题目：Two-Dimensional PCA: A New Approach to Appearance-Based Face Representation and Recognition
作者：Jian Yang，David Zhang，Alejandro F. Frangi，and Jing-yu Yang
领域：二维主成分分析

核心：二维主成分分析的构建

实现方法：

一、提出

在基于 PCA 的人脸识别技术中，2D 面部图像矩阵必须先前转换为 1D 图像矢量。所得到的面的图像向量通常导致高维图像向量空间，由于其大尺寸和相对较少数量的训练样本，难以准确地评估协方差矩阵。幸运的是，可以使用 SVD 技术有效地计算特征向量，实际上避免了生成协方差矩阵的过程。然而，这并不意味着可以以这种方式精确地评估特征向量，因为特征向量由协方差矩阵进行统计学确定，无论采用什么方法来获得它们。

而 2DPCA 是可以直接使用原图像矩阵直接构建图像协方差矩阵，且构建出来的矩阵的大小相较于 PCA 构建出来的小得多。

2DPCA 具有优于 PCA 的两个重要优点。首先，更准确地评估协方差矩阵。其次，需要较少的时间来确定相应的特征向量。

二、构建 2DPCA

a) 目标是把图像矩阵 A(m*n)投影成 X(n*1)向量

b) 投影样本的总散射可以通过投影特征向量的协方差矩阵的轨迹来表征。

$$J(\mathbf{X}) = \mathrm{tr}(\mathbf{S}_x),$$

c) S_x 代表投影特征向量 Y=AX 的协方差矩阵，求出 S_x 和的 S_x 迹

d) G_t 是图像协方差散射矩阵 $\mathbf{G}_t = E[(\mathbf{A} - E\mathbf{A})^T(\mathbf{A} - E\mathbf{A})].$

e) 广义总散度标准 J(X)

$$J(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{G}_t\mathbf{X}, \qquad \begin{cases} \{\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_d\} = \arg\max J(\mathbf{X}) \\ \mathbf{X}_i^T\mathbf{X}_j = 0, i \neq j, i, j = 1, \cdots, d. \end{cases}$$

其中 X 使得 J(X)达到最大值

f) 从 $\mathbf{Y}_k = \mathbf{A}\mathbf{X}_k, k = 1, 2, \cdots, d.$ 可以得到{Y_k}序列，这就是图像矩阵 A 的主成分向量 B = [Y_1,…, Y_d]为图像矩阵 A 的特征矩阵

三、基于 2DPCA 的图像重建

Suppose the orthonormal eigenvectors corresponding to the first d largest eigenvectors of the image covariance matrix $\mathbf{G}_t$ are $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_d$. After the image samples are projected onto these axes, the resulting principal component vectors are $\mathbf{Y}_k = \mathbf{A}\mathbf{X}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, d)$. Let $\mathbf{V} = [\mathbf{Y}_1, \cdots, \mathbf{Y}_d]$ and $\mathbf{U} = [\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_d]$, then

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{U}. \tag{10}$$

Since $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_d$ are orthonormal, from (10), it is easy to obtain the reconstructed image of sample $\mathbf{A}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}\mathbf{U}^T = \sum_{k=1}^{d} \mathbf{Y}_k \mathbf{X}_k^T. \tag{11}$$

Let $\tilde{\mathbf{A}}_k = \mathbf{Y}_k \mathbf{X}_k^T (k = 1, 2, \cdots, d)$, which is of the same size as image $\mathbf{A}$, and represents the *reconstructed subimage* of $\mathbf{A}$. That is, image $\mathbf{A}$ can be approximately reconstructed by adding up the first d subimages. In particular, when the selected number of principal component vectors $d = n$ (n is the total number of eigenvectors of $\mathbf{G}_t$), we have $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$, i.e., the image is completely reconstructed by its principal component vectors without any loss of information. Otherwise, if $d < n$, the reconstructed image $\tilde{\mathbf{A}}$ is an approximation for $\mathbf{A}$.