新經濟成長 – 第2代內生成長理論

總體經濟理論(一)

Process of Creative Destruction

- "The fundamental impulse that sets and keeps the capitalist engine in motion comes from the new consumers' goods, the new methods of production or transportation, the new markets,....
- [This process] incessantly revolutionizes the economic structure *from within*,

  incessantly destroying the old one,

  incessantly creating a new one.
- This process of Creative Destruction is the essential fact about capitalism."

Joseph Schumpeter (1942): *Schumpeterian Growth*

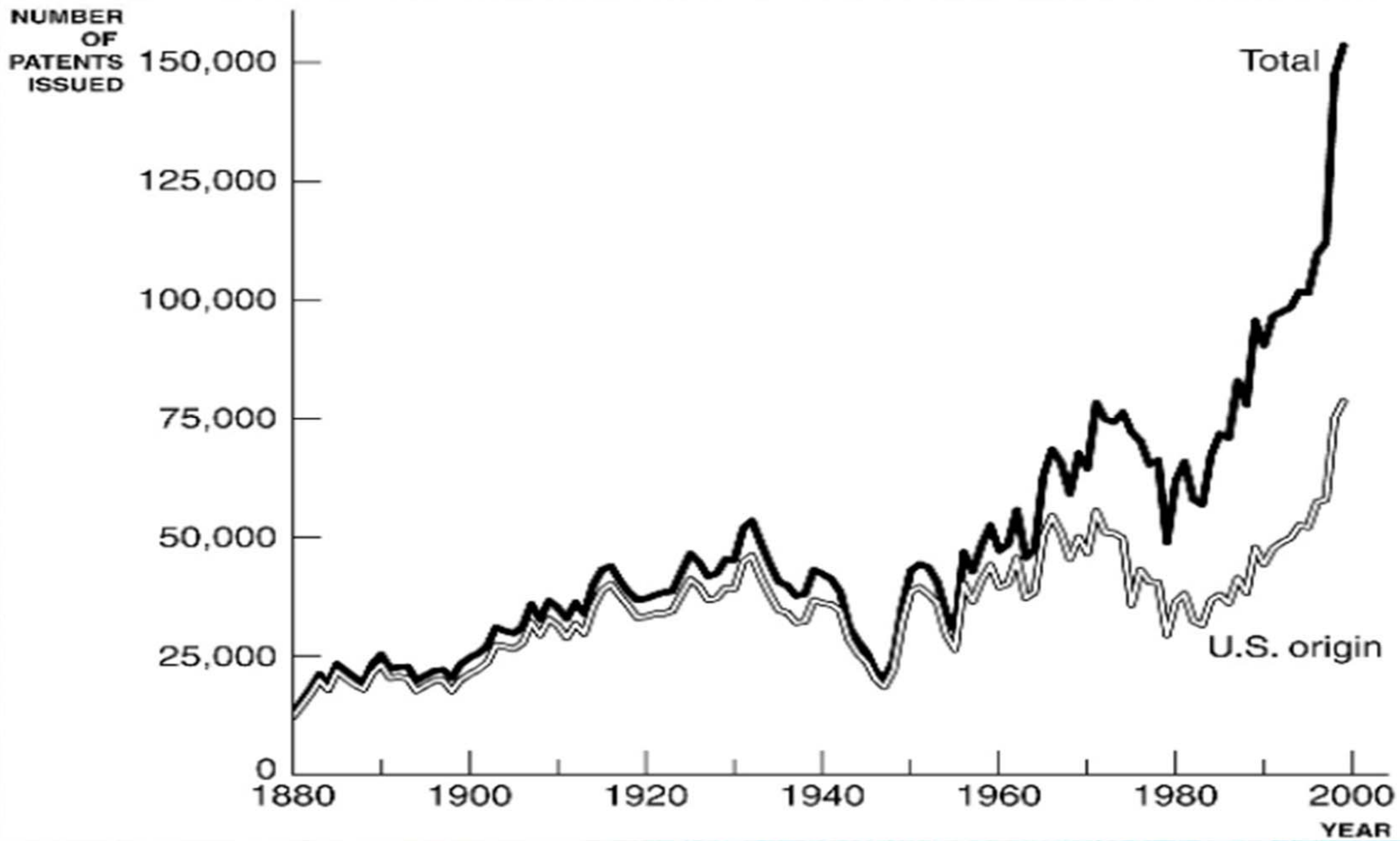
創造性破壞

- 實是(positive)面
  - 個別廠商的創新能夠引起永續成長嗎？
- 規範(normative)面
  - 如果個別廠商的創新真的是成長的一個重要的引擎：
    - 一個廠商的研究對其他廠商的外部性，該放任或保護呢？
    - 目前研究和未來研究的關係？
    - 政府干預是否能改善福利或提升成長率？

資料

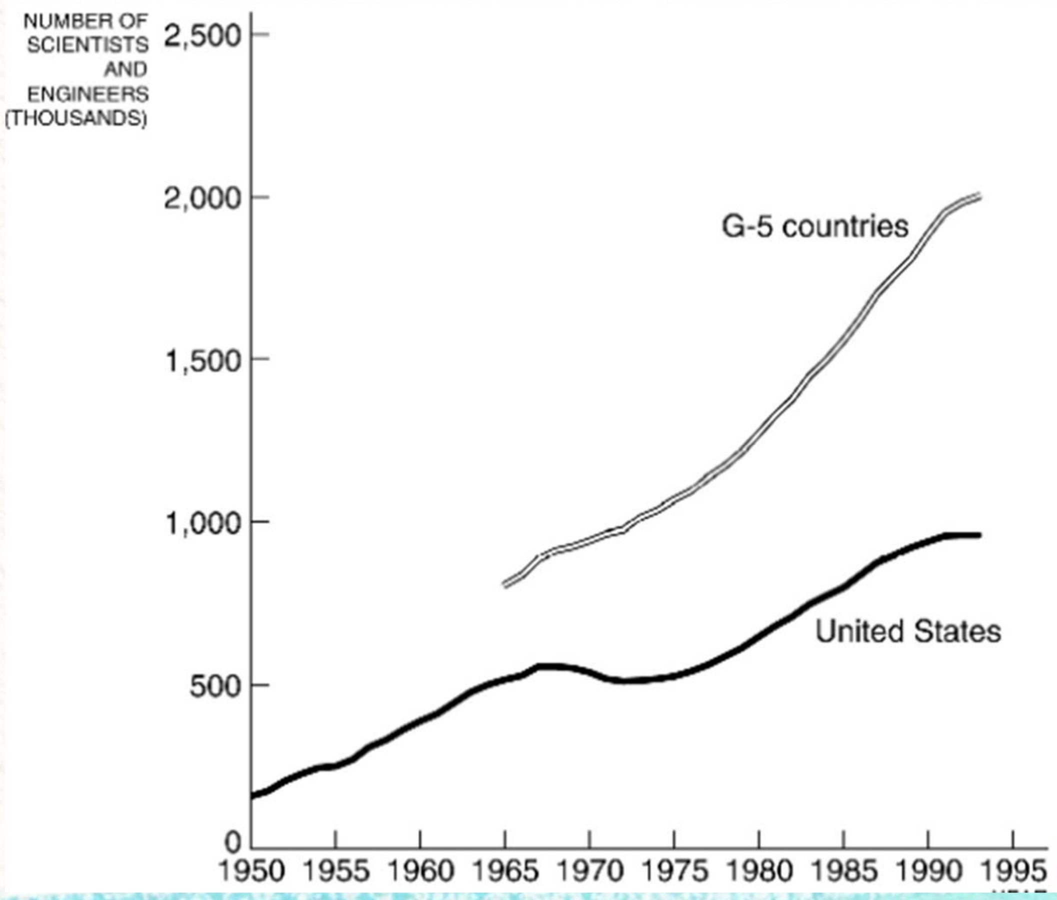
- 公告的專利數量增加
  - 1880年，初估有13,000
  - 1999年，在美國公告的有150,000
- 從事研發的研究人員數增加
  - 在美國，從1950年的20萬人，上升到1990年的100萬人
- R&D佔勞動力的比例增加
  - 從1950年的0.25%，上升到1990年的0.75%

公告的專利數量



NUMBER OF PATENTS ISSUED
150,000
125,000
100,000
75,000
50,000
25,000
0
1880
1900
1920
1940
1960
1980
2000
YEAR
Total
U.S. origin

科學家與工程師



NUMBER OF SCIENTISTS AND ENGINEERS (THOUSANDS)
2,500
2,000
1,500
1,000
500
0
G-5 countries
United States
1950
1955
1960
1965
1970
1975
1980
1985
1990
1995

R&D：內生的創新活動

- Young的實證研究不支持底下觀點：
  - 單單藉由實物資本和人力資本的深化，國家就足以維持永續的每人所得成長。

- Romer提供了R&D作為另一種內生成長模型
  - 創新發明是一個需要實質資源的重大經濟活動。
  - 新成長理論的 “個體面向” – 明確地建構R&D過程，開創了一個重要的視野。
  - 政府政策和國際整合兩者在成長方面的綜合效果

R&D：內生的創新活動

- 廠商為何要創新？
  - 研發(R&D) vs. “非敵對的(nonrival)” 創意
  - 在任一時點，一單位的K只能被一個廠商所使用；但經由技術的外溢，創意可能被更多廠商所使用。

  - 如果廠商有一個誘因去創新，那麼必須要有一些制度或機制，來允許廠商從他的創新中獲得租金(rents)。
    - Romer假設，創新者能夠獲得他創意藍圖(blueprint)的專利許可。在專利下，創新者擁有該創意藍圖的所有租金(價值)。

R&D：內生的創新活動

- 創新如何影響生產

1. 管道1：新創產品、品質
   - 消費性產品的種類(variety) / 品質(quality)
   - Part VI著重在管道1

2. 管道 2：新製程
   - R&D ⇨ 新方法得到了更效率的生產
   - 這小節(Part V)的焦點放在管道2

R&D：產品種類的擴張

-- 水平創新

Romer (1990)
"Endogenous Technological Change."
Journal of Political Economy 98, October 1990, S71-S102

Romer (1990)模型

- Romer (1990)假設：
  1. R&D ⇨ 新的中間財貨 (資本) ⇨ 提高了勞動生產力
  2. 一個齊質的消費財

- 技術變動
  - 改善了原料調製的作法(或流程)
    - 加工原料的作法（中間財製程）原本就不同於其他經濟商品的製作（最終財製程）。
  - 形成技術變動的大半原因是，人們反映市場誘因所開展的有目的行動(非副產品)
    - 創作新的一組 “作法” 是要付出成本的，不過，作法能夠被再三使用而不需額外的成本
  - 結論：技術變動是經濟成長的核心(驅動力)

Romer (1990)模型

- 生產的階段
  - 研究(R&D)是為了開創新設計或新技術(*A*)
  - 生產技術本身當做成一種資本財(或稱技術財吧!)
    - 使用技術來生產最終產品
  - 最終產品從未淘汰
  - 新的和舊的最終財產品是完全替代
- 符號定義：
  - L – 勞動 (供給固定)
  - H – 人力資本水準 (供給固定)
  - K – 實物資本存量
  - A – 技術(另一種資本財)

假設為外生給定(凸顯R&D角色，並簡化複雜性)

Romer (1990)模型

$H = H_A + H_Y$

design

R&D部門：
使用既有的創意(技術A)，搭配人力資本(H_A)，生產新創意(新技術)。
生產技術是

$$\dot{A} = f(A, H_A) = \delta A H_A$$

$\boldsymbol{A}$：被創新發明的新資本財範圍

電腦、IC晶片

中間財部門：
是獨佔者。使用實物資本財(K_j)來生產中間財(x_j)。生產技術是一種線性技術。
成本函數$K_j = g(x_j)$
中間財(x_j)是一種新資本財(new capital)
實物資本(K_j)是一種raw capital

最終財部門：
是競爭性廠商。使用中間財(x_j)、人力資本(H_Y)和勞動(L)來生產最終(消費)財。
生產技術是Cobb-Douglas Form:

$$Y = Y(H_Y, L, X) = H_Y^{\alpha} L^{\beta} X$$

where $X = \int_0^A x_j^{1-\alpha-\beta} dj$

最終財部門

- 最終財廠商：
  - 於競爭性市場、自由進出：沒有超額利潤
  - 最終財廠商的生產函數：$Y = Y(H_Y, L, X) = \int_0^A H_Y^\alpha L^\beta x_j^{1-\alpha-\beta} dj$
    - 若H_Y和L倍增，則每一個特定新資本財x_j的需求就倍增。
  - 廠商選擇最適的要素需求：x_j(新資本財)、H_Y (L數量固定，不需選擇)，來極大化利潤。
    - $\Pi_Y = \max_{x_j, H_Y} \left[\int_0^A H_Y^\alpha L^\beta x_j^{1-\alpha-\beta} dj - \int_0^A P_j x_j dj - w_H H_Y \right]$

FOC:

- $\frac{\partial \Pi_Y}{\partial x_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\alpha-\beta) H_Y^\alpha L^\beta x_j^{-\alpha-\beta} = P_j$
- $\frac{\partial \Pi_Y}{\partial H_Y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha H_Y^{\alpha-1} L^\beta \int_0^A x_j^{1-\alpha-\beta} dj = w_H$

…對新資本財x_j的需求，取決於：它的價格P_j等於其邊際產量 (最適H_Y決策亦同理)

最終財部門

- 最終財廠商：
  - 廠商的保留價格：反需求曲線$P_j(x_j)$是

$$P_j = (1-\alpha-\beta) H_Y^{\alpha} L^{\beta} x_j^{-\alpha-\beta}$$

    - 它是負斜率的。
    - 對每一個特定的新資本財x_j，它的型態都是一樣的。

  - 廠商對x_j的需求曲線：

$$x_j = (1-\alpha-\beta)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} H_Y^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} P_j^{-\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

    - 每個中間財廠商面對一個價格彈性固定的(constant-price-elasticity)需求曲線。

中間財部門

- 中間財廠商：
  - 每個新資本財x_j被一個獨占的中間財廠商所生產(例如，DVD晶片廠的聯發科)。
    - 這獨占廠商是這個特定產品之創意藍圖的唯一擁有者(擁有專利)。
  - 每個獨占廠商，使用$1/\eta$單位的初級資本(raw capital) K_j來生產一單位的新資本財x_j，亦即線性生產技術是：$x_j = \frac{K_j}{\eta}$；並且，使用它的創意藍圖來轉換它們(初級資本)成為x單位的特定新資本財。(K_j + 創意藍圖 → x_j)
    - 因初級資本K_j的成本等於利率(r)，故利率扮演獨占者之邊際成本(MC)的重要因子。
      - 成本極小化的決策，得到其成本函數$TC = rK_j = r \cdot \eta x_j$；所以，邊際成本是$r\eta$
  - 每個獨占廠商面對$P_j(x_j)$的反需求曲線，他選擇最適的新資本財產量x_j、定價P_j，並決定要素投入，來極大化他的利潤。

中間財部門

- 中間財廠商：
  - 獨佔廠商的成本最小化決策：

$$\min_{K_j} rK_j, \qquad s.t.\ x_j = \frac{1}{\eta} K_j$$

    - 得到成本函數：$rK_j = r\eta x_j$
  - 獨占廠商面對市場需求 $P_j = (1-\alpha-\beta) H_Y^{\alpha} L^{\beta} x_j^{-\alpha-\beta}$ ，其利潤極大化的最適化問題是：
    - $\pi_j = \max_{x_j} [P_j(x_j) x_j - rK_j], \quad \text{where } rK_j = r\eta x_j$
    - $s.t.\ P_j = (1-\alpha-\beta) H_Y^{\alpha} L^{\beta} x_j^{-\alpha-\beta}$

這些未來利潤的總現值用來支付給專利權(購買)

FOC

- $\frac{\partial \pi_j}{\partial x_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j(x_j) + \frac{\partial P_j(x_j)}{\partial x_j} \cdot x_j = r\eta$

中間財部門

- 中間財廠商：
  - 獨占廠商的定價原則 (討論對稱均衡情況)
    - 對稱均衡下，每個獨占廠商面對相同的需求和相同的邊際成本($r\eta$)。因此，不同獨占者所選擇的定價和產量是相同的。
      - 對任意的j，$x_j = x$
      - 對任意的j，$P_j = P$
      - 我們不再需要標出下標 j，故將它忽略不標出。上述的定價決策改寫成：

$$P + (-\alpha - \beta)\frac{P}{x} \cdot x = r\eta \quad (\text{that is, } MR = MC) \Rightarrow \quad P = \frac{r\eta}{1 - \alpha - \beta}$$

$$\Rightarrow \ P = MC \cdot (1 + markup) = r\eta \cdot \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_d - 1}\right), \qquad \text{where } \varepsilon_d = \frac{\partial x / x}{\partial P / P} = \frac{1}{\alpha + \beta}$$

獨占價格訂在超過邊際成本的一個簡單加碼(markup)，
其中這加碼是由需求彈性決定的。

中間財部門

- 中間財廠商：
  - 獨佔廠商的利潤：

$$\pi = P(x)x - r\eta x \quad \Rightarrow \quad \pi = (\alpha + \beta)Px$$

- 對稱均衡下，以總資本K所表示的最終財生產函數型態：
  - 當每一個被需求的商品數量x_j是相同，且等於x時，然後

$$Y = \int_0^A H_Y^\alpha L^\beta x_j^{1-\alpha-\beta} dj = H_Y^\alpha L^\beta \left(Ax^{1-\alpha-\beta}\right)$$

  - 總資本存量$K = \int_0^A K_j dj = \int_0^A \eta x_j dj = \eta A x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{K}{\eta A}$
  - 以資本存量表示的最終財生產函數是常見的Cobb-Douglas型態

$$Y = H_Y^\alpha L^\beta \left(Ax^{1-\alpha-\beta}\right) = (AH_Y)^\alpha (AL)^\beta (K/\eta)^{1-\alpha-\beta}$$

R&D部門

- 研發廠商：
  - R&D廠商在生產效率為(δ)的水準基礎下，投入既有創意(A)、人力資本(H_A)，開發新創意(藍圖)。

$$\dot{A} = f(\delta, A, H_A)$$

    - 任一個致力於研發的人，都能免費地運用既有的全部創意存量去進行研發，來生產新設計或新創意。
    - 創意是非敵對的(nonrival)，且有外溢性。所有研發者能夠充分利用A。
  - 明確假設，新設計的生產函數是：

$$\dot{A} = \delta H_A A \quad \text{or} \quad \dot{A}/A = \delta H_A$$

    - 意義：
      - 設計與知識的總存量(A)愈大，工程師在研發部門工作的生產力就愈高($\partial\dot{A}/\partial H_A = \delta A$)。
      - 增加人力資本去研發，導致了新設計的生產力有更高效率。

R&D部門

- 研發廠商：
  - R&D廠商(對新創意藍圖)的訂價：
    - 每次新創意被 “生產” 出來，它就賦予了發明者專利權。
    - 假設每個中間財廠商都能夠參與購買專利權的拍賣。
      - 購買專利的出價持續喊下去，直到…專利被拍賣給出價最高的中間財廠商。
      - 並因此，專利發明者(R&D廠商)可以從購買者(中間財廠商)身上賺得全部的獨佔利潤。
        - 最高標價剛剛好等於該專利所能產生之所有未來獨占利潤的現值。
        - 創意藍圖的價值(P_A) = 中間財廠商(出價者)之全部利潤流(profit stream)的現值(V_A)；亦即 $P_A = V_A$。

$$P_A(t) = V_A = \int_t^{\infty} \pi(\tau) e^{n\tau} e^{-r\tau}\, d\tau$$

    - 在未來，同一個創新藍圖(例如，軟體)繼續被愈來愈多的(中間財)商品所使用著。
      - 這是因為對x_j的需求將同L成比例地成長。

R&D部門

- 研發廠商：
  - R&D廠商(對新創意藍圖)的訂價：

$$P_A(t) = V_A = \int_t^{\infty} \pi(\tau) e^{n\tau} e^{-r\tau}\, d\tau$$

    - 假設$n = 0$，且因前述知：$\pi = (\alpha + \beta)Px$，故π是非時間變數；因此，未來利潤流的現值是：

$$V_A = \int_t^{\infty} \pi \cdot e^{-r\tau}\, d\tau = \frac{\pi}{r}$$

    - 訂價原則改寫成：

$$P_A = \frac{\pi}{r} \quad \text{or} \quad \pi = rP_A \quad \text{or} \quad \frac{\pi}{P_A} = r$$

      - 意義：R&D廠商當收超過變動成本的超額利潤($\frac{\pi}{P_A}$)，必須足夠去支付初始設計(design)的投資利率(r)

R&D部門

- 研發廠商：
  - R&D廠商的利潤：

$$\Pi_A = P_A\dot{A} - w_A H_A = P_A \cdot f(\delta, A, H_A) - w_A H_A, \qquad \text{where } f(\delta, A, H_A) = \delta H_A A$$

FOC

- $\frac{\partial \Pi_A}{\partial H_A} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_A \cdot \delta A = w_A$
  - 新創意的人力資本(勞動)薪資是該新創意的邊際人力資本產值。

家計部門

- 家計單位：
  - 終身效用的現值：

$$\int_0^{\infty} \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta} \cdot e^{-\rho t} dt$$

  - 消費的Euler equation：

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

資金供給的利率

市場均衡

- 人力資本(勞動)市場均衡：
  - 人力資本在R&D部門與最終財部門的自由移動，使得兩邊的工資會相等，即$w_H = w_A$。

$$\Rightarrow \quad \alpha H_Y^{\alpha-1} L^{\beta} \int_0^A x_j^{1-\alpha-\beta} dj = (w_H = w_A) = P_A \cdot \delta A$$

  - 對稱均衡時，該條件變成：

$$\alpha H_Y^{\alpha-1} L^{\beta} \left(A x^{1-\alpha-\beta}\right) = P_A \cdot \delta A$$

    - 其中，$P_A = \frac{\pi}{r}$、$\pi = (\alpha+\beta)Px$、$P = (1-\alpha-\beta) H_Y^{\alpha} L^{\beta} x^{-\alpha-\beta}$
    - 求得H_Y：

$$H_Y = \frac{\alpha \cdot r}{\delta(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)}$$

資金需求的利率

- 人力資本均衡條件：$H = H_Y + H_A$

市場均衡

- 資金市場均衡：
  - 資金市場均衡條件：資金供給的利率=資金需求的利率

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{C}}{C} = \dfrac{1}{\theta}(r-\rho) \\ H_Y = \dfrac{\alpha \cdot r}{\delta(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)} \end{cases} \Rightarrow \quad H_Y = \frac{\alpha(\theta g_C + \rho)}{\delta(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)}$$

- 商品市場均衡：

$$\dot{K} = Y - C \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{K}}{K}\frac{K}{Y} = 1 - \frac{C}{Y} \quad \Rightarrow \quad g_K \frac{K}{Y} = 1 - \frac{C}{Y}$$

平衡成長

- 平衡成長：$g_C = g_K = g_A = g_Y = g$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} K = \eta A x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\dot{K}}{K} = \dfrac{\dot{A}}{A} \\ \dfrac{\dot{A}}{A} = \delta H_A \end{array}\right\} \Rightarrow \; g_K = g_A = \delta H_A > 0 \\ \\ H = H_Y + H_A \\ H_Y = \dfrac{\alpha(\theta g_C + \rho)}{\delta(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)} \end{array}\right\} \Rightarrow g = \frac{\delta(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)H - \alpha\rho}{\alpha\theta + (\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)}$$

$$\downarrow$$

$$Y = (AH_Y)^{\alpha}(AL)^{\beta}(K/\eta)^{1-\alpha-\beta} \;\Rightarrow\; \frac{Y}{K} = \left(\frac{A}{K}H_Y\right)^{\alpha}\left(\frac{A}{K}L\right)^{\beta}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{1-\alpha-\beta}$$

$$g_K \frac{K}{Y} = 1 - \frac{C}{Y}$$

長期成長率g知道後，返代回H_Y, H_A均可求得；並因此，可接續著求得(如果你關心)消費產出比、產出資本比

平衡成長

- 長期經濟成長率：

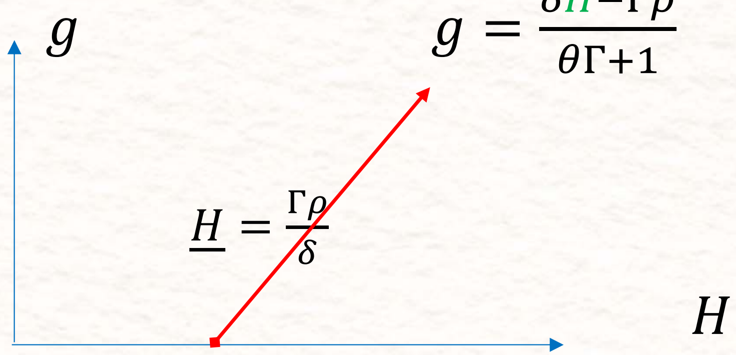
$$g = \frac{\delta(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)H - \alpha\rho}{\alpha\theta + (\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)} = \frac{\delta H - \Gamma\rho}{\theta\Gamma + 1}, \qquad \text{where } \Gamma \equiv \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)}$$

  - 成長率g不受勞動L影響
  - g決定於：
    - 嗜好或偏好參數ρ
    - 跨時替代彈性$1/\theta$
    - 經濟體系的技術參數集合(H, δ, Γ)
      - H：人力資本總水準
      - δ：R&D部門效率
      - Γ ：最終財生產技術參數α與β

平衡成長

- 含意：

$$g = \frac{\delta H - \Gamma\rho}{\theta\Gamma + 1}$$



- 如果H太低($H < \underline{H}$)，H_A的非負限制是綁住的(binding)，並且成長並不會發生。
  - 如果人力資本的總水準太小，不景氣(stagnation)可能就發生了。
- 這結論提供了一個可能的解釋：為何國家之間，存在著成長率的差異。
  - 人力資本水準是關鍵

競爭均衡中的資源配置

- 該體系的競爭均衡中，有兩個無效率的來源：
  1. R&D部門 → Learning by Doing外部性
     - R&D廠商沒有考量到，他們的創新將降低了造就未來發明所需的勞動數量。
  2. 獨占性市場結構：生產中間新資本財(x)的廠商傾向於生產的比社會效率的資本數量還來得低。
     - 因此，社會最適成長率是高於競爭性均衡的成長率。

- 政府干預(補貼政策)和國際整合(貿易就像創新一樣可以獲得新的關鍵性技術或專利)對成長有正的效果

R&D：產品品質的改進

-- 垂直創新

Aghion and Howitt (1992)
"A Model of Growth Through Creative Destruction"
Econometrica, Vol. 60, 323-351.

前言

- 經濟增長是由創新所產生的。
  - 這些創新提高了產品的質量，並摧毀了先前發明但已過時的創新成果。

- 創新：是由利潤驅動之研究活動，所產生的隨機發現的一個成果。

經濟環境

- L：同質性個人；在時間歷程裡，L是常數。
- 效用函數：

$$U = \int_0^{\infty} c\, e^{-\rho t} dt$$

  - c：消費。
  - 每個人每單位時間，不需成本(無負效用)地能提供一單位的勞動力
  - $\rho > 0$：時間偏好率。
  - 風險中立：利率$r = \rho$

經濟環境

- 最終財y的生產技術：

$$y = \frac{A_j}{\alpha} x^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, A_j > 0$$

  - x：中間財的使用數量

- 創新改善了中間產品的質量
  - 創新產生一個新中間財，他的生產力比先前中間財要來得大 (經由乘法因子$\gamma > 1$來表現)

$$A_{j+1} = \gamma A_j$$

經濟環境

- 個人不是在中間財部門工作，就是在研發部門工作
- 中間財部門裡，一單位勞動生產出一單位中間財。所以，產量x_j也就是勞動使用量。

- 研發部門裡，勞動數量是n_j

$$L = x_j + n_j$$

- 創新是以λn_j速率被生產出來，亦即，在很小的時間$(t, t + dt)$內，有$\lambda n_j dt$的創新。λ是研發的生產力。
- 創新的廠商能夠獨佔新中間產品的生產。

經濟環境

- 創新產生了3種外部性：
  1. 創新者所獲得的獨佔租金(rent)通常小於創新所帶來的盈餘。
  2. 每個創新都提高了A，並且然後提升了未來研究的生產力 (知識是一種非敵對的商品)。
  3. 破壞了先前的產品。

經濟環境

- 生產第j中間財的廠商，其利潤流是π_j
- 創新j的價值V_j被定義成：

$$V_j(t)=\frac{\pi_j(t)dt+\left(1-\lambda n_j dt\right)V_j(t+dt)}{1+rdt}$$

或 $rV_j=\pi_j-\lambda n_j V_j+\dot{V}_j$

  - $\dot{V}_j=0$：因為π_j、n_j並不取決於時間，以致於$V_j(t)=V_j$，並因此$\dot{V}_j=0$。所以，上式改寫成：

$$V_j=\frac{\pi_j}{r+\lambda n_j}$$

經濟環境

- 勞動市場是完全競爭：工資等於其邊際生產力
- 研發的邊際生產力
  - 一單位勞動於每單位時間，有λ機率可以生產出一個創新。
  - 當中間財j被使用，創新的價值是等於V_{j+1}；因此，研發的工資是

$$w_j = \lambda V_{j+1}$$

- 完全競爭使得工資是唯一個工資，亦即，研發部門工資等於中間財部門工資。

經濟環境

- 中間財被獨佔廠商所生產。
- 生產j中間產的獨佔廠商，其利潤流是：

$$\pi_j = \max_x \, p_j x - w_j x$$

  - p_j：中間財j的價格
  - 中間財的數量與其價格的關係可以從最終財廠商的利潤最大化行為中推導得出。
- 最終財部門是完全競爭
  - 中間財這要素的邊際生產力是：$A_j x^{\alpha-1}$ 由前述，中间财的生产技术求一阶导
  - 因此，中間財的價格等於：

$$p_j = A_j x^{\alpha-1}$$

經濟環境 四个市场要达到均衡：最终财市场、中间财市场、研发市场、劳动市场

- 將中間財價格代回中間財獨佔廠商的利潤函數：

$$\max_x \left(A_j x^{\alpha-1}\right)x - w_j x$$

然後，決定出最大利潤的定價、產量決策：

  - $A_j x^{\alpha-1} = w_j \rightarrow \quad x = \left(\frac{\alpha}{(w_j/A_j)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha}{\omega_j}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$，其中$\omega_j \equiv \frac{w_j}{A_j}$
  - $p_j = A_j\left(\frac{w_j/A_j}{\alpha}\right) = \frac{A_j\omega_j}{\alpha}$

- 並因此，得到：

  - $\pi_j = A_j(1-\alpha)\left(\frac{w_j/A_j}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} = A_j(1-\alpha)\left(\frac{\omega_j}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

經濟環境

- 勞動市場均衡：
  - 研發部門的工資是：$w_j = \lambda V_{j+1}$，其中，$V_j = \frac{\pi_j}{r+\lambda n_j}$且$\pi_j = A_j(1-\alpha)\left(\frac{\omega_j}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$
  - 中間財部門的工資是：$\alpha A_j x^{\alpha-1} = w_j$或$x = \left(\frac{\alpha}{\omega_j}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$，已經表現在$\pi_j$中。

$$\therefore \omega_j = \frac{\lambda\gamma(1-\alpha)}{r+\lambda n_{j+1}}\left(\frac{\omega_{j+1}}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

  - 勞動供給線制式：$L = x_j + n_j$

$$\therefore L = \left(\frac{\alpha}{\omega_j}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + n_j$$

經濟環境

- 定態均衡$(\hat{\omega},\hat{n})$由底下兩式求得：

$$AS:\quad \left(\frac{\hat{\omega}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=\frac{\lambda\gamma(1-\alpha)}{\alpha(r+\lambda\hat{n})}$$

$$LS:\quad L=\left(\frac{\alpha}{\hat{\omega}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\hat{n}$$

- AS線定義了研發部門裡，勞動數量與工資之間的遞減關係。
  - 愈高的未來工資降低了未來利潤，並因此降低了研究的報酬。
- LS線定義了研發部門裡，勞動數量與工資之間的遞增關係。
  - 工資上漲降低了中間財部門的就業($\left(\frac{\alpha}{\hat{\omega}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$項目)，並因此提高了研發部門的就業。
- 這兩條曲線的交點就是唯一的定態均衡。其解值是：

$$\hat{n}=\frac{(1-\alpha)\gamma L-\alpha\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{\alpha+\gamma(1-\alpha)}$$

經濟環境

- y的產量：$y_j = \frac{A_j}{\alpha}(L-\hat{n})^{\alpha}$
  - 因為$A_{j+1} = \gamma A_j$，所以，產量也有類似關係：

$$y_{j+1} = \frac{A_{j+1}}{\alpha}(L-\hat{n})^{\alpha} = \frac{\gamma A_j}{\alpha}(L-\hat{n})^{\alpha} = \gamma y_j$$

    - j：代表著一系列的創新，$j = 1,2,3 \ldots \infty$

- 產出的***平均***衡長率：
  - 每個微小時間間隔$dt \to 0$裡，有$\lambda\hat{n}dt$的創新
  - 每個創新提高了對數產出有$\ln(\gamma)$。時間間隔的產出變動可以寫成：$\ln[y(t+dt)] = \ln[y(t)] + \lambda\hat{n}dt \cdot \ln(\gamma)$
  - 使用近似 $\lim_{dt\to 0} \ln\left[\frac{y(t+dt)}{y(t)}\right] = \lim_{dt\to 0} \frac{y(t+dt)}{y(t)} - 1$
    - $\lim_{x\to 1} \ln x = \lim_{x\to 1} x - 1$
  - 我們得到平均定態成長率：

$$\hat{g} = \lim_{dt\to 0} \frac{y(t+dt)-y(t)}{dt}\frac{1}{y(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \lambda\hat{n}\ln(\gamma)$$

經濟環境

- y的產量：$y_j = \frac{A_j}{\alpha}(L - \hat{n})^{\alpha}$
  - 因為$A_{j+1} = \gamma A_j$，所以，產量也有類似關係：

$$y_{j+1} = \frac{A_{j+1}}{\alpha}(L - \hat{n})^{\alpha} = \frac{\gamma A_j}{\alpha}(L - \hat{n})^{\alpha} = \gamma y_j$$

    - j：代表著一系列的創新，$j = 1,2,3 \ldots \infty$

經濟環境

- 產出的***平均***衡長率：
  - 每個微小時間間隔$dt \to 0$裡，有$\lambda\hat{n}dt$的創新
  - 每個創新提高了對數產出有$\ln(\gamma)$。時間間隔的產出變動可以寫成：

$$\ln[y(t+dt)] = \ln[y(t)] + \lambda\hat{n}dt \cdot \ln(\gamma)$$

  - 使用近似

$$\lim_{dt\to 0} \ln\left[\frac{y(t+dt)}{y(t)}\right] = \lim_{dt\to 0} \frac{y(t+dt)}{y(t)} - 1$$

    - $\lim_{x\to 1} \ln x = \lim_{x\to 1} x - 1$
  - 我們得到平均定態成長率：

$$\hat{g} = \lim_{dt\to 0} \frac{y(t+dt) - y(t)}{dt} \frac{1}{y(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \lambda\hat{n} \ln(\gamma)$$

經濟環境

- 產出的***平均***衡長率：(續)
  - 由於$\hat{n}=\frac{\gamma(1-\alpha)L-\alpha\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{\alpha+\gamma(1-\alpha)}$，因此，平均定態成長率$\hat{g}$可以進一步寫成：

$$\hat{g}=\frac{\lambda(1-\alpha)\gamma L-\alpha r}{\alpha+\gamma(1-\alpha)}\ln(\gamma)$$

    - 在每個創新之後，對數產出不連續地增加。
    - 兩個創新之間的平均持續時間是$\frac{1}{\lambda\hat{n}}$

靜止均衡成長率

- 在這個模型裡，更多研發人才所帶來的更密集研究，必然導致更頻繁的創新和更高的經濟成長。這個成長率是：

$$\hat{g} = \frac{\lambda(1-\alpha)\gamma L - \alpha r}{\alpha + \gamma(1-\alpha)} \ln(\gamma)$$

1. 正相關
   - L：隨著人口大小而增加
   - λ：隨著研發生產力而增加
   - γ：隨著創新所帶動之產出增幅大小而增加
2. 負相關
   - $r = \rho$：隨著利率而減少
   - α：隨著中間財部門競爭程度而下降
     - 中間財需求彈性的絕對值是$\frac{1}{1-\alpha}$，隨著α而增加，以致於獨佔力隨著α遞減。

R&D：無規模效果(scale effect)

-- Semi-Endogenous Growth Model

Jones (1995)
"R&D-Based Models of Economic Growth"
Journal of Political Economy, Vol. 103, 759-784.

前言

- 由追求最大化利潤之個人所從事的R&D活動，改變了技術，驅動了經濟成長。這意味著對研發的補貼或者其他政府政策，可能影響長期的經濟增長率。
  - 對這些文獻的重要貢獻包括Romer (1990)，Grossman and Helpman (1991a，1991b，1991c)，以及Aghion and Howitt (1992)
- 幾乎所有基於R&D文獻 (以及上面提到的那些文章) 中的模型，都有一個 “Scale Effect (規模效果)” 的預言：
  - 如果用於研發的資源水準 (例如，科研人員) 增加一倍，那麼產出的人均成長率就會增加一倍，至少在穩定狀態之下。
- 但是，在實證上，這樣的預言當然得不到任何支持。

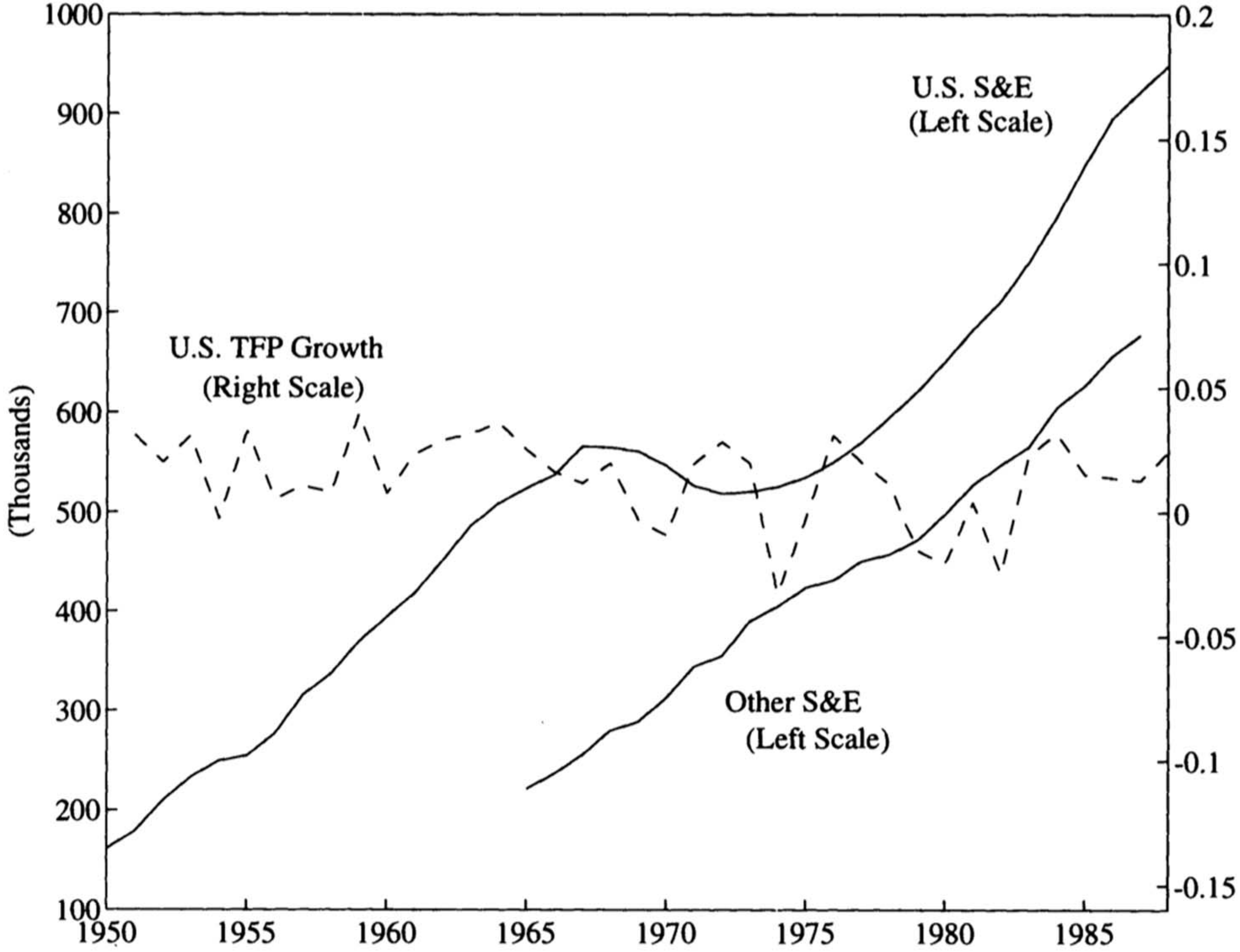


FIG. 1.—Scientists and engineers engaged in R & D and U.S. TFP growth. Source: The number of scientists and engineers engaged in R & D is taken from National Science Foundation (1989) and various issues of the *Statistical Abstract of the U.S. Economy*. TFP growth rates are calculated using the private business sector data in Bureau of Labor Statistics (1991). "Other S&E" is the sum of scientists and engineers engaged in R & D for France, West Germany, and Japan.

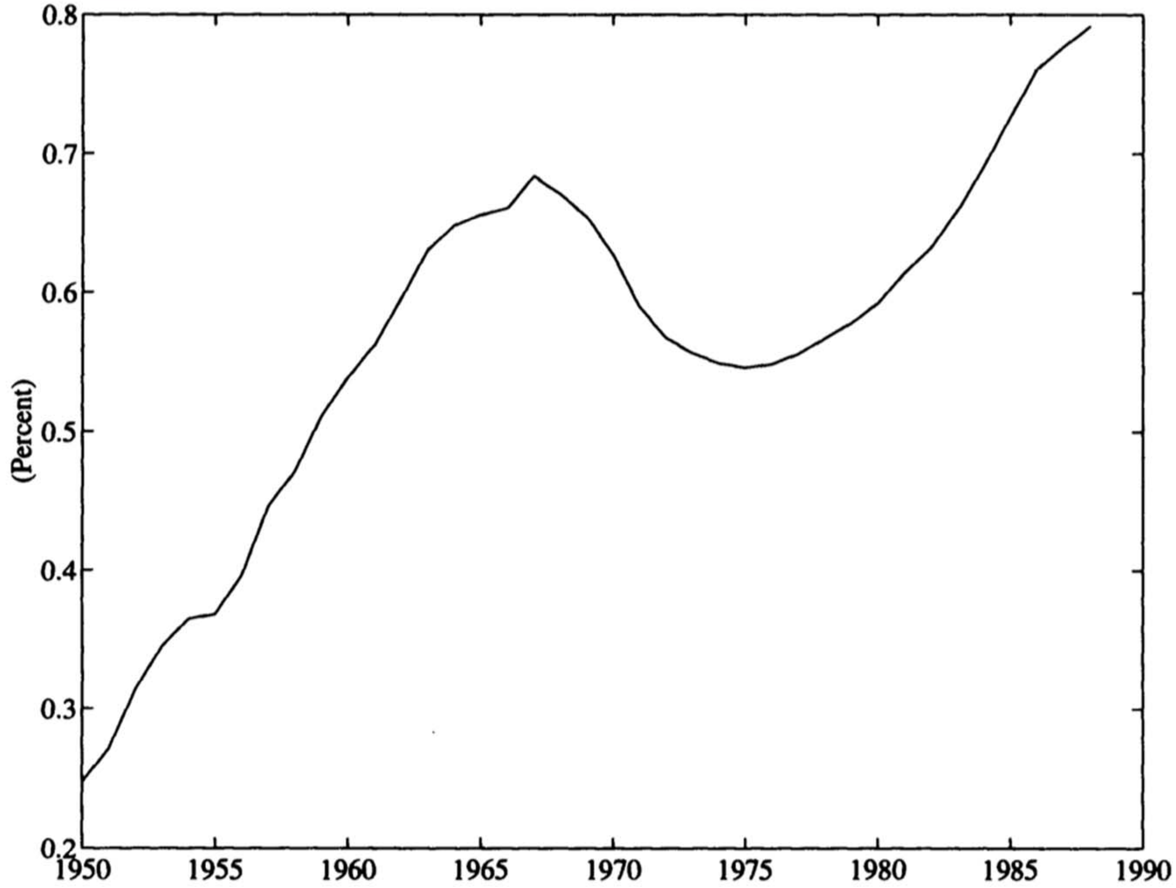


FIG. 2.—U.S. scientists and engineers engaged in R & D as a share of total labor force. Source: The number of scientists and engineers engaged in R & D is taken from National Science Foundation (1989) and various issues of the *Statistical Abstract of the U.S. Economy*. Labor force data are taken from Summers and Heston (1991).

消除Scale Effect

- R&D部門
  - 為了搜尋新設計圖，勞工致力於研發，並且成功地依據底下方式生產出來：

$$\dot{A} = \tilde{\delta} L_A$$

  - 其中，$\tilde{\delta} = \delta l_A^{\lambda-1} A^{\phi}$，被個別研發人員是為給定

1意味着别家工程师的研发可能牵制自家的研发

  - ϕ的意義：$\phi \lesseqgtr 0$
    - 若$\phi < 0$，表示生產力出現枯竭(fishing out)效果，以致於創新率隨著知識存量水準而下降。
    - 若$\phi > 0$，表示生產力出現正向外部效果。
    - 若$\phi = 0$，則代表新設計圖的達成率獨立於知識存量水準。
  - λ的意義：$0 < \lambda \leq 1$
    - l_A則用以捕捉其他勞動之重複和重疊研發對L_A勞動之創新數量的影響。

$$\dot{A} = \delta l_A^{\lambda-1} A^{\phi} L_A, \qquad 0 < \lambda \leq 1, \phi \lesseqgtr 0$$

  - 當$\phi = 1$且$\lambda = 1$，它就變成了Romer (1990)、Grossman and Helpman (1991a, 1991b, 1991c)，以及Aghion and Howitt (1992)的情形。

消除Scale Effect

- R&D部門

$$\dot{A} = \delta l_A^{\lambda-1} A^{\phi} L_A,\ 0 < \lambda \leq 1, \phi \lesseqgtr 0$$

- 任何個人都可以被允許進入R&D部門，並探勘新設計圖，以致於勞工在兩部門的任職，都必需獲得相同的薪資：

$$w = P_A \delta A^{\phi} l_A^{\lambda-1}$$

- 為了生產耐久性中間財，中間財廠商的上游決策關鍵是：從R&D部門買進專利的成本P_A與自交易中獲得的獨佔租(monopoly rent)，兩者之間的差距。
- 在這樣的認知下，獨佔性競爭的R&D部門會設定P_A價格，來萃取中間財部門的獨佔利潤的折現值。

消除Scale Effect

- R&D部門 (續)
  - 由於所有耐久財在每一期都產生相同的利潤，所以，所有設計圖，不論它已經幾年了，在一個時點都是用相同價格P_A做交易。然後，底下的套利方程式必須成立：

π 应该理解为净现金流

$$\frac{\bar{\pi}}{P_A} + \frac{\dot{P}_A}{P_A} = r$$

    - 其中，$\pi_{x_i} = \bar{\pi}_x = \alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A}$
  - 這方程式陳述了，R&D部門對他的設計圖收取一種價格，這價格剛好足以讓中間財獨佔者在<u>購買設計圖來生產耐久性中間財</u>和<u>一點都不進行生產</u>這倆間沒有差別。股利率(dividend rate)$\frac{\pi}{P_A}$和資本利得剛剛好等於投資的要求報酬率r。

成長率

$$g_A = g_y = g_c = g_x = g_k = g \equiv \frac{\lambda n}{1-\phi}$$

- g_y：人均產出成長率
- g_c ：人均消費成長率
- g_x：placeholder x的成長率
- g_k：勞動資本比成長率

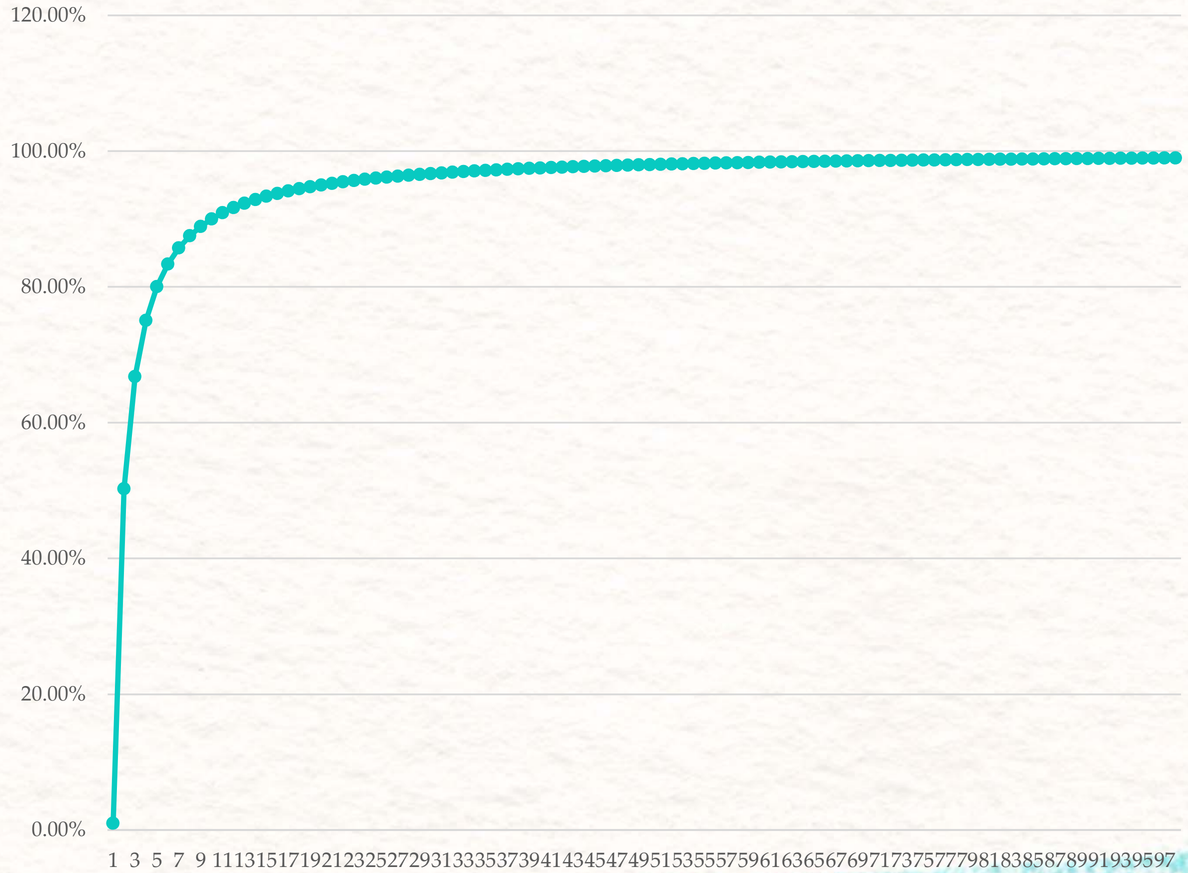
- 經濟成長率g取決於勞動力成長率n、參數ϕ和λ
  - ϕ和λ決定了R&D部門裡，外部報酬，和規模報酬有多大

成長率 $g_A = g_y = g_c = g_x = g_k = g \equiv \frac{\lambda n}{1-\phi}$

- 若$\phi = 1$ (Romer/Grossman-Helpman/Aghion-Howitt)，經濟沒有平衡成長路徑，因為L是在成長的。
- 假設$\phi < 1$，消除Romer/Grossman-Helpman/Aghion-Howitt模型中搞破壞性的scale effect。
  - 這樣，這些scale effect被替換成了直覺地關係：經濟成長取決於勞動力的成長率而不是勞動力水準。
  - 解釋：
  - 考慮$\phi = 0$、$\lambda = 1$：R&D沒有外部性的情況。此時，創新率獨立於智慧存量

$$\dot{A} = \delta L_A$$

    - 如果從事研發的勞動力不變，則每期是固定數量的新發明，那將構築了一個隨時間漸減百分比的生產力。 當經濟體中知識很少的時候，一個新想法對知識總量的影響，以百分比來看，有著顯著的效果。 然而，一旦經濟體已積累了大量知識，一個新想法對知識總量的影響，在百分比來看，只有很小的影響。 如果新想法的數量，隨時間上，一直保持固定，那麼，由新想法而導致的知識增幅的百分比，終將為零。成長將漸近地停止。(如下圖)


120.00%
100.00%
80.00%
60.00%
40.00%
20.00%
0.00%
1 3 5 7 9 11131517192123252729313335373941434547495153555759616365676971737577798183858789919395 97

成長率 $g_A = g_y = g_c = g_x = g_k = g \equiv \dfrac{\lambda n}{1-\phi}$

- 解釋：(續)
- 考慮$\phi = 0$、$\lambda = 1$：R&D沒有外部性的情況。此時，創新率獨立於智慧存量 (續)

$$\dot{A} = \delta L_A$$

  - 現在不再假設是常數，勞動力用外生成長率n來成長，在$\phi = 0$的情況下，新想法也是用n成長。
  - 然而，為了產生一個平衡成長路徑，新發明的數量必須總是代表著知識總量的一個固定比例。但這剛好是另一種說法：新發明數量和知識存量必須以相同速度成長。由於新發明數量與R&D從事的勞動力成正比，所以，生產力增長率與勞動力增長率就密不可分。
  - 這是方程式：$g_A = g_y = g_c = g_x = g_k = g \equiv \frac{\lambda n}{1-\phi}$，後面的直覺。

- 另一個重要的事是：在這模型中，什麼不能決定長期成長。
  - 長期成長並不受政府租稅政策 (包括投資稅稅抵減和研發補貼) 的影響。
    - 這個結果可以立即從上面式子$g \equiv \frac{\lambda n}{1-\phi}$ 推導出來。那個方程式關鍵在對$\frac{\dot{A}}{A} = \delta \frac{L_A^{\lambda}}{A^{1-\phi}}$方程式左右兩邊取對數並微分；這將必然獨立於一個固定的補貼或租稅。因此，在這模型中，這種租稅和補貼永遠不會有成長效果。

R&D：市場結構

-- 水平和垂直創新

Peretto (2011)
"The Growth and Welfare Effects of Deficit-Financed Dividend Tax Cuts"
Journal of Money, Credit and Banking, 2011, August, Vol. 43, 835-869

前言

- 2003年5月28日，美國布希總統簽署通過「就業及成長減稅調和法案(Jobs and Growth Tax Relief Reconciliation Act of 2003)」(簡稱JGTRRA)提出了3,500億美元的減稅方案。
- 修改美國內地稅法第1條h款，規定股利所得與資本利得應適用相同稅率，對於高級距稅率者由原本的35%減免至15% (2003年 ~ 2008年)；原先適用15%或10%低級距稅率者則降低到5%(2003年 ~ 2007年)，2008年則免稅，同時此法案還附有日落條款，將到2008年恢復課徵股利所得稅。

前言

- 歐巴馬總統於2010年12月17日簽署生效的新法案：「減稅、失業保險再授權、及工作機會增進法 (The Tax Relief, Unemployment Insurance Reauthorization of 2010)」以及「工作創造法案 (Job Creation Act of 2010)」主要是針對前總統布希簽署的「經濟增長與稅務減免一致法 (Economic Growth & Tax Relief, Recognition Act of 2001)」(又名EGTRRA) 及2003年 JGTRRA延長至2012年底。
  - 除了延長以往的減稅，新稅法還包括了全新的2 0 1 1 年降低2% 薪資稅 (Payroll Tax) 及延長失業保險金福利（Unemployment Insurance Benefit）。同時新稅法亦包括了20項企業減稅及延長某些企業激勵條款，如獎金折舊（Bonus Depreciation）及企業添置資產可百分之百作為費用報銷至某個上限。

目的

- 建構一個可操作的模型，首先分析股利稅減免的成長和福利效果
- 執行量化分析，評估模型中JGTRRA政策變動的效果大小。

家計部門

- max $\quad U(t)=\int_t^{\infty}\left[\log\frac{C(s)}{e^{\lambda s}}+\gamma\log\left(1-l(s)\right)\right]e^{-(\rho-\lambda)(s-t)}ds$

- st. $(1+t_C)C+\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_0^N e_i V_i di\right)=(1-t_L)Wle^{\lambda t}+(1-t_D)\int_0^N D_i di+(1-t_V)\int_0^N e_i\dot{V}_i di-\boldsymbol{T}$

  - $d\equiv\frac{D_i}{e_i}=\text{dividend per share}=\frac{\text{total dividends paid}}{\text{total number of shares}}$

家計部門

- FOC:
  - C: $\frac{1}{C} = v(1 + t_C)$ ... (儲蓄決策)資金供給 $\Rightarrow -\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{v}}{v}$
  - l: $\frac{\gamma}{1-l} = v(1 - t_L)We^{\lambda t}$ ...勞動供給
  - e: $\underbrace{(1 - t_D)\frac{d}{V} + (1 - t_V)\frac{\dot{V}}{V}}_{\text{股票需求(required return)}} = \underbrace{(\rho - \lambda) - \frac{\dot{v}}{v}}_{\text{儲蓄要求的報酬}} \equiv \boldsymbol{r}$ ...股票需求決策

最終財生產廠商

- max $\left(P_Y Y - \int_0^N P_i X_i di - \int_0^N W L_i di\right)$
  - where $Y = \int_0^N X_i^{\theta} (Z_i^{\alpha} Z^{1-\alpha} L_i)^{1-\theta}\, di,\ \ 0 < \theta, \alpha < 1,\ \ P_Y \equiv 1,\ \ Z = \int_0^N \frac{Z_j}{N} dj$

- FOC
  - X_i: $\theta X_i^{\theta-1} (Z_i^{\alpha} Z^{1-\alpha} L_i)^{1-\theta} = P_i \quad \Rightarrow \quad X_i = \left(\frac{\theta}{P_i}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} Z_i^{\alpha} Z^{1-\alpha} L_i$ …中間財X_i的需求
  - L_i: $W = (1-\theta) X_i^{\theta} (Z_i^{\alpha} Z^{1-\alpha} L_i)^{1-\theta} \frac{1}{L_i}$ …勞動需求

最終財生產廠商

- 利潤分配:

  - $\int_0^N P_i X_i \, di = \int_0^N \theta X_i^{\theta-1} (Z_i^\alpha Z^{1-\alpha} L_i)^{1-\theta} X_i \, di = \theta Y$

  - $WL = \int_0^N WL_i \, di = \int_0^N (1-\theta) X_i^\theta (Z_i^\alpha Z^{1-\alpha} L_i)^{1-\theta} \, di = (1-\theta)Y$

    - where $L = \displaystyle\int_0^N L_i \; di$

中間財部門—既存廠商

- $\Pi_i = X_i(P_i - 1) - \phi Z$
  - $Z = \int_0^N \frac{Z_j}{N} dj$
- $(1 - t_\Pi)\Pi_i = D_i + R_i$
  - D_i：總(現金)股利 $(= d \cdot \bar{e}_i)$，$\bar{e}_i$：股數 (標準化成1)
- $I = R_i + 0$
  - 不以增發股票或債券來籌措投資資金
- $\dot{Z}_i = I$
- 他面對的需求曲線：$X_i = \left(\frac{\theta}{P_i}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} Z_i^\alpha Z^{1-\alpha} L_i$

中間財部門—既存廠商

- $\Omega_i = \bar{e}_i V_i$
  - Ω_i：market value
  - $\bar{e}_i$ ：股數 (標準化成1)
  - V_i：股價
- 導出的公司目標：
  - $\max \quad \Omega(t) = \int_t^{\infty} \omega_i e^{-\int_t^{\tau} \Gamma_i d\xi} d\tau$
    - $\omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1-t_D)}{(1-t_V)}[(1-t_\Pi)\Pi_i - R_i]$
    - $\Gamma_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r}{(1-t_V)}$ and $r \equiv (\rho - \lambda) + \frac{\dot{C}}{C}$
  - s.t. $\dot{Z}_i = I = R_i$ & $X_i = \left(\frac{\theta}{P_i}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} Z_i^{\alpha} Z^{1-\alpha} L_i$

中間財部門—既存廠商

- FOC
  - X_i: $\frac{(1-t_D)(1-t_\Pi)}{(1-t_V)}(P_i-1)-\mu=0 \;\Rightarrow\; \mu=\frac{(1-t_D)(1-t_\Pi)}{(1-t_V)}(P_i-1)$
  - μ: $\left(\frac{\theta}{P_i}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} Z_i^{\alpha}Z^{1-\alpha}L_i = X_i \;\Rightarrow\; X_i=\theta^{\frac{2}{1-\theta}}Z_i^{\alpha}Z^{1-\alpha}L_i$ ...中間財X_i的產量決策
  - P_i: $\underbrace{\frac{(1-t_D)}{(1-t_V)}(1-t_\Pi)X_i}_{MR}-\underbrace{\mu\frac{1}{1-\theta}\left(\frac{\theta}{P_i}\right)^{\frac{1}{1-\theta}-1} Z_i^{\alpha}Z^{1-\alpha}L_i\left(\frac{\theta}{P_i^2}\right)}_{MC}=0 \;\Rightarrow\; P_i=\frac{1}{\theta}$ ...定價決策
  - R_i: $Q=\frac{(1-t_D)}{(1-t_V)}$
  - Q: $\dot{Z}_i=R_i$ ...投資決策=保留盈餘決策

$$\rightarrow D_i=(1-t_\Pi)\Pi_i-R_i=(1-t_\Pi)[X_i(P_i-1)-\phi Z]-R_i$$

  - Z_i: $\underbrace{\frac{\alpha}{Z_i}\mu\left(\frac{\theta}{P_i}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} Z_i^{\alpha}Z^{1-\alpha}L_i}_{\text{要素}z_i\text{的邊際產值}} = \underbrace{Q\Gamma_i}_{\text{稅後的使用者成本}}$ ...智慧財Z_i的要素需求(資金的需求)

$$\Rightarrow r=(1-t_V)(1-t_\Pi)\alpha\frac{1-\theta}{\theta}\frac{X_i}{Z_i}=(1-t_V)(1-t_\Pi)\alpha\left(\frac{\Pi_i}{Z_i}+\phi\frac{Z}{Z_i}\right)$$

中間財部門—既存廠商

- ***Balance of Sheet***

$$\Omega(t) = \frac{(1-t_D)}{(1-t_V)} \int_t^{\infty} \left[(1-t_\Pi) \left(\frac{X}{Z} \frac{1-\theta}{\theta} - \phi \right) Z - \dot{Z} \right] e^{-\int_t^{\tau} \Gamma d\xi} d\tau$$

……

$$\Rightarrow \quad \Omega(t) = \bar{e}V = \left[\frac{1}{\alpha} - (1-t_\Pi)\phi \frac{1}{\Gamma} \right] QZ$$

中間財部門—潛在廠商

- 當既存廠商股價(市值)超過某比例的固定成本，以某比例的Z價值表示，則新廠就發行新股籌資進入設廠

- If $\Omega(t) = \bar{e}_i V_i \geq \beta Z$, then new firms entry $(\dot{N} > 0)$ and issue new equity

$$\Rightarrow \ \bar{e}_i \dot{V}_i \geq \beta \dot{Z}_i \qquad \text{...股票供給價格}$$

政府

- $G = t_L WL + t_C C + t_\Pi \Pi N + t_D DeN + t_V \bar{e}\dot{V}N + \boldsymbol{T}$

- $G = gY$, $g < 1$

資源限制

- 對稱均衡下:
  - $P_i = \frac{1}{\theta}, \mu = \frac{(1-t_D)}{(1-t_V)}(1 - t_\Pi)\left(\frac{1}{\theta} - 1\right), Q = \frac{(1-t_D)}{(1-t_V)}$
  - $Z = Z_i$
  - $L = \int_0^N L_i di = NL_i$
  - $L = le^{\lambda t}$
  - $N = ne^{\lambda t}$

資源限制

- 資源限制：
  - $Y = NPX + WL$
  - $N\Pi = N[X(P-1) - \phi Z]$
  - $(1 - t_{\Pi})\Pi = d\bar{e} + R$
  - $I = R$
  - $\dot{\bar{e}} = 0$

- $Y = C + G + N(X + \phi Z + R) + \dot{e}NV + \beta Z\dot{N}$ …商品市場均衡
  - $\dot{e} = 0$

$$\rightarrow \quad Y = C + G + N(X + \phi Z + R) + \beta Z\dot{N}$$

對稱均衡下的市場結清

- **勞動市場均衡：**
  - 勞動需求：$W=(1-\theta)X_i^{\theta}(Z_i^{\alpha}Z^{1-\alpha}L_i)^{1-\theta}\frac{1}{L_i}$
  - 勞動供給：$\frac{\gamma}{1-l}=v(1-t_L)We^{\lambda t}$ (其中，v是$\frac{1}{C}=v(1+t_C)$)
  - 對稱均衡：
    - $\frac{\gamma C}{1-l}\frac{(1+t_C)}{(1-t_L)}=We^{\lambda t}\rightarrow\frac{(1+t_C)}{(1-t_L)}\frac{\gamma}{(1-\theta)}\frac{C}{Y}=\theta^{\frac{2\theta}{1-\theta}}\frac{Z}{Y}e^{\lambda t}-1$
    - $\rightarrow\ l=\frac{1}{\Psi c+1}$
      - where $\Psi=\frac{(1+t_C)}{(1-t_L)}\frac{\gamma}{(1-\theta)}$ and $c=\frac{C}{Y}$
    - $l=l(c)\rightarrow\frac{\dot{l}}{l}=\frac{-\Psi c_0}{\Psi c_0+1}\frac{\dot{c}}{c}$

對稱均衡下的市場結清

- **中間財的市場均衡：**
  - 定價決策：$P_i = \frac{1}{\theta}$
  - 中間財X_i的需求：$X_i = \left(\frac{\theta}{P_i}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} Z_i^{\alpha} Z^{1-\alpha} L_i$
  - 中間財X_i的產量(供給)：$X_i = \theta^{\frac{2}{1-\theta}} Z_i^{\alpha} Z^{1-\alpha} L_i$
  - 對稱均衡：$\rightarrow X = \theta^{\frac{2}{1-\theta}} Z L_i \rightarrow \frac{X}{Z} = \theta^{\frac{2}{1-\theta}} L_i = \theta^{\frac{2}{1-\theta}} \frac{l}{n}$

$$\rightarrow \frac{\dot{X}}{X} - \frac{\dot{Z}}{Z} = \frac{-\Psi c_0}{\Psi c_0 + 1} \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{n}}{n}$$

- 均衡工資：$W = (1-\theta)\theta^{\frac{2\theta}{1-\theta}} Z = (1-\theta)\Omega Z$, where $\Omega \equiv \theta^{\frac{2\theta}{1-\theta}}$

對稱均衡下的市場結清

- **資金市場均衡：**
  - 資金供給：$(\rho-\lambda)-\frac{\dot{v}}{v}\equiv \boldsymbol{r}$
    - where $\frac{\dot{v}}{v}=-\frac{\dot{C}}{C}$
  - 資金的需求：$\frac{\alpha}{Z_i}\mu\left(\frac{\theta}{P_i}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}Z_i^{\alpha}Z^{1-\alpha}L_i=Q\Gamma_i=Q\frac{r}{(1-t_V)}$
  - 對稱均衡：
    - $(\rho-\lambda)+\frac{\dot{C}}{C}=(1-t_V)(1-t_\Pi)\alpha\frac{1-\theta}{\theta}\frac{X}{Z}$

$$\rightarrow \frac{\dot{C}}{C}=(1-t_V)(1-t_\Pi)\alpha\frac{1-\theta}{\theta}\theta^{\frac{2}{1-\theta}}\frac{l}{n}-\rho+\lambda$$

對稱均衡下的市場結清

- **智慧財Z_i市場均衡：**
  - Z_i的生產技術：$\dot{Z}_i = R_i$
  - Z_i的需求：$\frac{\alpha}{Z_i}\mu\left(\frac{\theta}{P_i}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} Z_i^{\alpha} Z^{1-\alpha} L_i = Q\Gamma_i$

對稱均衡下的市場結清

- **股票市場均衡：**
  - 股票需求價格：$(1-t_D)\frac{d}{V}+(1-t_V)\frac{\dot{V}}{V}=(\rho-\lambda)+\frac{\dot{C}}{C}$
    - 其中，$D=d\bar{e}=(1-t_\Pi)\Pi-R=(1-t_\Pi)\left(X\frac{1-\theta}{\theta}-\phi Z\right)-R$
    - 且 $(\rho-\lambda)+\frac{\dot{C}}{C}=\boldsymbol{r}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{t_V})(\mathbf{1}-\boldsymbol{t_\Pi})\boldsymbol{\alpha}\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\theta}}\frac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{Z}}$
  - 股票需求價格可被改寫成：

$$(1-t_V)\dot{V}=rV-(1-t_D)\left[(1-t_\Pi)\left(X\frac{1-\theta}{\theta}-\phi Z\right)-R\right]$$

  - 股票供給價格：
    - 舊廠不新增股票，新廠發行股票
    - $\bar{e}_i\dot{V}_i\geq\beta\dot{Z}_i$

對稱均衡下的市場結清

- **股票市場均衡：**
  - 對稱均衡：

$$(1-t_V)\beta\dot{Z}=r\beta Z-(1-t_D)\left[(1-t_\Pi)\left(X\frac{1-\theta}{\theta}-\phi Z\right)-R\right]$$

- 其中，$\boldsymbol{r=(1-t_V)(1-t_\Pi)\alpha\frac{1-\theta}{\theta}\frac{X}{Z}}$

$$\rightarrow\left(1-t_V-\frac{1-t_D}{\beta}\right)\frac{\dot{Z}}{Z}=\left[(1-t_V)\alpha-\frac{1-t_D}{\beta}\right](1-t_\Pi)\frac{1-\theta}{\theta}\frac{X}{Z}+\frac{(1-t_D)}{\beta}(1-t_\Pi)\phi$$

對稱均衡下的市場結清

- **Free-entry Condition: —靜止均衡時**

$$\Omega(t) = \beta Z$$

- $\because \Omega(t) = \left[\frac{1}{\alpha} - (1 - t_\Pi)\phi \frac{1}{\Gamma}\right] QZ(t)$
- $\therefore \Omega(t) = \beta Z \quad \rightarrow \quad \left[\frac{1}{\alpha} - (1 - t_\Pi)\phi \frac{1}{\Gamma}\right] Q = \beta \quad \rightarrow \quad \Gamma = \frac{(1-t_\Pi)\phi\alpha(1-t_D)}{(1-t_D)-\alpha\beta(1-t_V)}$
  - condition: $(1 - t_D) > \alpha\beta(1 - t_V)$

$$\rightarrow r = \frac{(1-t_V)(1-t_\Pi)\phi\alpha(1-t_D)}{(1-t_D)-\alpha\beta(1-t_V)} \quad \rightarrow \quad \frac{X}{Z} = \frac{\phi(1-t_D)}{(1-t_D)-\alpha\beta(1-t_V)}\frac{\theta}{1-\theta}$$

- 又因為$\frac{X}{Z} = \theta^{\frac{2}{1-\theta}}\frac{L}{N} = \theta^{\frac{2}{1-\theta}}\frac{l}{n}$

$$\rightarrow l = \frac{\phi(1-t_D)}{(1-t_D)-\alpha\beta(1-t_V)}\frac{\theta}{1-\theta}\theta^{\frac{-2}{1-\theta}}n$$

對稱均衡下的市場結清

- **最終財Y市場均衡：**
  - 最終財Y的生產(供給)：$Y = \int_0^N P_i X_i di + \int_0^N W L_i di$
    - $\rightarrow\ Y = NPX + WL = \frac{1}{\theta^2} NX$
    - $\frac{Y}{Z} = \frac{Y}{X}\frac{X}{Z} = \left(\frac{\theta^2}{N}\right)^{-1} \theta^{\frac{2}{1-\theta}} \frac{L}{N} = \Omega l e^{\lambda t}$
  - 最終財Y的需求：$Y = C + G + N(X + \phi Z + R) + \beta Z\dot{N}$

  - 對稱均衡：
    - $\rightarrow\ Y = C + G + N(X + \phi Z + R) + \beta Z\dot{N}$
    - $\rightarrow \beta\left(\frac{\dot{n}}{n} + \lambda\right) = (1 - c - g - \theta^2)\Omega\frac{l}{n} - \phi - \frac{\dot{Z}}{Z}$

動態體系

- $\frac{\dot{c}}{c}=\frac{\dot{C}}{C}-\frac{\dot{Y}}{Y}=(\Psi c_0+1)\left[(1-t_V)(1-t_\Pi)\alpha\frac{1-\theta}{\theta}\theta^{\frac{2}{1-\theta}}\frac{l(c)}{n}-\rho-\frac{\dot{Z}}{Z}\right]$

- $\frac{\dot{n}}{n}=\frac{1}{\beta}\left[(1-c-g-\theta^2)\Omega\frac{l(c)}{n}-\phi-\frac{\dot{Z}}{Z}\right]-\lambda$

  - 其中，$\left(1-t_V-\frac{1-t_D}{\beta}\right)\frac{\dot{Z}}{Z}=\left[(1-t_V)\alpha-\frac{1-t_D}{\beta}\right](1-t_\Pi)\frac{1-\theta}{\theta}\theta^{\frac{2}{1-\theta}}\frac{l(c)}{n}+\frac{(1-t_D)}{\beta}(1-t_\Pi)\phi$

静止均衡

- $\left(\frac{X}{Z}\right)^* = \frac{\frac{\Sigma}{1-\Sigma}\phi+\frac{\rho}{1-t_\Pi}}{\left[(1-t_V)\alpha-\frac{\alpha-\Sigma}{1-\Sigma}\right]\frac{1-\theta}{\theta}}$, where $\Sigma \equiv \frac{1}{\beta}\frac{1-t_D}{1-t_V}$
- $\frac{l^*}{n^*} = \theta^{\frac{-2}{1-\theta}} \frac{\frac{\Sigma}{1-\Sigma}\phi+\frac{\rho}{1-t_\Pi}}{\left[(1-t_V)\alpha-\frac{\alpha-\Sigma}{1-\Sigma}\right]\frac{1-\theta}{\theta}}$
- $r^* = (1-t_V)(1-t_\Pi)\alpha\frac{1-\theta}{\theta}\left(\frac{X}{Z}\right)^*$
- $\frac{\dot{Z}^*}{Z^*} = r^* - \rho = \ldots = = \frac{\alpha\phi(1-t_\Pi)(1-t_D)-\rho\left(\frac{1-t_D}{1-t_V}-\alpha\beta\right)}{(1-\alpha)(1-t_D)+t_V\left(\frac{1-t_D}{1-t_V}-\alpha\beta\right)}$
- $c^* = 1 - g - \theta^2 + \frac{\rho-\phi-\beta\lambda}{\left(\frac{X}{Z}\right)^*}\theta^2 - (1-t_V)(1-t_\Pi)\alpha\theta(1-\theta)$
- $l^* = \frac{1}{\Psi c^*+1}$

股利所得稅效果

- $$\frac{\partial\left(\frac{X}{Z}\right)^*}{\partial t_D}=\frac{\partial\Sigma}{\partial t_D}\frac{\partial\left(\frac{X}{Z}\right)^*}{\partial\Sigma}=\left(\frac{1}{\beta}\frac{-1}{1-t_V}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1-\theta}{\theta}}\frac{1}{(1-\Sigma)^2}\frac{-\left(\phi\alpha t_V+\frac{\rho(1-\alpha)}{1-t_\Pi}\right)}{\left[(1-t_V)\alpha-\frac{\alpha-\Sigma}{1-\Sigma}\right]^2}>0$$
- $$\frac{\partial\left(\frac{\dot{Z}^*}{Z^*}\right)}{\partial t_D}=\frac{[\alpha\phi(1-t_\Pi)t_V+\rho(1-\alpha)]\alpha\beta}{\left[(1-\alpha)(1-t_D)+t_V\left(\frac{1-t_D}{1-t_V}-\alpha\beta\right)\right]^2}>0$$
- 經濟直覺：
  - 作業

結論

- JGTRRA產生了低的均衡成長，雖然事實上，經濟體系的儲蓄和就業比例是上升。
- 最重要的是，它造成了經濟成長率從2%掉到了1.08%，從而產生出19.34%的每人消費的福利損失。

- 經濟直覺
  - Homework

- The End