Appendix 2: Simultaneous of Differential Equations

1. 聯立微分方程式

考慮一組兩條的線性微分方程式：

$$\begin{cases} \dot{y}_1 \equiv \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1 \\ \dot{y}_2 \equiv \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2 \end{cases}$$

解法有兩種：(1)substitution method 和一般化的(2)direct method

(1) substitution method

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1 \overset{\text{對時間微分}}{\Rightarrow} \ddot{y}_1 = a_{11}\dot{y}_1 + a_{12}\dot{y}_2$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_1 = a_{11}\dot{y}_1 + a_{12}(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2)$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_1 = a_{11}\dot{y}_1 + a_{12}\left(a_{21}y_1 + a_{22}\frac{\dot{y}_1 - b_1 - a_{11}y_1}{a_{12}} + b_2\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_1 - (a_{11} + a_{22})\dot{y}_1 - (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y_1 = (a_{12}b_2 - a_{22}b_1)$$

(類似前述二階線性微分方程式：$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b$)

$\Rightarrow y_1 = y_1^h + y_1^p$，即齊次解+特解 … 詳細過程類似前述

同理，對聯立微方的第二式作時間微分，再分別代掉$\dot{y}_1$與y_1，整理後即可得到類似此式，而其解亦類似前述：$y_2 = y_2^h + y_2^p$

(2) direct method

$$\begin{cases} \dot{y}_1(=y_1') = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1 \\ \dot{y}_2(=y_2') = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

(此式可以推廣至 n 階線性微方，此時 $\mathbf{A}$ 為 $n \times n$)

$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ 的完整解：仍包含齊次解、特解（$\mathbf{y} = \mathbf{y}^h + \mathbf{y}^p$）

(a) 齊次解：$\mathbf{y}^h$

求解齊次微方：$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$

假設它的齊次解為 $\mathbf{y} = \mathbf{k}e^{rt}$，$\mathbf{k}$ 為 n 維(常數)**特性向量**、r 為純量

若此假設正確則它須滿足該齊次微方 $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$

由假設解求出 $\dot{\mathbf{y}} = r\mathbf{k}e^{rt}$，分別代入齊次微方中得：

$$r\mathbf{k}e^{rt} = \mathbf{A}\mathbf{k}e^{rt}$$

$$\Rightarrow \ (\mathbf{A} - rI)\mathbf{k}e^{rt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \ (\mathbf{A} - rI)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\overset{nontrivial\ \ solution}{\Rightarrow} \quad |\mathbf{A} - rI| = 0 \ \ \ldots \ \text{特性根方程式}$$

$$\overset{if\ \ n=2}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Rightarrow\ r^2-(a_{11}+a_{22})\cdot r+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$$

$$\Rightarrow\ r_1,\ r_2$$

$$\therefore\ \mathbf{y}_1=\mathbf{k}_1e^{r_1t}\text{和}\mathbf{y}_2=\mathbf{k}_2e^{r_2t}$$

(可能出現相異實根、重根、共軛虛根等情況…類似前述)

然而$\mathbf{k}_1$、$\mathbf{k}_2$=?，回想一下：$(\mathbf{A}-rI)\mathbf{k}=\mathbf{0}$

(i) 當$r=r_1$時，滿足$(\mathbf{A}-rI)\mathbf{k}=\mathbf{0}$的特性向量$\mathbf{k}_1$為：

$$\begin{bmatrix} a_{11}-r_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-r_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow\ (a_{11}-r_1)k_1+a_{12}k_2=0\ \text{或}\ a_{21}k_1+(a_{22}-r_1)k_2=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{k_1}{k_2}=-\frac{a_{12}}{a_{11}-r_1}\ \text{或}\ \frac{k_1}{k_2}=-\frac{a_{22}-r_1}{a_{21}}$$

單憑此關係式是無法決定出$k_{1,2}$值，因此 way 1:額外加入單位圓條件：$k_1^2+k_2^2=1$；way 2:簡單假設$k_1=1$ (或$k_2=1$)，來求出$k_{1,2}$值

講義是以 way 2 來求特性向量：$\mathbf{k}_1=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -(a_{11}-r_1)/a_{12} \end{bmatrix}$

(課本是以 way 1 來求特性向量的。)

所以，$\mathbf{y}_1 = \mathbf{k}_1 e^{r_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -(a_{11} - r_1)/a_{12} \end{bmatrix} e^{r_1 t}$

(ii) 同理，當$r = r_2$時，滿足$(\mathbf{A} - rI)\mathbf{k} = \mathbf{0}$的特性向量$\mathbf{k}_2$為：

$$\begin{bmatrix} a_{11} - r_2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = -\frac{a_{12}}{a_{11} - r_2} \quad 或 \quad \frac{k_1}{k_2} = -\frac{a_{22} - r_2}{a_{21}}$$

使用 way 2:假設$k_1 = 1$，來求出$k_{1,2}$值

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -(a_{11} - r_2)/a_{12} \end{bmatrix}$$

所以，$\mathbf{y}_2 = \mathbf{k}_2 e^{r_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -(a_{11} - r_2)/a_{12} \end{bmatrix} e^{r_2 t}$

因此，齊次解為：

case 1:相異實根 $\begin{bmatrix} y_1^h \\ y_2^h \end{bmatrix} \equiv \mathbf{y}^h = c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2 = c_1 \mathbf{k}_1 e^{r_1 t} + c_2 \mathbf{k}_2 e^{r_2 t}$

case 2:重(實)根 $\mathbf{y}^h = c_3 \mathbf{y}_1 + t c_4 \mathbf{y}_2 = c_3 \mathbf{k}_1 e^{r_1 t} + t c_4 \mathbf{k}_2 e^{r_2 t}$

case 3:共軛虛根
$$\begin{aligned} \mathbf{y}^h &= c_5 \mathbf{y}_1 + c_6 \mathbf{y}_2 = c_5 \mathbf{k}_1 e^{r_1 t} + c_6 \mathbf{k}_2 e^{r_2 t} \\ &= e^{ht} \cdot [c_5 \mathbf{k}_1 e^{vi \cdot t} + c_6 \mathbf{k}_2 e^{-vi \cdot t}] = \ldots. \end{aligned}$$

(b) 特解：$\mathbf{y}^p$

長期均衡解要滿足條件$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$，因此$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1^p \\ y_2^p \end{bmatrix} \equiv \overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^p = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

(亦可 apply Cramer's rule 求此解)

(c) 完整解：$\mathbf{y} = \mathbf{y}^h + \mathbf{y}^p$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^h \\ y_2^h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^p \\ y_2^p \end{bmatrix}$$

(d) 確定解：係數由期初條件值聯立算出 (略，參考前節)

例 1：$\begin{cases} x' + 2y' + 2x + 5y = 77 \\ y' + x + 4y = 61 \end{cases}$，$x(0) = 6,\ \ y(0) = 12$

(1)講義(上述)的解法

$$\begin{cases} x' + 2y' + 2x + 5y = 77 \\ y' + x + 4y = 61 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x' = 3y - 45 \\ y' = -x - 4y + 61 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -45 \\ 61 \end{bmatrix}$$

(i)齊次解

假設它的齊次解為$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\mathbf{k}e^{rt} \quad \Rightarrow \ (\mathbf{A}-rI)\mathbf{k}e^{rt}=\mathbf{0}$

$\Rightarrow \ |\mathbf{A}-rI|=0$ ... 特性根方程式

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}0-r & 3\\ -1 & -4-r\end{vmatrix}=0, \qquad \Rightarrow \ r^2+4r+3=0$$

$\Rightarrow \ r_1=-1, \ r_2=-3$

(a) 當$r_1=-1$時

滿足$(\mathbf{A}-rI)\mathbf{k}=\mathbf{0}$的特性向量$\mathbf{k}_1$為 $\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\B_1\end{bmatrix}=\mathbf{0}$

$\Rightarrow A_1+3B_1=0, \qquad Set \ B_1=1 \ \Rightarrow \ A_1=-3$

$$\therefore \ \mathbf{y}_1=\mathbf{k}_1e^{r_1t}=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}e^{-t}$$

(b) 當$r_2=-3$時

滿足$(\mathbf{A}-rI)\mathbf{k}=\mathbf{0}$的特性向量$\mathbf{k}_2$為 $\begin{bmatrix}3 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_2\\B_2\end{bmatrix}=\mathbf{0}$

$\Rightarrow 3A_2+3B_2=0, \qquad Set \ B_2=1 \ \Rightarrow \ A_2=-1$

$$\therefore \ \mathbf{y}_2=\mathbf{k}_2e^{r_2t}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}e^{-3t}$$

Thus，齊次解為：

$$\mathbf{y}^h = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 = c_1\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}e^{-t} + c_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}e^{-3t}\text{，或}$$

$$\begin{bmatrix}x^h\\y^h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}\\c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}\end{bmatrix}$$

(ii)特解：

$$\text{均衡條件}\mathbf{y}' = \mathbf{0} \;\Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 3\\-1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}\\\overline{y}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-45\\61\end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\overline{x}\\\overline{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\15\end{bmatrix} \text{ (apply Cramer's rule)}$$

(iii)一般解

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x^h\\y^h\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\overline{x}\\\overline{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}\\c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\15\end{bmatrix}$$

(iv)確定解

$$\because \; x(0) = 6,\; y(0) = 12$$

$$\therefore \begin{bmatrix}x(0)\\y(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3c_1 - c_2\\c_1 + c_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\12\end{bmatrix},\; \Rightarrow c_1 = -1,\; c_2 = -2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} + 2e^{-3t} \\ -e^{-t} - 2e^{-3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(2)課本的解法 $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 61 \end{bmatrix}$

$$(\Rightarrow \mathbf{J}_{2\times2}\mathbf{u}_{2\times1} + \mathbf{M}_{2\times2}\mathbf{v}_{2\times1} = \mathbf{g}_{2\times1})$$

(i)特解(particular integral)

$$\text{Let } \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} (\text{constant}) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_p' \\ y_p' \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 61 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 77 \\ 61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(ii)齊次解(complementary function)

Let $\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} me^{rt} \\ ne^{rt} \end{bmatrix}$, m,n為待解向量 $\Rightarrow \begin{bmatrix} x_c' \\ y_c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mre^{rt} \\ nre^{rt} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mre^{rt} \\ nre^{rt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} me^{rt} \\ ne^{rt} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mr \\ nr \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \right\} e^{rt} = \mathbf{0}$$

$$(\Rightarrow \left\{ \mathbf{J} \begin{bmatrix} mr \\ nr \end{bmatrix} + \mathbf{M} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \right\} e^{rt} = \mathbf{0})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mr \\ nr \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\because e^{rt} \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} r & 2r \\ 0 & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \det \left\{ \begin{bmatrix} r & 2r \\ 0 & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right\} = 0, \quad if \ \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} r+2 & 2r+5 \\ 1 & r+4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{.... 特性根方程式}$$

$$\Rightarrow (r+2)(r+4) - (2r+5) = 0 \qquad \Rightarrow r_1 = -1, \ r_2 = -3$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 e^{r_1 t} + m_2 e^{r_2 t} \\ n_1 e^{r_1 t} + n_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 e^{-t} + m_2 e^{-3t} \\ n_1 e^{-t} + n_2 e^{-3t} \end{bmatrix}$$

(a) 當$r_1 = -1$時

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} r_1 & 2r_1 \\ 0 & r_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1+2 & 2\cdot(-1)+5 \\ 0+1 & -1+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow m_1 + 3n_1 = 0$$

$$Set\ n_1 = -A_1 \ \Rightarrow \ m_1 = -3n_1 = 3A_1$$

(b) 當 $r_2 = -3$ 時

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} r_2 & 2r_2 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow -m_2 - n_2 = 0$$

$$Set\ n_2 = -A_2 \ \Rightarrow \ m_2 = -n_2 = A_2$$

Thus, $\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3A_1e^{-t} + A_2e^{-3t} \\ -A_1e^{-t} - A_2e^{-3t} \end{bmatrix}$

(iii)一般解(general solution)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3A_1e^{-t} + A_2e^{-3t} \\ -A_1e^{-t} - A_2e^{-3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(iv)確定解(definite solution)

$$\because \ x(0) = 6, \ y(0) = 12$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3A_1 + A_2 \\ -A_1 - A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}, \ \Rightarrow A_1 = 1, \ A_2 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} + 2e^{-3t} + 1 \\ -e^{-t} - 2e^{-3t} + 15 \end{bmatrix}$$

Ps 1. Dynamic stability: $\because r_1 = -1, \ r_2 = -3 \ \Rightarrow$ Stable

Ps 2. 乍看下，兩種方法的一般解似乎不同，其實不然，因為未定係數項不同之故

2. Application

例 1：第 15.5 節，以聯立微方求解 inflation-unemployment model

$$\begin{cases} p = \alpha - \beta U + h\pi - T, & \alpha, \beta > 0,\ 0 < h \le 1 \\ \dfrac{d\pi}{dt} = j(p - \pi), & 0 < j \le 1 \\ \dfrac{dU}{dt} = -k(m - p), & k > 0 \end{cases}$$

將第一式分別代入第二與第三式中，得

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi}{dt} = j(h-1)\pi - j\beta U + j(\alpha - T), & 0 < j \le 1 \\ \dfrac{dU}{dt} = kh\pi - k\beta U - k(m - \alpha + T), & k > 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pi' \\ U' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j(1-h) & j\beta \\ -kh & k\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pi \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j(\alpha - T) \\ -k(m - \alpha + T) \end{bmatrix}$$

Solution:

(i) Particular Integral:

Set $\begin{bmatrix} \pi_p \\ U_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\pi} \\ \overline{U} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \pi_p' \\ U_p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$

$$\therefore \begin{bmatrix} j(1-h) & j\beta \\ -kh & k\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\pi} \\ \bar{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j(\alpha - T) \\ -k(m-\alpha+T) \end{bmatrix}$$

$\bar{\pi}$ = apply Cramer's rule... $= m$

- 均衡下(長期下)，預期通膨率等於名目貨幣成長率

$\bar{U}$ = apply Cramer's rule... $= \dfrac{1}{\beta}[\alpha - T - (1-h)m]$

- $$\frac{\partial \bar{U}}{\partial m} = -\frac{1-h}{\beta} < 0$$

  均衡下(長期下)，增加名目貨幣成長率 m 能降低失業率

- $$\frac{\partial \bar{U}}{\partial T} = -\frac{1}{\beta} < 0$$

  均衡下(長期下)，提升勞動生產力 T 能降低失業率

(ii) Complementary Function:

$$\text{Set } \begin{bmatrix} \pi_c \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae^{rt} \\ Be^{rt} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \pi_c' \\ U_c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Are^{rt} \\ Bre^{rt} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Are^{rt} \\ Bre^{rt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j(1-h) & j\beta \\ -kh & k\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ae^{rt} \\ Be^{rt} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j(1-h) & j\beta \\ -kh & k\beta \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{rt} = 0$$

$$\Rightarrow \det\left\{\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j(1-h) & j\beta \\ -kh & k\beta \end{bmatrix}\right\} = 0, \quad if \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{rt} \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} r+j(1-h) & j\beta \\ -kh & r+k\beta \end{vmatrix}=0,$$

$$\Rightarrow \ r^2+[k\beta+j(1-h)]r+jk\beta=0$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} r_1+r_2=-[k\beta+j(1-h)]<0 \\ r_1r_2=jk\beta>0 \end{Bmatrix}, \Rightarrow r_1<0, \text{ and } r_2<0 \ (\text{收斂})$$

(iii) General Solution:

$$\begin{bmatrix}\pi \\ U\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\pi_c \\ U_c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\pi_p \\ U_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t} \\ B_1e^{r_1t}+B_2e^{r_2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m \\ \frac{1}{\beta}[\alpha-T-(1-h)m]\end{bmatrix}$$

其中，A_1、B_1對應著r_1根；A_2、B_2對應著r_2根

例 2：$\begin{cases} p=\frac{1}{6}-3U+\pi, \\ \pi'=\frac{3}{4}(p-\pi), \\ U'=-\frac{1}{2}(m-p), \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\pi' \\ U'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -9/4 \\ 1/2 & -3/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\pi \\ U\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/8 \\ (1/6)-m\end{bmatrix}$$

(i)特解：$\pi'=U'=0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}0 & -9/4 \\ 1/2 & -3/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\pi} \\ \bar{U}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/8 \\ (1/6)-m\end{bmatrix}=0, \Rightarrow \begin{bmatrix}\bar{\pi} \\ \bar{U}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m \\ 1/18\end{bmatrix}$$

(ii)齊次解： [回憶: $(\mathbf{A} - rI)\mathbf{k}e^{rt} = \mathbf{0}$]

特性根方程式：$\Rightarrow \begin{vmatrix} -r & -9/4 \\ 1/2 & -(3/2) - r \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow r^2 + \frac{3}{2}r + \frac{9}{8} = 0$$

$$\Rightarrow r_1, r_2 = -\frac{3}{4} \pm \frac{3}{4}i$$

$$v = \frac{3}{4}$$

$$h = \frac{-3}{4}$$

(a) 當 $r_1 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i$，

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -r_1 & -9/4 \\ 1/2 & -(3/2) - r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i) \cdot A_1 - \frac{9}{4} \cdot B_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(1 - i) \cdot A_1 = B_1$$

(b) 當 $r_2 = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i$，

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -r_2 & -9/4 \\ 1/2 & -(3/2) - r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -(-\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i) \cdot A_2 - \frac{9}{4} \cdot B_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(1 + i) \cdot A_2 = B_2$$

因此，$\begin{bmatrix}\pi_c \\ U_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \\ B_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t}\end{bmatrix} = e^{ht}\begin{bmatrix}A_1 e^{vit} + A_2 e^{-vit} \\ B_1 e^{vit} + B_2 e^{-vit}\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\pi_c \\ U_c\end{bmatrix} = e^{ht}\begin{bmatrix}(A_1 + A_2)\cos vt + (A_1 - A_2)i\cdot\sin vt \\ (B_1 + B_2)\cos vt + (B_1 - B_2)i\cdot\sin vt\end{bmatrix}$$

$$= e^{ht}\begin{bmatrix}A_5\cos vt + A_6\cdot\sin vt \\ \frac{1}{3}(A_5 - A_6)\cos vt + \frac{1}{3}(A_5 + A_6)\cdot\sin vt\end{bmatrix}$$

其中，令$A_1 + A_2 \equiv A_5$、$(A_1 - A_2)\cdot i \equiv A_6$

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= \frac{1}{3}(1-i)\cdot A_1 + \frac{1}{3}(1+i)\cdot A_2 \\ &= \frac{1}{3}(A_1 + A_2) - \frac{1}{3}(A_1 - A_2)\cdot i \\ &= \frac{1}{3}(A_5 - A_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B_1 - B_2)i &= [\frac{1}{3}(1-i)\cdot A_1 - \frac{1}{3}(1+i)\cdot A_2]\cdot i \\ &= \frac{1}{3}(A_1 - A_2)i - \frac{1}{3}(A_1 + A_2)\cdot(-1) \\ &= \frac{1}{3}(A_6 + A_5) \end{aligned}$$

(iii)一般解：

$$\begin{bmatrix}\pi \\ U\end{bmatrix} = e^{-\frac{3}{4}t}\begin{bmatrix}A_5\cos\frac{3}{4}t + A_6\cdot\sin\frac{3}{4}t \\ \frac{1}{3}(A_5 - A_6)\cos\frac{3}{4}t + \frac{1}{3}(A_5 + A_6)\cdot\sin\frac{3}{4}t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}m \\ \frac{1}{18}\end{bmatrix}$$

3. Two-variable Phase Diagrams

本節討論非線性微分方程式的定性(qualitative)的相位圖分析

對兩變數的一階微分方程式做定性相位分析：

$$x'(t) = f(x,y), \quad x' \equiv \frac{dx}{dt}$$

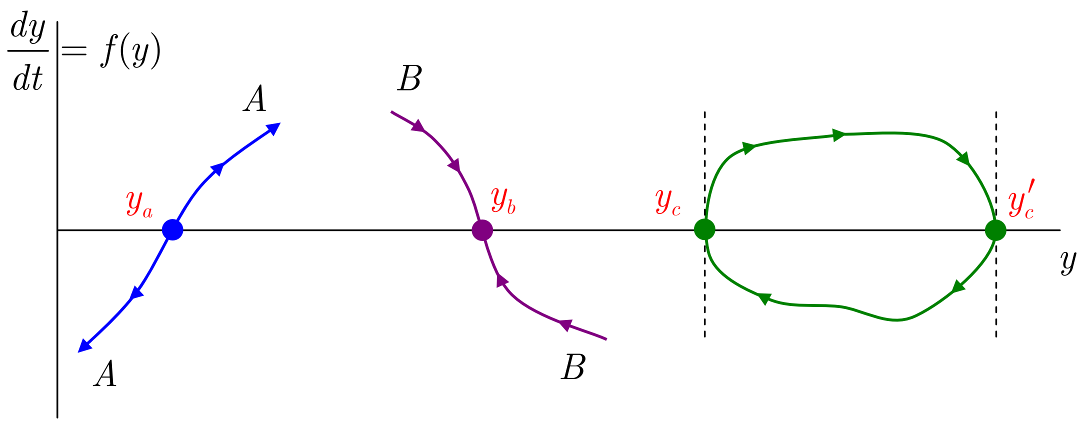
$$y'(t) = g(x,y), \quad y' \equiv \frac{dy}{dt}$$

f、g 函數均不含時間 t 變數，故稱此系統為自發性系統

(autonomous system)

⇒ 相位圖將可解答“**跨期均衡的動態穩定性**”

Recall: 單變數的相位圖



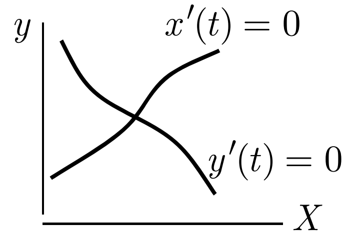
均衡點發生在$\frac{dy}{dt} = 0$；

其斜率關係著此一體系的安定性：$f' > 0$：發散體系；

$f' < 0$：收斂體系

在兩變數的相位圖中，將會出現$\dfrac{dy}{dt}$與$\dfrac{dx}{dt}$兩個，因此圖形將以介面曲線(demarcation curve)來呈現。

圖例:



相位平面(phase plane)

- 考慮一自發性系統：$\begin{cases} x'(t)=f(x,y) \\ y'(t)=g(x,y) \end{cases}$

(1)其介面曲線為$\begin{cases} x'(t)=0 \\ y'(t)=0 \end{cases}$ (稱為 isocline)，亦即, $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$。

因此，由此交點$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$，即可以求得均衡點$(\bar{x},\ \bar{y})$。

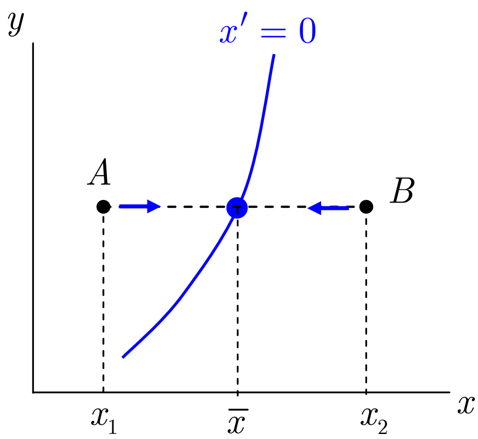
(2)這些介面線將平面分割成兩區域，稱為 isosector；且此兩條微分方程式的斜率也關係著該體系的穩定性

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \text{ 的斜率 } \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x'=0} = -\dfrac{f_x}{f_y} \gtrless 0 \\ g(x,y)=0 \text{ 的斜率 } \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{y'=0} = -\dfrac{g_x}{g_y} \gtrless 0 \end{cases} \cdots$$

若$f_y=0$、$g_y=0$，則介面線為垂直線

※ 以$f_x<0,\ f_y>0,\ g_x>0,\ g_y<0$為例說明相位圖

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y)=0 \text{ 的斜率 } \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x'=0} = -\dfrac{f_x}{f_y} > 0 \\ g(x,y)=0 \text{ 的斜率 } \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{y'=0} = -\dfrac{g_x}{g_y} > 0 \end{cases}$$



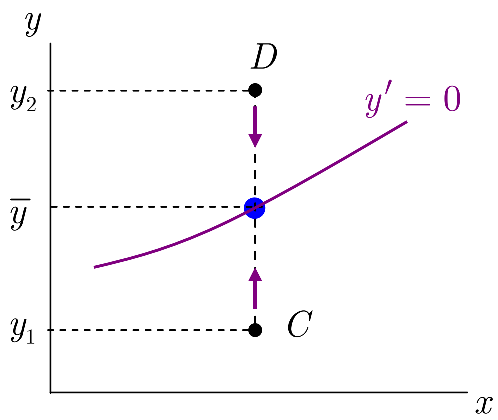
$\dfrac{\partial x'}{\partial x} = f_x < 0$，意味著$\partial x'$與$\partial x$變動方向相反

(a)當$x < \overline{x}$時（例如 A 點：x_1），$\partial x < 0$，所以$\partial x' > 0$

$\partial x' > 0$則意味著 x 隨時間增加而增加，即 A 點往右移

(b)當$x > \overline{x}$時（例如 B 點：x_2），$\partial x > 0$，所以$\partial x' < 0$

$\partial x' < 0$則意味著 x 隨時間增加而減少，即 B 點往左移



$\dfrac{\partial y'}{\partial y} = g_y < 0$，意味著$\partial y'$與$\partial y$變動方向相反

(a)當$y < \overline{y}$時（例如 C 點：y_1），$\partial y < 0$，所以$\partial y' > 0$

$\partial y' > 0$則意味著 y 隨時間增加而增加，即 C 點往上移

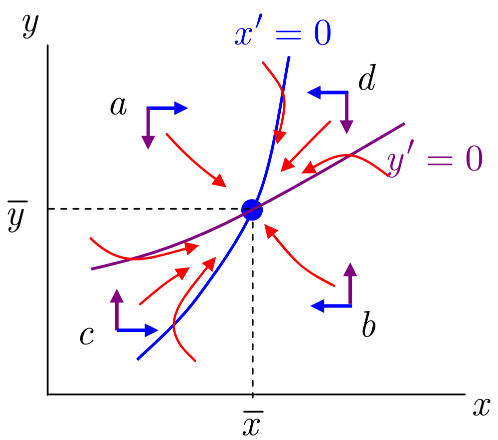
(b)當 $y > \overline{y}$ 時（例如 D 點：y_2），$\partial y > 0$，所以$\partial y' < 0$

$\partial y' < 0$則意味著 y 隨時間增加而減少，即 D 點往下移

若我們假設：$\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x'=0} > \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{y'=0}$, (當然可能$\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x'=0} < \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{y'=0}$)

即$x' = 0$的(正)斜率較$y' = 0$的(正)斜率為陡

則其相位圖為：Phase Trajectories (Phase Path)



紅色箭頭線為 Streamlines

此種均衡點具有動態穩定性質，稱為 **stable node**

Excise: 若我們假設：$\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x'=0} < \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{y'=0}$，則相位圖如何畫呢?

相位圖的決定步驟：

(1)先畫出相位平面(phase plane) (2)畫出介面線(須決定出

isocline 的斜率) (3)決定出相位平面中，x、y 的移動方向

均衡的種類

(1)nodes：除上述圖例的 stable nodes 外，還有 unstable nodes；

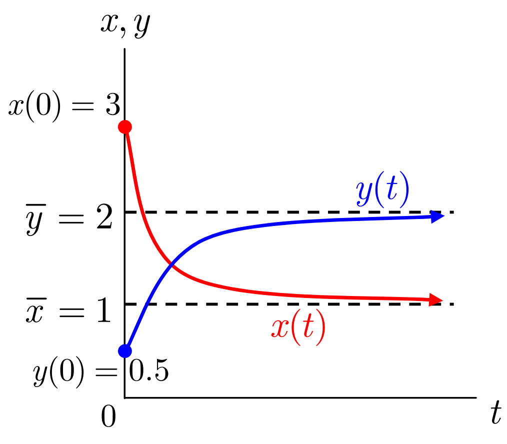
(2)saddle points；(3)foci 或 focuses；(4)vortices 或 vortexes。

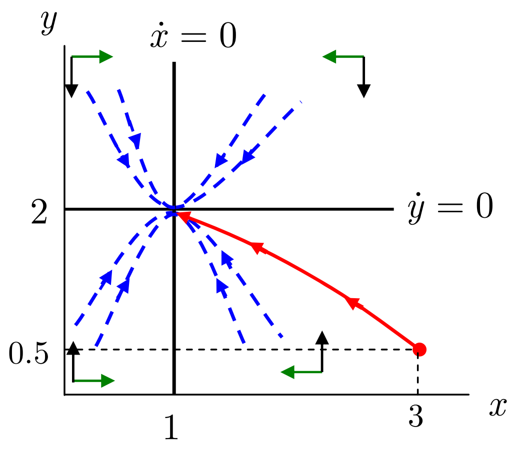
(1.A). Stable Nodes: Both Roots Negative

例: $\begin{aligned}\dot{x} &= -2x+2 \\ \dot{y} &= -3y+6\end{aligned}$ 或 $\begin{bmatrix}\dot{x} \\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0 \\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 \\ 6\end{bmatrix}$

其解為：$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^{-2t} + 1 \\ y(t) &= c_2 e^{-3t} + 2\end{aligned}$；假定初始值為：$\begin{aligned}x(0) &= 3 \\ y(0) &= 1/2\end{aligned}$

則其時間路徑圖、相位圖分別為：：

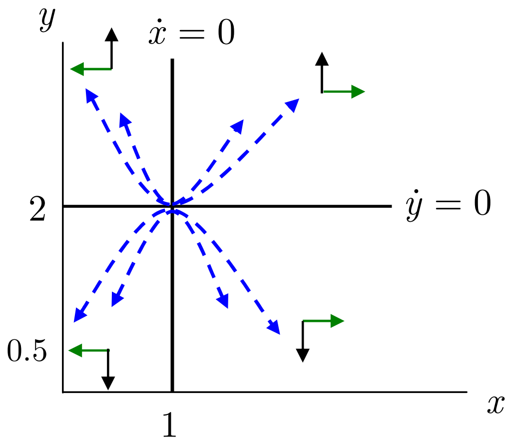




(1.B). Unstable Nodes: Both Roots Positive

例: $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$

其解為：$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{2t} + 1 \\ y(t) &= c_2 e^{3t} + 2 \end{aligned}$ ； 而其相位圖為：



(2). Saddle Point: Roots of Opposite Sign

例: $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

其特性根為：$r_1 = -1/2, \quad r_2 = 1/2$

特性向量為：$[A_1, B_1] = [A_1, -0.5A_1]$，和$[A_2, B_2] = [A_2, 0.5A_2]$

其解為：$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{-0.5t} + A_2 e^{0.5t} + 2 \\ y(t) &= -0.5A_1 e^{-0.5t} + 0.5A_2 e^{0.5t} + 2 \end{aligned}$

而其相位圖為：

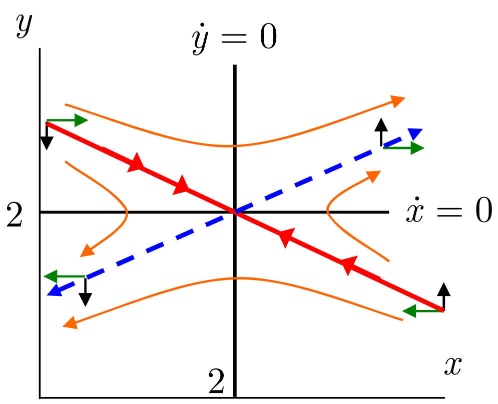
紅色的實線為 **Stable Branches**
它是只有穩定根(負根)在運作。因此，A_2=0。所以，穩定臂(stable arm)上的軌跡函數是：

$x(t) = A_1 e^{-0.5t} + 2$

$y(t) = -0.5A_1 e^{-0.5t} + 2$

故它的函數為：

$\dfrac{x(t)-2}{} = \dfrac{A_1 e^{-0.5t}}{} = \dfrac{1}{}$



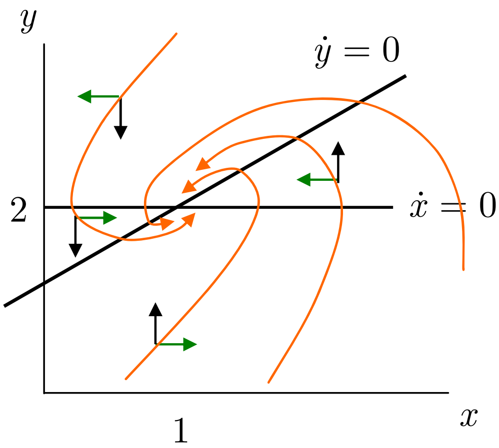
(3A). Stable Focus: Complex Roots with Negative Real Parts

例: $\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$

其特性根為：$r_1, r_2=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

特性向量為：? 其解為：$x(t)=?$ $y(t)=?$

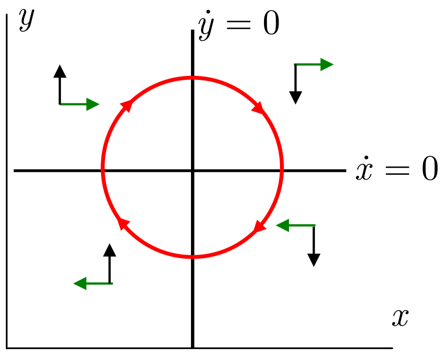
而其相位圖為：



(3B). Unstable Focus: Complex Roots with Positive Real Parts

略

(4). Center: Pure Imaginary Roots



4. Application1: Exchange-Rate Overshooting (Dornbusch Model)

$$\dot{p}=\alpha(y^{D}-y^{S}), \quad \alpha>0 \;; \quad y^{D}=u+v(e-p), \quad u,v>0$$

$$y^{S}=\overline{y}=\text{constant}$$

$$m^{S}=m^{D} \;; \quad m^{S}=\overline{m}-p$$

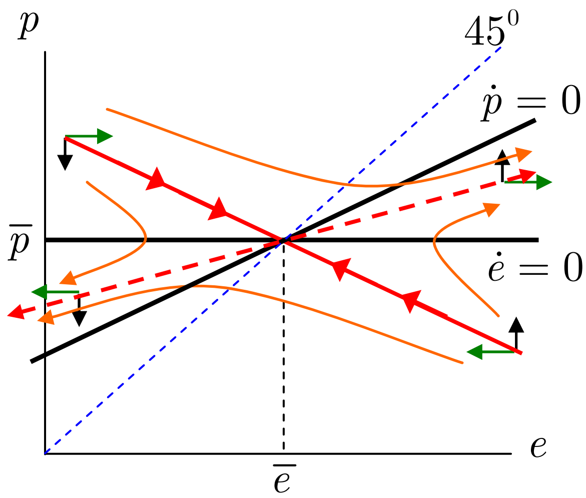
$$m^{D}=-ar+b\overline{y}, \quad a,b>0$$

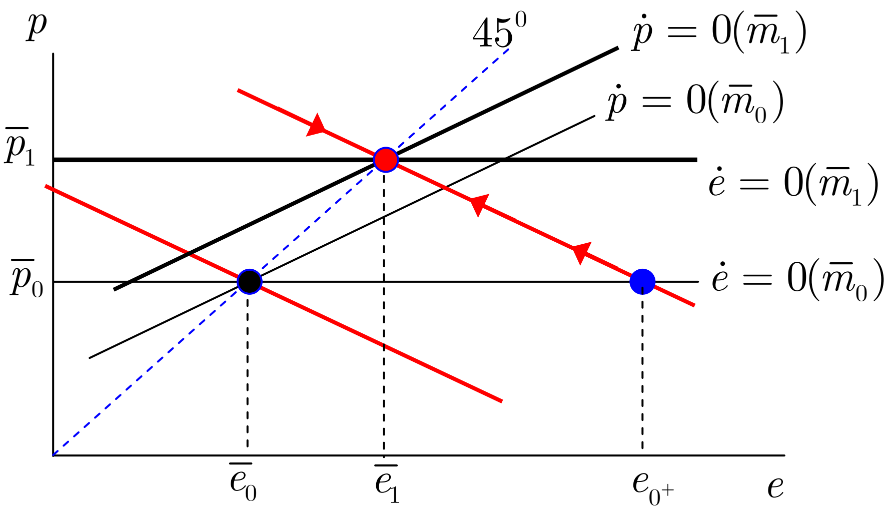
$$r=r^{*}+E(\dot{e})=r^{*}+\dot{e}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \dot{e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha v & \alpha v\\ 1/a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha(u-\overline{y})\\ (b\overline{y}-\overline{m})/a-r^{*}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}p(t)=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}+\overline{p}\\ e(t)=\dfrac{r_1+\alpha v}{\alpha v}C_1e^{r_1t}+\dfrac{r_2+\alpha v}{\alpha v}C_2e^{r_2t}+\overline{e}\end{cases}$$

$$\text{where }\begin{cases}\overline{p}=ar^{*}-b\overline{y}+\overline{m}\\ \overline{e}=\overline{p}-\dfrac{u-\overline{y}}{v}\end{cases}, \quad r_1,r_2=-\frac{\alpha v}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2v^2+\frac{4\alpha v}{a}}$$





5. Application: A Walrasian Price Adjustment Model with Entry

假設在一競爭市場中，在當期價格下，若發生超額需求(超額供給)，則下期價格將往上(下)調整；亦即價格是依據底下方程式調整：

$$\dot{p}=\alpha(q^D-q^S),\quad \alpha(=\text{constant})>0$$

其中，p、q^D、q^D 分別為價格、需求數量與供給數量。進一步假定，廠商依據是否有正的或負的經濟利潤來決定她是否進入或退

出該產業。令 N 為產業中廠商的數目(假設數目是連續且可以無窮細分的)；$\overline{c}$ 為廠商可以達到的最低成本，且它為正的常數值。若價格高(低)於 $\overline{c}$ ，則廠商賺得正(負)的經濟利潤，並且因而激勵她進入(退出)該產業：$\dot{N} > 0\,(< 0)$。因此，廠商數目的變化可以被表示成：

$$\dot{N} = \gamma(p - \overline{c}), \quad \gamma(=\text{constant}) > 0$$

其中，γ 代表調整速度。假設需求曲線與供給曲線分別為：

$$q^D = A + Bp, \quad B < 0$$

$$q^S = mN, \quad m(=\text{constant}) > 0$$

由供給曲線知，在給定廠商數目下，供給曲線會是垂直線，也就是價格完全無彈性。請求出價格的時間路徑，並判斷它是否收斂至均衡。

Sol:

$$\dot{p} = \alpha(q^D - q^S) = \alpha(A + Bp - mN)$$

$$\dot{N} = \gamma(p - \overline{c})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha B & -\alpha m \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha A \\ -\gamma\overline{c} \end{bmatrix}$$

特解：$\dot{p} = \dot{N} = 0$

$$\alpha(A + B\overline{p} - m\overline{N}) = 0 \quad \text{and} \quad \gamma(\overline{p} - \overline{c}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \overline{p} = \overline{c}\,, \quad \overline{N} = \frac{A + B\overline{c}}{m}$$

特性根：

$$\begin{vmatrix} \alpha B - r & -\alpha m \\ \gamma & 0 - r \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - \alpha B r + \alpha m \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \quad r_1, r_2 = \frac{\alpha B}{2} \pm \frac{\sqrt{(\alpha B)^2 - 4\alpha m\gamma}}{2}$$

完整解：

$$\Rightarrow \begin{cases} p(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \overline{p} \\ N(t) = \dfrac{r_1 - \alpha B}{-\alpha m} C_1 e^{r_1 t} + \dfrac{r_2 - \alpha B}{-\alpha m} C_2 e^{r_2 t} + \overline{N} \end{cases}$$

由係數矩陣知：

行列式值 $= \alpha m\gamma > 0$ $\ldots$ 兩根之積

主對角線和 $= \alpha B < 0$ $(\because$ 需求線斜率$B < 0)$ $\ldots$兩根之和

因此，我們知道兩根為具有負的實部根；

但是否為實根或虛根，我們需進一步判別$\sqrt{(\alpha B)^2 - 4\alpha m\gamma}$

一般說來，$\sqrt{(\alpha B)^2 - 4\alpha m\gamma} \gtreqless 0$，取決於其中的參數值

不管如何，兩根都是具有負的實部，故體系會收斂至均衡點

(1) 若$\sqrt{(\alpha B)^2 - 4\alpha m\gamma} > 0$，則兩根為負的實根

靜止均衡型態為 stable node

相位圖如何畫？

(2) 若$\sqrt{(\alpha B)^2-4\alpha m\gamma}=0$，則兩根為重複的負實根

靜止均衡型態為 stable focus

(3) 若$\sqrt{(\alpha B)^2-4\alpha m\gamma}<0$，則兩根為具負實部的共軛虛根

靜止均衡型態為 improper stable node

Homework: 考慮一個動態的 IS/LM 模型

$$\begin{cases}\dot{Y}=\alpha[C(Y)+I(r)+G-Y], & \alpha>0, C_Y>0, I_r<0\\ \dot{r}=\beta[K(Y)+L(r)-\dfrac{M^s}{P}], & \beta>0, K_Y>0, L_r<0\end{cases}$$

其中，Y 為產出，$C(Y)$為消費，$I(r)$為投資，r 為利率，G 為政府支出，$K(Y)$為交易與預防動機的實質貨幣需求，$L(r)$為投機動機的實質貨幣需求，M^s/P 為實質貨幣供給，P 為一般物價。α,β 為分別商品市場與貨幣市場的調整速度。請說明該經濟體系的動態安定條件為何？其相位圖如何畫？

Hint：先線性化，整理成聯立微分方程式形式，再求解出並加諸於特性根滿足動態安定的條件，即可得知。