

Wojciech Wróbel	Gr lab 8	<b>Prowadzący:</b> Dr inż. Piotr Kustra
<b>Data:</b> 16.01.2021	Sprawozdanie z programu – Metoda Elementów Skończonych	
<b>Semestr:</b> 5		

## 1. Opis Problemu

Przedstawiony problem polegał na rozwiązaniu zagadnienia nieustalonej wymiany ciepła w układzie dwuwymiarowym poprzez rozwiązanie równania Fouriera, aby w ten sposób otrzymać wartości temperatury na powierzchni podczas symulacji.

Równanie to dla procesu niestacjonarnego wygląda następująco:

$$\operatorname{div}(k(t)\operatorname{grad}(t)) + Q = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

Zadano następujący warunek brzegowy:

$$q = \alpha(t - t_{\infty})$$

,gdzie :

- q – gęstość strumienia ciepła
- $t_{\infty}$  – temperatura otoczenia
- t – temperatura na powierzchni
- $\alpha$  – współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła

W programie wykorzystano niejawną schemat wyznaczania temperatury:

$$\left([H] + \frac{[C]}{\Delta \tau}\right)\{t_1\} - \left(\frac{[C]}{\Delta \tau}\right)\{t_0\} + \{P\} = 0$$

Aby rozwiązać dane równanie należało obliczyć:

- **Macierz Sztywności H :**

Jest to macierz o wymiarach ilość węzłów w danej siatce na ilość węzłów w danej siatce. Obliczenie wymagało policzenia macierzy H lokalnych elementów w danej siatce, a następnie ich agregacja .

Każda macierz H lokalna elementu miała wymiary liczba węzłów w elemencie na liczba węzłów w elemencie.

$$[H] = \int_V k \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T \right) dV + \int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS$$

, gdzie :

- k – przewodność cieplna
- {N} – wektor funkcji kształtu zawierający:

$$- N_1 = 0,25(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$- N_2 = 0,25(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$- N_3 = 0,25(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$- N_4 = 0,25(1 - \xi)(1 + \eta)$$

Pierwszym krokiem było obliczenie pochodnych funkcji kształtu po  $\xi$  oraz  $\eta$ . Powstawały wówczas dwie macierze  $\frac{\partial \{N\}}{\partial \xi}$  oraz  $\frac{\partial \{N\}}{\partial \eta}$  o wymiarach ilości punktów całkowania (zależnych od schematu całkowania) na ilość funkcji kształtu. Na podstawie owych macierzy oraz współrzędnych węzłów elementu można było obliczyć macierz Jacobiego dla każdego punktu całkowania:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Dzięki otrzymanej macierzy można było obliczyć macierze  $\frac{\partial \{N\}}{\partial x}$  oraz  $\frac{\partial \{N\}}{\partial y}$  o wymiarach: ilość punktów całkowania na ilość funkcji kształtu. Dla każdego punktu całkowania należały transponować odpowiednie wiersze z obu macierzy, i utworzyć z nich macierze, zsumować i pomnożyć przez parametry. Powstałe macierze dla każdego punktu całkowania należało zsumować mnożąc przez wagi odpowiadające użytemu schematowi całkowania.

Część uwzględniająca warunki brzegowe podana jest wzorem  $\int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS$ . Liczony na podstawie boków na brzegu siatki. Warunek ten sprawdzany był poprzez odpowiednie etykiety węzła. Warunek musiały spełniać węzły po obu końcach boku

Liczenie polega na wyznaczeniu macierzy HBC dla każdego boku będącego na brzegu, a następnie dodanie jej do macierzy H elementu.

### - Macierz C

Jest to macierz o wymiarach ilość węzłów w siatce na ilość węzłów w siatce. Powstaje poprzez agregacje lokalnych macierzy C elementów danej siatki.

Do obliczenia macierzy C wykorzystano funkcje kształtu jak i potrzebne były dane od użytkownika – gęstość  $\rho$  oraz ciepło właściwe  $c$ .

$$[C] = \int_V c\rho\{N\}\{N\}^T dV$$

Obliczenie macierzy C w elemencie wymaga obliczenia jej w każdym jego punkcie całkowania, a następnie przy odpowiednim pomnożeniu przez wagi zsumowanie ich.

### - Wektor P

Jest to wektor o wymiarze o wielkości ilości węzłów. Do jego obliczenia potrzebne były Funkcje kształtu, temperatura otoczenia jak i współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła. Jego również agregowało się z wektorów P elementów siatki.

$$\{P\} = - \int_S \alpha \{N\} t_{\infty} dS$$

## 2. Struktura Programu

### Klasy:

- Node – reprezentuje węzeł w siatce, zawiera jego współrzędne, identyfikator oraz flagę ustalającą, czy znajduje się na brzegu.
- Element – reprezentuje element siatki, zawiera współrzędne czterech swoich węzłów, oraz swój numer w siatce.
- Frame – klasa siatki zawierająca obiekty Element oraz Node. Odpowiedzialna jest za agregację macierzy H, C oraz wektora P.
- DNCalculator – odpowiedzialna za obliczenia w układzie  $\xi$  i  $\eta$  – za schemat całkowania oraz obliczania funkcji kształtu i ich pochodnych.
- Elem4 – odpowiedzialna za liczenie macierzy H i C oraz wektora P lokalnych dla elementu. Wykorzystuje obiekty typu DNCalculator.

### Wyznaczanie temperatury:

```

def uklad(data : GlobalData):
    iter = int(data.time/data.step)
    temp = [data.inittT for _ in range(data.nN)]
    frame = Frame(data)
    hg = frame.calculateHGlobal()
    cg = frame.calculateCGlobal()
    pg = frame.calculatePLGlobal()
    for iteracja in range(iter):

        matrix = [[0 for _ in range(len(hg) + 1)] for _ in range(len(hg))]
        for i in range(len(hg)):
            for j in range(len(hg[i])):
                matrix[i][j] = hg[i][j] + cg[i][j]/data.step

        for i in range(len(pg)):
            cxt = 0
            for j in range(len(cg[i])):
                cxt += (cg[i][j]/data.step) * temp[j]
            matrix[i][len(hg)] = -pg[i] + cxt

        tempNew = gaussElimination(matrix)
        print(iteracja + 1, "\tmin: {}, max: {}".format(min(tempNew), max(tempNew)))

        temp = tempNew

```

### 3. Symulacja

Test 1:

Dane:

```

data.txt
1  0.1  # H
2  0.1  # W
3  4    # N_H
4  4    # N_B
5  25   # Przewodność - k
6  2    # schemat całkowania
7  700  # ciepło właściwe
8  7800 # gęstość
9  300  # alfa
10 1200 # temperatura otoczenia
11 100  # początkowa temperatura
12 500  # czas symulacji
13 50   # skok czasowy

```

Wyniki:

iteracja	MIN	MAX
1	110.03797627584362	365.8154683350923
2	168.83701629178373	502.5917112218351
3	242.80085363244496	587.3726650238904
4	318.61459593642365	649.3874813298511
5	391.2557985002312	700.0684178779048
6	459.03691499639035	744.0633412641018
7	521.5862908442494	783.3828460480661

8	579.0344662587194	818.9921833030079
9	631.6892625741264	851.4310374575703
10	679.9076230022687	881.0576290015756

#### Test 2:

#### Dane:

```

15 0.1 # H
16 0.1 # W
17 31 # N_H
18 31 # N_B
19 25 # Przewodność - k
20 2 # schemat całkowania
21 700 # ciepło właściwe
22 7800 # gęstość
23 300 # alfa
24 1200 # temperatura otoczenia
25 100 # początkowa temperatura
26 100 # czas symulacji
27 1 # skok czasowy
28

```

#### Wyniki:

iteracja	MIN	MAX
1	100.00000000027184	149.5569482170793
2	100.00000000529111	177.4449259524644
3	100.00000000514606	197.26696215295766
4	100.00000033441955	213.1527871314316
5	100.00000163824055	226.68258342041534
6	100.00000647120335	238.60706462520116
7	100.00002152936412	249.3466916742557
8	100.00006221273836	259.165078850641
9	100.00015978338138	268.2406886921402
10	100.00037134490576	276.70109755706306
11	100.00079223547893	284.64128289677114
12	100.00156984604932	292.134218776951
13	100.00291748374657	299.23740969053955
14	100.0051267973751	305.99712129183945
15	100.00857746338318	312.4512299961281
16	100.01374321385866	318.6312059361684
17	100.02119375915802	324.5635313055202
18	100.0315926132822	330.27073900349114
19	100.04569119988858	335.77218889137805
20	100.06431986843127	341.0846583898194

## 4. Wnioski

Otrzymane wyniki za pomocą napisanego przeze mnie programu pokrywają się z oczekiwanymi wynikami, co upewnia o poprawności działania programu.

Otrzymano w ten sposób rozwiązanie nieustalonej wymiany ciepła w układzie dwuwymiarowym poprzez rozwiązanie równania Fouriera. Symulacje te były przeprowadzane dla dwuwymiarowych obiektów o kształtach prostokątnych, jednak istnieje możliwość implementacji siatki o nieregularnych kształtach. Program taki pozwala na szybkie badanie zachowania materiału przy podaniu różnych parametrów. W programie uwzględniono warunki brzegowe, co ma znaczący wpływ na wyniki i lepiej oddaje warunki rzeczywiste. Metoda Elementów Skończonych jest obecnie bardzo popularną metodą rozwiązywania podobnych problemów. Jest to uniwersalna i wydajna metoda numeryczna.