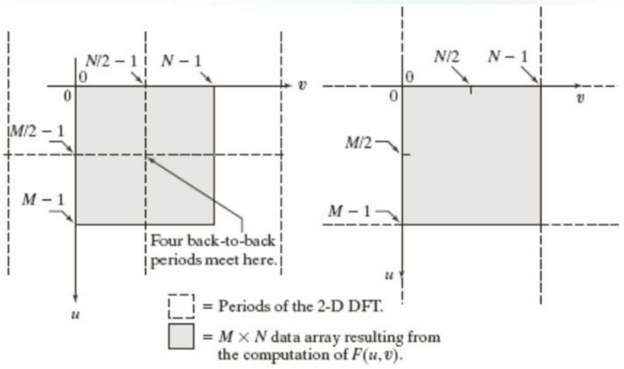
a
b

FIGURE 3.1
(a) Fourier spectrum showing back-to-back half periods in the interval $[0, M-1]$.
(b) Centered spectrum in the same interval, obtained by multiplying $f(x)$ by $(-1)^x$ prior to computing the Fourier transform.

图像处理与分析基础

2维频谱的移动

Fc=fftshift(F)
F=ifftshift(Fc)



a b

FIGURE 3.2
(a) $M \times N$ Fourier spectrum (shaded), showing four back-to-back quarter periods.
(b) Spectrum after multiplying $f(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ prior to computing the Fourier transform. The shaded period is the data that would be obtained by using the DFT.

图像处理与分析基础

观察二维频谱和相位谱

- f=imread('f0303.tif');
- 观察F的复数矩阵
- 观察Fc和phi图像

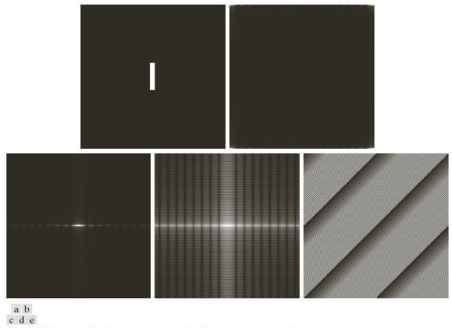


FIGURE 3.3 (a) Image. (b) Fourier spectrum. (c) Centered spectrum. (d) Spectrum visually enhanced by a log transformation. (e) Phase angle image.

- F=fft2(f);
- S=abs(F);
- Fc=fftshift(F);
- S2=log(1+abs(Fc));
- imshow(S2, [ ])

- F=ifftshift(Fc);
- phi=atan2(imag(F),real(F));
- phi=angle(F);
- F=S.*exp(i*phi);

图像处理与分析基础

频率矩阵中心

0	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

普通坐标

1	2	3	4	5	6	7	8
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

MatLab

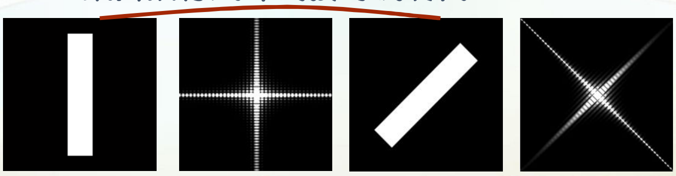
[floor(M/2)+1, floor((N/2)+1]

注：fft2把输入图像无缩放地变为double类。为避免错误，先用tofloat把输入图像转换为[0 1]内地浮点数，然后在过程地末尾用tofloat的revertclass将结果转换为与原始图像相同的类。

图像处理与分析基础

图像傅里叶变换实例

- 二维离散傅立叶变换的旋转性



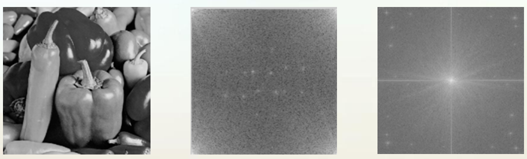
（a）原始图像　（b）原图像的傅立叶频谱　（c）旋转图像　（d）旋转图像之傅立叶频谱

- 对$f(x,y)$ 旋转一个角度θ_0 对应于将其傅里叶变换$F(u,v)$ 也旋转相同的角度θ_0。

图像处理与分析基础

图像傅里叶变换实例

- 对图(a)进行傅里叶变换，其频谱如图(b)，利用平移性质，在原图基础上乘以$(-1)^{x+y}$，其频谱如图(c).



（a）原图　（b）频谱图　（c）中心移到零点的频谱图

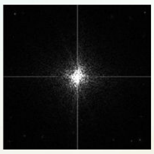
二维离散傅里叶变换结果中频率成分分布示意图

图像处理与分析基础

图像傅里叶变换实例

- 将上页的(a)图乘一指数，图像如下图(a)，亮度整体变暗，其频谱如下图(b)(零点为频率中心).

(a) 变暗的图像



(b) 变暗后中心移到 零点的频谱图

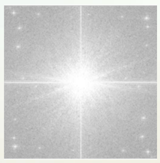
将原图乘以e^{-1}，可看出当图像亮度变暗后，中央低频成分变小。中央低频成分代表了图像的平均亮度，当亮度发生变化，频谱中的低频成分也发生改变.

图像处理与分析基础

图像傅里叶变换实例

- 例6.5：加入高斯噪声，得出一个有颗粒噪音的图，并将其中心移到零点的频谱图

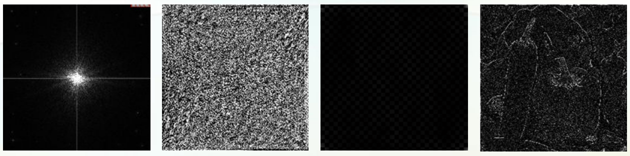
(a) 有颗粒噪音



(b) 有颗粒噪音中心移到零点之频谱图

图像处理与分析基础

图像傅里叶变换实例



(b) 幅值谱　(c) 相位谱　(d) 幅值谱重构图像　(e) 相位谱重构图像

从幅值谱图像中得到的信息比在相位谱图像中得到的信息多.

但由幅值谱重构图像(相位设为0)，所得到的图像与原始图像相比，结果差别很大；

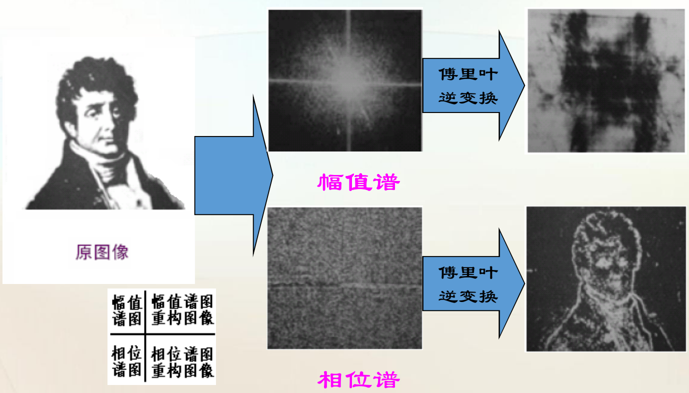
由相位谱重构图像(幅值设为一常数)，可以从中看出图像的基本轮廓.

2023年3月31日1时57分　13

图像处理与分析基础

图像傅里叶变换实例

(幅值及相位)意义



2023年3月31日1时57分　陈天华：《数字图像处理及应用：使用MatLab分析与实现》，清华出版社，2019

14

小结

空间域 $f(x, y)$ $\xrightarrow{\text{DFT}}$ 频率域 $F(u,v)$

频率域 $F(u,v)$ $\xrightarrow{\text{IDFT}}$ 空间域 $f(x, y)$

DFT=Digital Fourier Transform FFT=Fast Fourier Transform

$F(u,v) = |F(u,v)|e^{-j\varphi(u,v)}$

- 频谱是由实部和虚部组成的复数
- 幅度谱 $|F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{1/2}$
- 相位 $\varphi(u,v) = \arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$
- 时域中的离散信号在频域中是周期的。这个周期与采样间隔有关。不合适的采样频率会造成信号混叠失真。

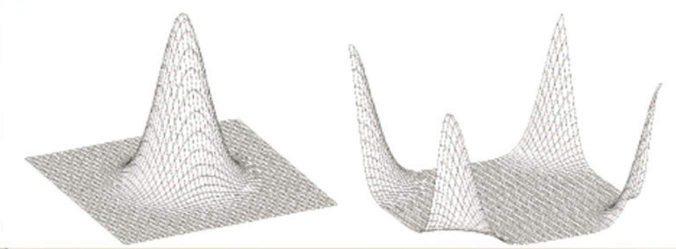
```
F=fft2(f);
F=S.*exp(i*phi);
S=abs(F);
phi=atan2(imag(F),real(F));
phi=angle(F);

Fc=fftshift(F);
F=ifftshift(Fc);
```

2. 频域滤波

图像处理与分析基础

卷积定理

- $f(x,y) * h(x,y) \overset{F}{\Leftrightarrow} H(u,v) \cdot F(u,v)$
- $f(x,y) \cdot h(x,y) \overset{F}{\Leftrightarrow} H(u,v) * F(u,v)$
- $H(u,v)$通常称为系统的传递函数
- 频域滤波就是选择滤波器传递函数通过规定的方法修改$F(u,v)$
- 下图是居中后的低通滤波器（左）和用于DFT滤波的形式（右）：



a b
FIGURE 3.4 Transfer functions of (a) a centered lowpass filter, and (b) the format used for DFT filtering. Note that these are frequency domain filters.

图像处理与分析基础

避免折叠误差

- 对于离散量，F和H都是周期的，如果函数非零部分与重复周期靠得很近，就会与相邻周期的频谱产生重叠——折叠误差。
- 可以用补0的方法来避免：
- 假定$f(x,y)$和$h(x,y)$的大小分别为$A \times B$和$C \times D$，通过对f和h补0后大小都为$P \times Q$，那么可以按如下选择以避免折叠误差：
- 即：$P \geq A + C - 1$ 和 $Q \geq B + D - 1$
- 对于$M \times N$的图像，有$P \geq 2M - 1$和$Q \geq 2N - 1$
- 对于FFT算法来说，P和Q为2的幂次时运算速度较快。
- Matlab函数：PQ=peddedsize(AB,CD,PARAM)
- 其中AB、CD、PQ分别为[A B]、[C D]、[P Q]
- PARAM='pwr2'，表示填0至最近2的幂次大小。

图像处理与分析基础

例3.1 有无填充对滤波效果的影响

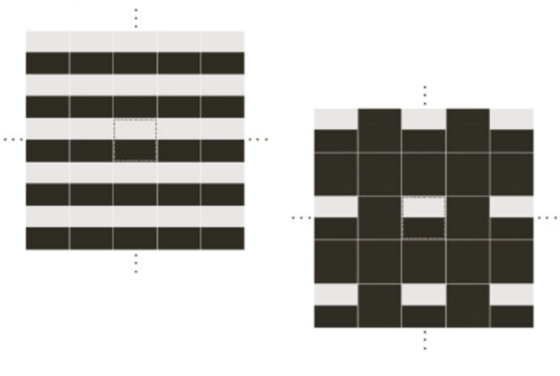
- 高斯低通滤波器：H=lpfilter('gaussian', M, N, sig);
- 填充：PQ=peddedsize(size(f));
- 填充后：Hp=lpfilter('gaussian', PQ(1), PQ(2), 2*sig);

a b c

FIGURE 3.5 (a) An image of size 256 × 256 pixels. (b) Image lowpass-filtered in the frequency domain without padding. (c) Image lowpass-filtered in the frequency domain with padding. Compare the upper portion of the vertical edges in (b) and (c).

图像处理与分析基础

暗含的无限周期序列



a b

FIGURE 3.6 (a) Implied, infinite periodic sequence of the image in Fig. 3.5(a). The dashed region represents the data processed by `fft2`. (b) The same periodic sequence after padding with 0s. The thin, solid white lines in both images are shown for convenience in viewing; they are not part of the data.

全填充后的结果（512×512）

- 变换后截取的一部分图像（256×256）
- gpc=gp(1:size(f,1), 1:size(f,2));
- 类似的空域滤波：
- h=fspecial('gaussian', 15, 7);
- gs=imfilter(f, h);

FIGURE 3.7 Full padded image resulting from `ifft2` after filtering. This image is of size 512 × 512 pixels. The dashed line shows the dimensions of the original, 256 × 256 image.

频域滤波的基本步骤

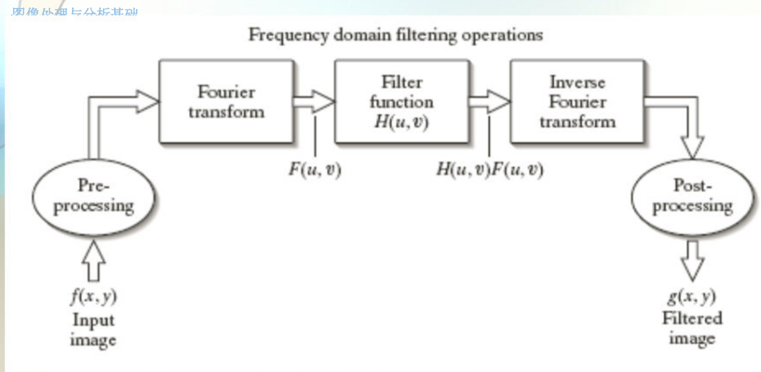


FIGURE 3.8 Basic steps for filtering in the frequency domain.

- 由线性系统理论可知，向线性系统输入一个脉冲(冲激)，输出可以表征该输出，称为冲激响应。本章滤波器系统的响应是有限的，该滤波器称为有限冲激响应(Finite Impulse Response，FIR)滤波器。

图像处理与分析基础

DFT滤波的基本步骤

- 设f为被滤波的图像，g为结果

1. [f, revertclass]=tofloat(f);
2. PQ=paddedsize(size(f)); %填充参数
3. F=fft2(f, PQ(1), PQ(2)); %二维傅里叶变换至频域
4. 生成一个PQ(1)×PQ(2)的滤波器H，如果是居中的则要令H=ifftshift(H);
5. G=H.*F; %频域内相乘
6. g=ifft2(G);
7. g=g (1:size(f,1), 1:size(f,2));
8. g=revertclass(g)

上述步骤可以用一个函数来完成：

g=dftfilt(f, H, classout)

classout	description
'original'	Default. The output is of the same class as the input.
'flitpoint'	The output is floating point of class single, or double if both f and H are of class double.

图像处理与分析基础

3. 频域滤波器的生成和应用

图像处理与分析基础

从空间滤波器获得频率域滤波器

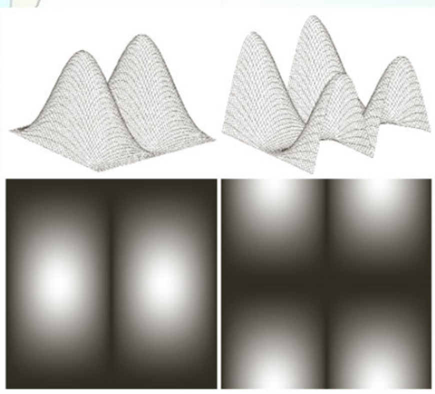
- H=freqz2(h, R, C);
- R: Row
- C: Colon
- h：二维空间滤波器
- H：对应的二维频率域滤波器
- 如果freqz2没有输出参量，则显示三维透视图
- 转换后H的中心不在原点，需要平移
- R和C需要考虑填充，以防频率混叠

- 例3.2——f0309.tif
- f=tofloat(f);
- F=fft2(f);
- S=fftshift(log(1+abs(F)));
- imshow(S, [ ])

a b
FIGURE 3.9
(a) A gray-scale image. (b) Its Fourier spectrum.

图像处理与分析基础

从空间滤波器获得频率域滤波器



a b
c d
FIGURE 3.10
(a) Absolute value of the frequency domain filter corresponding to a vertical Sobel spatial filter. (b) The same filter after processing with function ifftshift. Figures (c) and (d) show the filters as images.

- h=fspecial('sobel')';
- freqz2(h) %显示三维图
- PQ=paddedsize(size(f));
- H=freqz2(h, PQ(1), PQ(2));
- %将H的中心移至原点：H1=ifftshift(H);
- imshow(abs(H), [ ]);
- figure,
- imshow(abs(H1), [ ]);

图像处理与分析基础

从空间滤波器获得频率域滤波器

a b
c d

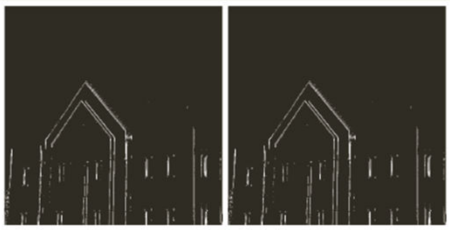
FIGURE 3.11 (a) Result of filtering Fig. 3.9(a) in the spatial domain with a vertical Sobel mask. (b) Result obtained in the frequency domain using the filter shown in Fig. 3.10(b). Figures (c) and (d) are the absolute values of (a) and (b), respectively.

- %空间滤波
- gs=imfilter(f, h);
- %频域滤波
- gf=dftfilt(f, H1);
- %显示
- imshow(gs, [ ]) %(a)
- imshow(gf, [ ]) % (b)
- imshow(abs(gs), [ ]) % (c)
- imshow(abs(gf), [ ]) % (d)

图像处理与分析基础

从空间滤波器获得频率域滤波器

- 上述图像经阈值处理后的二值图像可以使边缘更清楚：
- figure，imshow(abs(gs)>0.2*abs(max(gs(:))))
- figure，imshow(abs(gf)>0.2*abs(max(gf(:))))
- gs和gf两者之差可以忽略不记。



a b

FIGURE 3.12 Thresholded versions of Figs. 3.11(c) and (d), respectively, to show the principal edges more clearly.

图像处理与分析基础

思考题

- 什么是频域？实部和虚部分别是什么？与空间域有什么区别？两者之间是用什么方法转换的？
- 什么是频谱、幅度谱、相位谱、功率谱？写出公式并说明。
- 频谱$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$，说明了什么？
- 频域滤波的基本步骤是怎样的？写出使用的Matlab函数。
- g=dftfilt(f, H, classout)中H是指什么？如何获得H？该函数中H的中心点位置应在哪里？

图像处理与分析基础

4. 在频率域中直接生成滤波器

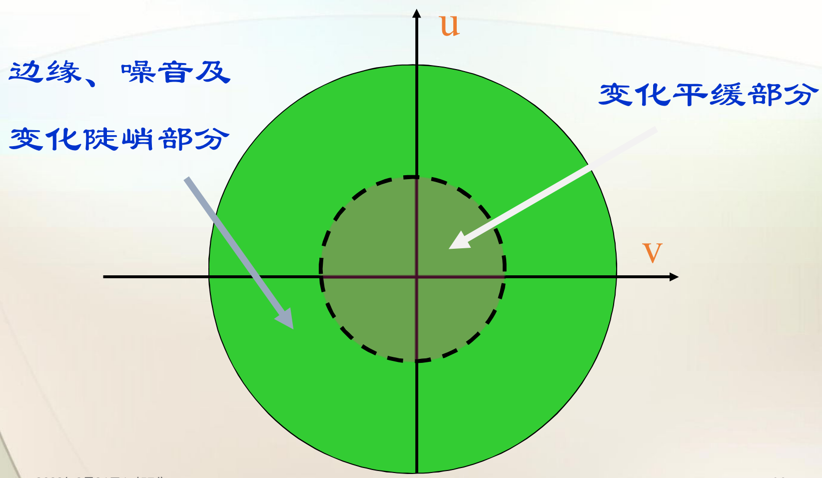
频域平面与空域特性的关系:

频率平面与图像空域特性的关系

- 图像变化平缓的部分靠近频率平面的圆心，这个区域为低频区域
- 图像中的边、噪音、变化陡峭的部分，以放射方向离开频率平面的圆心，这个区域为高频区域

图像处理与分析基础

频域增强的原理



距离计算

图像处理与分析基础

- dftuv生成网格数组：
  - [U, V]=dftuv(M, N)
  - 例如：[U, V]=dftuv(8, 5)
- U和V分别都是single类型的M×N数组。每个数组元素代表的是该位置与最近原点的纵轴方向的距离（U）和在横轴方向的距离（V），注意到图像关于原点重复，与下一个原点之间的距离用负值表示。
- 距离的平方可以表示为：
  - DSQ=U.^2+V.^2
  - D=sqrt(U.^2+V.^2)
- 上式可用函数
  - D=hypot(U, V)

低通（平滑）频率滤波器

图像处理与分析基础

- 低通滤波器具有如下传递函数：

TABLE 3.1 Lowpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

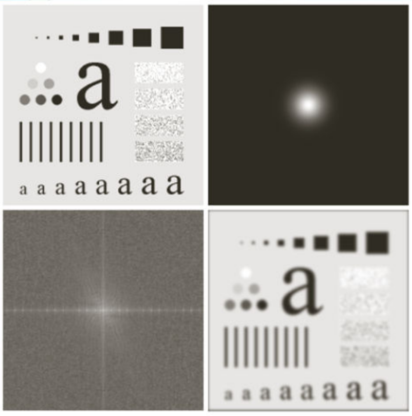
Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u,v)=\begin{cases}1 & \text{if } D(u,v)\le D_0\\ 0 & \text{if } D(u,v)>D_0\end{cases}$	$H(u,v)=\dfrac{1}{1+\left[D(u,v)/D_0\right]^{2n}}$	$H(u,v)=e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

- D_0为正数，$D(u,v)$为点(u,v)到滤波器中心的距离，满足$D(u,v)=D_0$的点的轨迹为一个圆。
- n阶巴特沃斯低通滤波器在$D(u,v)=D_0$处具有截止频率，此处的$H(u,v)=0.5$
- 高斯低通滤波器，在$D(u,v)=D_0$时，滤波器降到最大值的60.7%

例3.4 实际使用

图像处理与分析基础

500×500图像f0313.tif



a b
c d

FIGURE 3.13 Lowpass filtering. (a) Original image. (b) Gaussian lowpass filter shown as an image. (c) Spectrum of (a). (d) Filtered image.

- [f,revertclass]=tofloat(f);
- PQ=paddedsize(size(f));
- [U,V]=dftuv(PQ(1),PQ(2));
- D=hypot(U,V); %求距离
- D0=0.05*PQ(2); %D0值等于所填充图像宽度的5%
- H=exp(-(D.^2) / (2*(D0^2))); %高斯低通滤波
- g=dftfilt(f,H);
- g=revertclass(g);
- %图(b):
- figure,imshow(fftshift(H))
- %图(c):
- F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));
- figure,imshow(log(1+abs(fftshift(F))),[ ])
- %图(d):
- figure，imshow(g)

低通滤波器的通用函数

图像处理与分析基础

- H = lpfilter(type, M, N, D0, n)
- M,N为图像大小
- H居中需要调用函数Hc=fftshift(H)

type	含义
‘ideal’	理想低通滤波器，截止频率D0>=0
‘btw’	n阶巴特沃斯低通滤波器，截止频率D0>=0，n缺省值为1.0
‘gaussian’	高斯低通滤波器，截止频率（标准差）D0>=0，n不需要。

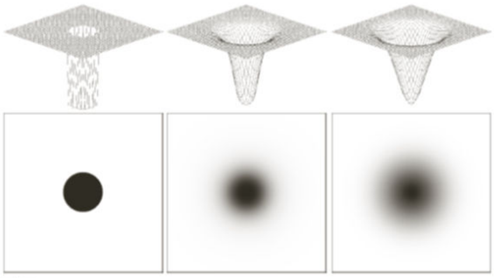
图像处理与分析基础

高通（锐化）滤波器

- $H_{HP}(u,v) = 1 - H_{LP}(u,v)$

TABLE 3.2 Highpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u,v)=\begin{cases}0 & \text{if } D(u,v)\le D_0\\ 1 & \text{if } D(u,v)>D_0\end{cases}$	$H(u,v)=\dfrac{1}{1+\left[D_0/D(u,v)\right]^{2n}}$	$H(u,v)=1-e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$



a b c
d e f

FIGURE 3.17 Top row: Perspective plots of ideal, Butterworth, and Gaussian highpass filters. Bottom row: Corresponding images. White represents 1 and black is 0.

图像处理与分析基础

高通滤波

```
>> f=imread('f0318.tif');
>> PQ=paddedsize(size(f));
>> D0=0.05*PQ(1);
>> H=hpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),D0);
>> g=dftfilt(f,H);
>> figure,imshow(g)
```

a b

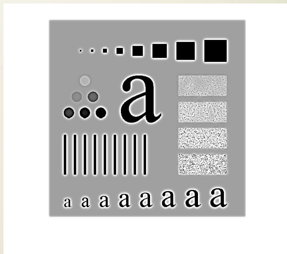
FIGURE 3.18 (a) Original image. (b) Result of Gaussian high-pass filtering.

图像处理与分析基础

高频强调滤波：

有没有办法在用高频滤波增强边缘的同时保留原图像的灰色底色呢？

- $H_{HFE}(u,v) = a + bH_{HP}(u,v)$
- 因为高通滤波滤除了直流项，图像的平均值为0，补偿的方法就是给高通滤波器加一个偏移量a。如果把滤波器乘以一个大于1的常量，两者结合起来的方法就称为高频强调滤波。
- >> He=0.7+2*H;
- >> gHe=dftfilt(f,He);
- >> figure,imshow(gHe)

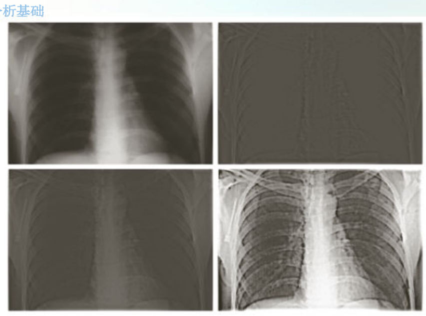


图像处理与分析基础

联合使用高频强调滤波和直方图均衡

a b
c d

FIGURE 3.19 High-frequency emphasis filtering. (a) Original image. (b) Highpass filtering result. (c) High-frequency emphasis result. (d) Image (c) after histogram equalization. (Original image courtesy of Dr. Thomas R. Gest, Division of Anatomical Sciences, University of Michigan Medical School.)



```
f=imread('f0319.tif');
PQ=paddedsize(size(f));
D0=0.05*PQ(1);
HBW=hpfilter('btw',PQ(1),PQ(2),D0,2);
H=0.5+2*HBW;
gbw=dftfilt(f,HBW,'fltpoint');
gbw=gscale(gbw); %scales the intensity to [0 255]
ghf=dftfilt(f,H,'fltpoint'); %enhansed
ghf=gscale(ghf); %scales to [0.255]
ghe=histeq(ghf,256); %hist equal

%Show images in one figure
subplot(2,2,1),subimage(f)
title('Original')
subplot(2,2,2),subimage(gbw)
title('High Pass')
subplot(2,2,3),subimage(ghf)
title('Enhanced HP')
subplot(2,2,4),subimage(ghe)
title('EHP+HistEq')
```

图像处理与分析基础

小结

- 什么是频域
- 图像的频域表示
  - $F(u,v)$是复数，频谱分为幅度谱和相位谱
  - DFT在u、v方向上是无穷周期的，周期由M和N决定
  - 相关的函数：F=fft2(f);S=abs(F);Fc=fftshift(F); phi=angle(F);
- 卷积定理
- 折叠误差及避免
- DFT滤波的基本步骤
- 从空间滤波器获得频率域滤波器
- 在频率域中直接生成滤波器
  - 频域增强的原理和距离计算
  - 低通（平滑）频率滤波器
  - 高通（锐化）滤波器

图像处理与分析基础

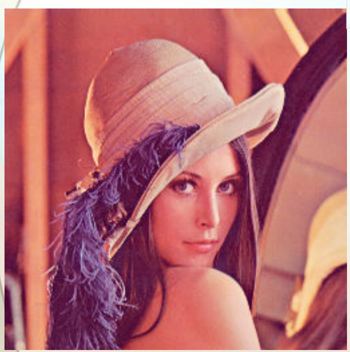
作业

f0217

- 例3.2，空间滤波和频率域滤波的比较
- 例3.4，例3.7，频率域直接生成滤波器，低通和高通
- 例3.8，合并使用高频强调滤波和直方图均衡化
- 尝试对图f0217用高通滤波进行合适的边缘增强并保留灰色层次。
- 对上次加椒盐噪声后的图用低通滤波器进行滤波，与中值滤波器比较。

图像处理与分析基础

作业



1. 将图lena.bmp转换成灰度图

```
i = rgb2gray(i)
```

2. 观察其幅度谱和相位谱图像
3. 分别作幅度谱、相位谱和全频谱的逆变换
4. 做高斯低通滤波（选择适当D_0）
5. 选择适当参数做强调滤波