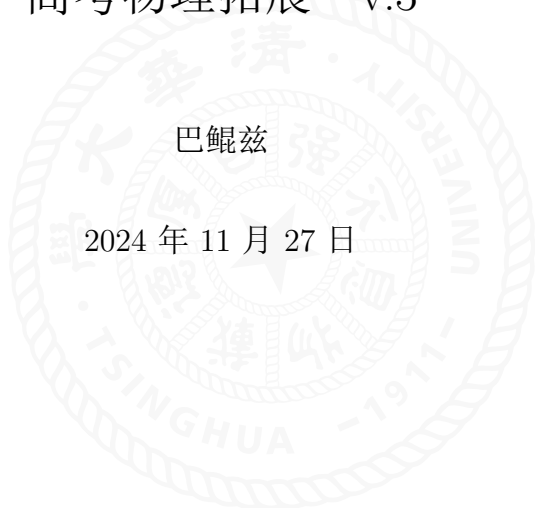


# 高考物理拓展 v.3

巴鲲兹

2024 年 11 月 27 日



## 开篇说明

这是我针对高考物理写的一份进阶讲义。所谓进阶，自然涉及超纲知识。很多人认为，过早地学习超纲知识会导致对课纲内知识的掌握和运用能力不足，诚然，针对数学学科确实如此，但本人认为物理学科学习部分超纲知识是有益处的。从功利角度来说，学习是为了考试，而考试是限时的，这就在正确率等衡量维度上又增添了对速度的要求，而且从复杂度的角度来看，速度和正确率是正相关的。超纲知识客观上降低了题目求解的难度，进而可以增加解决部分题目的速度以及正确率，这无疑是有利的。从物理学学科素养的培养来说，高中物理的定量程度严重不足，使得其更像是一种对物理的科普而非物理科目的知识，在整个物理学理论中连基础都算不上。相应地体现在试卷上，要么试卷难度不足，要么试卷将大学知识下放来提升题目难度，这在北京卷中尤为常见，所以与数学学科中超纲知识不同，物理学科的超纲知识副作用几乎没有。反而，提前学习超纲知识，有助于培养物理思维、物理素养、物理直觉，同时，为本科阶段的物理学习打下更坚实的基础，这对于后续的学习有着极大的帮助。

无论如何，本讲义依然是针对高中生，所以讲义中出现的所有内容在高考物理的选择题、计算题中均有一定的运用。本讲义配套的课件中有相关的例题。讲义一共分为五个部分，分别是数学、物理思想、力学、电学和解题专题。数学是这份讲义的基础内容，而物理思想是核心板块，这部分介绍的物理思想很多都贯穿了从古至今的物理学发展。力学、电学板块相对独立，都是对高考题目常考课外知识以及提升解题速度的知识的讲解。最后一个板块是对计算题解题技巧方法的梳理。本讲义目前没有安排热学、光学以及近代物理板块，是因为这几个部分在高考内拓展的空间不大，并且考试中对这部分的考察非常基础。

### version 2 更新

- 此次更新删去了导数相关内容，其原因是这部分证明太过于数学，对物理本身帮助不大。
- 加入了两个常用矢量公式的讲解：

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

- 加入了微分方程的简单介绍。加入了质量、电荷守恒方程的介绍，这部分内容在 2024 年高考中出现。加入了对离心势能的介绍。加入了有助于理解“场”的一个例子。加入了对安培环路定理的简单介绍。加入了对势动量的简单介绍。

- 在很多处地方增加了更为详细的文字说明以提升讲义的可读性.

### version 3 更新

- 使用 `tcolor` 宏包标记了重点内容.
- 对原有内容进行了一些微调.
- 修改了泰勒展开的引入.
- 添加了数学章节的开篇说明.
- 对“对称性”进行了相对更合理的初等定义, 并用这种定义导出了动量和角动量的守恒.
- 全面添加了习题和答案.





# 目录

<b>1</b>	<b>数学进阶与计算技巧</b>	<b>9</b>
1.1	导数的运用 . . . . .	10
1.1.1	微分与积分 . . . . .	10
1.1.2	物理学中的导数 . . . . .	12
1.2	泰勒展开与小量近似 . . . . .	14
1.2.1	泰勒展开 . . . . .	14
1.2.2	一些函数的泰勒展开 . . . . .	15
1.2.3	小量近似 . . . . .	15
1.3	微分方程简介 . . . . .	17
1.4	矢量进阶 . . . . .	19
1.5	复数的简单扩展 . . . . .	20
1.5.1	欧拉公式 . . . . .	20
1.6	字母运算 . . . . .	22
1.7	习题 . . . . .	23
<b>2</b>	<b>物理学的基本思想</b>	<b>27</b>
2.1	普通物理学框架 . . . . .	27
2.1.1	普通物理学简介 . . . . .	27
2.1.2	力学核心 . . . . .	28
2.2	对称性 . . . . .	28
2.2.1	几何对称 . . . . .	28

2.2.2	变换对称	28
2.3	守恒量	30
2.3.1	机械能守恒	30
2.3.2	动量守恒	31
2.3.3	守恒量	31
2.3.4	守恒关系	32
2.4	近似	33
2.5	等效	34
2.5.1	作用效果等效	34
2.5.2	数学结构等效	34
2.6	叠加与分解	35
2.6.1	线性系统	35
2.6.2	叠加原理	36
2.7	习题	37
3	力学进阶	41
3.1	非惯性系	41
3.1.1	伽利略变换	41
3.1.2	惯性力	43
3.1.3	转动参考系的离心势能	44
3.2	质点系的二级结论	45
3.2.1	质心	45
3.2.2	质心动能定理	45
3.3	天体运动进阶	46
3.3.1	角动量	46
3.3.2	轨道能	48
3.4	刚体力学初步	49
3.5	习题	50

目录	7
<b>4 电学进阶</b>	<b>53</b>
4.1 高斯定理与安培环路定理	53
4.2 场能	55
4.2.1 静电场的能量	56
4.2.2 磁场的能量	57
4.3 “势”的观点	57
4.4 电磁感应和功能关系	59
4.4.1 法拉第电磁感应定律严格推导	59
4.4.2 安培力做功与反电动势做功相等	60
4.5 电路	60
4.5.1 基尔霍夫方程组	60
4.5.2 戴维南定理	61
4.5.3 交流电的复数解法	64
4.6 习题	65
<b>5 解题方法专题</b>	<b>69</b>
5.1 题目信息	70
5.2 解题过程	70
<b>6 习题解答</b>	<b>75</b>
6.1 第一章习题	75
6.2 第二章习题	78
6.3 第三章习题	82
6.4 第四章习题	87





# Chapter 1

## 数学进阶与计算技巧

在物理中, 数学是极为重要的, 因为我们完全无法脱离数学来构建当今的物理体系. 具体来说, 物理科学乃至所有自然科学的核心就是“预测”, 预测的方式是“建模”. 为了验证“预测”的正确性, 我们需要将之前定性的描述定量化. 例如我们要探究抛体的落地的“远近”与固定扔出“方向”和扔出物体的“快慢”的关系, 为了验证我们预测“远近”的正确性, 就要规定一定的“远近”作为参考, 这样我们就定义了所谓的单位长度, 进而有了测量. 而背后建模的过程就是研究各种测量量的关系, 而人们所创建的数学正是研究“数”(当然这里也包括代数、抽象元素)的运算与关系的. 因此, 研究物理、学习物理需要有良好的数学基础.

在经典的物理理论中, 我们认为世界是连续的, 这说明研究“无穷小”及其累积效应是定量描述世界的必须. 这种数学就是所谓的微积分. 另一方面, 我们生存在一个“三维”的世界中, 我们发现很多我们想定义的物理量不能只用一个“数”来描述, 而是需要三个数, 这背后就是矢量的相关运算. 总的来说, 微积分和矢量代数是物理中最基本和自然的数学语言. 然而高中阶段的数学对这两方面有介绍却略显不足(矢量只讲加减和点乘; 微积分只讲导数), 因此, 为了更好的构建物理图像(不要认为物理图像是定性的或者描述的, 构建清晰的物理图像需要充足的数学), 我们在本章补充一些基本的有关微积分和矢量的知识.

## 1.1 导数的运用

### 1.1.1 微分与积分

导数的一般定义是这样的：

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (1.1)$$

画出函数图像，容易发现导数的几何意义是图像切线的斜率，也就是我们在图像上取两个非常近的点，这两个点连线作为斜边，与  $x, y$  轴的平行线可以形成一个小三角形，而导数就是这个直角三角形的两个直角边的比值：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1.2)$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$  时分子分母都趋向于零，而这两个很小的量的比值是一个有限的值。在数学上，对于分子分母分别都有定义，即微分，我们将  $\Delta x$  换成  $dx$  称作  $x$  的微分。进而省略极限符号，导数可以写作：

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \quad (1.3)$$

这种写法将导微分的商。因此，导数也有“微商”的叫法。当函数的自变量变化  $\Delta x$  时，函数值的变化可以写成

$$\Delta y = y' \Delta x + B \Delta x^2 + C \Delta x^3 + \dots \quad (1.4)$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$  时，后面几项远小于第一项，所以可以将微分理解为被保留的第一项（但注意，这只是一种直观理解，微分本质并不是一个“量”，而是一种线性映射！）。

#### 微分关系

$$df = f'(x)dx \quad (1.5)$$

为函数  $f$  的微分。是一个无穷小量。根据导数的法则我们可以直接给出微分的运算法则：

$$d(u+v) = du + dv \quad (1.6)$$

$$d(uv) = u dv + v du \quad (1.7)$$

上式被称为莱布尼茨法则，在今后高等数学的很多地方都能见到类似的结构。

事实上, 在很多物理方程的构建中, 我们都采取微元法, 即取“一小块”研究对象进行研究. 这其实和微分的定义有关. 可以看到, 我们定义微分时, 是取  $\Delta y$  的第一项 (线性项) 而忽略后面的项的, 而只取线性项在几何上就是所谓的化曲为直, 微元的很多几何量都可以采用相对简单的几何图形的公式 (主要是矩形) 进行计算, 也就使得列出的方程更为简便.

将所取的微元中小量记作微分, 并且不同函数的微分可以自由的相除、约分. 这实际上在数学上是不严格的, 但在大部分情况下上述微分的运算的正确的. 因此可以忽略一部分数学上的严谨性.

接下来简单介绍一下积分. 我们定义积分符号:

$$\int df = f + C \quad (1.8)$$

其中  $C$  为常数. 将导数的定义带入移项有:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \quad (1.9)$$

这就是不定积分的定义. 可以看出, 求积分是求导数的逆运算, 即我们要找到一个函数使得其导数是给出的函数. 这个新的函数称之为原函数. 一般我们将已知的函数写成  $f(x)$ , 而它的原函数为  $F(x)$ .

更进一步地, 定义定积分:

$$\int_a^b df = f(b) - f(a) \quad (1.10)$$

即函数  $f$  在区间  $[a, b]$  的变化量. 或者打开写成

#### Newton-Leibniz 法则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1.11)$$

这个式子就是著名的牛顿-莱布尼茨法则.

从几何意义上看, 我们要求的就是函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的面积. 而我们发现面积微元的大小等于原函数在函数值上的微小增量, 因此, 我们直接求得原函数在区间  $[a, b]$  的函数值的变化量, 就可以得到所求的面积.

积分有许多的运算技巧. 但是, 积分运算对初等函数是不封闭的, 也就是说, 一个初等函数的积分不一定是初等函数. 而且, 事实上, 给出任意一个初等函数, 其有初等函数的积分结果的

概率是很小的. 但是, 高中乃至强基阶段, 只需要了解初等函数的积分即可. 下面给出一些积分公式.

1. 首先是幂函数的积分, 容易想象一个幂函数的原函数也是幂函数. 求导使得指数减一, 所以积分就需要在原来的指数上加一. 同时注意到求导运算时的系数变化, 就容易给出

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (1.12)$$

观察这个结果, 我们发下似乎在  $n = -1$  的情况下这个结果没有定义, 仔细想, 我们也确实找不到一个幂函数使得其导数为  $x^{-1}$ . 回忆高中函数的求导公式, 我们发现  $\ln x' = x^{-1}$  因此有:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (1.13)$$

加上绝对值是由于  $\ln x$  在  $x \leq 0$  时没有定义, 将其拓展为定义在  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  上的函数. 也正是因为这个绝对值的存在, 对  $x^{-1}$  进行定积分时需要格外小心. 需要积分的上下限是同号的.

2. 三角函数的积分:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (1.14)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (1.15)$$

需要注意的是正负号.

3.  $e$  指数的积分.

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C \quad (1.16)$$

$e$  指数前的系数来源是我们需要将微分  $dx$  改成  $da x + b$ , 这样将  $ax + b$  视为一个新的自变量进行积分, 而  $ad x = da x + b$ , 所以需要在前面补上一个  $a^{-1}$  的系数.

### 1.1.2 物理学中的导数

在高中阶段, 为了避免直接使用导数, 通常将导数写成  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ . 接下来直接给出一些物理定律的导数形式:

1. 运动学

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \mathbf{v} \quad (1.18)$$

## 2. 动力学

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{p} \quad (1.19)$$

一维情况下, 势能和力的关系:

$$F = -\frac{d}{dx}V \quad (1.20)$$

## 3. 电学:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.21)$$

$$U = L\frac{dI}{dt} \quad (1.22)$$

物理中, 还有可能碰到其他类型的导数, 下面仅作为介绍给出两种导数, 因为这些符号可能会在后面出现. 如果难以理解的话, 将它们看作一般的导数即可, 因为他们具有一般导数的性质.

第一种为偏导数, 针对多元函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . 有:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} \quad (1.23)$$

即将其他变量视作常数, 仅对某一变量求导. 根据偏导数, 我们可以写出每个自变量变化  $dx_i$  情况下  $f$  的变化:

## 多元函数的全微分

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (1.24)$$

另一种仅针对三元函数:  $f = f(x, y, z)$ , 将其映射到一个矢量:

## 梯度

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (1.25)$$

其中  $\nabla$  为算符:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \quad (1.26)$$

对于三维情况, 力和势能有对应的关系:

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (1.27)$$

## 1.2 泰勒展开与小量近似

### 1.2.1 泰勒展开

我们之前说过, 微分是一种线性近似. 也就是说, 在函数的某点  $x_0$  处足够近的区域,  $f(x)$  与  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  的差别足够小. 那么, 当我们扩大这个区域, 为了仍然得到较好的近似, 我们就需要考虑  $\Delta x^2$  的影响. 现在试图求出这个系数. 为了简单, 我们认为  $x_0 = 0$ .

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + Ax^2$$

两边求导数得到

$$f'(x) = f'(0) + 2Ax$$

根据二阶导数的定义, 我们发现  $2A = f''(x_0)$ . 所以, 就得到了

$$f(x) = f(x) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

将上述操作类推, 我们就可以得到一个新的函数:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (1.28)$$

求之在  $x_0$  处的第  $k$  阶导数, 容易发现

$$g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad (1.29)$$

泰勒展开指出, 对于在  $x_0$  处有定义函数, 在  $x_0$  的一定邻域内恒有:

$$g(x) = f(x) \quad (1.30)$$

也就是说:

#### Taylor 展开

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (1.31)$$

这被称为  $f(x)$  的泰勒展开. 泰勒展开的意义在于, 对于一个给出的函数, 我们都有办法将其写成幂函数的和的形式. 初等函数中, 幂函数是最好处理的一个函数, 也是唯一可以手算的

函数. 特别地, 当  $x_0 = 0$ , 则有:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (1.32)$$

这被称为  $f(x)$  的麦克劳林展开.

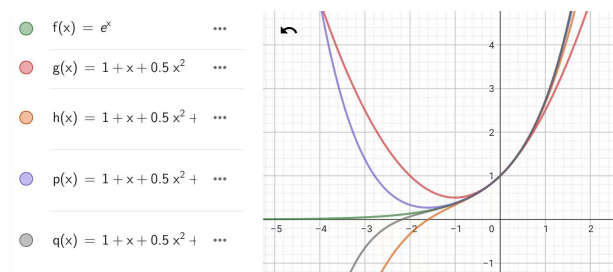


图 1.1:  $e^x$  的几项展开

### 1.2.2 一些函数的泰勒展开

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (1.33)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (1.34)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (1.35)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (1.36)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \dots \quad (1.37)$$

### 1.2.3 小量近似

对于  $x \ll 1$  的情况下, 有:

$$x \gg x^2 \gg x^3 \gg \dots \quad (1.38)$$

直观来说, 我们不妨考虑一个级数和:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (1.39)$$

其中  $a_n \in (0, 10)$  我们令  $x = 0.01$  带入, 就可以求得这个级数:

$$S = a_0 + 0.01a_1 + 0.0001a_2 + 0.000001a_3 + \dots \quad (1.40)$$

如果说我们只需要一个粗略的结果, 精度要求在整数部分, 那么我们可以直接认为:

$$S = a_0 \quad (1.41)$$

这样在在整数部分是完全准确的, 与精确结果只在小数点后两位有差距. 如果说我们希望提高一点精度, 求出简单的

$$S = S(x) \quad (1.42)$$

, 那么, 由于  $x^n$  的高阶项只影响到小数点后第  $2n$  位, 我们完全可以只保留第一项:

$$S(x) = a_0 + a_1 x \quad (1.43)$$

这个结果与精确结果的差距在小数点后 4 位, 已经是一个非常高的精度了. 如果在我们考虑问题的范围之内,  $x$  始终远小于 1, 那么普遍的,  $S(x) = a_0 + a_1 x$  明显是一个比  $S(x)$  本身 (我们甚至无法知道他的函数形式) 更好处理与计算的函数, 同时这个近似也能够保证足够的精度, 所以说我们通常采用保留级数和  $x$  低幂次项作为近似.

由此, 我们可以对函数进行近似, 只保留泰勒展开的低幂次项. 接下来给出几个常用的近似:

$$\sin x \approx \tan x \approx x \quad (1.44)$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad (1.45)$$

$$e^x \approx 1 + x \quad (1.46)$$

$$(1+x)^a \approx 1 + ax \quad (1.47)$$

第一个近似有明显的几何意义.

从上面的例子中, 我们定义  $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$  为对函数  $f(x)$  的线性化, 是物理各种推导中极为常见的一个操作. 这种操作的巨大优势在求解微分方程时会得到体现. 但是, 并不是所有函数都能进行线性化的操作, 例如  $\cos x$  这类函数就无法进行线性化.



## 1.3 微分方程简介

常微分方程是一类含有微分的方程, 它的一般形式为:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots) = 0 \quad (1.48)$$

其中, 出现导数的最高阶数称为微分方程的阶数.

一个微分方程会有很多解, 我们并不需要将每一种解都解出, 通常我们求得的都是连续且为初等函数的解. 解的一般形式为:

$$y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (1.49)$$

其中  $c_1 \dots c_n$  为待定常数, 需要由初始条件 (或称边界条件) 决定.  $n$  阶微分方程会有  $n$  个待定常数, 因此, 确定一个  $n$  阶微分方程的边界条件需要有  $n$  个.

对于一阶微分方程, 最常见也是最好解的就是可分离变量的方程. 此种方程可以化成:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (1.50)$$

的形式. 解决此种方程只需要两边移项, 积分:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx \quad (1.51)$$

即可得到结果隐函数的解:

$$F(x) - G(y) + C = 0 \quad (1.52)$$

另一种比较常见的是常系数二阶微分方程. 对于这样的二阶微分方程:

$$y'' + Py' + Qy = 0 \quad (1.53)$$

可以看出, 满足这种微分方程的函数, 它的导数与二阶导数与自己线性相关, 故我们猜测这是一种  $e$  指数函数. 我们不妨设这种函数为:  $y = Ae^{\lambda x}$  带回原方程得到:

$$A\lambda^2 e^{\lambda x} + PA\lambda e^{\lambda x} + QAe^{\lambda x} = 0 \quad (1.54)$$

消去  $A, e^{\lambda x}$  得到:

$$\lambda^2 + P\lambda + Q = 0 \quad (1.55)$$

这就是常系数微分方程的特征方程. 通常,  $\lambda$  得解会有三种情况, 我们分类讨论.

$\lambda$  有两个实数解. 则方程的解为:

$$y = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} \quad (1.56)$$

$\lambda$  重根, 则方程的解为:

$$y = (Ax + B)e^{\lambda x} \quad (1.57)$$

$\lambda$  有两个复数根. 此时  $\lambda = \frac{-P \pm i\sqrt{4Q-P^2}}{2} = \lambda_0 + i\omega$ . 则方程的解为:

$$y = (A \cos \omega x + B \sin \omega x)e^{\lambda_0 x} \quad (1.58)$$

例如简谐振动的微分方程:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1.59)$$

特征方程:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad (1.60)$$

解得:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.61)$$

所以:

$$x(t) = A \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \quad (1.62)$$

再给出一个例子: 阻尼振动的微分方程:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.63)$$

其中  $\beta$  为阻尼系数. 特征方程:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (1.64)$$

不妨认为  $\omega_0 > \beta$  (欠阻尼), 解得:

$$\lambda = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (1.65)$$

则参考之前的公式就有:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \phi) \quad (1.66)$$

是一个振幅以  $e$  指数衰减的简谐振动.

## 1.4 矢量进阶

矢量叉乘的定义为:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\langle\mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle \quad (1.67)$$

方向由右手螺旋定则确定, 即右手手掌指向  $\mathbf{A}$  方向, 四指向  $\mathbf{B}$  方向弯曲, 此时大拇指指向的方向就是叉乘结果的方向. 根据定义来看, 叉乘没有交换律, 而有反交换律:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1.68)$$

坐标系基矢的叉乘结果:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad (1.69)$$

对于直角坐标系下两个矢量相乘, 可以给出如下公式

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (1.70)$$

矢量叉乘的几何意义是两矢量张成的平行四边形的面积, 据此给出一个解析几何中的常用结论, 即  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  则有:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1| \quad (1.71)$$

在电学中有很多左手、右手定则, 本质上便是叉乘的结果.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.72)$$

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (1.73)$$

想要使矢量叉乘的工具发挥作用, 需要牢记矢量的几个公式.

首先是混合积. 即

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad (1.74)$$

这个乘积的几何意义是三个矢量张成的平行六面体的体积. 其中  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$  是底面积, 再与  $\mathbf{A}$  点乘就是底乘高.

根据这个几何意义, 我们就容易发现混合积是可换序的, 即:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.75)$$

但是, 由于叉乘具有反交换律, 所以除了上述三个顺序之外, 其他顺序  $ABC$  的混合积与原来差一个负号. 例如

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad (1.76)$$

第二个就是三重矢积公式:

### 三重矢积公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (1.77)$$

记住这个公式有一个好用的口诀: “远交近攻”.

下面利用展开证明这个公式.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_1 \\ &= A_2(B_1C_2 - C_1B_2) - A_3(C_1B_3 - B_1C_3) \\ &= (A_2C_2 + A_3C_3)B_1 - (A_2B_2 + A_3B_3)C_1 \\ &= (A_2C_2 + A_3C_3)B_1 + A_1B_1C_1 - A_1B_1C_1 - (A_2B_2 + A_3B_3)C_1 \\ &= (A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3)B_1 - (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)C_1 \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) B_1 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) C_1 \end{aligned} \quad (1.78)$$

其余分量同理.

## 1.5 复数的简单扩展

### 1.5.1 欧拉公式

观察三角函数和  $e^x$  的泰勒展开, 发现将正、余弦函数相加后, 每一项的大小与  $e^x$  的展开均相同, 只差正负号. 注意到复数:

$$i^2 = -1 \quad (1.79)$$

计算  $\cos x + i \sin x$ :

$$\begin{aligned}
 \cos x + i \sin x &= \sum_{n=0,2k}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} x^n}{n!} + i \sum_{n=1,2k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0,2k}^{\infty} \frac{(i^2)^{\frac{n}{2}} x^n}{n!} + i \sum_{n=1,2k+1}^{\infty} \frac{(i^2)^{\frac{n-1}{2}} x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0,2k}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} + \sum_{n=1,2k+1}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\
 &= e^{ix}
 \end{aligned} \tag{1.80}$$

于是我们就得到了著名的欧拉公式:

Euler 公式
$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1.81}$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{1.82}$$

带入  $x = \pi$  后得到的是网上广为流传的版本. 这一个式子中融合了  $0, 1, e, \pi, i$  几个重要的数学常数. 注意到  $\cos x + i \sin x$  是复平面上单位圆上的点, 与实轴的夹角为  $x$ . 因此任意一个复数也可以表示成:

$$z = |z| e^{i \arg z} \tag{1.83}$$

实质上,  $e^{i\theta}$  乘在复数上得到的新复数是原复数顺时针旋转  $\theta$  度得到的结果.

$$z' = e^{i\theta} z = |z| e^{i \arg z} e^{i\theta} = |z| e^{i(\arg z + \theta)} \tag{1.84}$$

一个复数可以表示复平面上的点, 然而复数的运算又符合四则运算. 这就为解决质点的平面运动问题提供了极大的便利. 例如带点例子在磁场中运动. 设质点的复速度为  $\tilde{v}$ , 写出运动方程:

$$m \frac{d}{dt} \tilde{v} = iqB \tilde{v} \tag{1.85}$$

两边积分:

$$\tilde{v} = i v_0 \exp i \frac{qB}{m} t \tag{1.86}$$

此处为简化计算认为初速度沿虚轴. 继续积分得到位置:

$$z = \frac{mv_0}{qB} \exp i \frac{qB}{m} t \quad (1.87)$$

分别取实部、虚部可以得到  $x, y$  两个方向上的分运动:

$$x = \Re(z) = \frac{mv_0}{qB} \cos \frac{qB}{m} t \quad (1.88)$$

$$y = \Im(z) = \frac{mv_0}{qB} \sin \frac{qB}{m} t \quad (1.89)$$

直接得到是圆周运动, 并且得到运动半径和角速度:

$$R = \frac{mv_0}{qB}; \omega = \frac{qB}{m} \quad (1.90)$$

在上述过程中, 我们已经涉及到了函数值为复数的函数. 但函数的自变量  $t$  一直是一个实数, 因此我们可以利用之前讲到的实变函数的微积分理论处理.

对于一般的问题, 若质点只在二维平面运动, 面对比较简单的复合场, 我们就可以考虑用复数法求解. 那么, 如何将二维平面的  $\mathbf{f}$  与  $\tilde{f}$  对应? 其实只需要考虑矢量的两个要素, 大小和方向. 比如力  $\mathbf{f}$  的方向与  $\mathbf{v}$  相同, 那么我们就可以写出:

$$\frac{\tilde{f}}{|\mathbf{f}|} = \frac{\tilde{v}}{|\mathbf{v}|} \quad (1.91)$$

又比如  $\mathbf{f}$  一直指向  $y$  轴, 那么就有:

$$\tilde{f} = i|\mathbf{f}| \quad (1.92)$$

只需要利用之前介绍的复数的几何意义, 就可以利用复数写出  $\mathbf{f}$  的方向, 再确定模长就可以确定  $\tilde{f}$ .

## 1.6 字母运算

字母运算通常来讲比数字运算更为简单, 方便检查量纲. 因此, 在给出数字的物理大题中, 尽量字母运算到底最后带入数据计算. 对于一些长过程的物理大题, 一些中间结果非常重要, 例如进入某段新过程的初始速度. 这些中间量要计算出数字结果, 并将这些中间量设成字母, 作为已知进行接下来的计算. 最后带入中间量的数字结果.

一些常用的量纲检查:

$$v = \alpha \sqrt{gL} = \beta \sqrt{\frac{GM}{L}} \quad (1.93)$$

$$a = \alpha g = \beta \frac{v^2}{L} \quad (1.94)$$

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \beta \sqrt{\frac{GM}{L^3}} \quad (1.95)$$

$$E = \alpha \frac{kQ}{L^2} = \beta vB \quad (1.96)$$

这些表达方式不仅可以有效地检查,也可以简化运算. 可以将一个结果化为无量纲系数乘量纲项的形式, 这样在同量纲量的加减法时, 就可以化为无量纲系数的和差乘上量纲项的结果. 一定程度上可以使得计算过程更为清晰明了.

## 1.7 习题

**Problem1.** 已知一个质点的位置随时间变化:

$$\mathbf{r} = (\cos \omega t, \sin \omega t, vt) \quad (1.97)$$

求其速度.

**Problem2.** 现有一个从  $t = 0$  时刻位于原点的质点进行一维运动, 其速度如下:

$$v = at^2 + bt + c \quad (1.98)$$

求  $x(t)$ .

**Problem3.** 利用幂函数的积分证明梯形面积公式. 在高考物理中, 通常是将这个操作反过来: 需要用到积分时用梯形面积来计算.

**Problem4.** 已知一个导体棒在间距为  $L$  的导轨上运动,  $t = 0$  时刻位于  $x = 0$  处, 回路总电阻为  $R$ , 空间中有垂直于轨道平面的磁场  $B$ . 已知其位置:

$$x = v_0 t + L_0 e^{-\alpha t} \quad (1.99)$$

求施加在导体棒上的外力.

**Problem5.** 已知相对论下物质的动能:

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \quad (1.100)$$

验证: 当  $v \ll c$  时退回到经典动能公式.

**Problem6.** 两个同号点电荷带点  $Q_1$  和  $Q_2$ , 距离为  $L$ . 一个带电量为  $q$  的点电荷放在平衡位置. 求其在附近小振动的周期.

**Problem7.** 一个电子在匀强磁场  $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$  中运动, 其速度为  $\mathbf{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$ , 求其受到的洛伦兹力.

**Problem8.** 一个质量为  $m$  的雨滴从静止下落, 受到重力和空气阻力:  $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ , 求  $x(t)$ . (向下为正方向)

**Problem9.** 求解临界阻尼振动, 即  $\beta = \omega_0$  的  $x(t)$ , 允许有两个待定常数.

**Problem10.** 一小段电流在磁场中受到安培力:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (1.101)$$



且我们有积分公式：

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{l} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (1.102)$$

试证明，一段电流在匀强磁场中的受力等价于从头指向尾的，具有相同电流大小的直导线的受力。

**Problem 11.**

- 质点受到洛伦兹力和  $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$  的空气阻力，试在复平面中给出质点的复受力。
- 接上个问题，求质点的  $x(t)$ ,  $y(t)$ ，已知初始时刻  $z = \frac{mv_0}{qB}$ ，速度  $\mathbf{v} = i v_0$





## Chapter 2

# 物理学的基本思想

### 2.1 普通物理学框架

#### 2.1.1 普通物理学简介

普通物理学的内容与高中物理范围相差不大, 只是加入了更多的数学工具, 对高中一些定量说明的内容进行定量计算. 普通物理学分为力学、电学、光学、热学、近代物理几个板块.

力学主要以牛顿运动定律为框架, 导出能量、动量定理, 并以天体运动和简谐振动两个重要场景利用牛顿力学导出一些结论.

电学的主要研究对象是“场”, 给出了对于场的基本研究方法. 另外, 普通物理作为通识性质的课程, 还包含了一部分电路分析的内容.

光学实际上是电学的分支, 因为光的本质是电磁波. 普通物理光学的内容与高中物理相同, 分为几何光学和波动光学, 加入了几何光学的成像理论, 波动光学干涉、衍射、偏振的定量计算.

热学的主要研究对象是粒子数在  $N_A$  量级的多体系统, 在这一系统中, 利用牛顿力学研究每个粒子的运动几乎不可能. 因此热学给出了研究这种数量级很大的多体系统的方法, 即讨论宏观状态和平均值的表象理论.

近代物理的内容也与高中物理差别不大, 加入了相对论的定量计算.

由此来看, 普通物理中极为重要的三个板块分别为力学、电学和热学, 因为他们的研究对

象各不相同, 针对研究对象的特点给出了新的语言范式.

### 2.1.2 力学核心

高中物理中, 对于上述所谓新的范式均没有给出很好的物理图像, 只是进行了一些介绍性的说明, 其实是碍于数学工具的缺乏. 因此, 光学、热学、近代物理不考计算大题, 只作为选择题出现. 力学、电学会在计算大题中出现, 并且电学只是给出的新的形式的相互作用.

由此来看, 高中物理的核心是**力学**即讨论物体间相互作用和运动关系, 并在不同的物体相互作用的背景下求解物体的运动.

## 2.2 对称性

对称性在物理中是极为重要的一个概念. 合理利用对称性会使解题变得简单. 并且深层次的物理指出对称性代表守恒量, 因此现代物理研究相互作用是基于对称群的, 不同的相互作用是不同对称群的结果.

### 2.2.1 几何对称

几何上的对称使得多个处于对称位置的分析对象具有相同的方程, 进而具有相同的运动状态. 这样就可以减少所设未知量, 减少分析对象, 从而简化问题的分析与求解.

### 2.2.2 变换对称

变换对称是指, 体系在经过某种变换后不变的性质. 例如空间中存在某一方向的匀强电场, 则将体系沿垂直电场方向进行平移后没有发生任何变化. 对于行星绕恒星运动, 以恒星为中心旋转任意角度, 体系也没有任何变化.

上面两个例子给出了最经典的两种变换对称, 即平移对称和旋转对称. “不变”一词似乎有些含糊, 下面给出一个较为粗浅但正确的规定. 对于无耗散的体系, 在体系 (除去被研究对象) 进行该种变换后, 系统的能量用变换后的坐标表出后与原来的能量相同.

重力场、电场一般都是平移对称体系, 而引力场则是一种经典的旋转对称.

诺特定理指出, 任意一种变换对称都对应着一种守恒量. 根据之前的定义, 如果我们对时间进行平移后能量不变, 也就是说能量不随着事件发生改变, 即时间平移对称对应能量守恒.

下面简单说明平移对称对应动量守恒. 考虑:

$$V = V(x, y, z) \quad (2.1)$$

这里不妨假设体系沿  $x$  方向平移对称. 则有:

$$V = V(x + \delta x, y, z) = V(x, y, z) \quad (2.2)$$

自然能量也不变. 观察功能关系

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x} = V(x, y, z) - V(x + \delta x, y, z) = 0 \quad (2.3)$$

得到:

$$F_x = 0 \quad (2.4)$$

即水平方向动量守恒. 如果体系是非保守的但也具有平移对称性, 例如磁场力  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{E}$  就有这种性质. 这种情况下也存在守恒量, 不过不是一般的机械动量, 而是正则动量. 下面介绍磁场的正则动量, 在磁场中运动的带点粒子任意方向动量均不守恒, 但具有一定性质的磁场具有正则动量守恒. 写出  $x$  方向 (平移对称方向) 的粒子的动力学方程, 由于沿  $x$  方向平移对称, 那么磁场  $B = B(y)$ :

$$m \frac{dv_x}{dt} = -qB(y) \frac{dy}{dt} \quad (2.5)$$

而根据之前给出的数学知识  $B(y)dy = du(y)$ , 那么上式改写成:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{du(y)}{dt} \quad (2.6)$$

移项得到:

$$\frac{d}{dt} [mv_x + qu(y)] = 0 \quad (2.7)$$

即;

$$mv_x + qu(y) = \text{Const.} \quad (2.8)$$

守恒. 对比发现, 这个守恒量与动量的量纲相同, 但是又不是经典的动量. 对于匀强磁场, 这个守恒量为:

$$\boxed{mv_x + qBy = \text{Const.}} \quad (2.9)$$

在高中范围内解决一些电场、磁场符合场中粒子运动较为常用. 在第三章中, 我们会通过另一种视角导出这个结论.

那么, 对诺特定理的一个运用就是, 如果说系统在某个方向具有平移对称性, 那么通过列出这个方向上的牛顿第二定律, 我们一般就能发现这个方向所对应的守恒的正则动量.

而对于旋转平移对称性则对应角动量守恒, 或者说正则角动量守恒. 这一点会在力学一讲中详细说明.

利用守恒量解题比直接求解动力学方程更为简单, 因为守恒量解题时面对的方程是方程, 而动力学方程则是一种微分方程, 这在数学上严重超纲. 举一个简单的例子, 磁场中导体杆问题:

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 L^2}{R} v \quad (2.10)$$

便是一个微分方程, 你会发现你似乎无法用高中阶段的数学知识给出  $v = v(t)$ , 进而也就无法解题.

## 2.3 守恒量

### 2.3.1 机械能守恒

仅考虑一维运动的质点, 列出其牛顿定律:

$$m \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx} \quad (2.11)$$

两边同乘速度得到:

$$m \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = 0 \quad (2.12)$$

发现:

$$\frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (2.13)$$

带回得到:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V \right] = 0 \quad (2.14)$$

即说明:

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V = \text{Const.} \quad (2.15)$$

三维运动的质点每个方向上均有这一个等式 (我们这里认为每个方向上的势能独立, 所以可以求和), 对之求和得到:

$$\frac{1}{2} m v^2 + V = \text{Const.} \quad (2.16)$$

这就是机械能守恒定律.

### 2.3.2 动量守恒

考虑质点组, 质点间存在两两相互作用, 但没有外力. 列出每一个质点的运动方程:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \quad (2.17)$$

每一个质点均如此, 对之求和:

$$\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \quad (2.18)$$

注意到牛顿第三定律:

$$\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0 \quad (2.19)$$

因此前式右边为零. 有:

$$\sum_i \frac{d}{dt} m_i \mathbf{v}_i = 0 \quad (2.20)$$

即说明:

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{C} \quad (2.21)$$

系统动量守恒.

### 2.3.3 守恒量

以上就是高中阶段两个重要守恒量的推导. 上一节已经说到, 从解题的角度来说, 守恒量是更容易的一种方法.

观察上述两个推导过程, 我们并没有假设势能、相互作用的具体形式, 而是根据势能可定义和无外力两个更为简单和广泛的假设, 通过数学上的推导, 得出了形如:

$$\frac{d}{dt} f = 0 \quad (2.22)$$

的结果, 进而  $f$  就是守恒量.

因此, 守恒量不仅不要求相互作用的具体形式, 而是根据一些普遍的性质推导出来的, 具有普遍性; 而且, 守恒量中一个重要步骤就是根据某量导数恒为零确定其为一个守恒量, 这在数学上实际上进行了一次积分的操作. 对于一般的运动方程是二阶微分方程 (组), 既然是微分

方程, 就需要导数的逆运算, 即积分, 来求解方程. 而守恒量已经帮助我们进行了一次积分, 而高中题目的设问大部分就是速度, 而不是给出具体的  $\mathbf{r}(t)$ , 守恒量相当于直接给出了能得出答案的代数方程.

在近现代物理中, “力” 的观念被淡化, 尤其是在量子力学当中, 描述粒子的是波函数  $\Psi(r, t)$ , 他是关于空间和时间的多元函数. 此时更无法讨论牛顿第二定律和力. 但是, 我们仍然可以研究动量 ( $\hat{p}$ ), 能量 ( $\hat{H}$ ) 随时间的变化, 来研究对象的行为. 例如大名鼎鼎的薛定谔方程:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (2.23)$$

右边就是能量, 这一方程描述的就是粒子的能量如何控制波函数随时间变化. 求解这个方程就可以求得粒子的波函数.

### 2.3.4 守恒关系

我们之前讨论的内容都是动力学量, 比如动量, 能量的守恒关系, 可以帮助我们列出方程来解题. 事实上, 物理学中守恒的关系还有很多, 除去动力学量外, 还有一些基本的“量”是守恒的.

首先是质量. 在牛顿经典力学中, 同一个系统的总质量一定是守恒的. 在处理简单的牛顿力学问题时, 质量守恒并不常用. 但是在处理流体时质量守恒就变得极为重要. 接下来我们利用质量守恒推出一个比较重要的等式. 考虑一个确定的区域  $V$ , 边界上允许粒子的进出. 那么区域内下一时刻的总质量由目前的总质量和进入体系的总质量决定. 即:

$$M(t + \Delta t) = M(t) + \Delta M \quad (2.24)$$

而  $\Delta M$  是由进出这个体系的流量  $Q$  决定的. 由于一些原因, 我们认为流出这片区域的流量为正. 那么就有  $\Delta M = -\rho Q \Delta t$  因此两面除以  $\Delta t$ , 就有:

$$\frac{dM}{dt} + \rho Q = 0 \quad (2.25)$$

这被称为质量连续性方程. 更一般地, 如果流量非均匀, 我们通常会用  $\mathbf{j}$  流密度来描述. 其定义为单位面积单位时间通过的荷元. 利用之前介绍过的偏导数和  $\nabla$  算符可以给出物理中即为常见的连续性方程:



## 连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.26)$$

还有另外一种情况, 就是我们确定一部分的研究对象, 这部分研究对象占据的体积在变化, 那么就有:

$$\rho(t)V(t) = \text{Const.} \quad (2.27)$$

这在对很多流体进行建模时非常有用.

类似于质量, 电荷、粒子数也是守恒的. 具体形式和质量守恒的方程完全一致, 这里不再赘述. 在处理电荷和粒子有转移、变化的问题时, 可以考虑列相关的守恒方程.

## 2.4 近似

物理学上的近似一部分是数学上的近似, 这背后有严格的数学理论支撑, 即泰勒展开.

另一部分近似是对过程的近似, 根据数量级忽略某些过程的影响.

下面给出一个例子. 一个长条形的空间中存在磁场, 宽度为  $d$ , 有  $d \ll L$ . 其表达式为:

$$B = B_0 \frac{y}{L} \quad (2.28)$$

大量带正电  $q$  的粒子从不同高度, 以相同的速度  $v_0$  入射.

由于  $d$  很小, 可以忽略粒子在磁场中运动的高度变化, 这是第一个近似. 同时也由于  $d$  很小, 粒子在磁场中运动的时间可以忽略. 因此磁场的作用可以等效为一个冲量. 根据这两个近似进行计算, 半径:

$$r = \frac{mv_0}{qB_0} \frac{L}{y} \quad (2.29)$$

偏转角度:

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{d}{r} = \frac{qB_0 d}{mv_0 L} y \quad (2.30)$$

这里的近似是泰勒展开给出的. 继续近似:

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{qB_0 d}{mv_0 L} y \quad (2.31)$$

因此与  $y = 0$  的交点:

$$f = \frac{y}{\tan \theta} = \frac{mv_0 L}{qB_0 d} \quad (2.32)$$

为定值. 这就是磁聚焦的一种方案. 这一个例子中, 同时体现的数学近似和过程近似两种近似. 其中, 磁场作用被等效为冲量的近似是著名的脉冲近似.

## 2.5 等效

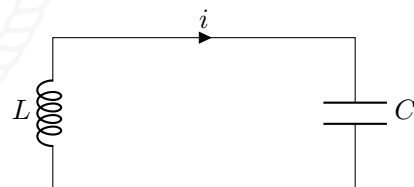
### 2.5.1 作用效果等效

物理学上, 系统的本质是什么并不重要, 重要的是系统与外界相互作用时体现的性质. 因此, 对于两个不同的系统, 若这两个系统与外界的相互作用方式完全相同, 那么这两个系统就可以等效.

例如解决动力学问题中的整体法. 取某一组质点为整体, 这些质点的相对位置没有变化, 与外界相互作用时与一个质点无异, 便可以将这些质点视作整体, 当成一个质点来研究.

### 2.5.2 数学结构等效

考虑下图电路.



列出电路满足的方程:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (2.33)$$

以及:

$$\frac{dq}{dt} = I \quad (2.34)$$

化简得到:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (2.35)$$

再观察简谐振动的运动方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.36)$$

除去系数差异外，方程结构完全相同。因此，根据类比我们可以直接得到  $q(t)$  为三角函数，并对比系数直接给出角频率：

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.37)$$

有趣的是，这里不仅数学结构可以等效，连能量也可以等效。磁场能为：

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L(\dot{q})^2 \quad (2.38)$$

与动能类似；而电场能：

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad (2.39)$$

与弹性势能类似。而  $LC$  震荡电路本质上也是电场能和磁场能的相互转化。

从上面这个例子可以看到，数学结构等效的本质就是两个不同的系统满足同种类型的方程，直接可以给出其解的形式相同，完成等效。通过这种方法，我们可以将未知的体系转化为已知的体系，不需要进行计算就可以得到结果。

## 2.6 叠加与分解

### 2.6.1 线性系统

物理学中，线性是非常良好的性质。对于一个系统，如果其满足的方程是线性的，称这个系统为线性系统。

例如电路满足的方程：

$$U = RI \quad (2.40)$$

其中  $R$  一般是已知的定值。而  $U, I$  满足线性关系，因此电路就是一个线性系统。对于暂态电路，其电流随着时间变化。但是，系统满足的微分方程是线性微分方程（组），因此这个系统也是一个线性系统。

对于描述线性系统的函数  $f$ ，其满足的方程应该为：

$$\hat{L}f = \rho \quad (2.41)$$

其中  $\hat{L}$  为线性算符, 其定义为:

$$\hat{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \hat{L}f + \mu \hat{L}g \quad (2.42)$$

例如导数算符:  $\hat{L} = \frac{d}{dx}$  就是一个线性算符. 首先考虑  $\rho = 0$  的情况, 这种情况下我们称系统满足的方程是“齐次”的.

由于线性系统的方程的特殊性质, 考虑两个满足方程的解:

$$\begin{aligned} \hat{L}f_1 &= 0 \\ \hat{L}f_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

则:

$$\hat{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \hat{L}f_1 + c_2 \hat{L}f_2 = 0 \quad (2.44)$$

即两个满足方程的解的线性叠加也是方程的解. 这就说明了线性系统是**可叠加**的.

相反的, 对于非线性算符, 例如:

$$\hat{L}f = f^2 - f \quad (2.45)$$

考虑两个解的叠加:

$$\hat{L}(f_1 + f_2) = f_1^2 + f_2^2 + 2f_1 f_2 - f_1 - f_2 = 2f_1 f_2 \neq 0 \quad (2.46)$$

不是方程的解, 也就不能叠加.

对于  $\rho \neq 0$  的情况下, 由于线性系统的特殊性, 我们可以对  $\rho$ , 称之为方程的非齐次项, 也是物理中系统的“源”, 也进行分解. 考虑

$$\begin{aligned} \hat{L}f_1 &= \rho_1 \\ \hat{L}f_2 &= \rho_2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

则:

$$\hat{L}(f_1 + f_2) = \hat{L}f_1 + \hat{L}f_2 = \rho_1 + \rho_2 \quad (2.48)$$

即, 我们可以把描述系统的函数  $f$  看作是不同的源  $\rho$  独立存在时系统的解的叠加.

### 2.6.2 叠加原理

下面给出几个线性系统的例子.

第一个是波, 对于绳上的波, 在  $(x, t)$  处的振幅  $\xi$  满足波动方程:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.49)$$

算符:

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (2.50)$$

显然为线性算符, 因此波满足叠加原理.

第二个是电磁场. 电磁场满足麦克斯韦方程组:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.51)$$

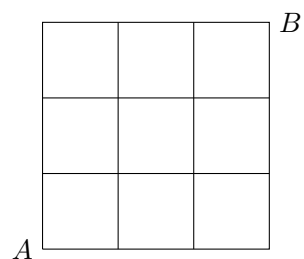
其中  $\nabla$  只是特殊的具有矢量性质导数算符, 所以麦克斯韦方程组也是线性方程, 因此电磁场满足叠加原理, 对应的电势也满足叠加原理. 具体来说, 某点处的电场是所有点电荷在此处产生电场的矢量和.

既然  $f_1 + f_2$  是方程的解, 那么  $f_1 - f_2$  也是方程的解. 这便是叠加的逆过程: 分解. 当一个系统线性的时候, 我们可以将其分解为很多的简单系统, 分别求解, 再将解叠加即可.

## 2.7 习题

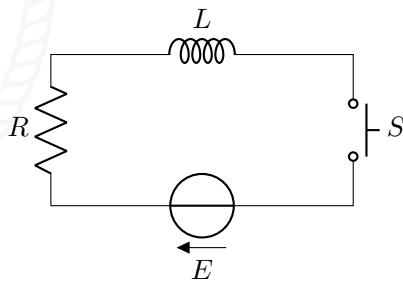
**Problem12.** 电荷量为  $q$  的粒子高速入射宽度为  $d$  的匀强磁场  $B_0$ , 粒子的初速度为  $v_0$ . 试用磁场正则动量求解偏转角.

**Problem13.** 试求解如下电路  $A, B$  之间的等效电阻, 每个小正方形的边的电阻为  $r$ .



**Problem14.** 用类比的方法求解电路（思路来自于 2021 北京 T19）

- 试写出闭合开关后, 电路满足的微分方程
- 考虑一个力学问题: 一个质量为  $m$  雨滴从静止下落, 受到重力和空气阻力:  $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ , 列出微分方程. 并解出收尾速度.
- 类比这两个微分方程组, 给出电路达到稳态时的电流.
- 试给出电路和力学问题的能量的类比.



**Problem15.** 正则角动量

- 一个带电粒子  $q$  在磁场  $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$  中运动, 试说明这个体系具有哪些对称性.
- 已知粒子的角动量定理

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2.52)$$

试列出此体系下粒子的角动量定理.

- 已知:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} \quad (2.53)$$

试求守恒的正则角动量.

### Problem16.

- 设液体以  $v_1$  速度流入高度为  $h_1$  截面积为  $S_1$  的管道, 并从高度为  $h_2$  的截面积为  $S_2$  的管道流出, 试求流出的速度  $v_2$ .
- 试求单位时间内从  $S_1$  流出管道的机械能, 以及从  $S_2$  流出管道的机械能. 液体密度为常数  $\rho$ .
- 试由机械能守恒定律导出伯努利原理:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (2.54)$$

其中  $p_1, p_2$  分别为两处的液体压强.

**Problem17.** 本题我们证明任意两个周期相同的圆周运动的和运动仍是圆周运动.

- 试写带电粒子在洛伦兹力下的运动方程, 用  $\hat{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  的形式表达. 求出  $\hat{L}$ .
- 证明, 任意两个在洛伦兹力下的运动, 其合成仍是一个在洛伦兹力下的运动.





## Chapter 3

# 力学进阶

### 3.1 非惯性系

#### 3.1.1 伽利略变换

平动系

考虑一惯性系  $S$ , 有一相对其平动的非惯性系  $S'$ . 两个坐标原点的连线为  $\mathbf{r}_0$  则质点的位置:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' \quad (3.1)$$

求导:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' \quad (3.2)$$

第一项为牵连速度, 第二项为相对速度. 在求导中, 我们默认了在  $S$  系中的时间微分与  $S'$  系的时间微分相同, 即:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} \quad (3.3)$$

这一点无法从实验上证明, 而是过去的人们以大量的生活经验总结出的规律. 同时, 我们也默认了地面系中看到的  $\mathbf{r}'$  的变化与  $S'$  中看到的大小方向相同. 这一点也时由生活经验总结出的规律. 而在后续相对论中, 我们会看到这两个“默认”其实都不正确. 而这种目前给出的默认而导出的变换称为伽利略变换.

继续求导得到加速度变换:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' \quad (3.4)$$

可以看到, 平动系中的速度和加速度变换都是牵连加相对的形式.

### 转动系

考虑一惯性系  $S$ , 有一相对其既有平动、又有转动的非惯性系  $S'$ . 我们认为在  $S'$  系看来, 某一矢量  $\mathbf{A}$  的导数为:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \dot{A}_{x'} \hat{x}' + \dot{A}_{y'} \hat{y}' + \dot{A}_{z'} \hat{z}' \quad (3.5)$$

为了区分  $S$  系中的导数, 我们将上式给出的导数加撇, 记为:

$$\frac{d'}{dt} \mathbf{A} \quad (3.6)$$

称之为随体导数. 现在我们计算任意矢量  $\mathbf{A}$  的导数:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_i \dot{A}_i \mathbf{e}_i + \sum_i A_i \dot{\mathbf{e}}_i \quad (3.7)$$

而其变化以角度变化矢量表示:

$$d\mathbf{e}_i' = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{e}_i' \quad (3.8)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i' \quad (3.9)$$

带回 (3.7) 式得到:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'}{dt} \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (3.10)$$

我们便得到了一个算符等式:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \quad (3.11)$$

利用这个等式, 以及最开始的:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' \quad (3.12)$$

求导:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}' \quad (3.13)$$

这就是速度牵连公式, 继续求导:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}' \quad (3.14)$$

右边第一项是牵连加速度, 第二项是转动产生的向心加速度, 第三项是角加速度产生的横向加速度, 第四项是科里奥利加速度.

### 3.1.2 惯性力

在运动学中, 我们给出了带有角速度的参照系的加速度变换公式 ( 3.7 ), 则可以写出质点的牛顿运动定律:

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}') \quad (3.15)$$

现在, 我们试图直接在非惯性系中求解质点的运动. 为了使得牛顿第二定律仍然成立, 我们需要对质点受力进行修改, 以至有:

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' \quad (3.16)$$

进行移项, 得到  $\mathbf{F}'$  的表达式:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 - m\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} \quad (3.17)$$

这个表达式有两个含义: 质点受到的绝对的力不随参照系改变; 在非惯性系中计算质点受力, 除去质点受到的绝对的力, 还需要引入一种假想力, 使得我们能够得到正确的运动方程. 这个假想力就是常说的惯性力. 从得到惯性力表达式的过程中可以看出, 惯性力本质上只是一种数学处理, 并无实际的物理含义. 然而, 在惯性力本质还未被发现时, 人们已经发现在非惯性系中似乎会受到一种“力”, 因此, 在以上四项惯性力中, 有两项是有名字的.

$$\mathbf{f}_2 = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (3.18)$$

为惯性离心力, 即当质点处在一个旋转参考系时, 会感受到一个向外甩的力, 上述表达式不能很好地看出离心力的方向, 我们不妨取一种  $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}'$  的情形: 利用三重矢积公式:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (3.19)$$

得到:

$$\mathbf{f}_2 = m\omega^2 \mathbf{r}' \quad (3.20)$$

沿质点位矢向外. 另一个则是科里奥利加速度产生的惯性力, 被称为科里奥利力:

## Coriolis 力

$$\mathbf{f}_4 = 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} \quad (3.21)$$

注意叉乘的前后顺序, 与科里奥利加速度相反. 由于地球的自转, 我们也时刻处在一个旋转参考系中, 而地转偏向力的本质就是科里奥利力, 读者可以自行验证科里奥利力在南北半球的方向, 与地理中总结出的规律是一致的.

## 3.1.3 转动参考系的离心势能

我们观察转动参考系中的离心力公式:

$$\mathbf{f} = m\omega^2 \mathbf{r}' \quad (3.22)$$

与弹簧的胡克定律只差一个负号. 那么根据之前给出的力与势能的关系, 离心力可以对应一项势能, 并且与弹性势能相差一个负号. 对比系数容易得到离心势能的表达式:

$$V = -\frac{1}{2}m\omega^2 r'^2 \quad (3.23)$$

其中  $r$  为质点到转轴的距离. 在匀速转动参考系中, 惯性力只剩下了离心力和科里奥利力, 而我们计算科里奥利力的做功功率:

$$P = \mathbf{v}' \cdot (2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (3.24)$$

不做功, 所以说, 在旋转参考系下就可以利用“机械能”守恒来解决问题.

接下来给出一个流体静力学的例子. 在重力场下, 液面是与重力垂直的平面, 因为如果有部分表面的液体的重力势能高于其他表面的液体, 重力造成的液体压强的分布就会导致这块液体受力不平衡, 进而向势能更低的地方运动. 所以据此我们可以拓展到这样一个结论, 静止液体的表面一定是等势能面. 那么一团正在旋转的液体表面也一定是等势能面. 在旋转参考系中, 势能由重力势能和离心势能组成, 那么液体表面就满足方程:

$$gy - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = C \quad (3.25)$$

即:

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + C \quad (3.26)$$

所以我们得到了一个结论: 一团正在匀速旋转的液体的液面形状是一个旋转抛物面.

## 3.2 质点系的二级结论

### 3.2.1 质心

对于质点组, 定义其质心位置为:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (3.27)$$

其物理意义是对各质点的位置关于质量进行加权平均.

对质心的位置求导, 容易得到质心速度:

$$\mathbf{v}_c = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} \quad (3.28)$$

系统的总动量为:

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \left( \sum_i m_i \right) \mathbf{v}_c \quad (3.29)$$

以质心为参考系,

$$\mathbf{p}' = \sum_i m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_c) = 0 \quad (3.30)$$

即质心系为零动量系. 根据质心的性质, 可以给出质点组的动量定理:

$$\mathbf{F}_{out} = \frac{d\mathbf{P}_c}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} \quad (3.31)$$

### 3.2.2 质心动能定理

质点组的动能可以写成:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (3.32)$$

利用相对质心速度改写:

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_c)^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_c^2 + v_i'^2 + 2\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}'_i) \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_c^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \left( \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \right) \cdot \mathbf{v}_c \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_c^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

仔细观察发现, 前一项为质心动能, 后一项为质点组相对质心的动能. 也就是说, 质点组的动能可以分解为质心动能和相对质心动能的和. 这就是著名的**柯尼希定理**.

这个结论并不显然, 因为动能是  $v^2$  的函数, 其是非线性的, 不能像动量那样随意分解. 这个结论来源于质心系的特殊性. 换句话说, 对于其他任何参考系, 都不能这样分解动能.

对于动量守恒的质点组, 显然质心动能不会发生变化. 因此, 可以损失的能量只有相对质心系的动能, 这部分能量被称为**资用能**. 特别地, 对于二体系统, 资用能的表达式为:

资用能
$Q = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v'^2 \quad (3.34)$

其中  $v'$  为二者的相对速度. 这也是完全非弹性碰撞损失的能量.

仿照推导动能定理, 我们可以给出质心动能定理:

$$dE_{kc} = \mathbf{F}_{out} \cdot d\mathbf{r}_c \quad (3.35)$$

注意, 这个式子右边是不等于外力对整个体系的做功的.

### 3.3 天体运动进阶

#### 3.3.1 角动量

考虑某一参考点  $O$ , 定义质点相对该点的角动量为:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (3.36)$$

并且作用于质点上的力关于该点的力矩为:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.37)$$

考虑角动量的导数:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= \mathbf{M} \end{aligned} \quad (3.38)$$

即角动量的导数等于力矩。这一点可以与牛顿第二定律进行相关的类比。在天体运动中, 由于万有引力是有心力, 故相对中心天体, 绕转天体角动量守恒。这一守恒量与开普勒定律等价。下面利用开普勒定律证明之:

经过  $dt$  时间, 质点扫过的面积:

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \quad (3.39)$$

任意相等的时间内扫过相同的面积, 等价于面积速度守恒:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{L}}{2m} \quad (3.40)$$

对于绝大多数情况来说, 质量不变, 因此也可以通过开普勒定律证明角动量守恒。

之前我们说过, 对称性对应守恒量, 如何通过旋转平移对称性导出角动量守恒? 我们不妨考虑二维情况。能量在旋转下不变, 变换为

$$\begin{cases} x' = x - \delta\varphi y \\ y' = y + \delta\varphi x \end{cases} \quad (3.41)$$

其中  $\delta\varphi$  是一个无穷小的转角。观察能量:

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (3.42)$$

在变换后

$$E' = \frac{1}{2} m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) + V(\sqrt{x'^2 + y'^2}) = E \quad (3.43)$$

这通过对称性容易得到。读者可以带入变换并忽略二阶小量验证之。另一方面, 利用偏导数, 我们发现:

$$-\frac{\partial E}{\partial x} \delta\varphi y + \frac{\partial E}{\partial y} \delta\varphi x - \frac{\partial E}{\partial \dot{x}} \delta\varphi \dot{y} + \frac{\partial E}{\partial \dot{y}} \delta\varphi \dot{x} = E' - E = 0 \quad (3.44)$$

而

$$\frac{\partial E}{\partial x} y - \frac{\partial E}{\partial y} x = \frac{dV}{d\sqrt{x^2 + y^2}} \left( \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0 \quad (3.45)$$

带回就有:

$$\delta\varphi \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{x}} y - \frac{\partial E}{\partial \dot{y}} x \right) = 0 \quad (3.46)$$

$\delta\varphi$  作为一个无穷小量不是零为了使得这个表达式恒等于零, 一定有

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}}y - \frac{\partial E}{\partial \dot{y}}x = L \quad (3.47)$$

为常数. 具体计算两个偏导数:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x; \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = p_y$$

带回就会惊人的发现:

$$L = p_x y - p_y x = -(\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z \quad (3.48)$$

就是角动量守恒!

在这个过程中, 我们略去了关键的一步, 就是认为

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (3.49)$$

对于更一般的情况我们对这个式子不做证明 (事实上对于性质稍差一些的系统, 这个式子是错误的), 不过读者可以自行带入能量的形式来看看这个式子的物理意义是什么.

通过这一个例子, 我们可以更深刻地感受到守恒量 and 对称性之间的紧密联系, 以上的计算方法在未来的理论力学乃至量子力学中都可以用到类似的思想方法, 并且我们可以在数学上更严格的规定“对称”、严谨地证明对称必然对应守恒量.

### 3.3.2 轨道能

力等于势能的负导数. 根据这一点, 我们考虑一个在引力场中只沿径向移动的质点, 考虑移动一小段距离引力的做功:

$$dW = -\frac{GMm}{r^2}dr = -d\left(-\frac{GMm}{r}\right) \quad (3.50)$$

得到引力势能的表达式 (通常规定无穷远处势能为 0):

$$V = -\frac{GMm}{r} \quad (3.51)$$

如果高考题中出现有关运用, 会直接给出信息. 接下来考虑圆周运动的质点, 万有引力提供向心力:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad (3.52)$$



得到质点的动能表达式, 可以求出总机械能, 也就是轨道能:

$$E = -\frac{GMm}{2r} \quad (3.53)$$

只与  $r$  有关. 当质点进行椭圆运动时, 若椭圆的半长轴为  $a$ , 不加证明地给出:

<b>轨道能</b>
$E = -\frac{GMm}{2a} \quad (3.54)$

这两个轨道能的结论在一些变轨问题的选择题中可以很容易地求出不同轨道的速度关系.

### 3.4 刚体力学初步

刚体其实就是任意两点间的距离永远不变的质点组, 所以对于刚体, 我们可以直接使用质点组的相关结论.

刚体的运动可以分为平动和转动. 所谓平动, 就是刚体内各点的相对位置矢量不随时间变化, 刚体整体平移. 所以对于整个质点组, 有:

$$\mathbf{F}_{out} = M\mathbf{a}_c \quad (3.55)$$

$\mathbf{a}_c$  为质心加速度.

但是, 刚体与质点不同的是, 其本身姿态变化也构成运动. 这里只考虑定轴转动. 定义刚体的角速度矢量沿轴方向, 为  $\boldsymbol{\omega}$ , 当质心不动时, 刚体上点的速度满足:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.56)$$

考虑整个质点组的角动量定理:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{M} \quad (3.57)$$

利用三重矢积公式:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (3.58)$$

并认为  $\mathbf{r}_i \perp \boldsymbol{\omega}$ , 就有:

$$\left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{M} \quad (3.59)$$

定义刚体的转动惯量为:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad (3.60)$$

则关于转动, 容易写成:

$$I\beta = M \quad (3.61)$$

高考题若要涉及刚体, 一般都通过和牛顿定律类比得到.

$$F \sim M$$

$$m \sim I \quad (3.62)$$

$$a \sim \beta$$

那么, 类比也就可以得到转动动能:

$$T_r = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.63)$$

下面证明之:

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \boldsymbol{\omega} \cdot (r_i^2 \boldsymbol{\omega}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

### 3.5 习题

**Problem18.** 一个楔形物块  $M$  放置在光滑地面上, 楔角为  $\theta$ . 现在其上静止释放一个小物块  $m$ , 试确定两个物块的加速度.

**Problem19.** 设地球的自转角速度为  $\omega_e$ . 试着给出在纬度为  $\lambda$  处, 速度为  $v$ , 密度为  $\rho$  的风单位体积受到的地转偏向力的大小.

**Problem20.** 质心系下的碰撞.

- 一个质量为  $m$  的物块以  $v_0$  撞向静止的质量为  $M$  的物块. 试求这两个物块的质心速度.
- 写出质心系中, 两个物块的速度  $v'_m$  和  $v'_M$ , 以及一维碰撞后各自的速度.
- 假如质心系中,  $m$  的碰后速度与原速度方向夹角为  $\theta$ , 试写出实验室系中两物块的碰后速度大小.
- 在  $m > M$  的条件下, 试求上问中实验室系中质量为  $m$  物块在不同  $\theta$  下可能的最大偏转角.

**Problem21.** 一个质量为  $m$  的物块以  $v_0$  撞向静止的质量为  $M$  的物块.  $M$  尾部固连了一个弹性系数为  $k$  的弹簧. 试求弹簧的最大压缩长度.

**Problem22.** 二体修正.

- 对于两个质点  $M, m$ , 它们不受外力, 但有内部的相互作用力  $f_{mM}$ . 试说明他们质心的运动情况, 并证明: 他们的质心始终在二者的连线方向上.
- 在  $m$  参考系下, 列出  $M$  的运动方程. 并说明这个运动方程仿佛是一个质量为  $\mu$  的粒子在惯性系下受到  $f_{mM}$  作用的运动方程, 并求出  $\mu$ .
- 在天体问题中, 我们常认为中心天体静止, 试给出, 若中心天体不静止 (但只收到绕行天体的作用力) 情况下, 原周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{A^3}{GM}} \quad (3.65)$$

改如何修正. 这里认为  $A$  不变.

**Problem23.** 证明:

- 质心系下惯性力做功为零;

- 质心系下惯性力合力矩为零.

**Problem24.** 阿特伍德机: 一个质量为  $M$ , 半径为  $R$  的滑轮两侧分别挂上  $m_1 > m_2$  重物. 滑轮和绳之间没有相对滑动. 滑轮的转动惯量  $I = \frac{1}{2}MR^2$

- 绳子的张力是否在各处都一样?
- 列出两个物块的动力学方程, 除加速带外允许有两个未知变量;
- 用这两个未知变量写出作用在滑轮上的力矩, 并写出滑轮的角动量定理, 不允许出现新的变量;
- 求系统的加速度.
- 写出  $m_1, m_2$  速度为  $v$  时, 系统的机械能.
- 利用机械能守恒重新计算系统的加速度, 并验证结果一致.
- 此系统存在摩擦, 请回答为什么仍有机能守恒.

**Problem25.** 设在某时刻, 绕转天体  $m$  有速度  $v_0$ , 速度方向与位置不变的中心天体  $M$  的连线夹角为  $\theta$ . 试写出系统的能量和角动量. 并求解近地点和远地点的距离. (已经假设  $E < 0$ ).

## Chapter 4

# 电学进阶

### 4.1 高斯定理与安培环路定理

对于某一点电荷, 其在  $\mathbf{r}$  处产生的电场为:

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (4.1)$$

定义立体角微元为:

$$d\Omega = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.2)$$

其含义是某一块面积, 对于某个点各个方向所占的分量. 可以类比二维平面上角的定义:

$$d\theta = \frac{d\mathbf{l} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \quad (4.3)$$

全空间的立体角: 取一球面:

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \quad (4.4)$$

我们计算:

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = kq \iint \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi kq \quad (4.5)$$

定义  $\varepsilon_0 = (4\pi k)^{-1}$  为真空介电常量, 则上式可以写成:

**Gauss 定理**

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (4.6)$$

这就是高斯定理. 也是真空中麦克斯韦方程组积分形式的第一个方程. 高斯定理常常运用于对称体系, 选取合适的高斯面, 就不需要计算积分. 下面给出两个经典的例子.

- 例 1: 无限大带电平板, 电荷面密度为  $\sigma$ . 根据对称性, 其产生的电场只能沿垂直平板方向. 取一个盒状的高斯面: 有:

$$2SE = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad (4.7)$$

求出电场:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (4.8)$$

- 例 2: 无限长带点直导线. 电荷线密度为  $\lambda$ . 依然是根据对称性, 其产生的电场只能沿着径向. 取一个圆柱状高斯面, 高度为  $h$ , 半径为  $r$ , 根据高斯定理有:

$$2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad (4.9)$$

得到:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r} \quad (4.10)$$

对于磁场也有类似的定理, 即安培环路定理, 这里不给出证明:

#### Ampere 定理

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (4.11)$$

对于旋转对称的体系, 同样不需要环路积分就可以算出磁感应强度, 例如无限长直导线:

$$B2\pi r = \mu_0 I \quad (4.12)$$

所以:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (4.13)$$

以及螺线圈内部的磁场:

$$Bl = \mu_0 nIl \Rightarrow B = \mu_0 nI \quad (4.14)$$

其中  $n$  为单位长度的线圈匝数.

## 4.2 场能

物理学认为,“场”是一种物质. 这个定义极为的抽象, 场看不见摸不着, 为什么能是物质? 利用物理语言解释, 就是场本身具有动量和能量, 因此我们认为场是一种物质. 首先考虑能量, 对于静电场, 我们通常认为能量存在于点电荷中. 但实际上, 场本身就是具有能量的, 这更是与我们普遍的认知不符, 为什么能量能存在于场中?

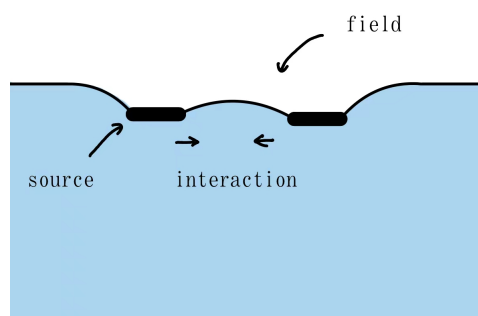


图 4.1: 液体表面场

接下来我们给出一个例子, 通过这个例子可以非常直观的感受到场各种抽象的特点. 如图, 这是一个液膜体系. 在这个液膜上放入一个硬币, 则硬币会因重力作用而使得液面下凹, 形成一个向下凹陷的液面. 如果说“硬币”是点电荷(源), 那么液膜就是这个硬币产生的场. 如果再放入一个硬币, 这两个硬币间的液膜会比其他地方的液膜稍低, 使得两个硬币靠近对方一侧的受力变小, 进而引发两个硬币的相互靠近, 这就是源之间的相互作用, 在静电场中, 这就是库仑力.

这样, 所谓的液膜就是场这种物质, 那么, 液膜由于拉伸变形, 自然就具有能量, 这就是我们所说的场具备的能量. 查看这个体系, 就可以直观地看出, 能量并不完全储存于硬币(源)中, 而是储存于场中的.

事实上, 如果对液膜进行一些近似和建模, 我们发现  $(x, y)$  处液膜下凹的深度  $z$  就是场所对应的“势”, 并且这个势满足的方程与二维静电场满足的方程具有完全相同的形式.

### 4.2.1 静电场的能量

电势具有物理意义：将一个点电荷从无穷远移到所在位置所需要的功为：

$$A = QV(\mathbf{r}) \quad (4.15)$$

同理，将一个点电荷从一个位置移动到另一个位置所需要的功为：

$$A = Q(V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2)) \quad (4.16)$$

由此，我们可以认为，一个存在于电场中的点电荷具有电势能，通过电势能的改变我们可以计算电场力对点电荷的做功。点电荷电势能的形式为：

$$W = QV \quad (4.17)$$

两个点电荷相互作用，我们可以固定一个点电荷不动，将另一个点电荷移到相应位置，也可以将这个点电荷固定不动，移动另一个。为了体系的对称性，我们将两个点电荷相互作用的电势能写成：

$$W = \frac{1}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2) \quad (4.18)$$

对于多个点电荷，我们就可以推广两个点电荷的情形，即

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (4.19)$$

注意，每个点电荷的电势为排除自己以外的所有点电荷在该点的电势。其物理意义为构建体系所需要的功，也是打散体系时，体系能对外做的功。

事实上，能量是存在于场中的。即，有电场的地方就有能量。考虑平行板电容器。已知电场能密度仅为电场的函数。其能量可以通过  $Q - U$  图的面积求得：

$$W = \frac{1}{2}CU^2 \quad (4.20)$$

其中有电容的表达式：

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (4.21)$$

以及  $E = Ud$  带入得到：

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd \quad (4.22)$$



最后一项为体积, 则电场能密度:

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (4.23)$$

利用高中的  $k$  可以写成:

$$w_e = \frac{1}{2} \frac{E^2}{4\pi k} \quad (4.24)$$

### 4.2.2 磁场的能量

考虑电感电流从 0  $I$  的过程, 依然是根据图像可得:

$$W = \frac{1}{2} LI^2 \quad (4.25)$$

根据安培环路定理:

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I \Rightarrow I = \frac{BL}{\mu_0 N} \quad (4.26)$$

所以磁通量:

$$\Phi = NBS = \mu_0 \frac{N^2}{L} SI \quad (4.27)$$

因此电感:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{L} S \quad (4.28)$$

带入得到:

$$W = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} LS \quad (4.29)$$

场能密度:

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (4.30)$$

## 4.3 “势”的观点

势能本身并不属于在场中的粒子, 而是粒子和场所共有的. 在无外场时, 粒子的动能守恒, 而引入一个力场后, 我们发现粒子的动能似乎不守恒, 通过对牛顿定律的一些操作, 我们发现只要为粒子和场引入一种描述其相互作用的势能  $V$  后, 势能与动能之和便是守恒的.

这说明场本身是具有能量的, 粒子的引入改变了全空间的场, 使得总能量发生了改变. 而力场  $\mathbf{F}(x, y, z)$  的性质足够好, 使得粒子和场所具有的总能量只与粒子的位置有关. 因此, 所谓“势”, 其实就是位置.

之前提到过, 有些场也是具有动量的. 所以, 粒子的动量不守恒, 但粒子和场的总动量守恒. 但是, 碍于数学, 高中对“势”的观点在动量方面推广没有涉及. 参考势能, 我们可以引入“势”动量, 引入的条件也可以类比势能的条件: 即力场的冲量只与粒子的初末位置有关.

如果力仅是位置的函数, 一般是不满足这个条件的, 因为我们考虑粒子以相同轨迹但是不同速度从一个点运动到另外一个点, 力的冲量显然不同. 但是, 如果力与速度呈线性关系, 势动量就可以存在了.

最经典的, 磁场, 磁场力可以写成:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.31)$$

对于匀强磁场, 计算其冲量

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{F} dt = \int q d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = q(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{B} \quad (4.32)$$

考虑动量定理:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = q(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{B} \quad (4.33)$$

移项得到:

$$\mathbf{p}_2 + q\mathbf{B} \times \mathbf{r}_2 = \mathbf{p}_1 + q\mathbf{B} \times \mathbf{r}_1 \quad (4.34)$$

那么, 粒子和场所共有的“势动量”就是  $q\mathbf{B} \times \mathbf{r}$  “总”动量, 或者说正则动量守恒:

$$\mathbf{p} + q\mathbf{B} \times \mathbf{r} = \mathcal{P} \quad (4.35)$$

对于非匀强磁场, 上述操作就比较困难了, 通过更深入的物理理论可以证明, 任意形式的磁场下, 粒子的广义动量:

**带电粒子的正则动量**

$$\mathcal{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} \quad (4.36)$$

其中  $\mathbf{A}$  为磁矢势.

再例如空气阻力  $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ , 通过类似的推导, 可以导出:

$$\mathcal{P} = \mathbf{p} + k\mathbf{r} \quad (4.37)$$

守恒.

更一般地, 对于某种存在上述种类相互作用的“场”, 可以认为有动量和能量储存在场中, 而粒子入场与其交换动量和能量. 而由于场具有能量和动量, 所以说“场”也是一种物质. 因为他可以和狭义上的物质发生相互作用.

## 4.4 电磁感应和功能关系

### 4.4.1 法拉第电磁感应定律严格推导

法拉第电磁感应定律指出:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.38)$$

即闭合回路的电动势等于磁通量变化. 高中阶段并未对这一定律与变化的磁场产生电场进行严格区分. 只是分为动生电动势和感生电动势两项.

其中, 动生电动势的本质是切割磁感线产生的洛伦兹力形成的等效电场, 而感生电动势才是真正的变化的磁场产生电场. 下面分别计算这两项. 首先根据麦克斯韦方程组有:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.39)$$

接下来每一处的洛伦兹力的等效电场为:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_l \quad (4.40)$$

则:

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B}_l \cdot d\mathbf{r} = \oint d\mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_l \quad (4.41)$$

在  $dt$  时间内, 面积变化:

$$d'\mathbf{S} = \int \mathbf{v} \times d\mathbf{r} dt \quad (4.42)$$

因此:

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = - \oint \frac{d'S}{dt} \cdot \mathbf{B}_l \quad (4.43)$$

将两个式子求和:

$$E = \oint (\mathbf{E}' + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r} = - \left[ \oint \frac{d'S}{dt} \cdot \mathbf{B}_l + \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right] = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.44)$$

这个推导并不要求高中生掌握, 但进行这个推导的原因是想说明, 法拉第电磁感应定律和变化磁场产生电场有本质上的区别 (在同一参考系下), 前者是变化磁场产生的电场和切割磁感

线产生电动势的总和. 在进行计算时, 只需要对磁通量求导数即可, 如果同时考虑切割磁感线和磁通量的导数将会得到错误的结果!

#### 4.4.2 安培力做功与反电动势做功相等

安培力的本质实际上是洛伦兹力. 洛伦兹力不做功, 但是安培力却可以做功, 洛伦兹力有两个效果, 一个是安培力, 另一个是产生反电动势, 这两部分的做功之和为零.

考虑一个垂直于磁场  $B$  运动、长度为  $l$  的导体棒, 速度为  $\mathbf{v}$ . 这根导体棒载有电流  $I$ , 其大小由微观表达式决定  $\mathbf{I} = nqS\mathbf{v}_e$ . 反电动势的做功的功率为:

$$P_1 = l(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (nqS\mathbf{v}_e) \quad (4.45)$$

安培力的做功的功率为:

$$P_2 = lnqS(\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} \quad (4.46)$$

现在计算二者的求和, 根据三重标积的轮换公式:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= nqSl[(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}_e + (\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}] \\ &= nqSl(\mathbf{v}_e \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}_e) \cdot \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

题目中有时计算电阻发热, 其实反电动势的做功, 可以通过这一结论转化为安培力做功的计算.

### 4.5 电路

#### 4.5.1 基尔霍夫方程组

由于电场是保守场, 所以沿电路一圈的总电压变化应该是零. 下面规定, 沿着电流方向, 经过以下不同元件的电压变化如下:

$$U_R = -RI \quad (4.48)$$

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (4.49)$$

$$U_C = -\frac{q}{C} \quad (4.50)$$

电源从正极到负极电压变化为  $-E$ , 反之则为  $E$ . 则对电路中任意一个闭合回路, 都有:

$$\boxed{\sum_i U_i = 0} \quad (4.51)$$

这是基尔霍夫回路方程. 以及对于某个点, 流入总电流等于流出总电流:

$$\boxed{\sum I_{in} = \sum I_{out}} \quad (4.52)$$

以上两种方程共同构成电路的基尔霍夫方程组. 通过数学上可以证明, 基尔霍夫方程组是完备的, 即, 方程组未知数的个数总是等于独立方程的个数.

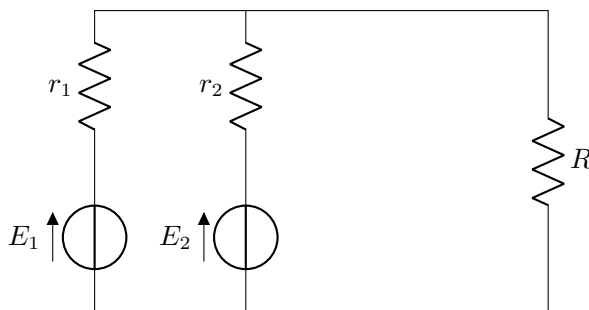
### 4.5.2 戴维南定理

然而, 基尔霍夫方程组能够求解每一个未知量. 但解题过程中我们可能并不需要所有的未知量. 因此, 充分简化电路相对完备的解法更为重要.

下面介绍戴维南定理, 也称为等效电压源定理. 对于某一个二端电路体系, 其总可以等效为一个带有内阻的电源. 其内阻就是整个电路体系的等效电阻, 而电动势就等于电路的开路电压.



接下来通过一个例子来说明. 考虑如下电路: 如果我们只希望求解  $R$  上的电流, 可以将  $R$



以外的体系等效为一个电源. 其内阻为等效电阻, 为两个电阻并联, 就是:

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad (4.53)$$

开路时, 两端电压为:

$$U = E_2 - r_2 \frac{E_2 - E_1}{r_1 + r_2} = \frac{r_1 E_2 + r_2 E_1}{r_1 + r_2} \quad (4.54)$$

再对等效后的电路使用闭合回路欧姆定律, 得到电流:

$$I = \frac{U}{r + R} = \frac{r_1 E_2 + r_2 E_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \quad (4.55)$$

下面再通过解基尔霍夫方程组求解, 作为对比. 设左边回路电流为  $I_1$ , 右边回路电流为  $I_2$ , 对左右两个回路分别列回路方程:

$$E_1 - I_1 r_1 - (I_1 - I_2) r_2 - E_2 = 0 \quad (4.56)$$

$$E_2 - (I_2 - I_1) r_2 - I_2 R = 0 \quad (4.57)$$

可以解得:

$$I_2 = \frac{r_1 E_2 + r_2 E_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \quad (4.58)$$

同时, 此题也可以利用之前所说的叠加和分解原理. 由于基尔霍夫方程组是线性方程组, 整个电路体系也是线性的. 下面证明之.

我们不妨认为各个回路中的电压  $U_n$  已知, 电流  $I_n$  未知. 那么基尔霍夫方程组总可以写成:

$$I_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} U_j \quad (4.59)$$

定义电流“矢量”和电压“矢量”:

$$\mathbf{I} = (I_1, I_2, \dots, I_n)^T \quad (4.60)$$

$$\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)^T \quad (4.61)$$

那么上述线性方程组就可以写为:

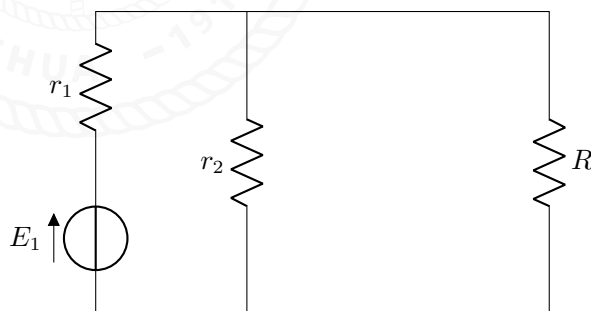
$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

其中, 矩阵  $a_{ij}$  记为  $[A]$ , 将  $[A]$  视作作用在矢量上的算符, 其显然是一个线性算符. 所以, 我们可以将电压矢量分解为:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

通过这一分解, 我们就可以分别求解只含有一个电源的电路, 在将所求得的电流叠加即可.

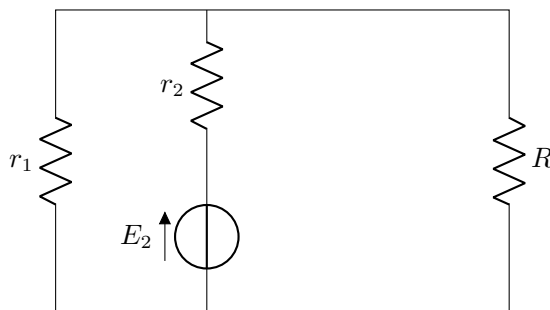
回到这个例子的电路, 我们可以将电路分解为两个电路: 和 我们发现这两个电路都是简单



的并联电路, 电流:

$$I_1 = \frac{E_1}{r_1 + \frac{Rr_2}{R+r_2}} \frac{r_2}{R+r_2} = \frac{E_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \quad (4.64)$$

$$I_2 = \frac{E_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \quad (4.65)$$



所以所求电路的电流为：

$$I = I_1 + I_2 = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \quad (4.66)$$

### 4.5.3 交流电的复数解法

之前通过复数已经表明，复数可以代表二维平面上的旋转。交流电的时间因子就可以看成复数在实轴上的投影，即：

$$\cos \omega t = \Re e^{i\omega t} \quad (4.67)$$

对于电感元件，满足：

$$L \frac{dI}{dt} = U_0 \cos \omega t \quad (4.68)$$

则电流与电压满足：

$$I = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_0}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.69)$$

引入复阻抗，既可以表示元件对电流的阻碍作用，又可以表示元件对电压和电流相位差造成的影响。那么容易看出电感的复阻抗为：

$$Z_L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega L \quad (4.70)$$

类似地，电阻的复阻抗就是  $R$ ，而电容的复阻抗就是：

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad (4.71)$$

这样，交流电路的解法就与直流电路完全相同。基尔霍夫方程组，阻抗的串并联公式都可以直接使用。



下面给出一个最简单的例子, 即  $RLC$  串联电路. 计算总的复阻抗:

$$Z = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (4.72)$$

则电路的电流:

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (4.73)$$

其中:

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (4.74)$$

当  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  时电路中的电流最大, 称该角频率为谐振角频率.

对于任意一种周期电信号  $U$ , 根据傅里叶级数理论, 我们总能将其分解为三角函数的和:

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \quad (4.75)$$

电路总的阻抗可以写成:

$$Z = a(\omega) + ib(\omega) \quad (4.76)$$

电源不同频率的成分对电路电流造成的影响就会不同, 因此也就会产生低通、高通等不同的电路性质.

## 4.6 习题

**Problem26.** 试给出引力场的高斯定理. 已知:

$$\mathbf{G} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \quad (4.77)$$

**Problem27.** 用高斯定理证明: 带电球壳对内部点电荷的作用力为零.

**Problem28.** 三个点电荷  $q$  位于边长为  $a$  的正三角形的三个定点上, 求他们的相互作用势能.

**Problem29.** 电量为  $q$  的质点  $m$  同时受到洛伦兹力和  $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$  的空气阻力, 试求守恒的正则动量.

**Problem30.**

- 定义冲量矩为:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{I} \quad (4.78)$$

试求出质点在匀强磁场中从  $r_1$  移动到  $r_2$  过程中洛伦兹力的冲量矩. 已知磁场垂直于质点运动的平面.

- 写出上述过程中质点的角动量定理, 并找出具有角动量量纲的守恒的正则角动量.

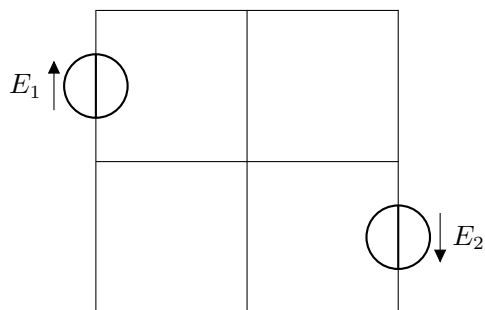
**Problem31.**

- 一个半径为  $a$ , 电阻为  $R$  的导体环以匀速  $v_0$  沿  $z$  轴运动.  $z$  方向上的磁场大小为  $B_z = B_0 \frac{z}{h}$ ,  $B_0, h$  均为常数. 试着求出回路的电动势和电流.
- 以切割磁感线产生电动势的视角看, 距  $z$  轴  $a$  处的径向磁场  $B_r$ .
- 取任意一个半径为  $a$ , 高度为  $L$  的圆柱体, 试计算各个面的磁通量并证明其和为零 (注意正负号: 穿入为负, 穿出为正). 这个结论可以推广到更普遍的情形, 即磁场的高斯定理:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (4.79)$$

**Problem32.** 导体棒在安培力作用下动能由  $\frac{1}{2}mv^2$  变为了  $\frac{1}{8}mv^2$ , 求电路的发热量  $Q$ .

**Problem33.** 求解如下电路各处电流, 已知每个边框处都有电阻  $r$ . 这个例子说明, 戴维南定理和基尔霍夫方程组各有优势, 应该灵活选取求解方法.



**Problem34.** 复阻抗  $Z = a + ib$ , 如果  $b > 0$ , 称电路是电感性的;  $b < 0$  则称电路是电容性的. 讨论  $RLC$  串联电路在不同角频率下的容感性.



## Chapter 5

# 解题方法专题

本专题以一道模拟题为例,谈高考物理计算题的解题策略与方法. 题目如下:

19. (10 分)

定值电阻、电容器、电感线圈是三种常见的电路元件,关于这几个元件有如下结论:

①一个定值电阻  $R$  满足  $I = \frac{U}{R}$  关系;

②一个电容器的电容为  $C$ ,两极板间电压为  $U$  时,储存的能量为  $E = \frac{1}{2}CU^2$ ;

③一个电感线圈的自感系数为  $L$ ,自感电动势  $E_{\text{自}} = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ ,式中  $\frac{\Delta I}{\Delta t}$  为电流变化率;通过的电流为  $I$  时,储存的能量为  $E' = \frac{1}{2}LI^2$ 。

如图所示,足够长的光滑金属框架竖直放置,顶端留有接口  $a, b$ ,两竖直导轨间距为  $d$ 。一质量为  $m$ 、长度为  $d$  的金属棒始终与竖直导轨接触良好,磁感应强度为  $B$  的匀强磁场与框架平面垂直,重力加速度为  $g$ 。不计空气阻力,不计框架和金属棒的电阻及电磁辐射的能量损失。

- (1)若在  $a, b$  间接入一个阻值为  $R$  的定值电阻,现从静止释放金属棒,求金属棒的最小速度大小  $v_1$ ;
- (2)若在  $a, b$  间接入一个电容为  $C$  的电容器,现从静止释放金属棒,求当电容器两极板间电压为  $U_0$  时,金属棒下落的高度  $h$ ;
- (3)若在  $a, b$  间接入一个电阻不计、自感系数为  $L$  的电感线圈,现从静止释放金属棒,求金属棒下落过程中的最大速度  $v_2$ 。

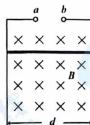


图 5.1: 2024 朝阳二模 T19

## 5.1 题目信息

做题首先就要阅读题目给出的信息. 题目信息通常是用于列方程.

例如本题给出了电感、电容的能量, 明显就是提示解题过程中需要列能量方程. 题目给出了电感电动势的表达式, 提示解题过程中需要列闭合回路的电路方程.

接下来阅读题目情景, 注意题目给出的所有已知量及字母, 不要使用未给出的量或者思维定式使用平常做题的字母.

## 5.2 解题过程

读完题目后, 不要着急列方程, 先分析题目给出的物理情景和过程. 分析清楚过程之后再考虑列方程.

本题的第一问, 开始时回路中没有电流, 金属棒开始在重力作用下下落. 在金属棒获得速度之后, 切割磁感线使回路中产生电流, 这个电流通过金属棒又会产生安培力. 开始时安培力较小, 金属棒加速下落, 安培力逐渐增大, 最终安培力增大到与重力相等, 物体匀速运动.

分析清楚物理情景后, 就可以找描述过程的方程、转化条件. 列方程, 首先考虑守恒量, 即动量和能量的方程. 随后观察能动能方程中除去所求量以外的未知量, 考虑这些量满足的方程, 即可列出全部解题所需的方程.

本题第一问不要求分析过程, 只需求出最终速度即可. 列出瞬态方程即可. 最终速度不变, 转化为受力平衡方程, 就可以列出:

$$mg = BId \quad (5.1)$$

而我们发现这个方程中电流未知, 因此要考虑电流满足的方程. 容易想到列电路方程:

$$RI = Bdv_1 \quad (5.2)$$

直接将第二个方程带回第一个方程就可以解得:

$$v_1 = \frac{mgR}{B^2d^2} \quad (5.3)$$

再看第二问, 分析物理过程之后列方程. 由于整个运动的时间难以求解, 重力冲量无法计算, 所以考虑能量 (这也可以由题目信息直接想到). 本问中, 重力做正功, 磁场力不做功, 重

力势能的变化转化为物体的动能和电容的能量, 因此:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}CU_0^2 \quad (5.4)$$

题目给出了电压, 本方程中速度未知, 考虑速度满足的方程. 仍然是考虑电路的方程:

$$U_0 = Bdv \quad (5.5)$$

带回第一个方程, 解得:

$$h = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{B^2 d^2 g} + \frac{1}{2} \frac{CU_0^2}{mg} \quad (5.6)$$

第三问是本题最难的一问. 整个运动过程不单调, 难以分析. 所以, 在中间过程比较复杂时, 更要考虑守恒量和瞬态方程. 首先, 达到最大速度时, 加速度一定为零, 因此最大速度时受力平衡就是很重要的瞬态方程, 也是突破口.

$$mg = BId \quad (5.7)$$

仍然是之前的思考方式, 本式中电流未知, 因此考虑电流满足的方程. 电流其实满足两个方程, 一个是能量, 一个是电路. 然而, 能量方程涉及到重力势能做功,  $h$  的求解就需要整个过程的分析. 这是本题第二个难点.

考虑电路方程:

$$L \frac{dI}{dt} = Bdv \quad (5.8)$$

我们发现这是一个关于电流导数的方程, 并且本式在此题过程中恒成立. 那么对此, 有一个重要的操作: 当

$$\alpha \frac{df}{dt} = \beta \frac{dg}{dt} \quad (5.9)$$

恒成立时, 就有:

$$\alpha(f - f(0)) = \beta(g - g(0)) \quad (5.10)$$

本质上就是两边同时积分, 或者是高中所谓的微元求和. 这种操作其实是超纲的, 但不少题目默认这种方法合理. 所以, 对于这一题目, 右边是位移的导数, 初始时刻电流为零, 所以有:

$$LI = Bdh \quad (5.11)$$

此时发现  $h$  未知, 就可以考虑能量方程.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}LI^2 \quad (5.12)$$

考察三个方程, 只有三个未知数  $v_2, h, I$ , 可以解出  $v_2$ .

对于多元方程组的求解, 有一个重要的提升速度的思路, 就是以想求的自变量为核心. 例如本题只要求  $v_2$  即可, 那么就试图将所有的未知量都拿  $v_2$  和其他已知量表示, 在统一带到一方程中, 就可以最快解出  $v_2$ . 首先第一个方程可以直接求出:

$$I = \frac{mg}{Bd} \quad (5.13)$$

带到第二个方程:

$$h = \frac{mgL}{B^2d^2} \quad (5.14)$$

带到第三个方程就算出:

$$\frac{m^2g^2L}{B^2d^2} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}L\frac{m^2g^2}{B^2d^2} \quad (5.15)$$

解得:

$$v_2 = \frac{g\sqrt{mL}}{Bd} \quad (5.16)$$

此题还有一个方法, 即不考虑瞬态受力平衡得方程, 由能量守恒求解运动.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - mgh + \frac{1}{2}LI^2 \quad (5.17)$$

而电流  $I$  满足式 (5.11), 带回得到:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - mgh + \frac{1}{2}\frac{B^2d^2}{L}h^2 \quad (5.18)$$

将后面两项配方:

$$E + \frac{1}{2}\frac{m^2g^2L}{B^2d^2} = \frac{1}{2}m\left[\frac{d}{dt}\left(h - \frac{mgL}{B^2d^2}\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2d^2}{L}\left(h - \frac{mgL}{B^2d^2}\right)^2 \quad (5.19)$$

与简谐振动的能量形式完全相同, 因此导体棒的运动是一个简谐振动. 考虑初态有  $v = 0, h = 0, I = 0$ , 所以  $E = 0$ . 简谐振动速度最大时处于平衡位置, 右边第二项为零, 所以有:

$$\frac{1}{2}\frac{m^2g^2L}{B^2d^2} = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (5.20)$$

也可以解得:

$$v_2 = \frac{g\sqrt{mL}}{Bd} \quad (5.21)$$

此时的思想就是数学结构等效.



接下来总结一下列方程. 方程的来源有两个, 一个是高中所学的知识, 另一个是题给信息. 而列方程时重点要考虑守恒量和瞬态方程, 尤其是第二个, 很多情况下是破题和简化题目的关键. 当题目需要列出多个方程时, 不要通过头脑风暴来找方程, 而是应该通过观察已经列出的方程, 找出其中还不能表达出来的量, 针对这些量列方程. 最后注意未知数数量和方程数量的关系, 方程不够就开始算非常浪费时间.

最后谈一下高中涉及微元 (也就是微积分) 的情况, 一个是这道题第三问所用到的: 当

$$\alpha \frac{df}{dt} = \beta \frac{dg}{dt} \quad (5.22)$$

恒成立时, 就有:

$$\alpha (f - f(0)) = \beta (g - g(0)) \quad (5.23)$$

另一个是:

$$\sum f \Delta f \quad (5.24)$$

这个求和可以通过计算三角形或者梯形的面积求得:

$$\sum_{f_1}^{f_2} f \Delta f = \frac{1}{2} (f_2^2 - f_1^2) \quad (5.25)$$



## Chapter 6

### 习题解答

#### 6.1 第一章习题

**Solution1.**

$$\dot{\mathbf{r}} = (-\omega \sin \omega t, \omega \cos \omega t, v)$$

**Solution2.**

$$x(t) = \int_0^t (a\tau^2 + b\tau + c) d\tau = \frac{1}{3}at^2 + \frac{1}{2}bt^2 + ct$$

或者使用不定积分

$$x = \int (a\tau^2 + b\tau + c) d\tau = \frac{1}{3}at^2 + \frac{1}{2}bt^2 + ct + C$$

利用  $x(0) = 0$  解出  $C = 0$  得到结果.

**Solution3.** 假设直线方程为:

$$y = \frac{b-a}{h}x + a$$

则面积

$$S = \int_0^h \left( \frac{b-a}{h}x + a \right) dx = \frac{1}{2}(a+b)h$$

**Solution4.**

首先计算其运动学特征. 速度

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - \alpha L_0 e^{-\alpha t}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \alpha^2 e^{-\alpha t}$$

考虑牛顿第二定律:

$$F - BIL = ma$$

电流满足方程

$$\begin{aligned} IR &= BLv \\ \Rightarrow F - \frac{B^2 L^2}{R} v &= ma \end{aligned}$$

带入之前求得的速度和加速度就有:

$$F(t) = \frac{B^2 L^2}{R} (v_0 - \alpha e^{-\alpha t}) + m\alpha^2 e^{-\alpha t}$$

特别地, 如果我们想要求  $F$  是恒力, 就有

$$\alpha = -\frac{B^2 L^2}{mR}$$

这样, 我们就求解出恒力作用下物体的运动:

$$x = \frac{FR}{B^2 L^2} t + L_0 e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} + C$$

有两个待定常数.

**Solution5.** 利用小量展开公式:

$$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

则当  $v/c \ll 1$  时,

$$E_k = m_0 c^2 \left( \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right) \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \boxed{\frac{1}{2} m_0 v^2}$$

**Solution6.** 显然平衡位置为  $\frac{L}{2}$ . 考虑点电荷在平衡位置偏离一个距离  $\delta$ , 有  $\delta/L \ll 1$ . 受力变化为

$$\begin{aligned} F &= -\frac{kQq}{\left(\frac{L}{2} - \delta\right)^2} + \frac{kQq}{\left(\frac{L}{2} + \delta\right)^2} \\ &= -\frac{4kQq}{L^2} \left( \left( 1 - \frac{2\delta}{L} \right)^{-2} - \left( 1 + \frac{2\delta}{L} \right)^{-2} \right) \\ &\approx -\frac{4kQq}{L^2} \left( 1 + 2\frac{2\delta}{L} - 1 + 2\frac{2\delta}{L} \right) \\ &= -\frac{32kQq}{L^3} \delta \end{aligned}$$

则利用简谐振动的周期公式得到:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^3}{32kQq}}$$

**Solution7.**

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

代入题目条件:

$$\mathbf{F} = -e(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}) \times (B_0\hat{z}) = \boxed{eB_0(v_x\hat{y} - v_y\hat{x})}$$

**Solution8.** 容易列出牛顿第二定律:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

这是一个可分离变量的微分方程, 分离变量得到:

$$\frac{d(mg - kv)}{mg - kv} = -\frac{k}{m} dt$$

两边定积分得到

$$\begin{aligned} \ln \frac{mg - kv}{mg} &= -\frac{k}{m} t \\ \Rightarrow v &= \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right) \end{aligned}$$

**Solution9.** 微分方程为

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

对应的特征方程为

$$r^2 + 2\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow r = -\omega_0$$

这是重根的情况, 则根据之前的公式就有:

$$\boxed{x(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}}$$

**Solution10.** 这段电流的受力为:

$$\mathbf{F} = \int_{r_1}^{r_2} I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \left( \int_{r_1}^{r_2} d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B}$$

利用积分公式就有

$$\boxed{\mathbf{F} = Id \times \mathbf{B}}$$

其中  $\mathbf{d} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . 这就证明了题目的结论.

**Solution11.**

- 空气阻力的复力:

$$\tilde{f} = -k\tilde{v}$$

则总的复力为

$$\tilde{F} = (iqB - k)\tilde{v}$$

- “复” 牛顿第二定律为

$$m \frac{d\tilde{v}}{dt} = (iqB - k)\tilde{v}$$

分离变量积分得到

$$\tilde{v} = iv_0 e^{\frac{iqB - k}{m}t}$$

那么

$$\tilde{r} = \int_0^t \tilde{v} dt = \frac{imv_0}{iqB - k} \left( e^{\frac{iqB - k}{m}t} - 1 \right) + \frac{mv_0}{qB}$$

化简分母和指数上的复数:

$$\tilde{r} = \frac{mv_0(qB - ik)}{q^2B^2 - k^2} \left( e^{-\frac{k}{m}t} \left( \cos \frac{qB}{m}t + i \sin \frac{qB}{m}t \right) - 1 \right) + \frac{mv_0}{qB}$$

分别取实部和虚部就有:

$$x = \Re \tilde{r} = \frac{mv_0}{qB} e^{-\frac{k}{m}t} \left( \frac{q^2B^2}{q^2B^2 - k^2} \cos \frac{qB}{m}t + \frac{qBk}{q^2B^2 - k^2} \sin \frac{qB}{m}t \right)$$

$$y = \Im \tilde{r} = \frac{mv_0}{qB} e^{-\frac{k}{m}t} \left( \frac{q^2B^2}{q^2B^2 - k^2} \sin \frac{qB}{m}t - \frac{qBk}{q^2B^2 - k^2} \cos \frac{qB}{m}t \right) + \frac{kmv_0}{q^2B^2 - k^2}$$

## 6.2 第二章习题

**Solution12.** 列出竖直方向的牛顿第二定律:

$$m \frac{dv_y}{dt} = qB \frac{dx}{dt}$$

得到竖直方向的正则动量守恒:

$$mv_y - qBx = 0$$

得到在  $x = d$  时的竖直方向的速度:

$$v_y = \frac{qBd}{m}$$

因此偏转角:

$$\tan \theta = \frac{qBd}{mv_0}$$

### Solution13.

根据电路的沿  $AB$  对角线的对称性, 我们可以把电路沿对角线“切开”, 只计算上半部分的电阻  $R$ , 最后  $R_{AB}$  为两个这样的电阻并联, 即  $R_{AB} = R/2$ . 现求  $R$ .

如果我们以  $A$  为原点, 发现断开 (1,2) 点前后, 该点都是电路的“电势下降中点”. 即

$$\varphi_{(1,2)} = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}$$

所以这个点断开后电路电阻不变.

这样  $R$  就变成了电阻的简单串并联, 容易求出

$$R = r + \frac{4r \cdot \left( \frac{2r \cdot 2r}{2r+2r} \right)}{4r + \frac{2r \cdot 2r}{2r+2r}} + r = \frac{14}{5}r$$

所以

$$R_{AB} = \frac{1}{2}R = \boxed{\frac{7}{5}r}$$

### Solution14.

•

$$E = RI + L \frac{dI}{dt}$$

•

$$mg = kv + m \frac{dv}{dt}$$

当  $\frac{dv}{dt} = 0$ , 有

$$v_f = \frac{mg}{k}$$

• 发现系数关系:

$$mg \rightarrow E, k \rightarrow Rm \rightarrow L$$

所以

$$I_f = \frac{E}{R}$$

- 通过对比系数, 我们发现电源的做功和重力的做功是可以等效的, 空气阻力导致的耗散和电阻发热是可以等效的, 质点的动能和  $L$  中的磁场能是可以等效的.

**Solution15.**

- 我们发现平移和旋转体系后体系均不发生变化, 因此这个体系同时具有旋转对称性和平移对称性.
- 力矩为

$$\tau = \mathbf{r} \times (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} - q(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B} = -q(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B}$$

所以角动量定理为:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -q(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B}$$

- 利用题目给出的关系, 角动量定理变成:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{1}{2}q\frac{dr^2}{dt}\mathbf{B}$$

移项变成:

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{L} + \frac{1}{2}qr^2\mathbf{B} \right) = 0$$

因此正则角动量:

$$\mathcal{L} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}qr^2\mathbf{B}$$

守恒.

**Solution16.**

- 一段时间内, 流入管道的液体体积等于流出管道的:

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$$

所以

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$$

- 单位时间内流入管道的质量为 (当然也等于流出管道的质量):

$$\frac{dm}{dt} = S_1 v_1 \rho = S_2 v_2 \rho$$



液体单位质量具有的机械能为:

$$\omega = \frac{1}{2}v^2 + gh$$

所以单位时间流入管道的机械能为:

$$\frac{1}{2}S_1v_1\rho v_1^2 + S_1v_1\rho gh_1$$

流出的机械能为:

$$\frac{1}{2}S_2v_2\rho v_2^2 + S_2v_2\rho gh_2$$

- 根据机械能守恒, 管道流出的机械能应该等于对管道的做功. 管道边缘因为压强和液体流动, 压强会对管道内的液体做功, 具体来说, 左边做功功率为

$$P_1 = p_1S_1v_1$$

右边:

$$P_2 = -p_2S_2v_2$$

所以就有:

$$p_1S_1v_1 - p_2S_2v_2 = \frac{1}{2}S_2v_2\rho v_2^2 + S_2v_2\rho gh_2 - \frac{1}{2}S_1v_1\rho v_1^2 - S_1v_1\rho gh_1$$

移项再约去相等的量就有:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2$$

### Solution17.

- 直接列出牛顿第二定律:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -q\mathbf{B} \times \mathbf{v}$$

所以有:

$$\left(m\frac{d}{dt} + q\mathbf{B} \times\right)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

其中算符:

$$\hat{L} = m\frac{d}{dt} + q\mathbf{B} \times$$

- 显然这是一个线性算符. 题目的命题自然成立.

### 6.3 第三章习题

**Solution18.** 设  $M$  加速度向左, 大小为  $A$ .  $m$  相对  $M$  的加速度为  $a$ , 沿斜面向下. 先列出  $M$  的牛顿第二定律:

$$MA = N \sin \theta$$

再在  $M$  的参考系中列出  $m$  的牛顿第二定律.

$$N + mA \sin \theta = mg \cos \theta$$

$$mA \cos \theta + mg \sin \theta = ma$$

这样我们就得到了三个方程, 检查发现  $N, A, a$  为未知数, 因此方程可解. 解得

$$A = \frac{m \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} g$$

$$a = \frac{(M + m) \sin \theta}{M + m \sin^2 \theta} g$$

$m$  相对地面的加速度为:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{M \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \\ a_y &= \frac{(M + m) \sin^2 \theta}{M + m \sin^2 \theta} g \end{aligned}$$

**Solution19.** 在地球参照系中, 设  $z$  轴向上,  $x$  轴指向东方. 则地球的自转角速度在这个参照系下可以写成:

$$\boldsymbol{\omega}_e = (0, \omega_e \cos \lambda, \omega_e \sin \lambda)$$

速度可以写成:

$$\boldsymbol{v} = (v \cos \theta, v \sin \theta, 0)$$

则单位体积受到的科里奥利力为:

$$\boldsymbol{f} = 2\rho \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}_e = 2\rho \omega_e v (\sin \theta \sin \lambda, \cos \theta \sin \lambda, \cos \theta \cos \lambda)$$

地转偏向力为水平分量, 其大小为:

$$f = 2\rho \omega_e v \sin \lambda$$

**Solution20.**

•

$$v_c = \frac{mv_0}{M+m}$$

•

$$v'_m = v_0 - v_c = \frac{Mv_0}{M+m}$$

$$v'_M = -v_c = -\frac{mv_0}{M+m}$$

一维碰撞后如果  $m$  和  $M$  速度各自反向, 显然是满足能量守恒和动量守恒的, 所以碰后就是速度各自反向.

- 由上一问, 速度不变满足能量动量守恒, 夹角变为  $\theta$ . 就有

$$\mathbf{u}_{m,M} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}'_{m,M}$$

根据余弦定理,

$$u_m = \frac{v_0}{M+m} \sqrt{M^2 + m^2 + 2Mm \cos \theta}$$

$$u_M = 2 \sin \frac{\theta}{2} \frac{mv_0}{M+m}$$

- 由几何关系, 不同  $\theta$  角会导致  $\mathbf{v}'_m$  在一个圆上, 而最大偏转角显然是  $\mathbf{u}_m$  指向切线方向的情况. 此时

$$\sin \phi = \frac{v'_m}{v_c} = \frac{M}{m}$$

即

$$\phi_{\max} = \arcsin \frac{M}{m}$$

**Solution21.** 根据讲义上的结论, 二体的资用能为

$$Q = \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v_0^2$$

在达到最大压缩长度时, 全部转化为弹簧的弹性势能, 即

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v_0^2$$

得到

$$A = v_0 \sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$$

**Solution22.**

- 由质心运动定理, 他们的质心进行匀速直线运动或静止. 假设两个质点的位置矢量为  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , 则

$$\mathbf{r}_c = \frac{m\mathbf{r}_1 + M\mathbf{r}_2}{M+m}$$

而

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c = \frac{M}{M+m} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

即  $m$  与质心连线平行于  $M, m$  连线, 则说明他们的质心始终在二者的连线方向上.

- 对  $m$

$$m\mathbf{a}_m = \mathbf{f}_{Mm}$$

所以在  $m$  参考系中,

$$M\mathbf{a}_M = \mathbf{f}_{mM} - M\frac{1}{m}\mathbf{f}_{Mm} = \mathbf{f}_{mM} \left(1 + \frac{M}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Mm}{M+m}\mathbf{a}_M = \mathbf{f}_{mM}$$

得到折合质量

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}$$

- 新的运动方程变为:

$$-\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{Mm}{M+m}\mathbf{a}$$

显然新的运动方程与原运动方程的差别在于:

$$M \rightarrow M+m$$

而周期公式与  $m$  无关, 说明在一个运动方程下,  $m$  的大小不会影响周期. 因此我们只需要将周期公式中的  $M$  替换为  $M+m$  即可.

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{A^3}{G(M+m)}}$$

从定性上看, 这个公式是合理的. 因为在  $M \gg m$  的情况下, 是否考虑中心天体的运动不会显著地影响周期.

**Solution23.**

- 每个质点受到的惯性力为:

$$\mathbf{f}_i = -m_i \mathbf{a}_c$$

做功为

$$dW = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot d\mathbf{r}'_i = -\mathbf{a}_c \cdot \sum_i m_i d\mathbf{r}'_i = 0$$

- 合力矩为:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times (-m_i \mathbf{a}_c) = -\left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i\right) \times \mathbf{a}_c = \mathbf{0}$$

**Solution24.**

- 不一样. 因为为了保持滑轮和绳之间没有相对滑动, 必然存在摩擦力. 一段绳子两侧张力一定有区别以平衡摩擦力.
- 对  $m_1$ , 这端的绳子张力为  $T_1$  未知:

$$m_1 a = m_1 g - T_1$$

对  $m_2$ , 这端的绳子张力为  $T_2$  未知:

$$m_2 a = T_2 - m_2 g$$

- 力矩为

$$\tau = R(T_1 - T_2)$$

角动量定理为

$$R(T_1 - T_2) = \frac{1}{2} M R^2 \beta$$

因为没有相对滑动, 所以

$$\beta = \frac{a}{R}$$

角动量定理改写为:

$$R(T_1 - T_2) = \frac{1}{2} M R a$$

- 联立之前的三个方程解出:

$$a = \frac{2(m_1 - m_2)}{M + 2(m_1 + m_2)}g$$

- 系统的机械能包括动能和势能, 认为滑轮处为势能零点.

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{4}MR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 - m_1gx_1 - m_2gx_2$$

- 由于能量守恒, 能量对时间导数为零:

$$\dot{E} = (m_1 + m_2)va + \frac{1}{2}Mva - m_1g\dot{x}_1 - m_2g\dot{x}_2$$

有  $v = \dot{x}_1 = -\dot{x}_2$ , 带回原式消去  $v$  就有:

$$a = \frac{2(m_1 - m_2)}{M + 2(m_1 + m_2)}g$$

与之前的结果一样.

- 摩擦力对滑轮做的正功功率为

$$P_1 = (T_1 - T_2)v$$

而摩擦力对  $m_1, m_2$  和绳子做的负功功率为:

$$P_2 = -(T_1 - T_2)v$$

有  $P_1 + P_2 = 0$ . 所以摩擦力只起到能量转移的作用, 总体来说不做功.

#### Solution25.

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$L = mv_0r \sin \theta$$

在近地点和远地点处, 都满足速度垂直于径向方向. 所以利用能量守恒和角动量守恒就有:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$mvR = mv_0r \sin \theta$$

$$\Rightarrow R = \frac{GM \pm \sqrt{G^2M^2 - v_0^2r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{2GM}{r} - v_0^2\right)}}{\frac{2GM}{r} - v_0^2}$$

$\pm$  分别对应远地点和近地点.

## 6.4 第四章习题

**Solution26.** 计算

$$\oint \mathbf{G} \cdot \mathbf{S} = - \oint \frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S} = -GM \oint d\Omega = -4\pi GM$$

所以引力场的高斯定理为:

$$\iint \mathbf{G} \cdot \mathbf{S} = -4\pi GM$$

**Solution27.** 在球壳内部取球形高斯面, 有

$$E4\pi r^2 = 0$$

所以

$$E = 0$$

引力场也有完全一样的结论.

**Solution28.** 每个电荷的电势是相同的:

$$V = \frac{2kq}{a}$$

所以整体的相互作用势能为:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2kq^2}{a} = \frac{3kq^2}{a}$$

**Solution29.** 计算两个力的冲量

$$\mathbf{I} = \int q\mathbf{v} \times \mathbf{B} dt - k \int \mathbf{v} dt = (q\mathbf{r} \times \mathbf{B} - k\mathbf{r}) \Big|_{r_1}^{r_2}$$

其冲量只与位置有关, 则广义动量守恒:

$$\mathcal{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{B} \times \mathbf{r} + k\mathbf{r}$$

**Solution30.**

- 冲量矩为

$$\int \mathbf{r} \times (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dt = \int q [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B}] dt$$

由于磁场和运动平面是垂直的, 所以  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = 0$ , 因此

$$\mathbf{J} = -q\mathbf{B} \int \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{2}q\mathbf{B} (r_2^2 - r_1^2)$$

- 角动量定理为:

$$\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = -\frac{1}{2}q\mathbf{B}(r_2^2 - r_1^2)$$

移项得到:

$$\mathbf{L}_1 + \frac{1}{2}q\mathbf{B}r_1^2 = \mathbf{L}_2 + \frac{1}{2}q\mathbf{B}r_2^2$$

所以正则角动量

$$\mathcal{L} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}q\mathbf{B}r^2$$

守恒.

### Solution31.

- 回路的磁通量为

$$\Phi = B_0 \frac{v_0 t + z_0}{h} \pi a^2$$

所以其电动势为:

$$|E| = \dot{\Phi} = \boxed{B_0 \pi a^2 \frac{v_0}{h}}$$

沿顺时针方向. 其电流为

$$I = \frac{E}{R} = \boxed{\frac{B_0 \pi a^2 v_0}{hR}}$$

- 有

$$E = 2\pi a B_r v_0$$

得到

$$B_r = \frac{E}{2\pi a v_0} = \boxed{\frac{a}{2} \frac{B_0}{h}}$$

注意, 该磁场的方向沿径向向内!

- 上下底面的磁通量为:

$$\Phi_1 = \pi a^2 \frac{B_0}{h} ((z_0 + L) - z_0) = L \pi a^2 \frac{B_0}{h}$$

侧面的磁通量为

$$\Phi_2 = -2\pi a L B_r = -2\pi a L \frac{a}{2} \frac{B_0}{h} = -L \pi a^2 \frac{B_0}{h}$$

有

$$\boxed{\Phi_1 + \Phi_2 = 0}$$



**Solution32.** 安培力做负功:

$$W_A = -\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{8}mv^2 = -\frac{3}{8}mv^2$$

这与反电动势做功相等, 而反电动势做功全部转化为电阻发热, 所以

$$Q = \frac{3}{8}mv^2$$

**Solution33.** 安培力做负功:

$$W_A = -\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{8}mv^2 = -\frac{3}{8}mv^2$$

这与反电动势做功相等, 而反电动势做功全部转化为电阻发热, 所以

$$Q = \frac{3}{8}mv^2$$

**Solution34.** 每个回路的绕圈电流, 从左上角开始分别是  $I_1, I_2, I_3, I_4$ . 这样我们可以不列节点电流方程, 因为我们的设未知数的方法自动满足这些方程. 这样就有:

$$\begin{cases} E_1 = 2I_1r + (I_1 - I_2)r + (I_1 - I_3)r \\ E_2 = 2I_4r + (I_4 - I_2)r + (I_4 - I_3)r \\ 0 = 2I_2r + (I_2 - I_1)r + (I_2 - I_4)r \\ 0 = 2I_3r + (I_3 - I_1)r + (I_3 - I_4)r \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{7}{24} \frac{E_1}{r} + \frac{1}{24} \frac{E_2}{r} \\ I_2 = I_3 = \frac{E_1 + E_2}{12r} \\ I_4 = \frac{1}{24} \frac{E_1}{r} + \frac{7}{24} \frac{E_2}{r} \end{cases}$$

**Solution35.** 之前已经得到  $RLC$  串联电路的复阻抗为:

$$Z = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

所以当  $\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$  时, 电路是电感性的; 当  $\omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$  时, 电路是电容性的.