

---

### คำชี้แจง

ให้นักศึกษาทำการลดมิติข้อมูลจาก 2 มิติ ให้เหลือ 1 มิติ โดยใช้ขั้นตอนของ Principal Component Analysis (PCA) กับชุดข้อมูลที่กำหนดให้ต่อไปนี้

### โจทย์ปัญหา

กำหนดชุดข้อมูล 2 มิติ ซึ่งประกอบด้วยจุดข้อมูล 4 จุด ดังนี้

จุดข้อมูล	X	Y
A	2	1
B	4	3
C	5	5
D	7	5

### โจทย์ปัญหาเพิ่มเติม

จากชุดข้อมูล 2 มิติที่กำหนดให้ ซึ่งประกอบด้วยจุดข้อมูล 4 จุด ดังตาราง:

จุดข้อมูล	X	Y
E	1	5
F	2	3
G	4	2
H	5	1

- **เลือก PC1 และแปลงข้อมูล**

เลือก Eigenvector ที่มี Eigenvalue สูงสุดเป็น Principal Component 1 (PC1)

$$PC1 = [0.73, 0.67]$$

- **แปลงข้อมูล Project Data:** นำ ข้อมูลที่ปรับแล้ว Centered Data มา คูณ Dot Product กับ PC1

- **สูตร:**  $\text{New Coordinate} = A' * PC1$

$$A'' = (-2.5)(0.73) + (-2.5)(0.67) = -3.5$$

$$B'' = (-0.5)(0.73) + (-0.5)(0.67) = -0.7$$

$$C'' = (0.5) (0.73) + (1.5) (0.67) = 1.37$$

$$D'' = (2.5) (0.73) + (1.5) (0.67) = 2.83$$

- ผลลัพธ์: ได้ลดมิติข้อมูลจาก 2D (x , y) เหลือเพียง 1D

โจทย์ปัญหาเพิ่มเติม

จุดข้อมูล X Y

E 1 5

F 2 3

G 4 2

H 5 1

$$\text{ค่าเฉลี่ย } (1+2+4+5)/4 = 3 \quad (5+3+2+1)/4 = 2.75$$

จุดข้อมูล X Y

$$E' 1 - 3 = -2 \quad 5 - 2.75 = 2.25$$

$$F' 2 - 3 = -1 \quad 3 - 2.75 = 0.25$$

$$G' 4 - 3 = 1 \quad 2 - 2.75 = -0.75$$

$$H' 5 - 3 = 2 \quad 1 - 2.75 = -1.75$$

## 2.คำนวณ Covariance Matrix

$$\text{Covariance Matrix} = \begin{pmatrix} \text{Cov}(X_1, X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Cov}(X_2, X_2) \end{pmatrix}$$

$$\text{Cov}(X_1, X_1) = \sum_{k=1}^4 (X_{1k} - \bar{X}_1)(X_{1k} - \bar{X}_1)$$

$$= \sum_{k=1}^4 (X_{1k} - \bar{X}_1)^2$$

$$= (1-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2$$

$$= 10$$

$$= 10$$

$$\frac{X_{11} - \bar{X}_1}{4-1} \frac{X_{11} - \bar{X}_1}{4-1} + \frac{X_{12} - \bar{X}_1}{4-1} \frac{X_{12} - \bar{X}_1}{4-1} + \frac{X_{13} - \bar{X}_1}{4-1} \frac{X_{13} - \bar{X}_1}{4-1} + \frac{(X_{14} - \bar{X}_1)(X_{14} - \bar{X}_1)}{4-1}$$

$$4-1$$

$$=$$

$$\frac{1 - 3}{4-1} \frac{1 - 3}{4-1} + \frac{2 - 3}{4-1} \frac{2 - 3}{4-1} + \frac{(4 - 3)(4 - 3)}{4-1} + \frac{(5 - 3)(5 - 3)}{4-1}$$

$$4-1$$

$$=$$

$$\frac{-2 - 2}{4-1} + \frac{-1 - 1}{4-1} + \frac{1 \cdot 1}{4-1} + \frac{(2)(2)}{4-1}$$

$$4-1$$

$$=$$

$$\frac{4 + 1 + 1 + 4}{4-1}$$

$$4-1$$

$$=$$

$$10$$

$$3$$

$$= 3.33$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) =$$

$$\sum_{k=1}^4$$

$$\frac{(X_{1k} - \bar{X}_1)(X_{2k} - \bar{X}_2)}{4-1}$$

$$4-1$$

$$=$$

$$\frac{X_{11} - \bar{X}_1}{4-1} \frac{X_{21} - \bar{X}_2}{4-1} + \frac{X_{12} - \bar{X}_1}{4-1} \frac{X_{22} - \bar{X}_2}{4-1} + \frac{X_{13} - \bar{X}_1}{4-1} \frac{X_{23} - \bar{X}_2}{4-1} + \frac{X_{14} - \bar{X}_1}{4-1} \frac{X_{24} - \bar{X}_2}{4-1}$$

$$4-1$$

$$=$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1 - 3 \quad 5 - 2.75 + 2 - 3 \quad 3 - 2.75 + 4 - 3 \quad 2 - 2.75 + (5 - 3)(1 - 2.75)}{4 - 1} \\
& = \\
& \frac{- 2 \quad 2.25 + - 1 \quad 0.25 + 1 - 0.75 + (2)(- 1.75)}{4 - 1} \\
& = \\
& \frac{- 4.5 + - 0.25 + - 0.75 + (- 3.5)}{4 - 1} \\
& = \\
& \frac{- 9}{3} \\
& = - 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}(X_2, X_1) = \\
& \sum_{k=1}^4 (X_{2k} - \bar{X}_2)(X_{1k} - \bar{X}_1) \\
& \frac{4-1}{4-1} \\
& = \\
& \frac{X_{21} - \bar{X}_2 \quad X_{11} - \bar{X}_1 + X_{22} - \bar{X}_2 \quad X_{12} - \bar{X}_1 + X_{23} - \bar{X}_2 \quad X_{13} - \bar{X}_1 + X_{24} - \bar{X}_2 \quad X_{14} - \bar{X}_1}{4 - 1} \\
& = \\
& \frac{5 - 2.75 \quad 1 - 3 + 3 - 2.75 \quad 2 - 3 + 2 - 2.75 \quad 4 - 3 + (1 - 2.75)(5 - 3)}{4 - 1}
\end{aligned}$$

=

$$2.25 - 2 + 0.25 - 1 + - 0.75 \cdot 1 + (- 1.75)(2)$$

$$4 - 1$$

=

$$- 4.5 + - 0.25 + - 0.75 + (- 3.5)$$

$$4 - 1$$

=

$$- 9$$

$$3$$

$$= - 3$$

$$\text{Cov}(X_2, X_2) =$$

$$\sum_{k=1}^4$$

$$(X_{2k} - \bar{X}_2)(X_{2k} - \bar{X}_2)$$

$$4 - 1$$

=

$$\frac{X_{21} - \bar{X}_2}{X_{21} - \bar{X}_2} + \frac{X_{22} - \bar{X}_2}{X_{22} - \bar{X}_2} + \frac{X_{23} - \bar{X}_2}{X_{23} - \bar{X}_2} + \frac{X_{24} - \bar{X}_2}{X_{24} - \bar{X}_2}$$

$$4 - 1$$

=

$$5 - 2.75 \cdot 5 - 2.75 + 3 - 2.75 \cdot 3 - 2.75 + 2 - 2.75 \cdot 2 - 2.75 + (1 - 2.75)(1 - 2.75)$$

$$4 - 1$$

=

$$2.25 \cdot 2.25 + 0.25 \cdot 0.25 + - 0.75 - 0.75 + (- 1.75)(- 1.75)$$

$$4 - 1$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&5.06 + 0.06 + 0.56 + 3.06 \\
&4 - 1 \\
&= \\
&8.74 \\
&3 \\
&= 2.91 \\
\text{Covariance Matrix} &= \begin{bmatrix} 3.33 & -3 \\ -3 & 2.91 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### 3. คำนวณ Eigenvalues ( $\lambda$ )

-หาค่า  $\lambda$  ที่ทำให้สมการ  $\det(C - \lambda) = 0$  เป็นจริง

$$\begin{aligned}
&\det \begin{bmatrix} 3.33 & -3 \\ -3 & 2.91 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \\
&\det \begin{bmatrix} 3.33 - \lambda & -3 \\ -3 & 2.91 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \\
&(-3)(-3) = 9 \\
&\det \begin{bmatrix} 3.33 - \lambda & -3 \\ -3 & 2.91 - \lambda \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-3)(-3) = 9 \\
&\det \begin{bmatrix} 3.33 - \lambda & -3 \\ -3 & 2.91 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \\
&(3.33 - \lambda)(2.91 - \lambda) \\
&\emptyset \text{ เขียนเป็นสมการ}
\end{aligned}$$

$$(3.33 - \lambda)(2.91 - \lambda) - 9 = 0$$

Ø คูณพจน์

$$3.33 * 2.91 - 3.33\lambda - 2.91\lambda + \lambda^2$$

$$3.33 * 2.91 = 9.69$$

$$- 3.33\lambda - 2.91\lambda = - 6.24$$

จะได้

$$\lambda^2 - 6.24\lambda + 9.69$$

Ø ลบ 9 ออก

$$\lambda^2 - 6.24\lambda + 9.69 - 9 = \lambda^2 - 6.24\lambda + 0.69$$

Ø แก้สมการกำลังสอง

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2a$$

$$\lambda = -(-6.24) \pm \sqrt{(6.24)^2 - 4(1)(0.69)}$$

$$2(1)$$

$$\lambda_1 =$$

$$6.24 \pm 6.01$$

$$2$$

$$=$$

$$12.25$$

$$2$$

$$= 6.12$$

$$\lambda_2 =$$

$$6.24 - 6.01$$

$$2$$

$$= \frac{0.23}{2} = 0.11$$

• แก้มการกำลังได้ Eigenvalue

$\lambda_1 = 6.12$  Principal Eigenvalue

$$\lambda_2 = 0.11$$

4. ห Eigenvector สำหรับค่าที่ใหญ่ที่สุด ( $\lambda_1 = 6.12$ )

-แก้มการ (C -  $\lambda_1$ )  $V_1 = 0$

$$3.33 - 3$$

$$- 3 \quad 2.91 - \lambda_1$$

$$1 \quad 0$$

$$0 \quad 1$$

$$x$$

$$y = 0$$

$$3.33 - 3$$

$$- 3 \quad 2.91 - 6.12 \quad 1 \quad 0$$

$$0 \quad 1$$

$$x$$

$$y = 0$$

$$3.33 - 3$$

$$- 3 \quad 2.91 -$$

$$6.12 \quad 0$$



$$0.612$$

$$x$$

$$y = 0$$

$$3.33 - 6.12 - 3$$

$$- 3.291 - 6.12$$

$$x$$

$$y = 0$$

$$- 2.79 - 3$$

$$- 3 - 3.21$$

$$x$$

$$y = 0$$

$$- 2.79x + - 3x$$

$$- 3y - 3.21y$$

$$= 0$$

$$- 2.79x + - 3y = 0 - 3x - 3.21y = 0$$

---


$$y =$$

$$2.79$$

$$3x = 0.93x y = 3$$

$$3.21$$

$$x = 0.93x$$

5. แปลงเวกเตอร์ 1 หน่วย  $y=0.93x$

-เวกเตอร์ตั้งต้น: จาก  $y=0.93x$  และเลือก  $x=1$  จะได้เวกเตอร์  $v = [1, 0.93]$

$$v = \sqrt{1^2 + 0.93^2} = \sqrt{1 + 0.8649} = \sqrt{1.8649} = 1.365$$

$$x_{\text{unit}} = 1/1.365 = 0.732$$

$$y_{\text{unit}} = 0.93/1.365 = 0.681$$

$$\text{Eigenvector } v1 \text{ PC1} = [0.73, 0.68]$$

6. เลือก PC1 แล้วแปลงข้อมูล

$$\text{PC1} = [0.73, 0.68]$$

$$E'' = (-2) (0.73) + (2.25) (0.68) = 0.07$$

$$F'' = (-1) (0.73) + (0.25) (0.68) = -0.90$$

$$G'' = (1) (0.73) + (-0.75) (0.68) = 0.56$$

$$H'' = (2) (0.73) + (-1.75) (0.68) = 0.27$$

สรุป

$$E'' 0.07$$

$$F'' -0.90$$

$$G'' 0.56$$

$$H'' 0.27$$