清華大學
Tsinghua University

第一单元　第三讲

数据表示及检错纠错

刘卫东

计算机科学与技术系

内容提要

- 数据表示的需求
- 逻辑型数据表示
- 字符的表示
- 整数的表示
- 检错纠错码

计算机是什么？

清華大學
Tsinghua University

- 一种高速运行的电子设备
- 用于进行数据的计算
- 可接受输入信息
- 根据用户要求对信息进行加工
- 输出结果
  - A calculating machine, esp. an automatic electronic device for performing mathematic or logical operations; freq. with defining word prefixed, as analogue, digital, electronic computer.

    – Oxford English Dictionary

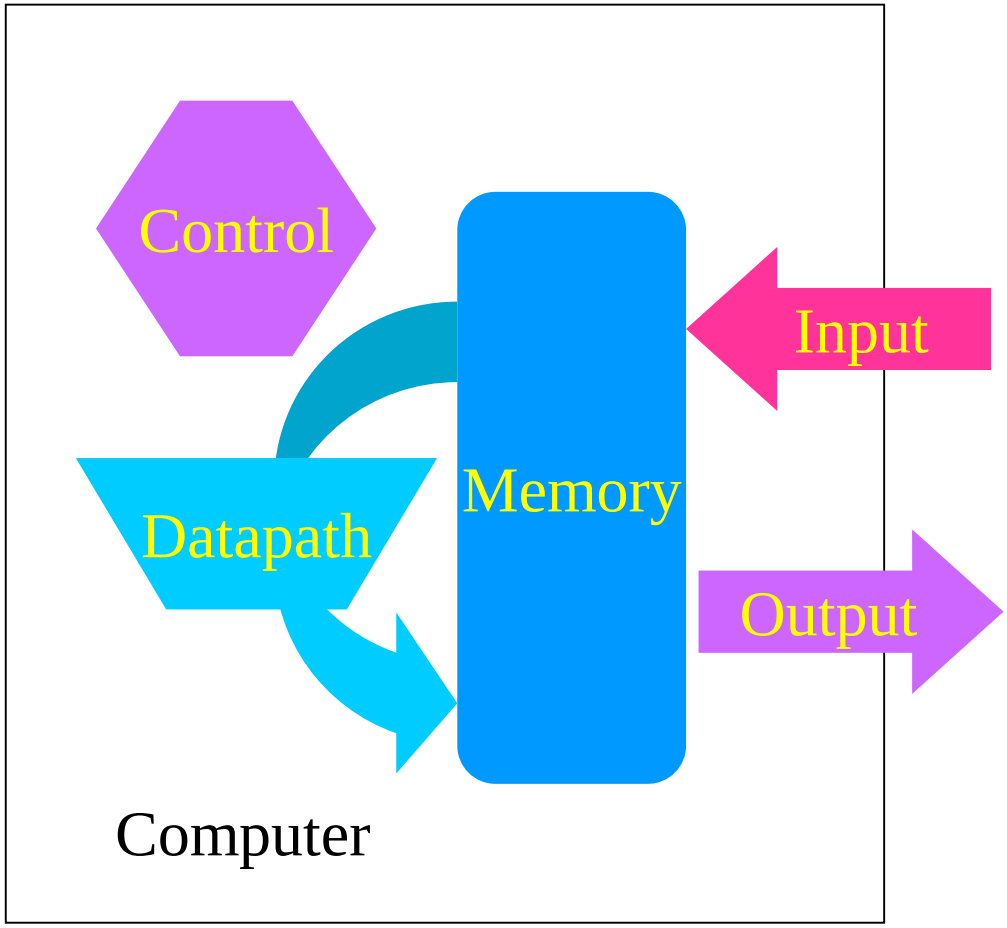
计算机程序

- **Computer programs** (also **software programs**, or just **programs**) are instructions for a computer. A computer requires programs to function, and a computer program does nothing unless its instructions are executed by a central processor. Computer programs are either executable programs or the source code from which executable programs are derived (e.g., compiled).

- 程序员和计算机进行交互的语言

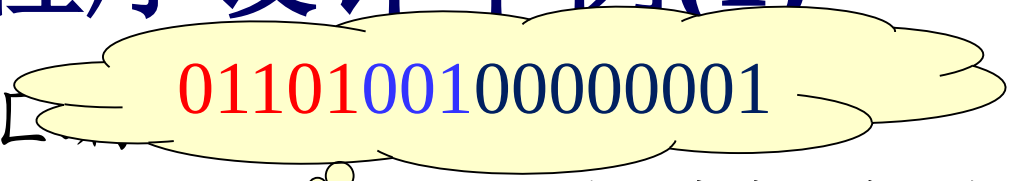
- 计算机程序分类
  - 高级语言
  - 汇编语言
  - 机器语言

计算机运行机制



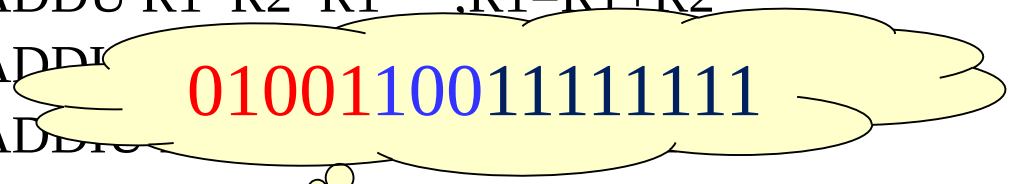
- Datapath: 完成算术和逻辑运算，通常包括其中的寄存器。
- Control: CPU的组成部分，它根据程序指令来指挥datapath， memory以及I/O运行，共同完成程序功能。
- Memory: 存放运行时程序及其所需要的数据的场所。
- Input: 信息进入计算机的设备，如键盘、鼠标等。
- Output: 将计算结果展示给用户的设备，如显示器、磁盘、打印机、喇叭等。

程序设计举例(1)



汇[illegible]

```
LI    R1    1          ;将R1寄存器赋值为1
LI    R2    1          ;将R2寄存器赋值为1
LI    R3    80         ;将R3寄存器赋值为80h
SLL R3    R3    0      ;R3逻辑左移8位为8000h
LI    R4    9          ;将R4寄存器赋值为9，规定循环次数为9
SW  R3    R1    0      ;将R1的值写入[R3+0]内存处
SW  R3    R2    1      ;将R2的值写入[R3+1]内存处
ADDU R1  R2  R1       :R1=R1+R2
```




```
ADDIU R4  FF          ;R4=R4-1
BNEZ   R4   F9        ;跳转到指令（SW R3 R1 0）处，F9为偏移量-7
```

程序设计举例(2)

```
;WELCOME
MFPC R7
ADDIU R7 0x0003
NOP
B TESTW
LI R6 0x00BF
SLL R6 R6 0x0000
LI R0 0x004F
SW R6 R0 0x0000
NOP

MFPC R7
ADDIU R7 0x0003
NOP
B TESTW
LI R6 0x00BF
SLL R6 R6 0x0000
LI R0 0x004B
SW R6 R0 0x0000
NOP
```

```
MFPC R7
ADDIU R7 0x0003
NOP
B TESTW
LI R6 0x00BF
SLL R6 R6 0x0000
LI R0 0x000A
SW R6 R0 0x0000
NOP

MFPC R7
ADDIU R7 0x0003
NOP
B TESTW
LI R6 0x00BF
SLL R6 R6 0x0000
LI R0 0x000D
SW R6 R0 0x0000
NOP
```

```
TESTW:
        NOP
        LI R6 0x00BF
        SLL R6 R6 0x0000
        ADDIU R6 0x0001
        LW R6 R0 0x0000
        LI R6 0x0001
        AND R0 R6
        BEQZ R0 TESTW
        NOP
        JR R7
        NOP
```

数据编码与表示

- 需要在计算机中表示的对象
  - 程序、整数、浮点数、字符（串）、逻辑值
  - 通过编码表示
- 表示方式
  - 用数字电路的两个状态表示，存放在机器字中
  - 由上一层的抽象计算机来识别不同的内容
- 编码原则
  - 少量简单的基本符号
  - 一定的规则
  - 表示大量复杂的信息
  - 计算性能/存储空间

编码表示

- 基本元素
  - 0、1两个基本符号
- 字符
  - 26 字母 => 5 位
  - 大/小写 + 其它符号 => 7 bits (in 8)
  - 世界上其他语言 的文字=> 16 bits (unicode)
- 无符号整数 $(0, 1, \cdots, 2^{n-1})$
- 逻辑值
  - 0 -> False, 1 => True
- 颜色
- 位置 / 地址 / 指令
- 但 n 位只能代表 2^n 个不同的对象

逻辑型数据

- 逻辑型数据
  - True、真
  - False、假
- 数据表示
  - 1
  - 0
- 数据运算
  - 与、或、非

X	Y	X与Y	X或Y	X的非
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

字符型数据

- 重要的人机界面
  - 由符号组成
  - 为每个符号进行编码，由输入/输出设备进行转换
  - 一般以字符串的形式在计算机存储器中存放
- 字符集编码标准
  - 主机和设备、主机之间进行信息交互的基础
    - ASCII
    - UNICODE
    - UTF-8

ASCII字符编码

- American Standard Code for Information Interchange
- 采用7位二进制编码，占用一个字节
- 表示128个西文字符

ASCII 码字符集

L \ H	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENG	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	↑	n	~
1111	SI	US	/	?	O	←	o	DEL

注：H 表示高 3 位，L 表示低 4 位。

UNICODE编码

- 使用16位表示一个字符，可以表示65536个字符
- 将整个编码空间划分为块，每块为16的整数倍，按块进行分配。
- 保留6400个码点供本地化使用。
- 依然无法覆盖所有字符。

UTF-8编码

字符位数	字节1	字节2	字节3	字节4	字节5	字节6
7	0ddddddd					
11	110ddddd	10dddddd				
16	1110dddd	10dddddd	10dddddd			
21	11110ddd	10dddddd	10dddddd	10dddddd		
26	111110dd	10dddddd	10dddddd	10dddddd	10dddddd	
31	1111110d	10dddddd	10dddddd	10dddddd	10dddddd	10dddddd

- 变长字符编码，提高存储空间利用率
- 字符长度由首字节确定
- 字符首字节外，均以“10”开始，可自同步
- 可扩展性强
- 成为互连网上占统治地位的字符集

数值型数据表示

- 定点数
  - 小数点位置固定
  - 整数
  - 定点小数
- 浮点数
  - 小数点位置浮动

数值范围和数据精度

清華大學 Tsinghua University

数值范围

数值范围是指一种类型的数据所能表示的最大值和最小值；

数据精度

通常指实数所能给出的有效数字位数；对浮点数来说，精度不够会造成误差，误差大量积累会出问题。

机内处理

数值范围与数据精度概念不同。在计算机中，它们的值与用多少个二进制位表示某种类型的数据，以及怎么对这些位进行编码有关。

整数的二进制表示

- 二进制的两个状态0和1
- n位可得到2^n种组合，可表示2^n个整数
- 那么，如何来表示呢?

机内表示	真值
0	0
01	1
10	2
11	3
100	4
101	5
…	…
1{n}	2^n-1

评价标准

- 无符号数
  - 表示范围
  - 直观
  - 便于算术运算的实现
- 有符号数
  - 表示范围
  - 直观
  - 正、负数平衡
  - 便于算术运算的实现

进位记数法

- 进位记数法

$$N = \sum_{i=m}^{-k} D_i r^i$$

  - N表示某个数值
  - r是这个数制的基
  - i表示这些符号排列的位号
  - D_i是位号为i的位上的一个符号
  - r^i是位号为i的位上的一个1代表的值
- 常用的进制
  - 十进制、二进制、八进制、十六进制

数制与进位记数法

清華大學 Tsinghua University

- 二进制
  - r = 2， 基本符号：0 1
- 八进制
  - r = 8， 基本符号：0 1 2 3 4 5 6 7
- 十进制
  - r = 10， 基本符号：0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- 十六进制
  - r = 16，基本符号：0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F
- 计算机采用二进制

数制转换

清華大學
Tsinghua University

把二进制数转换为十进制数，

累加二进制数中全部数值为 1 的那些位的位权

$$(1101.1100)_2=(1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0)_{10}$$

$$+(1\times2^{-1}+1\times2^{-2}+0\times2^{-3}+0\times2^{-4})_{10}=(13.75)_{10}$$

把二进制数转换成八或十六进制数时，从小数点向左和向右把每 3 或者 4 个二进制位分成一组，直接写出每一组所代表的数值，小数点后不足位数补0。

$(1101.1001)_2=(D.9)_{16}=(15.44)_8$ ，而不是$(15.41)_8$

数制转换

二进位数和十进制数之间的转换方法

二进制：r = 2，　基本符号：0 1

十进制：r = 10，基本符号：0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

求二进制数所对应的十进制数值，可通过进位记数公式来计算，即把取值为 1 的数位的位权累加。

把十进制数转换为二进制，对整数部分通过除 2 取余数来完成，对小数部分通过乘 2 取整数来完成。

2	13-------1	低位
2	6-------0	↓
2	3-------1	
2	1-------1	高位
	0	

$(13)_{10} = (1101)_2$

	0.76×2	
1	0.52×2	高位
1	0.04×2	↓
0	0.08×2	
0	0.16	低位

$(0.76)_{10} = (0.1100)_2$

二进制整数的进位表示法

- 具体到n位无符号二进制整数，如
  - $b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1b_0$
  - 其中，b_i为0或者1
  - 表示的值为：$$N=\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$
  - 可表示的范围为0~2^n-1，共2^n个数

- 如果要表示有符号的整数呢?
  - 需要有1位来表示符号
    - 最高位
    - 0表示正数、1表示负数
  - 其他位表示数据

原码、反码和补码

清華大學 Tsinghua University

编码	原码	反码	补码
000	**0**	**0**	**0**
001	**1**	**1**	**1**
010	**2**	**2**	**2**
011	**3**	**3**	**3**
100	**-0**	**-3**	**-4**
101	**-1**	**-2**	**-3**
110	**-2**	**-1**	**-2**
111	**-3**	**-0**	**-1**

负数表示形式:

原码（Sign Magnitude）：符号位||数的绝对值

反码（One's Complement）：符号位||数值按位求反

补码（Two's Complement）：反码的最低位+1

整数编码的定义

x 为真值　　n 为整数的位数

$$[x]_{原} = \begin{cases} x & 2^n > x \geq 0 \\ 2^n - x & 0 \geq x > -2^n \end{cases}$$

$$[x]_{补} = \begin{cases} x & 2^n > x \geq 0 \\ 2^{n+1} + x & 0 \geqslant x \geqslant -2^n \ (\mathrm{mod}\ 2^{n+1}) \end{cases}$$

$$[x]_{反} = \begin{cases} x & 2^n > x \geq 0 \\ (2^{n+1} - 1) + x & 0 \geq x > -2^n \ (\mathrm{mod}\ 2^{n+1} - 1) \end{cases}$$

补码的性质

- 补码与真值的对应
  - 补码求真值

$$N = -b_{n-1} * 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i$$

  - 真值求补码：
    - 正数的补码是绝对值原码
    - 负数的补码是绝对值原码按位求反后，再在最低位加1
- 补码的加法运算
  - 加法运算：符号位和数据位同样计算
  - $[x+y]_{补}=[x]_{补}+[y]_{补}$

补码的性质

- $[x]_{补}$与$[-x]_{补}$
  - $[x]_{补}$连同符号位在内，逐位求反，再在最低位加1，即可得$[-x]_{补}$
  - 当X>=0时，…
  - 当X<0时，…
- 补码减法
  - $[x-y]_{补}=[x+(-y)]_{补}=[x]_{补}+[-y]_{补}$
- 补码的乘除法

补码表示中的符号位扩展

清華大學 Tsinghua University

由 $[X]_{补}$ 求 $[X/2]_{补}$ 的方法

原符号位不变，且符号位与数值位均右移一位

例如，

$[X]_{补}=10010$ 则 $[X/2]_{补}=110010$

不同位数的整数补码相加减时，要进行符号扩展

位数少的补码数的符号位向左扩展，

一直扩展到与另一数的符号位对齐。

```
  0101010111000011          0101010111000011
+ 11111111 10011100      + 00000000 00011100
  0101010101011111          0101010111011111
```

大端和小端

大端存储

- 数据的低位保存在内存的高地址字节中
- 数据的高位保存在内存的低地址字节中
- 例如：32位整数“12345678”保存在内存4000起始地址

内存地址	4000	4001	4002	4003
存放数据	12	34	56	78

小端存储

- 数据的高位保存在内存的高地址字节中
- 数据的低位保存在内存的低地址字节中
- 例如：32位整数“12345678”保存在内存4000起始地址

内存地址	4000	4001	4002	4003
存放数据	78	56	34	12

原 反 补码表示小结

清華大學 Tsinghua University

正数的 原码、反码、补码表示均相同，

符号位为 0，数值位同数的真值。

零的原码和反码均有 2个编码，补码只 1个码

负数的 原码、反码、补码表示均不同，

符号位为 1，数值位：原码为数的绝对值

反码为每一位均取反码

补码为反码再在最低位+1

由 $[X]_{补}$ 求 $[-X]_{补}$：每一位取反后再在最低位+1

检错纠错码

- 数据或编码在存储、传输等过程中可能出错
  - 如何判断是否已经出错?
    - 比较：与所有正确的编码进行比较
    - 特征：检验是否存在某些特征
  - 发现错误后能否自动纠正?
  - 计算机中的数据如何进行检错?
  - 纠错呢?

检错纠错码

- 使编码具有某种特征，通过检查这种特征是否存在来判断编码是否正确
- 出错时，如果还能指出是哪位出错，则可纠正错误
  - 编码
  - 检查
  - 出错后纠正

码距

清華大學 Tsinghua University

码距（最小码距）的概念：是指任意两个合法码之间至少有几个二进制位不相同。例如：

仅有一位不同，称最小码距为 1，例如用 4 位二进制表示 16 种状态，则 16 种编码都用到了，此时码距为 1，就是说，任何一个编码状态的四位码中的一位或几位出错，都会变成另一个合法码，此时无检错能力。

若用 4 个二进制位表示 8 种合法状态，就可以只用其中的 8 个编码来表示之，而把另 8 种编码作为非法编码，此时可以使合法码的码距为 2。如果一个码字中的任何一位出错后都会成为非法码，则它就有了发现一位出错的能力。

合理增大码距，能提高发现错误的能力，但表示一定数量的合法码所使用的二进制位数要变多，增加了电子线路的复杂性和数据存储、数据传送的数量。

常用检错纠错码

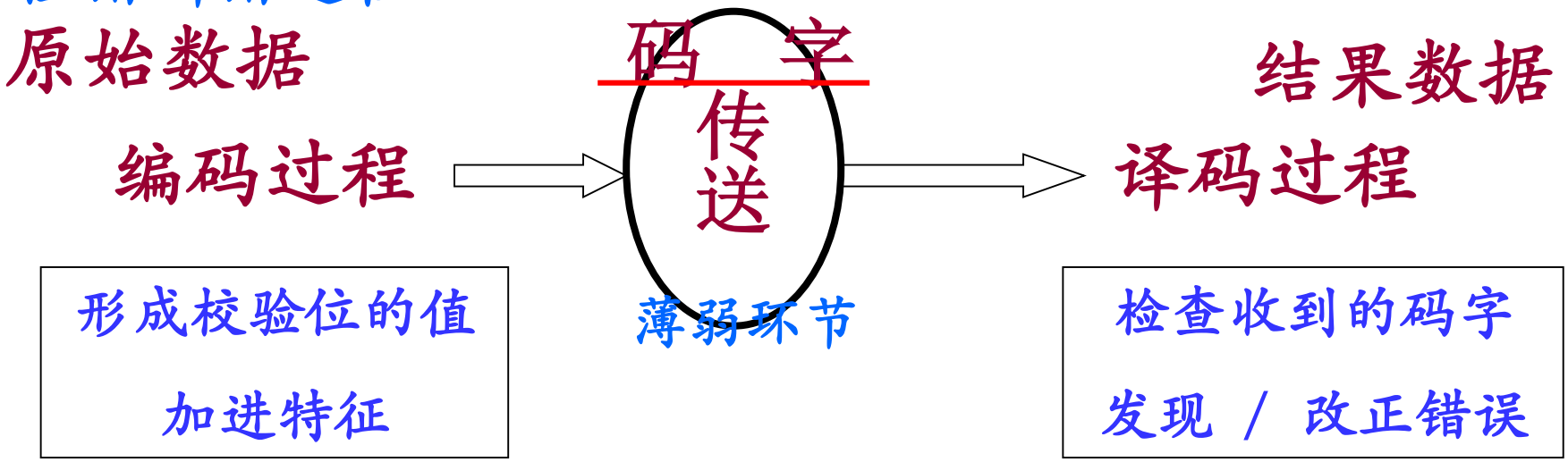
三种常用的检错纠错码：

奇偶校验码：用于并行数据传送中

海明校验码：用于并行数据传送中

循环冗余校验码：用于串行数据传送中

检错纠错过程：

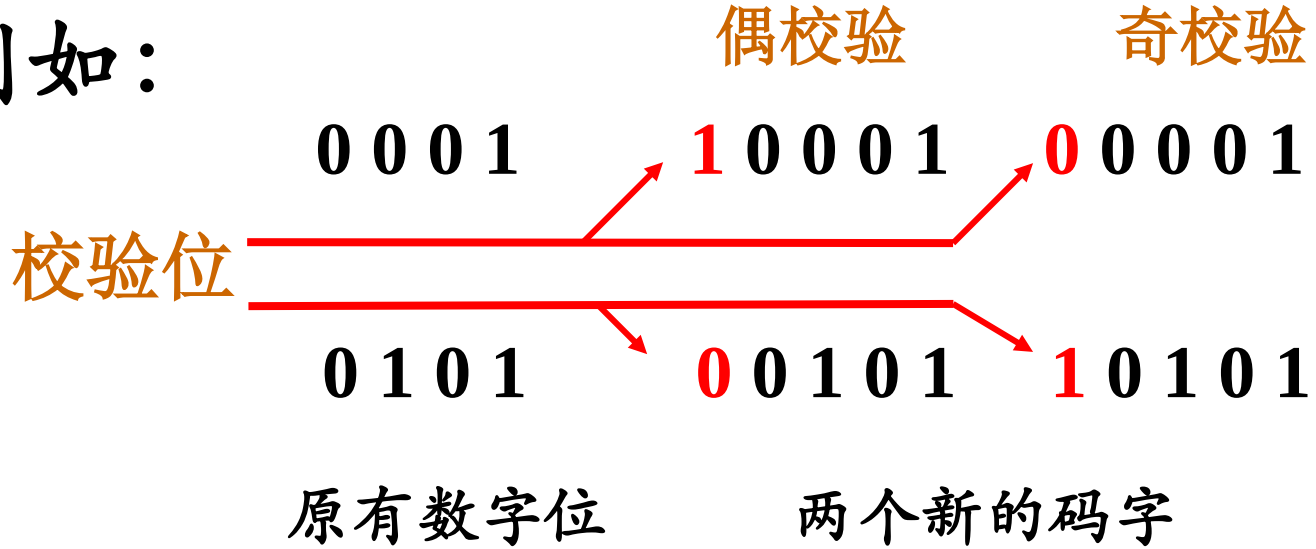


奇偶校验码

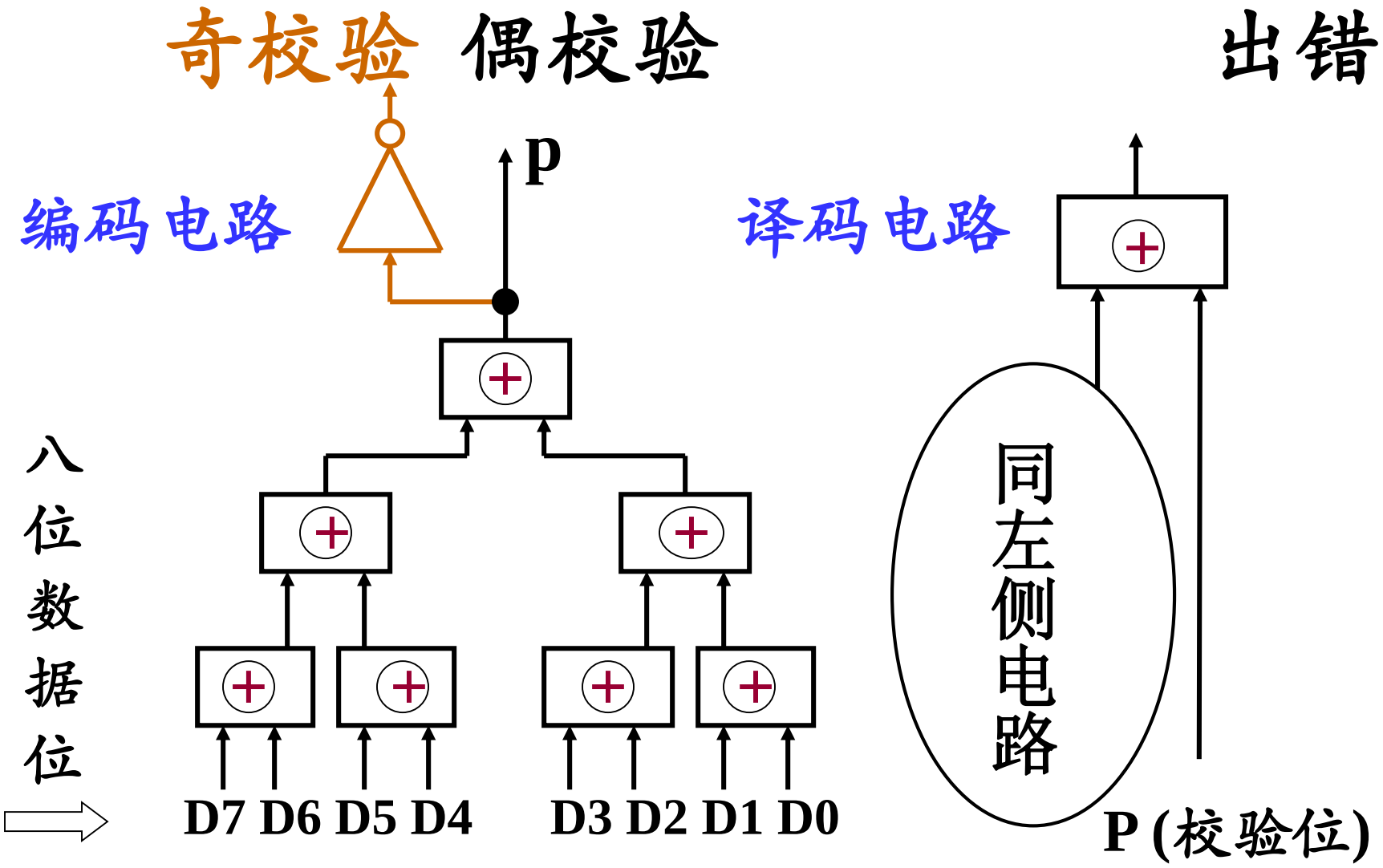
用于并行码检错

原理：在 k 位数据码之外增加 1 位校验位，使 K+1 位码字中取值为 1 的位数总保持为 偶数（偶校验）或 奇数（奇校验）。

例如：



奇偶校验码的实现电路



海明校验码

用于多位并行数据检错纠错处理

实现：为 k 个数据位设立 r 个校验位，使 k+r 位的码字同时具有这样两个特性：

① 能发现并改正 k+r 位中任何一位出错；

② 能发现 k+r 位中任何二位同时出错，但已无法改正。

k 与 r 之间应该满足什么样的关系 ？

海明码的编码方法

清華大學 Tsinghua University

合理地 用 k 位数据位形成 r 个校验位的值，即保证用 k 个数据位中不同的数据位组合来形成每个校验位的值，使任何一个数据位出错时，将影响 r 个校验位中不同的校验位组合起变化。这样一来，就可以通过检查是哪种校验位组合起了变化，来推断是哪个数据位错造成的，对该位求反则实现纠错。

有时两位出错与某种情况的一位出错对校验位组合的影响相同，必须加以区分与解决。

位数 r 和 k 的关系： $2^r \geq k+r+1$, 即用 2^r 个编码分别表示 k个数据位、r个校验位中哪一位错，都不错

$2^{r-1} \geq k+r$ ，用 r-1 位校验码为出错位编码，再单独设一位用于区分 1 位还是 2 位同时出错，更实用

海明码的实现方案

例如: k =3, r =4

D3	D2	D1	P4	P3	P2	P1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1

⊕ 表示异或

$P1 = D2 \oplus D1$

$P2 = D3 \oplus D1$

$P3 = D3 \oplus D2$

编码方案

$P4 = P3 \oplus P2 \oplus P1 \oplus D3 \oplus D2 \oplus D1$

译码方案

$S1 = P1 \oplus D2 \oplus D1$

$S2 = P2 \oplus D3 \oplus D1$

$S3 = P3 \oplus D3 \oplus D2$

$S4 = P4 \oplus P3 \oplus P2 \oplus P1 \oplus D3 \oplus D2 \oplus D1$

海明码的实现方案

清華大學 Tsinghua University

如何分配不同的数据位组合来形成每个校验位的值

P1	P2	D1	P3	D2	D3	P4
1	2	3	4	5	6	

编码方案

（一）准备工作：

(1) 从1~6按次序排列数据位、校验位，

(2) 将校验位P1、P2、P3依次安排在2的幂次方位。

(3)P4为总校验位，暂不考虑。

海明码的实现方案

如何分配不同的数据位组合来形成每个校验位的值

P1	P2	D1	P3	D2	D3	P4
1	2	3	4	5	6	

编码方案

（二）为各校验位分配数据位组合：

(1) 看数据位的编号分别为3、5、6，它们是校验位编号的组合：

3=1+2、5= 1+4 、6= 2+4

(2) 1出现在3和5中，则P1负责对D1和D2进行校验。

(3) 2出现在3和6中，则P2负责对D1和D3进行校验。

(4) 4出现在5和6中，则P3负责对D2和D3进行校验。

海明码的实现方案

如何通过一张表分配不同的数据位组合来形成每个校验位的值

P1	P2	D1	P3	D2	D3	P4
1	2	3	4	5	6	

编码方案

（三）写出各校验位的编码逻辑表达式：

(1) 结果是：

$P1 = D2 \oplus D1$； $P2 = D3 \oplus D1$； $P3 = D3 \oplus D2$

(2) 用其他各校验位及各数据位进行异或运算求校验位P4的值，用于区分无错、奇数位错、偶数位错3种情况

总校验位 $P4 = P3 \oplus P2 \oplus P1 \oplus D3 \oplus D2 \oplus D1$

海明码的实现方案

译码方案是：

对接收到数据位再次编码，用得到的结果和传送过来的校验位的值相比较，结果分别用 S4~S1 表示，二者相同表明无错，不同是有 1 位错了。

排查是哪一位错了，看 S4~S1 这 4 位的编码值。

⊕：异或

$P1 = D2 \oplus D1$

$P2 = D3 \oplus D1$

$P3 = D3 \oplus D2$

编码方案 $P4 = P3 \oplus P2 \oplus P1 \oplus D3 \oplus D2 \oplus D1$

译码方案

$S1 = P1 \oplus D2 \oplus D1$

$S2 = P2 \oplus D3 \oplus D1$

$S3 = P3 \oplus D3 \oplus D2$

$S4 = P4 \oplus P3 \oplus P2 \oplus P1 \oplus D3 \oplus D2 \oplus D1$

海明码的应用实例

清華大學 Tsinghua University

如已有数据为 110，编码为: P1P21P310P4则有：

P1=0，P2=1　P3=1，P4=0

请看如下 3 种情况：

无错，　　单独 1 位错，　　2 位同时错

若无错，则
S4 S3 S2 S1=0000
4 位 S 全为 0

若仅 D1 错，则
S4 S3 S2 S1=1011
S3S2S1 不为 000
其中 S4 必为 1

若P2 D1错，则
S4 S3 S2 S1=0001
其中 S4 必为 0,
S3S2S1 不为 000

检错纠错码小结

清華大學
Tsinghua University

(1) k 位码有 2^K 个编码状态，全用于表示合法码，则任何一位出错，均会变成另一个合法码，不具有检错能力。

(2) 从一个合法码变成另一个合法码，至少要改变几位码的值，称为**最小码距**(码距)，码距和编码方案将决定其检错就错能力。

奇偶校验码的码距为 2，

海明码的码距为 4。

检错纠错能力

(3) $k+1$ 位码，只用其 2^k 个状态，可以使码距为 2，

如果一个合法码中的一位错了，就成为非法码，

通过检查码字的合法性，就得到检错能力，这就是奇偶校验码，只能发现1位错，不具备纠错能力。

(4) 对 k 位数据位，当给出 r 位校验位时，

要发现并改正一位错，须满足如下关系：

$$2^r \geq k + r + 1$$

要发现并改正一位错，也能发现两位错，则应：

$$2^{r-1} \geq k + r$$

小结

- 数据表示
  - 通过二进制编码表示数据
  - 逻辑型
  - 字符型
  - 整数
- 检错和纠错
  - 通过冗余的编码,使之满足某些规则,来检查编码在传输中是否发生错误,并进行纠正
  - 检错纠错能力

阅读及思考

清華大學 Tsinghua University

- 阅读
  - 教材：第3章3.1~3.3节
- 思考
  - 原、反、补码的定义及实现算术运算的难易比较。
  - 试证明补码的性质。
  - 试推导海明码校验位r和数据位k的关系。
  - 补码算术运算如何用硬件来实现?