ASIGNATURA: Fundamentos de Dinámica de Fluidos Computacional
PROFESOR: Christopher Cooper, Nicolás Thiers
FECHA: 8 de noviembre de 2017

Tarea 2
Métodos conservativos

Modelación de tsunamis

De más está decir que en Chile los tsunamis son un evento crítico: tenemos una costa de 4 mil kilómetros, somos un país sísmico, y la historia nos muestra varios eventos desastrosos al respecto. Esto sirve como motivación para intentar entender de mejor manera la dinámica de las olas, y por qué no, modelarlas numéricamente en esta tarea. Sabemos que la dinámica de fluidos de un flujo incompresible se modela con las ecuaciones de Navier-Stokes, que son complicadas y lentas de resolver para casos ingenierilmente interesantes; sin embargo, cuando la profundidad es (significativamente) menor que las distancias en las otras direcciones, se pueden simplificar a las ecuaciones de aguas someras (*shallow water equations*). Estas ecuaciones se pueden escribir como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \tag{1}$$

donde, en 1D:

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

y, en 2D

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{F} = (f, g) \left(\begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \right) \tag{5}$$

En estas ecuaciones, h es la profundidad del agua, u la velocidad en el eje x, v la velocidad en el eje y, y g la aceleración de gravedad. Como ven, en las ecuaciones de *shallow water*, estamos resolviendo 3 ecuaciones al mismo tiempo (2 ecuaciones en el caso 1D), que aparecen de la conservación de masa (primera ecuación), de cantidad de movimiento en x (segunda ecuación), y cantidad de movimiento en y (tercera ecuación, no aparece en el caso 1D). Dentro de las aproximaciones hechas para llegar a la ecuación (4) se desprecian los flujos en la dirección z (altura del agua), por lo tanto, a pesar de ser ecuaciones en 2D, modelan un problema físico en 3D, y la tercera dimensión aparece implícitamente al calcular h. De la misma forma, en el caso 1D de la ecuación (2), el problema físico es 2D.

Para tener una referencia de la forma de las soluciones que van a encontrar, miren la animación que aparece en Wikipedia.[1]

Resolución numérica

Esquema Lax–Friedrichs

En esta pasada, usaremos quizás el método más simple para ecuaciones conservativas: el esquema de Lax–Friedrichs[2]. El esquema de Lax-Friedrichs se obtiene discretizando la Ecuación (1) con diferencias adelantadas en el tiempo y centradas en el espacio, y reemplazando U_i^n con el promedio de los nodos más cercanos para lograr que el método sea estable (acuérdense que adelantada en tiempo y centrada en espacio es incondicionalmente inestable). Con esto, Lax-Friedrichs en 1D queda

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_{i-1}^n\right) \tag{6}$$

Por otra parte, en 2D, esto queda

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} =& \frac{1}{4}\left(U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n\right) \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta y}\left(g_{i,j+1}^n - g_{i,j-1}^n\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Condiciones de borde

Físicamente, cuando una ola llega al borde de la malla existen dos posibilidades: o se refleja, porque hay una pared, o simplemente sale del dominio

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Shallow_water_equations`
[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Lax\%E2\%80\%93Friedrichs_method`

hacia "el infinito". Las condiciones de borde reflexivas son

$$\begin{aligned}\mathbf{V} = (u, v) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

que corresponde a una condición de borde de Dirichlet en la velocidad y de Neumann para la altura. Por otra parte, las condiciones de borde de salida son de Neumann tanto para velocidad como para altura:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Nota al margen: Lax-Friedrichs desde volumenes finitos. En general, Lax-Friedrichs y volumenes finitos se presentan como temas aparte ya que uno opera sobre la formulación diferencial (Lax-Friedrichs), y otro sobre la ecuación integral (volumenes finitos). Sin embargo, aquí mostraremos que se puede llegar a la misma ecuación discretizada de Lax-Friedrichs desde la formulación integral, si usamos una forma particular para calcular los flujos.

El método de los volúmenes finitos trabaja con la formulación integral de las ecuaciones, para ello debemos reescribir nuestro sistema de ecuaciones como sigue:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d\Omega = 0 \tag{10}$$

donde Ω corresponde al dominio donde vamos a calcular nuestra solución. El primer paso del método consiste en subdividir el dominio total Ω en una serie de volúmenes mas pequeños Ω_P que en su conjunto reconstruyan el dominio total ($\bigcup \Omega_P = \Omega$). Aplicando el teorema de divergencia de Gauss, la ecuacion a resolver dentro de cada volumen queda:

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_P} \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{n} d\Gamma_P = 0 \tag{11}$$

Para aproximar las integrales de volumen y contorno utilizaremos los valores medios de U y F en el volumen y en las caras del volumen respectivamente, lo que nos permite reescribir la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{\partial U_P}{\partial t} V_P + \sum_{i=w,e,s,n} \overrightarrow{\mathbf{F}}_i \cdot \overrightarrow{n} A_i = 0 \tag{12}$$

La integración temporal la realizaremos utilizando un esquema de Euler explicito, el cual nos permite escribir la ecuación 12 para el caso unidimensional como sigue:

$$U_P^{n+1} = U_P^n + \frac{\Delta_t}{\Delta_x}\left(f_w^n - f_e^n\right) \tag{13}$$

donde f_w^n y f_e^n corresponde a los flujos que atraviesan las caras *west* y *east* respectivamente los cuales serán necesarios aproximar mediante un esquema apropiado.

Para llegar al esquema de Lax-Friedrichs, debemos usar las siguientes ecuaciones para calcular el flujo:

$$f_w^n = \frac{1}{2}\left(f_W^n + f_P^n\right) - \frac{\Delta_x}{2\Delta_t}\left(U_P^n - U_W^n\right) \tag{14}$$

$$f_e^n = \frac{1}{2}\left(f_P^n + f_E^n\right) - \frac{\Delta_x}{2\Delta_t}\left(U_E^n - U_P^n\right) \tag{15}$$

Si reemplazamos estas expresiones 14 y 15 en la ecuación 13 y re-acomodando ciertos términos obtenemos el esquema final para el caso unidimensional.

$$U_P^{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_W^n + U_E^n\right) + \frac{\Delta_t}{2\Delta_x}\left(f_W^n - f_E^n\right) \tag{16}$$

De manera análoga, podemos extender el esquema a un problema bidimensional de agregando los flujos sobre las caras *north* y *south*. En este caso el esquema resultante se escribe:

$$U_P^{n+1} = \frac{1}{4}\left(U_E^n + U_W^n + U_N^n + U_S^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(f_E^n - f_W^n\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta y}\left(g_N^n - g_S^n\right) \tag{17}$$

Como pueden ver, las ecuaciones (16) y (17) son equivalentes a (6) y (7), respectivamente.

Presentación del problema

En este trabajo, modelaremos el choque de una ola generada en alguna parte del océano contra una pared, que representará la costa de, por ejemplo, Valparaíso. Esta ola puede ser generada por un terremoto, y consideraremos que inicialmente tiene una forma Gausseana. Para mantener la simulación simple, vamos a ignorar un montón de factores, como cambios en la batimetría, variaciones de densidad, geometría de la costa, etc. A pesar de esto, esperamos tener una buena idea de lo que podría ocurrir.

Simulación en 1D

Para partir, haremos la simulación en 1D. Consideren un dominio desde -2 hasta 2, donde la costa está en el lado derecho (representado por una pared), y el resto del océano por la izquierda. La altura del agua en reposo h_0 es 1, sin embargo, ocurre un terremoto en el fondo marino, que eleva localmente el nivel del agua a 1,4 en el medio del dominio ($\Delta_h = 0{,}4$). Esto entrega un perfil inicial de la altura (h) con la forma

$$h(x, t = 0) = h_0 + \Delta_h e^{-5x^2} \tag{18}$$

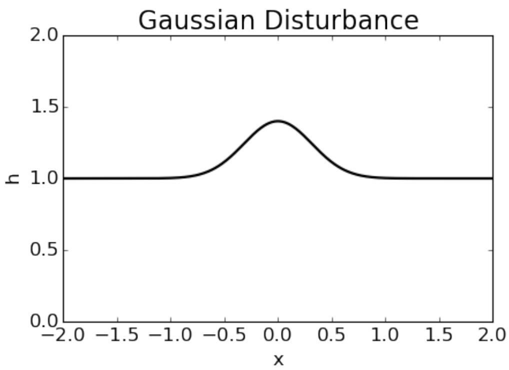

Figura 1: Condición inicial en 1D

Usando una malla con 501 elementos y $\Delta t = 8 \cdot 10^{-3}$, modele la evolución de la ola con el método de volúmenes finitos y el esquema de Lax-Friedrichs. Determine:

1. ¿Cuanto tiempo demora en llegar la ola a tierra?
2. ¿Cuál es velocidad de la ola que toca la costa y la altura máxima que se eleva esta por sobre el nivel inicial?
3. ¿Que ocurre cuando cambiamos la altura del agua en reposo h_0 a 0.5 m y a 1.5 m? ¿cambian los resultados obtenidos en la simulación anterior? explique brevemente
4. ¿Que ocurre cuando cambiamos la altura de elevación del tsunami Δ_h a 0.3 m y a 0.6 m? ¿cambian los resultados obtenidos en la simulación anterior? explique brevemente
5. ¿En que escenarios es valido modelar este tipo de olas utilizando estas ecuaciones?, ¿pueden ser utilizadas para estudiar la propagación de tsunamis en altamar?

Simulación en 2D

Ya que estamos más familiarizados con el problema, hagamos la simulación en 2D. Consideren un dominio de 4×4 centrado en el origen, donde los bordes norte y este corresponden a costa y los bordes sur y oeste a salida al resto del océano. En este caso, el perfil inicial es como aparece en la Figura 2:

$$h(x, y, t = 0) = 1 + 0{,}4e^{-5(x^2+y^2)} \tag{19}$$

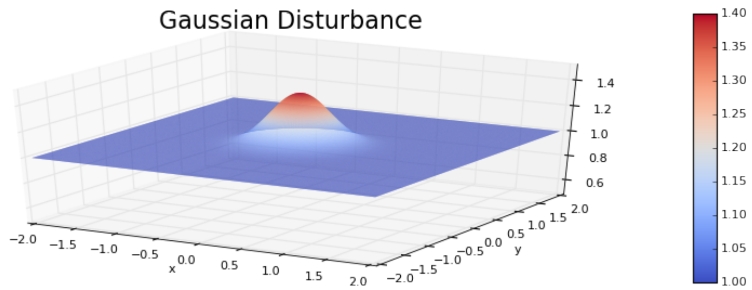

Figura 2: Condición inicial en 2D

Usando una malla de 501×501 elementos y $\Delta t = 8 \cdot 10^{-3}$, modele la evolución de la ola con el método de volúmenes finitos y el esquema de Lax-Friedrichs. Responda las mismas preguntas que en el caso 1D, y comente respecto a los efectos de la reflexión sobre otras paredes ¿Hay algún punto de la pared que es especialmente crítico? Analice los riesgos de la geometría en ángulo recto de la costa.

Junto con el código, entregue un informe donde detalle el algoritmo, ecuaciones, resultados y conclusiones, respondiendo a las preguntas aquí planteadas. El trabajo será en grupos de 2 personas.