Lecture 4:
Ramsey-Cass-Koopmans模型

總體經濟理論(一)

大綱

- Ramsey模型：架構
  - 代表性廠商決策
  - 代表性家計決策
  - 政府政策行為
  - 總體均衡、經濟績效、與福利
  - 經濟體系的動態過程、平衡成長路徑、收斂速度
- 總體經濟衝擊與經濟調整過程
  - 時間偏好率
  - 政府消費性支出

前言

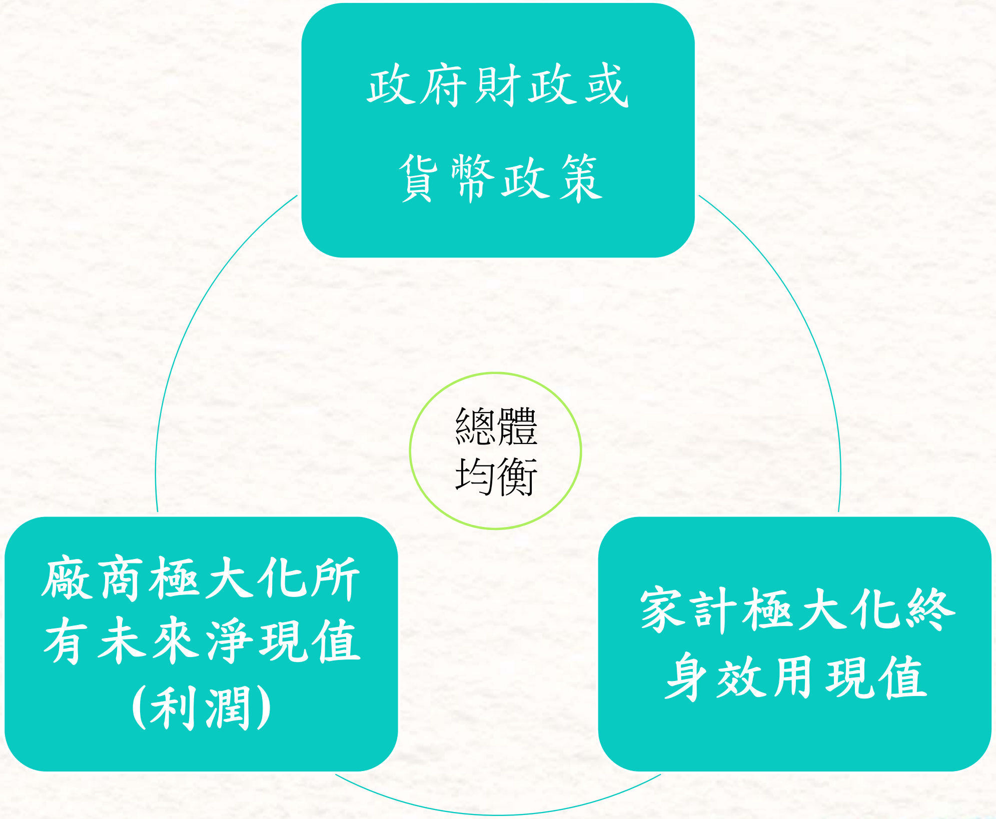
- Ramsey (1928)想回答的問題是：一國到底要儲蓄(率)多少，才能讓該國福祉達到最大？
  - 這個問題相當於問：Solow模型的黃金律法則
- Ramsey (1928)模型的特色
  1) 使用一次齊次新古典生產函數
  2) 人口成長、技術變動仍為外生決定
     - 1、2點與Solow (1956)模型相同點
  3) 各項經濟決策由個體層次決定，尤其儲蓄(消費)
     - 模型從競爭性市場的最適化家計和廠商相互作用，導引出資本存量的動態演化
     - 3點與Solow (1956)相異點

Ramsey (1928)模型：架構

- 經濟環境
  - 競爭性廠商，僱用資本與勞動來生產商品。
    - 目標：極大化所有未來現金流量的淨現值
  - 數目固定、但永續存在的家計部門，供給勞動力、擁有廠商，並進行消費與儲蓄決策。
    - 目標：極大化終生效用的淨現值

- 沒有任何市場不完全性、異質個體、以及世代之間連結的問題
  - 所以，這個模型是一個參考模型。

Ramsey (1928)模型：架構



Ramsey (1928)模型：架構

1. 代表性廠商

- 假設商品與勞動市場均完全競爭
- 面對規模報酬固定(CRTS)的生產技術
- 投資：
  1) 沒有調整成本
     - 要素需求決策是靜態決策
  2) 具調整成本
     - 要素需求決策是動態決策
  - 思考：投資資金來源是什麼？這裡所隱含的假設(資金)來源是什麼？

Ramsey (1928)模型：架構

1) 沒有調整成本：**靜態決策**

$$\max_{K,L} \Pi = F(K, AL) - (r+\delta)K - WL = AL[f(k) - (r+\delta)k - w]$$

- r為租金、δ為折舊
- $r+\delta \equiv R$：單位資本的實質租用價格。
- $w = W/A$：單位有效工資

- FOC：

- $\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial K} = 0 \ \rightarrow \ F_K(K, AL) - (r+\delta) = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial L} = 0 \ \rightarrow F_L(K, AL) - W = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_k(k) = r+\delta \\ A[f(k) - kf_k(k)] = W \end{cases}$

- Hint: 完全競爭下，一次齊次($F = F_K K + F_L L$)生產技術，其利潤分配完畢，即$\Pi = 0$

Ramsey (1928)模型：架構

2) 有調整成本：**動態決策**

- 廠商市場價值是未來所有現金流量的淨現值

$$V(0)=\int_0^\infty\{F(K(t),AL(t))-W(t)L(t)-(1-s_I)I(t)\}e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}dt$$

- s_I：投資補貼率

- $\int_0^t r(\tau)d\tau\equiv R(t)$：(對廠商而言)給定的折現率。因利率$r$會隨時間而變，此式表明了在[0,$t$]時刻連續複利的效果。

- $I(t)$：毛投資；為累積資本財而進行投資。

$$I(t)=\dot{K}(t)+\delta K(t)$$

Ramsey (1928)模型：架構

- 廠商最適化問題：
  - 在資本累積的限制下，極大化$V(0)$；
    - 底下先暫時令$s_I = 0$做最適化決策，而後再討論投資抵減$s_I \neq 0$情況
  - FOC的求解法：
    A. 利用integration by parts：
      - 在此，我們採用integration by parts求解

    B. 最適控制(optimal control)
      - 前一單元已介紹，稍後家計單位決策再次練習

Ramsey (1928)模型：架構

A. integration by parts：

- $\max_{K,L} V(0) = \int_0^\infty \{F\big(K(t), AL(t)\big) - W(t)L(t) - (1 - s_I)I(t)\} e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} dt$
- $\max_{K,L} V(0) = K(0) + \int_0^\infty \{F(K(t), AL(t)) - [r(t) + \delta]K(t) - W(t)L(t)\} e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}\, dt$
  - 注意：終端條件：$\lim_{t\to\infty}\left[K(t)e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}\right] = 0$
  - 因為投資沒有調整成本，此處的廠商要素需求動態決策本質上與靜態決策一致，亦即資本與勞動的邊際要素生產力要滿足：

$$\begin{cases} F_K(K, AL) = (r + \delta) \\ F_L(K, AL) = W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_k(k) = r + \delta \\ A[f(k) - kf_k(k)] = W \end{cases}$$

$$或 \Rightarrow \begin{cases} f_k(k) = r + \delta \\ f(k) - kf_k(k) = w \end{cases}$$

單位有效工資, $w = W/A$

Ramsey (1928)模型：架構

- 注意事項：
  1. 若投資具有調整成本，那麼動態的廠商決策本質上將不再與靜態決策一樣。
     - 這文獻可以參閱
       - Jorgensen, D., 1963. Capital theory and investment behavior. *American Economic Review* 53, 247–57.
       - Hayashi, F., 1982. Tobin’s marginal and average q: a neoclassical interpretation. *Econometrica* 50, 213-224.
       - Tobin, J., 1969. A general equilibrium approach to monetary theory. *Journal of Money, Credit, and Banking* 1, 15-29.
  2. 廠商投資資金的融資問題，引出了資本結構理論。
     - 相關文獻可以參閱
       - Osterberg, W.P., 1989. Tobin’s q, Investment, and the Endogenous Adjustment of Financial Structure. *Journal of Public Economics* 40, 293-318.
       - Turnovsky, S.T., 1990. The effects of taxes and dividend policy on capital accumulation and macroeconomic behavior. *Journal of Economic Dynamics and Control* 14, 491-521.

Ramsey (1928)模型：架構

2. 代表性家計

- 同質的永續家庭、具完全預知(perfect foresight)
- 總和瞬時效用函數(或felicity function)

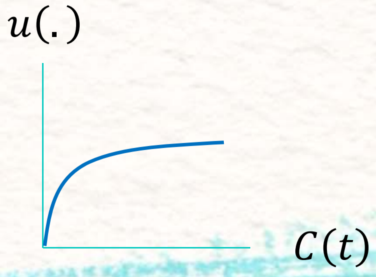
$$U[C(t),L(t)] = u\big(C(t)\big)\cdot\frac{L(t)}{H}$$

  - $C(t)$：單位勞動的消費量
  - $L(t)$：勞動力
  - $\frac{L(t)}{H}$：單位家庭的成員數
  - $u\big(C(t)\big)$的函數性質：單調遞增、嚴格凹

$$u'\big(C(t)\big) > 0, u''\big(C(t)\big) < 0$$

    - Inada (curvature) condition:

$$\lim_{C\to 0} u'(C) = \infty, \qquad \lim_{C\to\infty} u'(C) = 0$$



Ramsey (1928)模型：架構

- 例如：$u(C) = \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}$函數
  - 固定的相對風險趨避係數 (CRRA)
  - 特性：
    1. 任兩時點的消費替代彈性等於$\sigma = \frac{-u'(C)}{C \cdot u''(C)} = \frac{1}{\theta}$ (未来消费对现在消费的替代程度)
    2. θ愈小(愈接近零)，家計(效用愈接近線性)更願意接受大的消費變動，以充分利用貼現率ρ與儲蓄報酬率$r(t)$ 之間微小的差額。
    3. $\theta < 1$：$C^{1-\theta}$隨著C遞減；$\theta > 1$：$C^{1-\theta}$隨著C遞增；故除以$(1-\theta)$以保證消費邊際效用為正值。
       - $\theta \to 1$，則瞬時效用將退化成$\ln C$。
    4. $\rho - n - (1-\theta)g > 0$以保證效用是有界的(bounded)

Ramsey (1928)模型：架構

- 家計的預算限制式
  - 1)單期預算表示法；2)終生預算表示法。

1) 單期表示法

- **收入面**：家計提供勞動力並獲得工資、持有資產(這裡僅資本一種)並獲得利息報酬、擁有廠商並獲得股息或利潤
- **支出面**：家計除支付政府課稅外(在此尚未引入政府行為)，就是消費支出了家計部門視利率r和工資W路徑為給定的。
- 資產定義為Ω，則家計部門的流量預算限制式為

$$\dot{\Omega}(t) = W(t)L(t) + r(t)\Omega(t) - C(t)L(t) + \Pi(t)$$

- 資產市場均衡時，$\Omega = K$

$$\rightarrow \dot{K}(t) = W(t)L(t) + r(t)K(t) - C(t)L(t) + \Pi(t)$$

  - 這是以整體家計來計算
  - 若以單位家計來計算：$\rightarrow \frac{\dot{K}}{H} = \frac{1}{H}(WL + rK - CL)$

Ramsey (1928)模型：架構

1. 單期表示法(續)

- 因此，家計的最適化問題是：

$$\begin{cases} \max\limits_{C,K} U = \dfrac{1}{H}\displaystyle\int_0^{\infty} u\big(C(t)\big)L_0 e^{nt} \cdot e^{-\rho t}\, dt \\ s.t.\ \dfrac{\dot{K}}{H} = \dfrac{1}{H}(WL_0e^{nt} + rK - CL_0e^{nt}) \end{cases}$$

（劳动力增长率为 n）

- optimal control的求解方法：
  - 令(present-value) Hamiltonian函數為

$$\mathcal{H} = \frac{1}{H}u\big(C(t)\big)L_0e^{nt} \cdot e^{-\rho t} + \mu e^{-\rho t}\left[\frac{1}{H}(WL_0e^{nt} + rK - CL_0e^{nt}) - \frac{\dot{K}}{H}\right]$$

Ramsey (1928)模型：架構

- FOC：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial C} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{K}} \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu} = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} \mu e^{-\rho t} K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{L_0}{H} u'(C) e^{-(\rho-n)t} + \mu e^{-\rho t} \dfrac{1}{H}(-L_0 e^{nt}) = 0 \\ \mu e^{-\rho t}\dfrac{1}{H} r = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\mu e^{-\rho t}\dfrac{1}{H}\right) \\ \dfrac{\dot{K}}{H} = \dfrac{1}{H}(W L_0 e^{nt} + rK - C L_0 e^{nt}) \\ \lim\limits_{t\to\infty} \mu e^{-\rho t} K = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'(C) = \mu \\ \dot{\mu} = \mu(\rho - r) \\ \dfrac{\dot{K}}{H} = \dfrac{1}{H}(W L_0 e^{nt} + rK - C L_0 e^{nt}) \\ \lim\limits_{t\to\infty} \mu e^{-\rho t} K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(C) = \mu \\ \dot{C} = \dfrac{-u'(C)}{u''(C)}(r - \rho) \\ \dfrac{\dot{K}}{H} = \dfrac{1}{H}(W L_0 e^{nt} + rK - C L_0 e^{nt}) \\ \lim\limits_{t\to\infty} \mu e^{-\rho t} K = 0 \end{cases}$$

Ramsey (1928)模型：架構

- 以CRRA效用函數($u(C)=\frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}$)為例，計算上述FOC前兩式，得到消費動態方程式為：

$$\frac{\dot{C}}{C}=\frac{1}{\theta}(r-\rho)$$

  - 經濟直覺：自我淬煉

2) 終生表示法

- 單位家計的終生消費之現值，不能超過其初始的財富與終身勞動收入之現值的和

$$\int_0^\infty C(t)\frac{L(t)}{H}e^{-R(t)}\,dt \le \frac{K(0)}{H}+\int_0^\infty W(t)\frac{L(t)}{H}e^{-R(t)}\,dt$$

- 注意：此式與單期表示法的預算限制式是相一致的。證明方式：將單位家庭的流量預算限制式做現值積分計算：

Ramsey (1928)模型：架構

- $\frac{\dot{K}}{H} \le \frac{1}{H}(WL + rK - CL) \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\dot{K}}{H} e^{-R(t)}\, dt \le \int_0^\infty \frac{1}{H}(WL + rK - CL)e^{-R(t)}\, dt$
- $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{H} e^{-R(t)}\, dK \le \int_0^\infty \left(\frac{WL}{H} + r\frac{K}{H} - \frac{CL}{H}\right) e^{-R(t)}\, dt$
- $\Rightarrow \frac{1}{H} e^{-R(t)} K\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{K}{H} r e^{-R(t)} dt \le \int_0^\infty \left(\frac{WL}{H} + r\frac{K}{H} - \frac{CL}{H}\right) e^{-R(t)}\, dt$
- $\Rightarrow \left[\lim_{t\to\infty} \frac{1}{H} e^{-R(t)} K - \frac{1}{H} e^{-R(0)} K(0)\right] + \int_0^\infty \frac{K}{H} r e^{-R(t)} dt \le \int_0^\infty \left(\frac{WL}{H} + r\frac{K}{H} - \frac{CL}{H}\right) e^{-R(t)}\, dt$
  - $\because \lim_{t\to\infty} \frac{1}{H} e^{-R(t)} K = 0$: no-Ponzi-Game condition
- $\Rightarrow -\frac{1}{H} K(0) \le \int_0^\infty (W - C)\frac{L}{H} e^{-R(t)}\, dt$
- $\Rightarrow \frac{K(0)}{H} + \int_0^\infty (W - C)\frac{L}{H} e^{-R(t)}\, dt \ge 0$
- $\Rightarrow \frac{K(0)}{H} + \int_0^\infty \frac{WL}{H} e^{-R(t)}\, dt \ge \int_0^\infty \frac{CL}{H} e^{-R(t)}\, dt$

- Ponzi-Game：發行新債借款永久地滾動債務，這讓該類型的人，其終生消費的現值超過其終生資源的現值

Ramsey (1928)模型：架構

2) 終生表示法(續)

- 因此，單位家庭的最適化問題是：
- 在終生預算限制下，選擇$C(t)$的$t \in [1,\infty)$時間路徑，以極大化其終身效用的現值U。

(以$u(C)=\frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}$形態為例)

$$
\begin{cases}
\max\limits_{C} U = \dfrac{L_0}{H}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{C^{1-\theta}}{1-\theta}\cdot e^{nt}\cdot e^{-\rho t}\,dt \\
\text{s.t. } \dfrac{K(0)}{H}+\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{WL}{H}e^{-R(t)}\,dt \geq \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{CL}{H}e^{-R(t)}\,dt
\end{cases}
$$

- 單位家庭總消費 CL/H = 單位有效勞動的消費c乘以有效勞動數量 AL/H
- 單位家庭總勞動收入 WL/H = 單位有效勞動工資w乘以有效勞動數量 AL/H
- 期初資本量 $K(0)$ = 單位有效勞動的資本 $k(0)$ 乘以期初有效勞動數量 $A(0)L(0)/H$

Ramsey (1928)模型：架構

2) 終生表示法(續)

- 單位家庭的最適化問題可以改寫成：

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{c} U = \dfrac{A_0^{1-\theta} L_0}{H} \displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{c^{1-\theta}}{1-\theta} \cdot e^{(1-\theta)gt} \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t}\, dt \\ \text{s.t. } k(0) \dfrac{A_0 L_0}{H} + \displaystyle\int_0^{\infty} w \dfrac{A_0 e^{gt} L_0 e^{nt}}{H} e^{-R(t)}\, dt \geq \displaystyle\int_0^{\infty} c \dfrac{A_0 e^{gt} L_0 e^{nt}}{H} e^{-R(t)}\, dt \end{cases}$$

（对C进行了改写，改为cA）

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{c} U = \dfrac{A_0^{1-\theta} L_0}{H} \displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{c^{1-\theta}}{1-\theta} \cdot e^{\,(1-\theta)g+n)t} \cdot e^{-\rho t}\, dt \\ \text{s.t. } k(0) + \displaystyle\int_0^{\infty} w \cdot e^{(g+n)t} e^{-R(t)}\, dt \geq \displaystyle\int_0^{\infty} c \cdot e^{(g+n)t} e^{-R(t)}\, dt \end{cases}$$

- No-Ponzi-Game：$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{H} e^{-R(t)} K = 0$ 則改寫成 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{A_0 L_0}{H} e^{(g+n)t} e^{-R(t)} k(t) = 0$

Ramsey (1928)模型：架構

2) 終生表示法(續)

- optimal control的求解方法
  - 令Lagrangian函數為：

$$\mathcal{L} = B\int_0^\infty \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}\cdot e^{-\beta t}\,dt + \lambda\left[k(0) + \int_0^\infty w\cdot e^{(g+n)t}e^{-R(t)}\,dt - \int_0^\infty c\cdot e^{(g+n)t}e^{-R(t)}\,dt\right]$$

  - 其中，令$\beta = \rho - n - (1-\theta)g$、$B = \frac{A_0^{1-\theta}L_0}{H}$
  - 簡化且不失一般性(Barro and Sala-i-Martin, 2000)，令$L_0 = A_0 = 1$
- FOC：
  - $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Be^{-\beta t}c^{-\theta} = \lambda e^{(g+n)t}e^{-R(t)} \\ k(0) + \int_0^\infty w\cdot e^{(g+n)t}e^{-R(t)}\,dt = \int_0^\infty c\cdot e^{(g+n)t}e^{-R(t)}\,dt \end{cases}$… 家計最適行為方程式

Ramsey (1928)模型：架構

2) 終生表示法(續)

- optimal control的求解方法(續)
  - 整理FOC

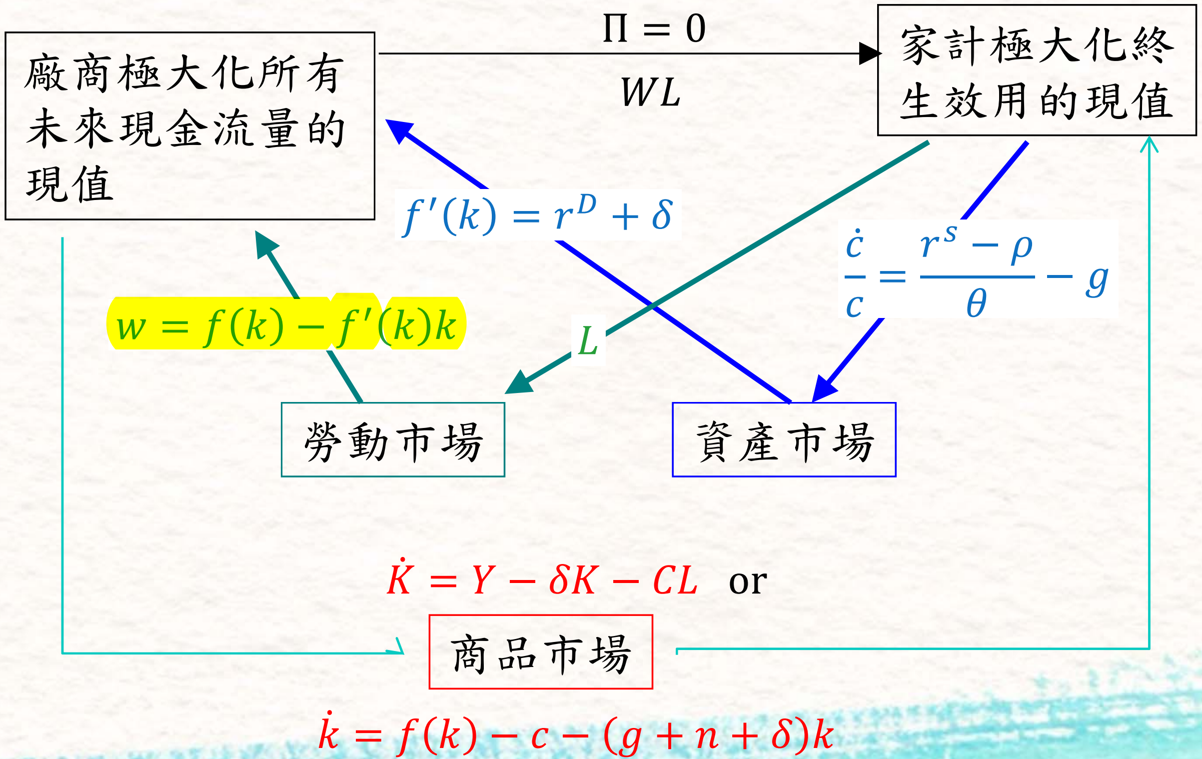
$$Be^{-\beta t}c^{-\theta} = \lambda e^{(g+n)t}e^{-R(t)} \;\Rightarrow\; -\beta - \theta\frac{\dot{c}}{c} = (g+n) - r$$

  - 經濟意涵：
    1) 如果實質報酬$r(t)$超過家計(對未來消費)的貼現率ρ，則每位勞動者的消費會上升；
    2) θ愈小 (隨著消費的變化，其邊際效用的變化愈小)，則反應$r(t)$與ρ差距的消費變動就愈大。
    3) 這消費的跨時最適的決策行為稱為Keynes-Ramsey Rule。
       - Keynes-Ramsey Rule的經濟直覺，請參閱 Blanchard and Fischer (1989)

Ramsey (1928)模型：架構

3. **政府行為**：這角色暫時忽略

- **市場均衡條件**



☆

Ramsey (1928)模型：架構

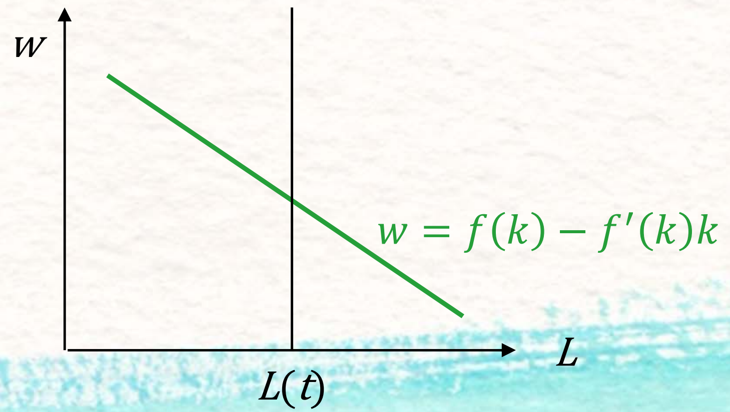
●市場均衡條件(續)

1) 資產市場均衡

$$\begin{cases} f'(k) = r^D + \delta \\ \dfrac{\dot{c}}{c} = \dfrac{r^s - \rho}{\theta} - g \end{cases} \Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \delta - \rho}{\theta} - g$$

2) 勞動市場均衡

$$w = f(k) - f'(k)k$$



☆

Ramsey (1928)模型：架構

- **市場均衡條件(續)**

3) 商品市場均衡

$$\begin{cases} \dot{K} = WL + rK - CL + \Pi \\ \Pi = 0 \\ f'(k) = r^D + \delta \qquad (\because F_K(K, AL) = r + \delta) \\ w = f(k) - f'(k)k \qquad (\because F_L(K, AL) = W) \end{cases} \Rightarrow \dot{K} = F_L L + (F_K - \delta)K - CL$$

$$\Rightarrow \dot{K} = Y - \delta K - CL$$

$$\Rightarrow \dot{k} + (g+n)k = w + rk - c$$

$$\Rightarrow \dot{k} + (g+n)k = f(k) - c - \delta k$$

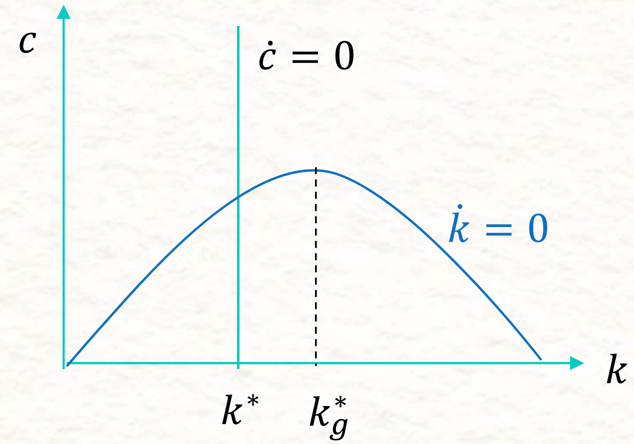
$$\Rightarrow \dot{k} = f(k) - c - (g + n + \delta)k$$

經濟體系的動態過程

- 學習經濟體系的動態走勢，有助於政府或經濟主體清楚體系干擾或政策衝擊所帶來改變。
- **動態體系：**

  - 動態行為由$\begin{cases}\dfrac{\dot{c}}{c}=\dfrac{f'(k)-\delta-\rho}{\theta}-g\\ \dot{k}=f(k)-c-(g+n+\delta)k\end{cases}$和$\begin{cases}w=f(k)-f'(k)\cdot k\\ r=f'(k)-\delta\\ L(t)=L_0e^{nt}\\ A(t)=A_0e^{gt}\\ k(0)=k_0\end{cases}$所描述著。
  - 這個體系由前兩式聯立決定$c(t)$與$k(t)$的路徑，然後再分別決定$w(t)$與$r(t)$；
  - 勞動力$L(t)$與技術$A(t)$則已假設外生決定。

經濟體系的動態過程



1. 靜止均衡：

- 條件：$\dot{c}=\dot{k}=0$ ⇨ 聯立決定c^*和k^*
  - 亦即，$\begin{cases} f'(k^*)=\rho+\delta+\theta g \\ c^*=f(k^*)-(n+\delta+g)k^* \end{cases}$ 決定c^*和k^*
  - 其餘靜止均衡的內生變數，則由$\begin{cases} w^*=f(k^*)-f'(k^*)\cdot k^* \\ r^*=f'(k^*)-\delta \end{cases}$接續決定之
- 注意：$k^*<k_g^*$，(k_g^*在$\dot{k}=0$線的最高點)
  - 這是因為：黃金律下的最適資本由$f'\left(k_g^*\right)=g+n+\delta$決定。所以，$f'(k^*)-f'\left(k_g^*\right)=\rho-n-(1-\theta)g>0$ (bounded utility)。 因此，在邊際產量遞減$f''<0$之下，我們得到：$k^*<k_g^*$

經濟體系的動態過程

2. 調整過程：

- 將體系 $\begin{cases} \dfrac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \dfrac{f'\big(k(t)\big)-\delta-\rho}{\theta} - g \\ \dot{k}(t) = f\big(k(t)\big) - c(t) - (g+n+\delta)k(t) \end{cases}$ 在其均衡點附近做一街泰勒展開，

得到：

- $$\begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{f''(k^*)}{\theta}c^* \\ -1 & f'(k^*) - (g+n+\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c - c^* \\ k - c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{f''(k^*)}{\theta}c^* \\ -1 & \rho - (1-\theta)g - n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c - c^* \\ k - c^* \end{bmatrix}$$

Jacobian matrix J^*

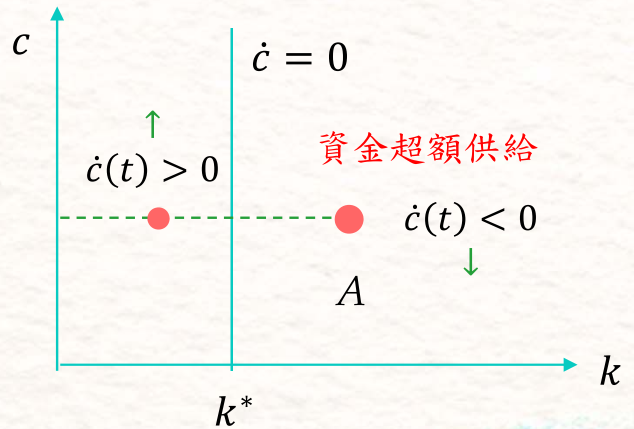
經濟體系的動態過程

1) c的動態

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'\big(k(t)\big) - \delta - \rho}{\theta} - g$$

- Slope：$\left.\frac{\partial c}{\partial k}\right|_{\dot{c}=0} = \infty$
- Change：$\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} = \frac{f''(k^*)}{\theta} c^* < 0$

- 意涵：A點
  - k相對(k^*)大 → $f'(k)$相對小
  - →(廠商願支付)資金報酬太低（資金供給相對太多了)
  - →<u>降低了儲蓄意願</u>
  - →資金供給就減少
  - →下期消費動能就會萎縮($\dot{c} < 0$)

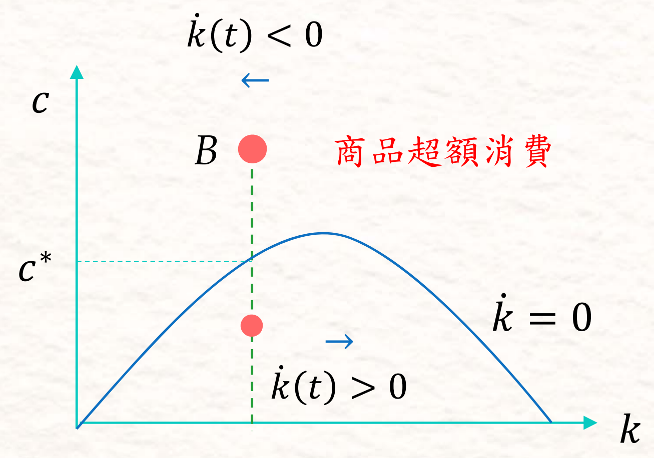


經濟體系的動態過程

2) k的動態

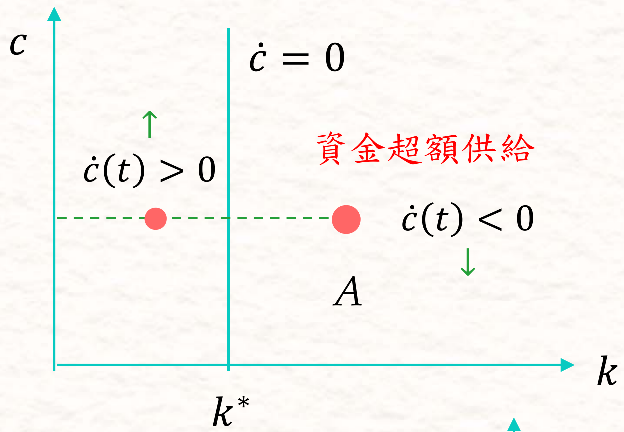
$$\dot{k}(t) = f(k) - c(t) - (g + n + \delta)k(t)$$

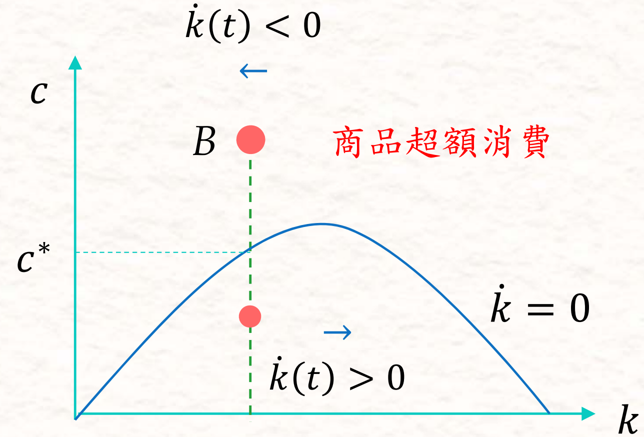
- Slope：$\left.\frac{\partial c}{\partial k}\right|_{\dot{k}=0} = f'(k^*) - (g + n + \delta)$
  - Curvature：$\left.\frac{\partial^2 c}{\partial k^2}\right|_{\dot{k}=0} = f''(k^*) < 0$
- Change：$\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = -1 < 0$

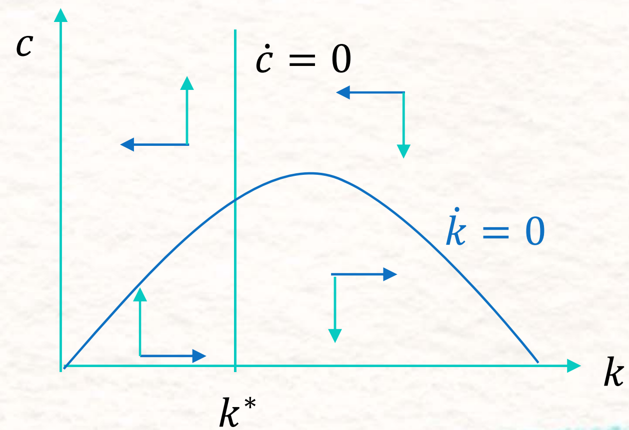


- 意涵：B點
  - c相對(c^*)大→消費了太多商品
  - →排擠了投資需求(或負的儲蓄)
  - →資本累積就下滑了($\dot{k} < 0$)

經濟體系的動態過程





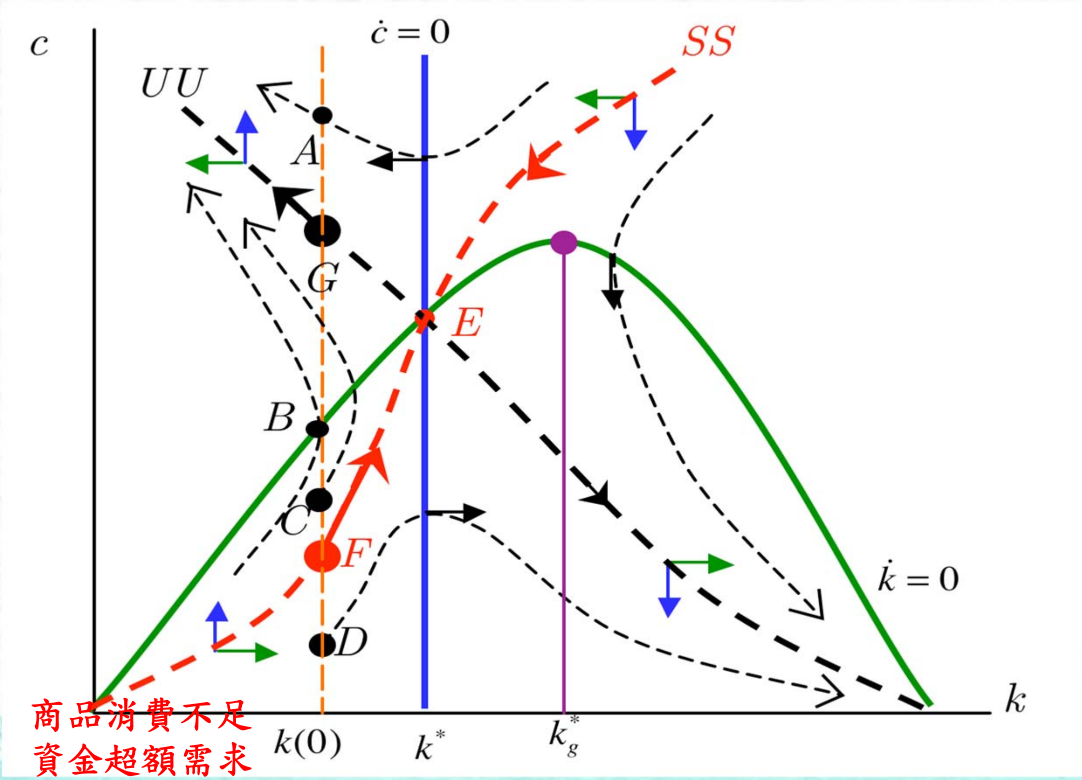


有動態的無效率(dynamic inefficiency)？

經濟體系的動態過程

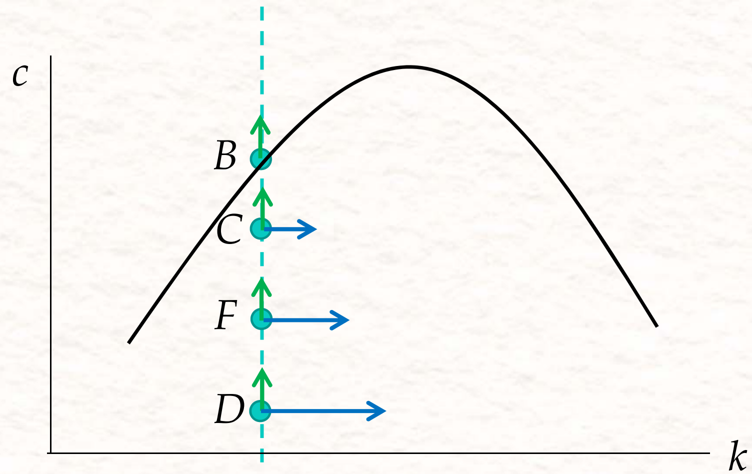
3) 相位圖(phase diagram)

- 在給定初始的$k(0)$值下，c與k如何地必須隨時間來演化：
  - 商品消費不足、資金超額需求
  - D點：
  - F點：
  - C點：
  - 說明如下
- 商品超額消費&資金超額需求
  - A、G點
  - 同理說明



經濟體系的動態過程

- 商品消費不足、資金超額需求
  - 以D點、F點、C點為例說明。



- 在既定產出之下：

① c太低(商品消費不足)，剩餘的產出被當作投資使用，促成了資本累積。

- D點的消費低估最多，所以投資增幅最大，資本增加量最大；其次是F點；C點的資本累積增幅最小。

② k太少(資金超額需求)，資金報酬高，誘發儲蓄，奠定了下期的消費動能。

- D、F、C點的資本量低估相同，所以資金報酬率相同，引發的儲蓄一樣，促成同樣的下期消費增量。

經濟體系的動態過程

4) 動態性質

- 令特性根為s_1、s_2：
  - $Trace(J^*) = s_1 + s_2 = \beta > 0$
  - $Determine(J^*) = s_1 \cdot s_2 = \frac{f''(k^*)}{\theta} c^* < 0$
- 一正根、一負根，為馬鞍穩定性

5) 時間路徑 (參閱Lecture 2-附錄)

- 令s_1<0<s_2，則c和k的一般解為：

$$\begin{cases} c(t) = c^*(\cdot) + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ k(t) = k^*(\cdot) + \dfrac{-(0 - s_1)}{\dfrac{f''(k^*)}{\theta} c^*} A_1 e^{s_1 t} + \dfrac{-(0 - s_2)}{\dfrac{f''(k^*)}{\theta} c^*} A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

- A_1, A_2為待解參數 (由<u>初始條件</u>與<u>終端條件</u>決定)、c^*, k^*為靜止均衡解 (<u>外生參數</u>的函數)

經濟體系的動態過程

- 提醒：

1) 特性向量$[A \;\; B]'$滿足

$$\begin{bmatrix} 0-s & \dfrac{f''(k^*)}{\theta}c^* \\ -1 & \beta - s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

2) 若只有安定特性根s_1運作時，一般解將退化成：

$$\begin{cases} c(t) - c^*(\cdot) = A_1 e^{s_1 t} \\ k(t) - k^*(\cdot) = \dfrac{-(0-s_1)}{\dfrac{f''(k^*)}{\theta}c^*} A_1 e^{s_1 t} \end{cases} \Rightarrow \textit{stable arm, SS}\text{:}\ \frac{c(t)-c^*(\cdot)}{k(t)-k^*(\cdot)} = \frac{\dfrac{f''(k^*)}{\theta}c^*}{s_1} > 0$$

3) 同理，可求得unstable arm (UU)的方程式(當練習!)。

福利分析

- 上述的均衡，是否是一個可被期待的經濟結果呢？
  - 由福利經濟學第一定理知道，如果是市場競爭的、完全的，並且不存在外部性，那麼分權經濟之均衡的Pareto efficiency。
  - 在上述模型中，第一福利定理是成立的，所以均衡必為Pareto efficiency。再者，因為家計有相同的效用，因此分權均衡下的家計效用將達到最大。

- 考慮一個社會規劃者所面臨的問題：他對每一個時點的產出獨斷地進行消費與投資的分配，來追求一個代表性家庭的終生效用現值的極大。

福利分析

- 社會規劃者問題：

$$\begin{cases} \max_{c,k} \ U = \int_0^\infty \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} \cdot e^{-\beta t} dt\text{, where } \beta = \rho - n - (1-\theta)g \\ s.t. \quad \dot{k} = f(k) - c - (g+n+\delta)k \end{cases}$$

  - 為簡化符號，上述已令$L_0 = A_0 = H = 1$

- 現值(current-value) Hamiltonian函數

$$\mathcal{H} = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} + v \cdot [f(k) - c - (g+n+\delta)k]$$

- FOC:

$$\begin{cases} \partial\mathcal{H}/\partial c = 0 \\ \partial\mathcal{H}/\partial k = -\dot{v} + \beta v \\ \partial\mathcal{H}/\partial v = \dot{k} \\ \lim_{t\to\infty} e^{-\beta t} v(t)k(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \cdots$$

福利分析

消費的邊際效用=財富的邊際效用

資本的有效邊際報酬=儲蓄之邊際利益變動率+“有效的”時間偏好率

資源限制式

$$\begin{cases} c^{-\theta} = v \\ f'(k) - (g + n + \delta) = -\dfrac{\dot{v}}{v} + \beta \\ \dot{k} = f(k) - c - (g + n + \delta)k \\ \lim\limits_{t\to\infty} e^{-\beta t} v(t)k(t) = 0 \end{cases}$$

以財富邊際效用所衡量之最終期的資本財價值的現值等於0 (若最終期之累積的資產還能為其帶來效用，則表示他的消費決策並未讓他達成一生效用折現的極大)

- 整理一階條件，得到：

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{c}}{c} = \dfrac{1}{\theta}[f'(k) - (\rho + \theta g + \delta)] \\ \dot{k} = f(k) - c - (g + n + \delta)k \end{cases} + \lim_{t\to\infty} e^{-\beta t} v(t)k(t) = 0$$

⇨ 上述的動態體系與分權經濟的相同，因此，Ramsey模型經濟體系的資源配置具有Pareto efficiency

平衡成長路徑

- 回憶：靜止均衡條件是
  - $\dot{c} = \dot{k} = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} f'(k^*) = \rho + \delta + \theta g \\ c^* = f(k^*) - (n + \delta + g)k^* \end{cases}$ 決定c^*和k^*。

- 單位有效勞動的消費$c^*(\equiv (C/A)^*)$、單位有效勞動的資本$k^*(\equiv (K/AL)^*)$、單位有效勞動的產出$y^*(\equiv (Y/AL)^*)$均為常數值。
  - 並因此，靜止均衡的儲蓄率$((y-c)/y)^*$也是常數。

- 但是，總消費(是CL，不是C喔)、總資本存量是以$n+g$速率成長。每人工資、每人產出、每人消費則以g的速度成長。

平衡成長路徑

- 即使儲蓄是內生的，勞動技術的增長(g)仍是每人產出持續成長的唯一可能來源。
- 經濟體系一但收斂到均衡點E，此時Ramsey-Cass-Koopmans模型的經濟表現就如同處在平衡成長路徑的Solow模型的經濟行為一樣。
  - $\begin{cases} f'(k^*) = \rho + \delta + \theta g \\ c^* = f(k^*) - (n + \delta + g)k^* \end{cases}$
- 隨著經濟發展$k \nearrow$、γ_k會↘，故儲蓄率內生化的R-C-K模型，仍然無法避免收斂性質(γ_k跟k_0有反向關係，或γ_y跟y_0有反向關係)。

平衡成長路徑

- R-C-K模型與Solow模型有一項差異是：
  - R-C-K模型下，資本存量超過黃金律(資本存量)水準的平衡成長路徑是不可能的。
  - Solow模型中，充份高的儲蓄率會引導經濟走向一個平衡成長路徑，這個路徑存在一些可行的選擇，它們牽涉到時時刻刻更高水準的消費。
  - R-C-K模型中，儲蓄是由家計決定，而家計的效用則有賴於消費；結果，能讓經濟在每一時點上都獲得較高消費的路徑，是不能成為一個均衡的。假如經濟處在這樣的路上，家計將會減少它們的儲蓄並運用此機會。

收斂速度

- 以生產函數$y=k^{\alpha}$為例，其中$k=K/(AL)$

1. 此時，主導體系動態的方程式將具體寫成：

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{c}}{c} = \dfrac{1}{\theta}\left[\alpha k^{\alpha-1} - (\rho + \theta g + \delta)\right] \\ \dfrac{\dot{k}}{k} = k^{\alpha-1} - \dfrac{c}{k} - (g + n + \delta) \end{cases} + TVC$$

   - 改寫成對數形式：

$$\begin{cases} \dfrac{d(\log c)}{dt} = \dfrac{1}{\theta}\left[\alpha e^{(\alpha-1)\log k} - (\rho + \theta g + \delta)\right] \\ \dfrac{d(\log k)}{dt} = e^{(\alpha-1)\log k} - e^{\log\left(\frac{c}{k}\right)} - (g + n + \delta) \end{cases} + TVC$$

收斂速度

- 然後，在均衡點附近做一階泰勒展開，得：

$$\begin{bmatrix} \frac{d(\log c)}{dt} \\ \frac{d(\log k)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(\alpha-1)(\rho+\theta g+\delta)}{\theta} \\ (g+n+\delta)-\frac{\rho+\theta g+\delta}{\alpha} & \rho-n-(1-\theta)g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log\left(\frac{c}{c^*}\right) \\ \log\left(\frac{k}{k^*}\right) \end{bmatrix}$$

- 注意：

1) 靜止均衡時，$\begin{cases} \alpha e^{(\alpha-1)\log k^*} = (\rho+\theta g+\delta) \\ e^{(\alpha-1)\log k^*} - e^{\log\left(\frac{c^*}{k^*}\right)} = (g+n+\delta) \end{cases}$

2) 特性根將直接關連到收斂速度

收斂速度

2. 特性根：(令特性根為μ)

   1) 行列式值為

   $$-\frac{(\alpha-1)(\rho+\theta g+\delta)}{\theta}\left[(g+n+\delta)-\frac{\rho+\theta g+\delta}{\alpha}\right]<0,\quad \because \rho+\theta g>g+n\ (\text{bounded cond.})$$

   ⇨ 兩相異根，隱含了saddle-path stability

   2) 特性根方程式為

   $$\mu^2-\beta\mu-\left[\frac{\rho+\theta g+\delta}{\alpha}-(g+n+\delta)\right]\frac{(1-\alpha)(\rho+\theta g+\delta)}{\theta}=0$$

   $$\Rightarrow \mu_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\left[\frac{\rho+\theta g+\delta}{\alpha}-(g+n+\delta)\right]\frac{(1-\alpha)(\rho+\theta g+\delta)}{\theta}}\right)$$

- 其中，負根記作$\mu_1<0$、正根記作$\mu_2>0$。因此，收斂速度即是$|\mu_1|$。
- 這個收斂速度$|\mu_1|$與技術參數、偏好參數有關聯。

收斂速度

3) $\log(k(t))$的線性對數解可以寫成：

$$\log k(t) = \log(k^*) + \psi_1 e^{\mu_1 t} + \psi_2 e^{\mu_2 t},\quad \psi_1、\psi_2\text{是任一常數}$$

- 因為$\mu_2 > 0$，使得$\psi_2 = 0$必須成立，好讓$\log k(t)$能漸進趨向$\log(k^*)$。
  - 若$\psi_2 > 0$，則違反終端條件。
  - 若$\psi_2 < 0$，則$k \to 0$。
- ψ_1值則由初始條件所決定：

$$\psi_1 = \log(k_0) - \log(k^*)$$

- 所以，$\log k(t)$時間路徑為：

$$\log k(t) = (1 - e^{\mu_1 t}) \cdot \log(k^*) + \log(k_0) \cdot e^{\mu_1 t}, \text{where } \mu_1 < 0$$

- 也因此，$\log y(t)$的時間路徑為：

$$\log y(t) = (1 - e^{\mu_1 t}) \cdot \log(y^*) + \log(y_0) \cdot e^{\mu_1 t}$$

- <u>**說明**</u>：對任意$t \geq 0$，$\log y(t)$是期初值$\log(y_0)$與均衡值$\log(y^*)$的加權平均，而且期初值權數是以$|\mu_1|$速率的指數下滑。

收斂速度

4. 數值：$\alpha=\frac{1}{3},\ \rho=4\%,\ n=2\%,\ g=1\%,\ \theta=1,\ \delta=0$ (並因此對應計算出$\beta=2\%$)

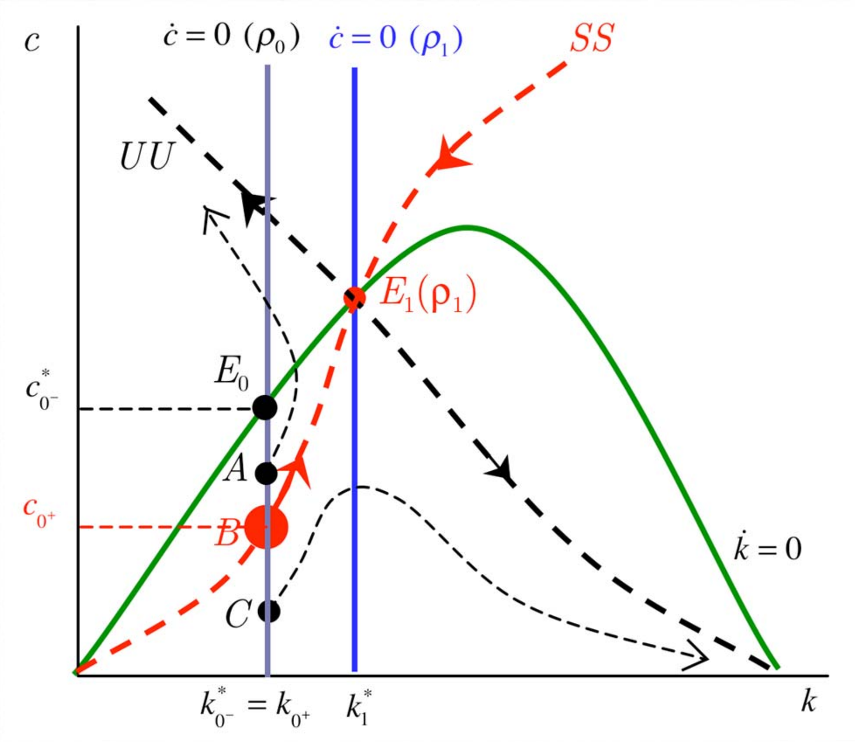
- 平衡成長路徑上，實質利率為5%、儲蓄率為20%、$\mu_1\approx-5.4\%$。這收斂速度算是非常快的。
  - **比較**：在相同α、g、以及$\delta=0$的Solow模型，其計算出的收斂速度，每年僅2%的調整速度。
- **原因**：
  - 在Ramsey模型中，若$k<k^*$，則儲蓄率會大於均衡儲蓄率s^*；反之，若$k>k^*$ ，則儲蓄率會小於均衡儲蓄率s^*。
  - 然而，Solow模型中，因假設儲蓄率不變，故情況相反。

比較靜態(1)：ρ的變動

- 情境：時間貼現率(ρ)突然地下降 (未預料到的變化)
  - 注意1：參數或政策變動是否為民眾所預見。若為可預見的，民眾將會在變化發生前，改變行為以預作應變；但若事先不可知，則只能即時應變並接續調整行為。
  - 注意2：ρ是家計決定當期與未來之消費間的偏好參數 (在此R-C-K模型下，ρ變動意義類似於Solow模型的儲蓄率)
- 分析：
  1) 對市場均衡條件的衝擊

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{c}}{c} = \dfrac{f'(k) - \delta - \rho}{\theta} - g \\ \dot{k} = f(k) - c - (g + n + \delta)k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\dfrac{\partial k}{\partial \rho}\right|_{\dot{c}=0} = \dfrac{1}{f''} < 0 \quad \ldots \rho \downarrow \Rightarrow \dot{c} = 0\text{線右移} \\ \left.\dfrac{\partial k}{\partial \rho}\right|_{\dot{k}=0} = 0 \quad \ldots \rho \downarrow \Rightarrow \dot{k} = 0\text{線不變動} \end{cases}$$

比較靜態(1)：ρ的變動



2) 相位圖，暨經濟解釋：

- ρ突然變小，即意指家計突然開始重視未來消費。
- 從今天此刻起，減少吃喝(c_0-瞬間跳到c_0+)；
- 但是，機器設備瞬間不能增減 (k_0+仍留在原地k_0-)；
- 因此，ρ變動瞬間，經濟體系由E_0 跳到B點)
- 減少吃喝，資源就多配置一些在儲蓄上
- 提升了$\begin{cases}\text{資產(資本)的累積}\\ \text{資產利息的收入}\end{cases}$
- $\begin{cases}\text{資本開始增加}\\ \text{消費也開始上升}\end{cases}$ → 直到新均衡點達成

比較靜態(1)：ρ的變動

3) 數學解：

- 作業！

4) 小結：

- ρ雖是永久性的下降，但每人資本成長率$\gamma_{K/L}$、每人產出成長率γ_y也只能暫時提高而已。
- 不過，(R-C-K模型的) ρ變動的影響與(Solow模型下的)儲蓄率變動的影響並不一樣，因為ρ變動所對應的儲蓄調整過程不是固定常數)

比較靜態(2)：政府“消費性”支出的變動

- 情境：修法永久地或暫時地改變政府消費性支出
- 因應討論議題，需修改前述模型的設定，納入政府消費性支出。

1. 模型：
   - 家計部門：(令$H=1$)

$$\begin{cases} \max\limits_{C,K} \ U = \int_0^\infty \frac{C^{1-\theta}L}{1-\theta} \cdot e^{-\rho t}\,dt \\ s.t. \quad \dot{K} = WL + rK - CL + \Pi - T \end{cases}$$

   - 廠商：

$$\Pi = F(K, AL) - (r+\delta)K - WL$$

   - 政府部門：

$$C_G = T$$

   - 單位有效勞動的政府消費G：$G = \frac{C_G}{AL}$

比較靜態(2)：政府“消費性”支出的變動

- 經濟體系的資源限制式：

$$\dot{K} = F(K, AL) - CL - C_G - \delta K \text{ 或}$$

$$\dot{k} = f(k) - c - G - (g + n + \delta)k$$

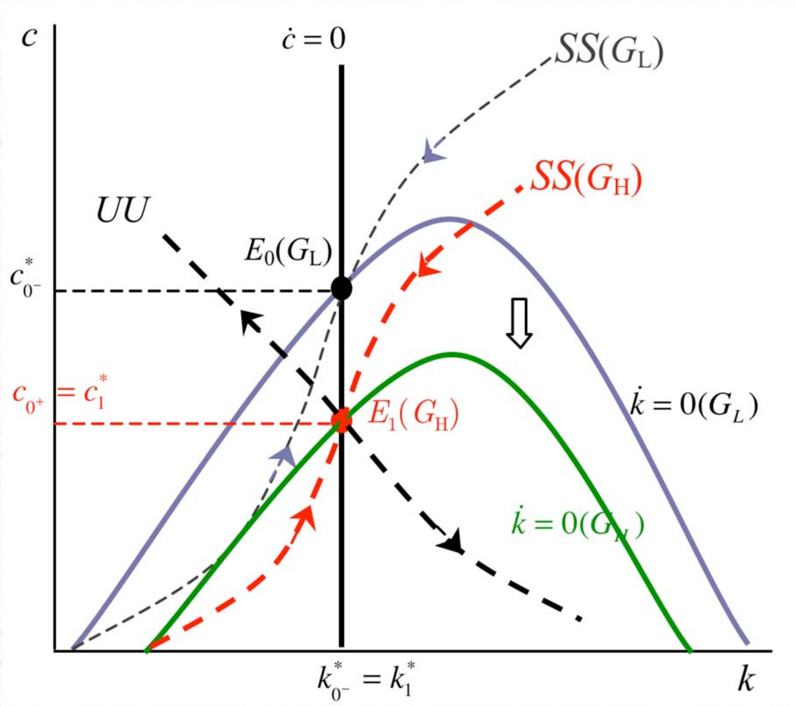
2. 動態體系：

- $$\begin{cases} \dfrac{\dot{c}}{c} = \dfrac{f'(k) - \delta - \rho}{\theta} - g \\ \dot{k} = f(k) - c - G - (g + n + \delta)k \end{cases}$$
- 最適要素雇用條件
- TVC

比較靜態(2)：政府“消費性”支出的變動

3. 相位圖，暨經濟解釋

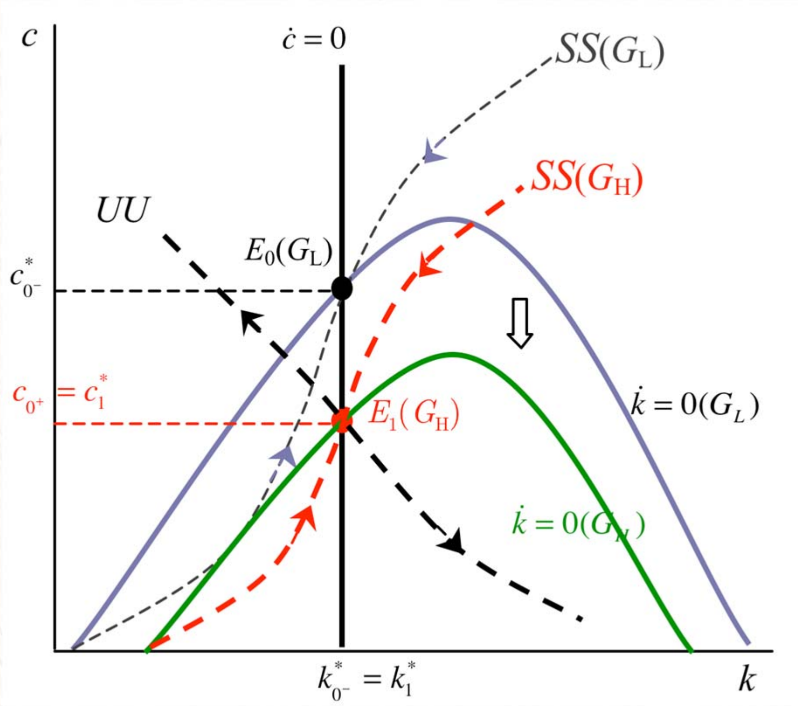
- Case1: 未預料到的永久性政府消費支出的增加
  - 數學解：作業！
    - $c(t)=\begin{cases} c^*(G_L), & t<0^- \\ c^*(G_H)+A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}, & t\ge 0^+ \end{cases}$
    - $k(t)=\begin{cases} k^*(G_L), & t<0^- \\ k^*(G_H)+\frac{s_1}{\frac{f''(k^*)}{\theta}c^*}A_1e^{s_1t}+\frac{s_2}{\frac{f''(k^*)}{\theta}c^*}A_2e^{s_2t}, & t\ge 0^+ \end{cases}$
    - 連續條件：$k^*(0^-)=k^*(0^+)$
    - 收斂：$\lim_{t\to\infty} c(t)=c^*(G_H), \lim_{t\to\infty} k(t)=k^*(G_H)$



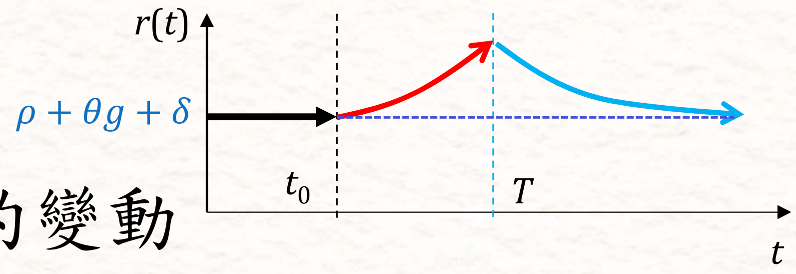
比較靜態(2)：政府"消費性"支出的變動

3. 相位圖，暨經濟解釋 (續)

- **Case1: 未預料到的永久性政府消費支出的增加 (續)**
  - 對應這未預料永久性變化，(k在瞬間不變)
  - 如果沒有直接跳到新經濟體系的馬鞍路徑上，那麼，在某個時點上，資本不是變成負值，不然就是家計部門會累積無限的財富。所以，c會直接下降一個等量於G的數量，並位於新體系的馬鞍路徑上。
  - 直覺意義：政府消費性支出與稅收永久性增加，這讓家計的終生財富減少。家庭無法藉由調整消費的時間配置來提高其效用，因此消費會立即下降等量的政府消費支出，而且資本存量與實質利率不受影響。
  - 比較：傳統凱因斯的政府支出效果是，政府支出會排擠掉投資，資本存量會開始下降，且實質利率開始上升。原因是，消費只決定於當期可支配所得，且不做任何跨期最適化規劃。

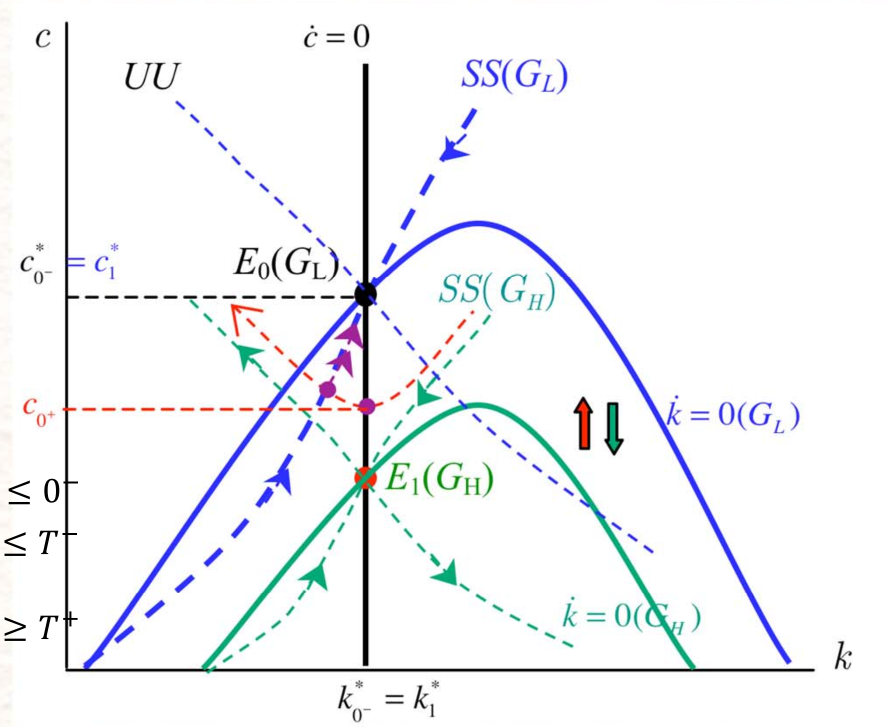


比較靜態(2)：政府“消費性”支出的變動



3. 相位圖，暨經濟解釋

- Case2: 未預料到的暫時性政府消費支出的增加
  - 數學解：作業！



- $c(t)=\begin{cases} c^*(G_L), & t\le 0^- \\ c^*(G_H)+A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}, & 0^+\le t\le T^- \\ c^*(G_L)+A_1^*e^{s_1t}+A_2^*e^{s_2t}, & t\ge T^+ \end{cases}$

- $k(t)=\begin{cases} k^*(G_L), & t\le 0^- \\ k^*(G_H)+\frac{s_1}{\frac{f''(k^*)}{\theta}c^*}A_1e^{s_1t}+\frac{s_2}{\frac{f''(k^*)}{\theta}c^*}A_2e^{s_2t}, & 0^+\le t\le T^- \\ k^*(G_L)+\frac{s_1}{\frac{f''(k^*)}{\theta}c^*}A_1^*e^{s_1t}+\frac{s_2}{\frac{f''(k^*)}{\theta}c^*}A_2^*e^{s_2t}, & t\ge T^+ \end{cases}$

- 連續條件：$k^*(0^-)=k^*(0^+)$、$k^*(T^-)=k^*(T^+)$
- 無套利：$r(T^-)=r(T^+)$、$c(T^-)=c(T^+)$
- 收斂：$\lim_{t\to\infty}c(t)=c^*(G_L), \lim_{t\to\infty}k(t)=k^*(G_L)$

比較靜態(2)：政府“消費性”支出的變動

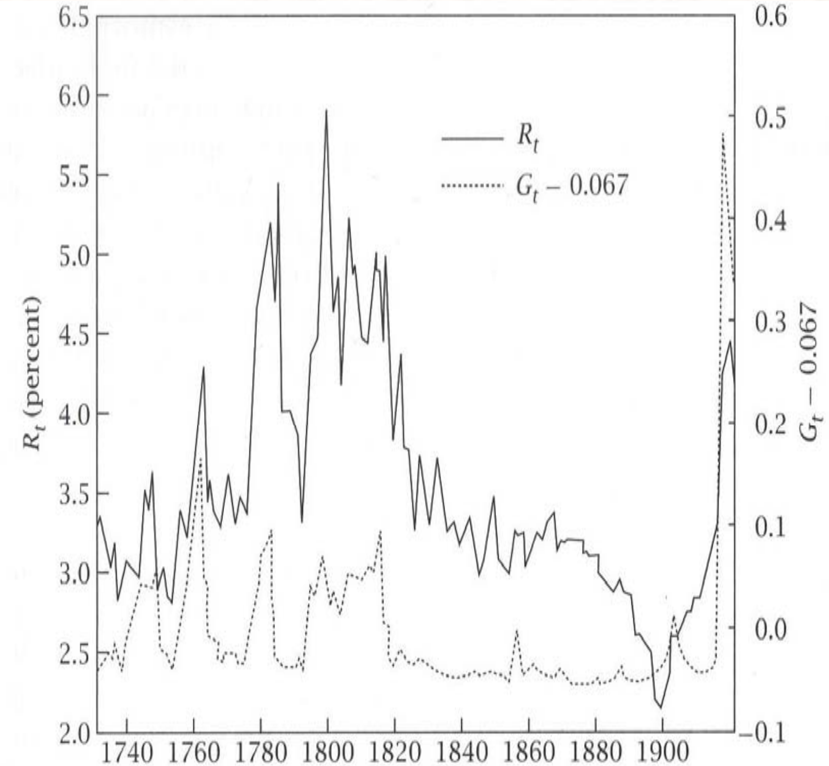


FIGURE 2.10 Temporary military spending and the long-term interest rate in the United Kingdom (from Barro, 1987; used with permission)

- 歷史經驗：英國(1729~1918)暫時性軍備支出與長期利率 (Barro, 1987)
  - 暫時性政府支出↑ ⇨ 實質利率 ↑
  - 永久性政府支出↑ ⇨ 實質利率不變
  1. 用長期利率替代短期利率的資料 --- 利率期限結構
  2. 實質利率=名目利率－預期通膨率 --- Barro發現樣本期間裡，預期通膨並無系統性變化
  3. 圖2.10中，大約在1760年左右的尖峰部份，反應有7年戰爭；在1780年左右的尖峰部分，則反應與美國革命的戰爭。 ..... 政府支出暫時性增加期間，實質利率確實較高

比較靜態(2)：政府“消費性”支出的變動

- 歷史經驗：英國(1729~1918)暫時性軍備支出與長期利率 (Barro, 1987)

$$R_t = \underbrace{3.54}_{(0.27)} + \underbrace{2.6}_{(0.7)}\,\tilde{G}_t;\ \lambda = \underbrace{0.91}_{(0.03)},R^2 = 0.89, see. = 0.248, D.W. = 2.1$$

  - R_t：長期名目利率；
  - $\tilde{G}_t$：作為GNP的一部分的暫時性軍備支出估計值；
  - λ：殘差的一階自我回歸參數；$(\cdot)$中數值為標準差
- 若估計至1914年(排除一次大戰)，$\tilde{G}_t$的相關係數提高為6.1 (標準差提高到1.3)
- 給定一次大戰軍備支出的大幅增加，利率仍上升、幅度較小。因為政府採價格控制，以及非市場性工具重新分配資源。
- 這估計結論提供了政府支出對利率影響一個好評估。但這個論點並非普遍性成立。

- The End