ASIGNATURA: Fundamentos de Dinámica de Fluidos Computacional
PROFESOR: Christopher Cooper, Nicolás Thiers
FECHA: 11 de octubre de 2017

Proyecto 1
Resolución de la ecuación de Navier-Stokes

Flujo en un cambio de sección

En este trabajo ustedes modelarán un flujo incompresible entre dos placas separadas una distancia L, que se alejan repentinamente a $2L$ (ver figura 1. Para simplificar el análisis, solamente modelarán el flujo en la parte inferior del cambio de sección (línea punteada de figura 1), asumiendo que el flujo entra con un perfil cuadrático y que hay simetría en el eje central.

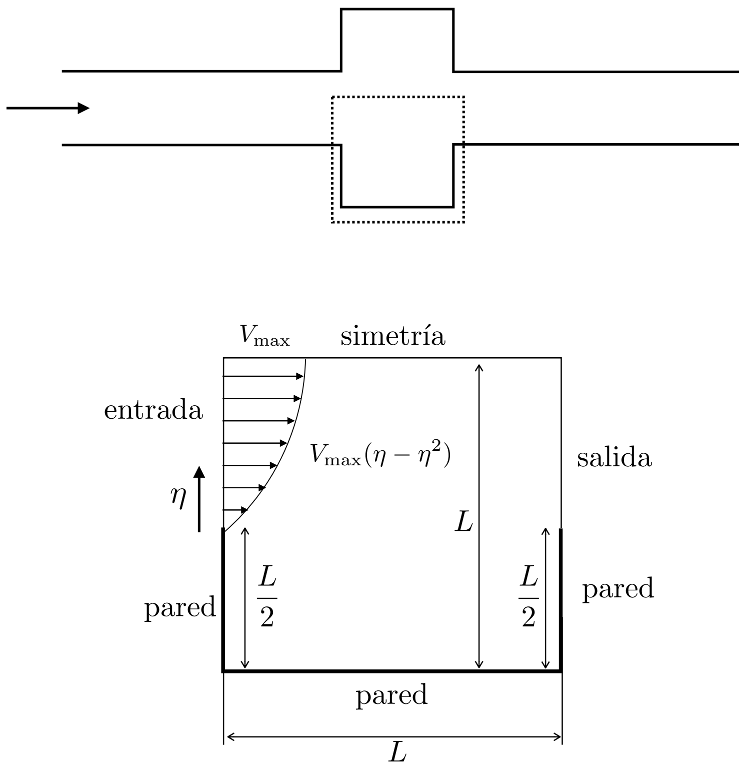

Figura 1: Representación gráfica del problema.

Para realizar la modelación, ustedes deberán resolver las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad. A pesar de que parece una tarea difícil, verán que todos los componentes necesarios para realizarla ya fueron revisados durante las sesiones de laboratorio. Este documento intentará guiarlos con la menor cantidad de complicaciones posible para que logren el objetivo sin mayores problemas. Por favor, lean esta guía con detenimiento antes de hacer cualquier cosa.

Modelo matemático

Como probablemente ya saben, este problema se modela con las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad para un flujo incompresible

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\nabla^2\mathbf{V}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0, \tag{1}$$

donde estamos despreciando el efecto de la gravedad. En dos dimensiones ($\mathbf{V} = (u, v)$), la ecuación (1) se escribe

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),\\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

y las condiciones de borde son

$$\begin{aligned}
u = 0, v = 0 &\text{ en pared: } (x = 0, y \le L/2), (x = L, y \le L/2), (x, y = 0);\\
u = V_{\max}(\eta - \eta^2), v = 0 &\text{ en entrada: } (x = 0, y > L/2);\\
\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0 &\text{ en simetría: } (x, y = L);\\
\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0 &\text{ en salida: } (x = L, y > L/2)
\end{aligned} \tag{3}$$

Aquí, estamos considerando el origen del eje coordenado en la esquina inferior izquierda y L es el tamaño del dominio cuadrado.

Estrategia de solución: método de proyección

La ecuación de estado para un flujo incompresible es $\rho = c$, donde c es una constante. Esto representa una complicación para resolver las ecuaciones en (2), pues no tenemos una relación de la presión (p) con el resto de las variables termodinámicas. Es más, en el caso incompresible la presión pierde su sentido termodinámico y se convierte en un parámetro para lograr enforzar la incompresibilidad (algo así como un multiplicados lagrangeano).

La forma más simple para resolver este problema es el método de proyección [1, 2]. Éste es un método explícito de *predicción-corrección* de primer orden, que separa las ecuaciones de Navier-Stokes en dos pasos:

$$
\begin{aligned}
\text{Predicción: } & \frac{\mathbf{V}^* - \mathbf{V}}{\Delta t} = -(\mathbf{V}^n \cdot \nabla)\mathbf{V}^n + \nu \nabla^2 \mathbf{V}^n \\
\text{Corrección: } & \frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Para encontrar una relación para la presión debemos sacar la divergencia de la segunda expresión de la ecuación (4), y enforzar la incompresibilidad ($\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} = 0$), lo que nos deja

$$
\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{V}^*. \tag{5}
$$

Este algoritmo utiliza una variable auxiliar $\mathbf{V}^*$ que representa una velocidad “intermedia”, por lo tanto, tiene sentido que esté sujeta a las mismas condiciones de contorno que la velocidad física: no-deslizamiento en las paredes.

Por otra parte, en estricto rigor, las ecuaciones de Navier-Stokes necesitan condiciones de contorno para la velocidad solamente. Sin embargo, para resolver la ecuación (9) necesitamos condiciones de contorno sobre la presión ¿de dónde podemos sacarlas? Si tomamos la segunda expresión en la ecuación (4), la evaluamos en el borde y sacamos su producto punto por el vector normal a la superficie, llegamos a:

$$
\frac{\mathbf{V}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{n}}{\Delta t} = -\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho} \cdot \mathbf{n}. \tag{6}
$$

La condición de no-deslizamiento implica de la pared sólida es impermeable, en otras palabras, la componente de la velocidad normal a la superficie debe ser cero: $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$. Considerando que esta condición se debe mantener tanto para $\mathbf{V}^{n+1}$ como para $\mathbf{V}^*$, llegamos a la siguiente condición de contorno de Neumann para la presión en la pared

$$
\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}^{n+1} = 0 \tag{7}
$$

En el borde de simetría no queremos que haya flujo normal a la superficie. Para evitar esto, la gradiente de presión a través del eje central debe ser cero, por lo que la condición dada por la Ecuación (7) es válida en el eje de simetría.

Cuando un flujo tiene entrada y salida, en general uno impone la presión en uno de estos bordes (condición de Dirichlet), e impone derivada igual a cero (condición de Neumann) en el otro. En general se recomienda no imponer la presión en el mismo borde que imponemos la velocidad, por lo tanto, impongamos $p = 0$ en la salida, y $\partial p/\partial x = 0$ en la entrada. La presión podria ser cualquier otra cosa a la salida y el resultado no se alteraría: al final, lo que nos preocupa es la gradiente de la presión, no su valor.

En dos dimensiones, el paso de predicción en la ecuacion (4) se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{u^* - u^n}{\Delta t} &= -u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right), \\
\frac{v^* - v^n}{\Delta t} &= -u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right),
\end{aligned} \tag{8}$$

y usaremos las mismas condiciones de contorno que la Ecuación (3) para u^* y v^*. Por otra parte, la ecuación (5) se puede discretizar como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}^{n+1} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}^{n+1} &= \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right), \\
\frac{\partial p}{\partial x}^{n+1} &= 0 \text{ en } (x = 0, y), (x = L, y \leq L/2) \\
p^{n+1} &= 0 \text{ en } (x = L, y > L/2) \\
\frac{\partial p}{\partial y}^{n+1} &= 0 \text{ en } (x, y = 0), (x, y = L),
\end{aligned} \tag{9}$$

y finalmente la corrección en la ecuación (4) como

$$\begin{aligned}
\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}^{n+1} \\
\frac{v^{n+1} - v^*}{\Delta t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}^{n+1}
\end{aligned} \tag{10}$$

de nuevo, enforzando las condiciones de borde de la Ecuación (3) en u^{n+1} y v^{n+1}.

Una vez discretizadas las ecuaciones en el espacio, en cada paso de tiempo deben:

- Encontrar u^* y v^* con la ecuación de convección-difusión bidimensional en (8) (Ustedes ya hicieron esto en el laboratorio 3).
- Calcular la divergencia de $\mathbf{V}^*$ necesaria en el lado derecho de la ecuación (9) (Tema del laboratorio 2).

- Resolver la ecuación elíptica en (9) para encontrar la presión (p^{n+1}) (Vean el laboratorio 6).
- Calcular la gradiente de p^{n+1}, necesaria en la ecuación (10) (Nuevamente, tema del laboratorio 2).
- Calcular u^{n+1} y v^{n+1} con la ecuación (10).

Presentación del problema

Modelen el flujo con un dominio de L=2m donde entra flujo por el lado izquierdo con un perfil cuadrático $u = V_{\max}(\eta - \eta^2)$, donde $V_{\max} = 1$m/s La densidad del fluido es 1kg/m^3, su viscosidad cinemática $\nu = 0{,}1$m/s^2, y se puede considerar como incompresible. Utilicen una malla de 41×41 puntos y un paso de tiempo $\Delta t = 0{,}001$s.

En la ecuación (8) utilicen diferencias atrasadas para discretizar en el espacio. Por otra parte, usen diferencia centrada para calcular $\nabla \cdot \mathbf{V}^*$ y ∇p^{n+1} en las ecuaciones (9) y (10).

Para su referencia, la figura 2 muestra la solución después de 100 pasos de tiempo. La presión fue graficada usando la función `matplotlib.pyplot.contour` y las líneas de flujo con `matplotlib.pyplot.streamplot`.

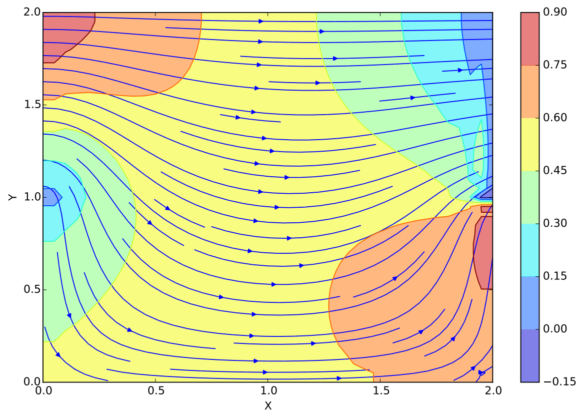

Figura 2: Flujo después de 100 pasos de tiempo. Los colores son la presión y la líneas azules son líneas de flujo

Genere un informe donde detalle la implementación de su código (algoritmo, forma de ecuaciones discretizadas, etc.), entregue sus resultados con los análisis correspondientes, y sus conclusiones al respecto. Algunas cosas en las que se debería fijar para su análisis:

- Haga una descripción general del flujo para varios pasos de tiempo (100, 1000, 5000, 10000, etc.) pasos de tiempo ¿Llega a un estado estacionario?

- ¿Cuánto es la caída de presión generada por esta expansión repentina? (Sólo una estimación)

- Estudie el efecto de variar el número de Reynolds, a través de la velocidad $V_{\max}$ ¿Cómo varía la estructura del flujo?

- Analice los resultados obtenidos, ¿Se puede confiar en ellos?, Explique que modificaciones se pueden hacer tanto en los esquemas de discretización como en la malla para mejorar la calidad de la solución.

- ¿Qué ocurre al variar Δt y Δx? ¿En qué casos la inestabilidad es debido al término difusivo y en cuáles al convectivo?

Referencias

[1] Chorin, A. J. *The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid.* Bull. Am. Math. Soc. **73** 928-931 (1967)

[2] Chorin, A. J. *Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations.* Math. Comp. **22** 745-762 (1968) doi:`10.1090/s0025-5718-1968-0242392-2`