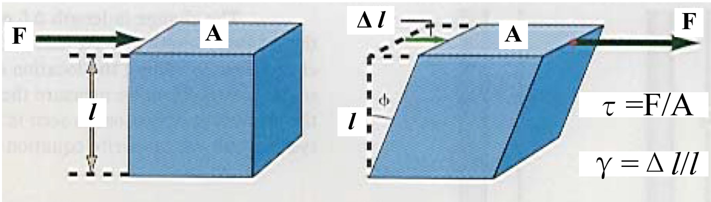
切变模量的测量

本实验利用扭摆法测量切变模量，同时了解扭摆的工作原理。

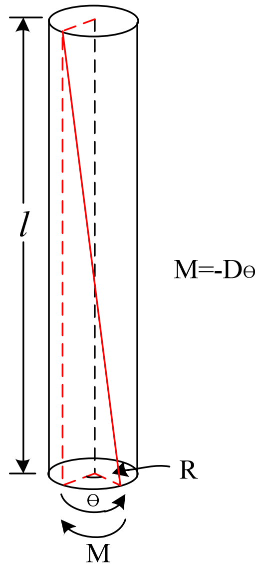
实验原理

材料在平行于其表面的力的作用下将发生剪切形变。切变模量 G 为剪切应力τ与剪切应变γ的比值。材料的应变γ通常很小，难于测量。本实验采用扭摆法测量切变模量。



$$G = \frac{\text{剪切应力}}{\text{剪切应变}} = \frac{\tau}{\gamma} \tag{1}$$

金属丝一端固定，另一端悬挂有一定质量的物体（条状或盘状），即可构成一个扭摆。当扭转金属丝一个角度后释放，金属丝会恢复到原来的位置。于是，金属丝对悬挂的物体有一个力矩作用，使得物体来回转动。下面定量分析扭摆的运动过程。



下面将证明，当扭转角度足够小，金属丝形变处于弹性限度内，内部力矩与角度成正比。如图，当金属丝被扭过一定角度时，其横截面发生了剪切形变。且与轴线相同距离处，形变的大小相同，即扭转发生的剪切形变是轴对称的。在距离轴线ρ处，应变为：$\gamma = \rho\theta/l$。当扭转形变处于弹性限度内，金属丝内部的应力与应变成正比：$\tau = G\gamma$。相对轴线的单位面积的力矩为：$\tau\rho$。考虑整个横截面，金属丝内部的总力矩为：

$$M = \iint \tau\rho \times dS = \int_0^R G\rho\frac{\theta}{l}\rho \times 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi R^4 G}{2l}\theta \tag{2}$$

采用矢量符号，方程（2）可写为：

$$\mathbf{M} = -\frac{\pi R^4 G}{2l}\boldsymbol{\theta} \tag{3}$$

$\boldsymbol{\theta}$是角位移。内力矩与角位移的比例系数仅与金属丝尺寸和材料性质有关，称为扭转常数D。因此，当金属丝扭转小角度时，内力矩的大小正比于角位移，方向与角位移相反。该力矩将使得金属丝恢复至原位置，叫恢复力矩。

$$D = \frac{\pi R^4 G}{2l} \tag{4}$$

当恢复力矩作用于悬挂的物体时，在忽略阻力的情况下，根据牛顿第二定律有：

$$I_0\frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2}+D\boldsymbol{\theta}=0 \tag{5}$$

这是一个简谐运动的方程。因此物体在恢复力矩作用下将会来回转动，周期为：

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \tag{6}$$

I_0为悬挂物体的转动惯量。因此，由（4）可见，切变模量可通过扭转常数的测量得到，而扭转常数可由扭摆的周期和悬挂物的转动惯量得到。

本实验测量对象是钢丝，一条状物悬挂于其下端构成扭摆。悬挂物的转动惯量不好计算。因此，我们在扭摆上再加一个圆环来改变扭摆的转动惯量，则扭摆周期变为为$T_1=2\pi\sqrt{\frac{I_0+I_1}{D}}$。$I_1=\frac{1}{2}m(r_{\text{in}}^2+r_{\text{out}}^2)$为圆环的转动惯量。这样，联立两个方程，可以计算出扭转常数。最终得到钢丝扭转常数D的计算公式为：

$$D=4\pi^2\frac{I_1}{T_1^2-T_0^2}=\frac{2\pi^2m(r_{\text{in}}^2+r_{\text{out}}^2)}{T_1^2-T_0^2} \tag{7}$$

由（4）可得，切变模量G

$$G=\frac{2l}{\pi R^4}D=\frac{4\pi lm(r_{\text{in}}^2+r_{\text{out}}^2)}{R^4(T_1^2-T_0^2)} \tag{8}$$

其中m为圆环质量，r_{in}和r_{out}分别为圆环内外半径，T_0和T_1分别为未放上圆环和放上圆环的周期，l为钢丝长度，R为钢丝的半径。

实验内容

1. 用米尺测钢丝的有效长度，测 3 次取平均值。
2. 用千分尺测钢丝直径。在钢丝的不同部位测量，测 3 次取平均值。
3. 用游标卡尺测圆环的内、外直径，测 3 次取平均值。用电子天平测圆环质量，测 1 次。
4. 测量扭摆周期T_0和T_1。旋转扭摆上端，使扭摆转动。尽量避免扭摆晃动。10 个周期记一次时间，未放上圆环和放上圆环的周期分别记为T_0和T_1，各测 1 次。
5. 计算钢丝的扭转常数D和切变模量G。
6. 估算切变模量G的不确定度。根据公式（8），切变模量G的最大不确定度为：

$$\frac{\Delta G}{G}=\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta m}{m}+\frac{2r_{\text{in}}\Delta r_{\text{in}}}{r_{\text{in}}^2+r_{\text{out}}^2}+\frac{2r_{\text{out}}\Delta r_{\text{out}}}{r_{\text{in}}^2+r_{\text{out}}^2}+\frac{4\Delta R}{R}+\frac{2T_1\Delta T_1}{T_1^2-T_0^2}+\frac{2T_0\Delta T_0}{T_1^2-T_0^2}$$

利用该公式进行以下计算：

(a) **确定主要误差项**。公式右边的每一项表示某个待测量对不确定度的贡献，分别计算每一项，进而确定主要误差项。

(b) **估算不确定度**。本实验，主要误差项相对其他项大得多，因此取$\frac{\Delta G}{G} \approx$ 主要误差项。计算$\Delta G = \frac{\Delta G}{G} \times G$，求出切变模量不确定度$\Delta G$。

说明：只需要考虑 **B 类不确定度**。各个待测量 B 类不确定度如下：

$\Delta l = 1$ mm（卷尺最大允差），

$\Delta m = 0.1$ g（电子天平最大允差），

$\Delta r_{\text{in}} = \Delta r_{\text{out}} = 0.01$ mm（游标卡尺最大允差为 0.02 mm），

$\Delta R = 0.002$ mm（千分尺最大允差为 0.004 mm），

$\Delta T_0 = \Delta T_1 = \Delta t/n$，$\Delta t = 1$ ms（电子计时器最大允差）， $n = 10$。

当对不确定度计算要求不高时，可采用最大不确定度估计。

假设实验直接测量量为 x, y, z，它们的不确定度分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$，待测量 q 满足函数形式$q = q(x, y, z)$。待测量 q 的不确定度为：

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2}$$

其相对不确定度为

$$\frac{\Delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\Delta x}{q}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\Delta y}{q}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{\Delta z}{q}\right)^2}$$

任何情况下，相对不确定度都不会大于下面这个式子得到的结果，

$$\frac{\Delta q}{q} = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \frac{\Delta x}{q} + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \frac{\Delta y}{q} + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right| \frac{\Delta z}{q}$$

*上式称为 q 的**最大不确定度**。*

参考资料

1. Shear modulus, Halliday *et al*, Principles of Physics (9^{th} ed), chapter 12, pp. 315-317.
2. Torsion pendulum, Halliday *et al*, Principles of Physics (9^{th} ed), chapter 15, pp. 394-395.
3. 切变模量的测量，吴泳华，霍剑青，浦其荣，大学物理实验（第一册 第二版），第 5 章，实验 5.1.2.

报告要求

实验名称

切变模量的测量

实验目的

利用扭摆法测量钢丝的切变模量。

实验仪器

扭摆(已装待测钢丝)、圆环、千分尺、游标卡尺、卷尺、电子天平、电子计时器.

实验原理

阅读实验讲义，重点弄清以下问题。

1. 切变模量的定义及意义

2. 扭摆的工作原理.

实验内容

见讲义. 简要概括.

数据记录

表 1 测量数据表

千分尺零点误差=_______mm （一定要写下来）

测量次数 / 待测量	1	2	3	平均值
钢丝长度l/mm				
钢丝直径 /mm **直接读数，不减零误差**				
圆环内直径/mm				
圆环外直径/mm				
圆环质量 m/g	单次测量			
周期（无环）T_0/s	单次测量			
周期（有环）T_1/s	单次测量			

表 2 钢丝半径及圆环内外半径

R = 钢丝直径/2 /mm 注意减掉零误差	$r_{\rm in}$ = 圆环内直径/2 /mm	$r_{\rm out}$ = 圆环外直径/2 /mm

数据处理

1. 计算平均值。

2. 采用国际单位制，计算钢丝的扭转常数D与切变模量G。D以N.m/rad 为单位，根据实验精度，保留 4 位有效数字。G以GPa (1 GPa=10^9 Pa)为单位，保留 3 位有效数字。

3. 估算不确定度。利用切变模量不确定度公式

$$\frac{\Delta G}{G}=\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta m}{m}+\frac{2r_{\text{in}}\Delta r_{\text{in}}}{r_{\text{in}}^2+r_{\text{out}}^2}+\frac{2r_{\text{out}}\Delta r_{\text{out}}}{r_{\text{in}}^2+r_{\text{out}}^2}+\frac{4\Delta R}{R}+\frac{2T_1\Delta T_1}{T_1^2-T_0^2}+\frac{2T_0\Delta T_0}{T_1^2-T_0^2}$$

进行如下计算。

(a) **确定主要误差项**。公式右边的每一项表示某个待测量对不确定度的贡献，分别计算每一项，进而确定主要误差项。

(b) **估算不确定度**。本实验，主要误差项相对其他项大得多，因此取$\frac{\Delta G}{G}\approx$ 主要误差项。计算$\Delta G=\frac{\Delta G}{G}\times G$，求出切变模量不确定度$\Delta G$。

说明：这里只需要考虑 **B 类不确定度**。各个待测量的 B 类不确定度如下：

$$\Delta l=1\ \text{mm},$$

$$\Delta m=0.1\ \text{g},$$

$$\Delta r_{\text{in}}=\Delta r_{\text{out}}=0.01\ \text{mm},$$

$$\Delta R=0.002\ \text{mm},$$

$$\Delta T_0=\Delta T_1=\Delta t/n,\ \Delta t=1\ \text{ms},\ n=10。$$

注意：要有数据代入过程。

实验结论

简要表述实验目的,方法及结果。扭转常数$D=$____N.m/rad，切变模量$\text{G}=(G\pm\Delta G)$ Gpa。

ΔG保留 1 位有效数字,G小数位与ΔG对齐。

将切变模量结果与参考值比较,分析实验结果是否合理。

实验用 304 不锈钢切变模量的参考值：74~77 GPa.

实验讲义持续完善，本次更新时间：2025 年 1 月。