รายวิชา : ENGCE207 ADVANCED TOPICS IN COMPUTER ENGINEERING ดัชนี: Dimensionally Reduction

ชื่อ-สกุล : เบญญาภา เรืองดัว   รหัสนักศึกษา : 68147206001-7

โจทย์ปัญหา

ชุดของข้อมูล 2 มิติ ดังต่อไปนี้แต่ละจุดจาก 1 จุด ดังนี้

จุดข้อมูล	X	Y
A	2	7
B	4	3
C	5	5
D	7	5

① ค่าเฉลี่ย

$$X = \frac{(2+4+5+7)}{4} = \frac{18}{4} = 4.5$$

$$Y = \frac{(7+3+5+5)}{4} = \frac{19}{4} = 9.5$$

ปรับข้อมูล

$P'(x,y)$	X	Y
A'	2-4.5 = -2.5	7-3.5 = -2.5
B'	4-4.5 = -0.5	3-3.5 = -0.5
C'	5-4.5 = 0.5	5-3.5 = 1.5
D'	7-4.5 = 2.5	5-25 = 1.5

② คำนวณ Covariance Matrix (C)

$$Cov\ (x_1, x_1) = \frac{(2-4.5)(2-9.5) + (4+9.5)(4-4.5)+(5-1.6)(5-1.5) + (7-4.5)(7-4.5)}{4-1}$$

$$= \frac{13}{3} \approx 4.33$$

$$Cov\ (x_1, x_2) = \frac{(2-4.5)(1-3.5) +(4-4.5)(3-3.5) +(5-4.5)(5-3.5) +(7-4.5)(5-3.5)}{4-1}$$

$$= \frac{11}{3} \approx 3.66$$

$Cov(x_2, x_1) = \dfrac{(1-3.5)(2-4.5) + (5-3.5)(4-1.5) + (5-3.5)(5-4.5) + (5-3.5)(7-4.5)}{4-1}$

$\quad = \dfrac{11}{3} \approx 3.66$

$Cov(x_2, x_2) = \dfrac{(1-3.5)(1-3.5) + (3-3.5)(3-3.5) + (5-3.5)(5-3.5) + (5-3.5)(5-3.5)}{4-1}$

$\quad = \dfrac{11}{3} \approx 3.66$

Covariance Matrix $= \begin{bmatrix} 4.33 & 3.66 \\ 3.66 & 3.66 \end{bmatrix}$

③ หาค่า Eigenvalues (λ)

$det\left[\begin{pmatrix} 4.33 & 3.66 \\ 3.66 & 3.66 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0$

$det\left[\begin{pmatrix} 4.33 & 3.66 \\ 3.66 & 3.66 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$

$det\left[\begin{pmatrix} 4.33 - \lambda & 3.66 \\ 3.66 & 3.66 - \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$

$(3.66)(3.66) = 13.39$

$(4.33-\lambda)(3.66-\lambda)$

$(4.33-\lambda)(3.66-\lambda) - 13.39 = 0$

$= 4.33 \times 3.66 - 4.33\lambda - 3.66\lambda + \lambda^2$

$4.33 \times 3.66 = 15.8478$

$\therefore = \lambda^2 - 7.99 + 15.8478$

จัดรูปสมการใหม่ $\quad \lambda^2 - 7.99\lambda + 15.8478 - 13.39 = 0$

$\lambda^2 - 7.99\lambda + 2.4578 = 0$

ใช้สูตร สมการกำลังสอง

$\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $a = 1, b = -7.99, c = 2.4578$

$\lambda = \dfrac{7.99 \pm \sqrt{(-7.99)^2 - 4(1)(2.4578)}}{2}$

$= \dfrac{7.99 \pm \sqrt{63.8401 - 9.8312}}{2}$

$= \dfrac{7.99 \pm \sqrt{54.0089}}{2}$

$= \dfrac{7.99 \pm 7.349}{2}$

$\lambda_1 = \dfrac{7.99 + 7.349}{2} \quad , \quad \dfrac{15.339}{2} = 7.67$

$\lambda_2 = \dfrac{7.99 - 7.349}{2} \quad , \quad \dfrac{0.691}{2} = 0.32$

$\therefore$ Eigenvalues ที่มากที่สุด $(\lambda_1 = 7.67)$

จาก $(C - \lambda I)v_i = 0$

$\left[\begin{pmatrix} 4.33 & 2.66 \\ 2.66 & 7.66 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\left[\begin{pmatrix} 4.33 & 2.66 \\ 2.66 & 7.66 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7.67 & 0 \\ 0 & 7.67 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\left[\begin{pmatrix} 4.33-7.67 & 2.66 \\ 2.66 & 7.66-7.67 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} -3.34 & 2.66 \\ 2.66 & -1.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} -3.34 x + 2.66 y \\ 2.66 x - 1.01 y \end{pmatrix} = 0$

$-3.34x + 3.66y = 0 \qquad 2.66x + 1.01y = 0$

$y = \frac{3.34}{2.66}x \cong 0.91x \qquad y = \frac{2.66}{1.01}x \cong 0.91x$

$\therefore \ y = 0.91x$

จาก $y = 0.91x$ เลือก $x = 1$ แล้วได้ $v = [1, 0.91]$

แต่ $\|v\| = \operatorname{sqrt}(x^2 + y^2)$ จะ $\|v\| = \operatorname{sqrt}(1^2 + 0.91^2) = \operatorname{sqrt}(1.8281) \cong 1.352$

ทำให้เป็น v หน่วย $\hat{u} = v / \|v\|$

$x-unit = \frac{1}{1.352} \cong 0.739$

$y-unit = \frac{0.91}{1.352} \cong 0.673$

ดังนั้น v_1 (PC1) $= [0.74, 0.67]$

(185)

เลือก P_1 มาเป็นของ อันๆ

เลือก $P(1 \cdot [0.74, 0.67]) \times$ อันๆ ตัวแรกได้

$A^* = (-2.5)(0.74) + (-2.5)(0.67) \cong -3.53$

$B^* = (-0.5)(0.74) + (-0.5)(0.67) \cong -0.71$

$C^* = (0.5)(0.74) + (0.5)(0.67) \cong 1.39$

$D^* = (2.5)(0.74) + (1.5)(0.67) \cong 2.86$

แปรผัน ภาพข้อมูล 2D (x, y) เหลือเป็นมิติ 1D

ปัญหา เริ่ม ข้อ

จงคำนวณ 2.ธ6 ค่าเฉลี่ย ขึ้นกลางค่าเฉลี่ย ข้อมูล 4 จุด ดังนี้

จุดข้อมูล	X	Y
E	1	5
F	2	3
G	4	2
H	5	1

① เฉลี่ย เริ่ม

$x = \dfrac{(1+2+4+5)}{4} = \dfrac{11}{4} = 3$

$y = \dfrac{(5+3+2+1)}{4} = \dfrac{11}{4} = 2.75$

ปรับ ข้อมูล

จุดข้อมูล	X	Y
E'	$1-3 = -2$	$5 - 2.75 = 2.25$
F'	$2-3 = -1$	$3 - 2.75 = 0.25$
G'	$4-3 = 1$	$2 - 2.75 = -0.75$
H'	$5-3 = 2$	$1 - 2.75 = -1.75$

② สร้าง Covariance Matrix (C)

$Cov(x_1, x_1) = \dfrac{(1-3)(1-3) + (2-3)(2-3) + (4-3)(4-3) + (5-3)(5-3)}{4-1} = \dfrac{10}{3} = 3.33$

$Cov(x_1, x_2) = \dfrac{(1-3)(5-2.75) + (2-3)(3-2.75) + (4-3)(2-2.75) + (5-3)(1-2.75)}{4-1}$

$= \dfrac{-9}{3} = -3$

$Cov(x_2, x_1) = \dfrac{(5-2.75)(1-3) + (3-2.75)(2-3) + (2-2.75)(4-3) + (1-2.75)(5-3)}{4-1}$

$= \dfrac{-9}{3} = -3$

$Cov(x_2, x_2) = \dfrac{(5-2.75)(5-2.75) + (3-2.75)(3-2.75) + (2-2.75)(2-2.75) + (1-2.75)(1-2.75)}{4-1}$

$= \dfrac{8.75}{3} = 2.92$

Covariance Matrix $= \begin{bmatrix} 3.33 & -3 \\ -3 & 2.92 \end{bmatrix}$

③ จงหา Eigenvalues (λ)

$$\det\left[\begin{pmatrix} 3.33 & -1 \\ -3 & 2.92 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 3.33 & -1 \\ -3 & 2.92 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 3.33-\lambda & -1 \\ -3 & 2.92-\lambda \end{pmatrix}\right] = 0 \times$$

$(-1)(-3) = 9$

$(3.33-\lambda)(2.92-\lambda)$

$(3.33-\lambda)(2.92-\lambda) - 9 = 0$

$= 7.33 + 8.92 - 3.33 - 2.92 + \lambda^2$

$3.33 \times 2.92 = 9.8236$

$\therefore = \lambda^2 - (3.33 + 2.92) + 9.9236$

$= \lambda - 6.25 + 9.9236$

เขียนสมการใหม่ $\lambda^2 - 6.25 + 9.9236 - 9 = 0$

$\lambda^2 - 6.25 + 0.9236 = 0$

จากสูตรอัตราส่วน

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a = 1, \; b = -6.25, \; c = 0.9236$$

$$\lambda = \frac{6.25 \pm \sqrt{(6.25)^2 - 4(1)(0.9236)}}{2}$$

$$= \frac{6.25 \pm \sqrt{39.0625 - 2.8941}}{2}$$

$$= \frac{6.25 \pm \sqrt{36.1681}}{2}$$

$$= \frac{6.25 \pm 6.011}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{6.26 + 6.011}{2} = \frac{12.261}{2} \approx 6.13$$

$$\lambda_2 = \frac{6.25 - 6.011}{2} = \frac{0.234}{2} \approx 0.12$$

$\therefore$ Eigenvalues ค่ามากสุด $(\lambda^2 = 6.13)$

เนื่องจาก $(C - \lambda_n - 1) x_n = 0$

$$\left[\begin{pmatrix} 3.33 & -1 \\ -3 & 2.92 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3.33 & -3 \\ -3 & 9.92 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6.13 & 0 \\ 0 & 6.13 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3.33 - 6.13 & -3 \\ -3 & 2.92 - 6.13 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2.8 & -3 \\ -3 & -3.21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2.8 x & -3 y \\ -3 u & -3.21 y \end{pmatrix} = 0$$

$-2.8x + 1(-3.04y) = 0$

$y = \frac{2.8}{3}x$

$y = 0.93y$

$(6)x) - 3.21y = 0$

$y = \frac{3}{3.21}$

$y = 0.93x$

$$\therefore y = 0.93x$$

^ $Y = 0.71v$ เมื่อ $x = 1$ จะ $v = [1, 0.71]$

ดังนั้น $\|v\| = sqrt(x^2+y^2)$ ได้ $\|v\| = sqrt(1^2 + 0.71^2) = sqrt(1.5649) \approx 1.265$

ก็จะได้ v ตาม. $\hat{U} = v/\|v\|$

$X - unit = \dfrac{1}{1.265} \approx 0.791$

$Y - unit = \dfrac{0.71}{1.265} \approx 0.689$ ดังนั้นได้ $v_n(PC1) : [0.79, 0.68]$

(4 & 5)

เรื่อง P_1 โปรเจกชัน

ได้ $PC_1 : [0.79, 0.68]$ x นำมาคิดแต่ละจุด

$E'' = (-2)(0.79) + (-2.75)(0.68) \approx 0.07$

$F'' = (-1)(0.79) + (0.25)(0.68) \approx -0.56$

$G'' = (1)(0.79) + (-0.75)(0.68) = 0.22$

$H'' = (2)(0.79) + (-1.75)(0.68) = 0.27$

เปลี่ยน ตัวแปร 2D (x,y) จากเดิม เหลือ 1D