投資

總體經濟理論(一)

前言

- 兩個主要理由
  1. 廠商的投資(需求)和家計的儲蓄(供給)共同決定了一個(封閉)經濟體的多少產出被用去投資；結果，投資需求對長期的生活水準是相當重要的。
  2. 投資是高度變異的(volatile)；因此，投資需求對短期波動(fluctuation)也是重要的。
- 投資決策與資本的使用者成本(User Cost of Capital)
  - 靜態觀點
  - 動態觀點

計畫的資本存量

- 廠商租用資本從事生產，租用價格(rental price)是r_K
- 利潤函數：
  - $\pi(K, X_1, X_2, \dots, X_n) - r_K K$
    - K：資本存量
    - X_j：其他要素。在本單元視為外生給定
    - 假設：$\pi_K > 0, \pi_{KK} < 0$
      - $MPK > 0$
      - MPK遞減

計畫的資本存量

- 利潤函數(續)：
  - FOC:

$$\pi_K(.) = r_K \quad \text{... 最適資本需求}$$

  - 資本需求曲線：$\frac{\partial K}{\partial r_K} = \frac{1}{\pi_{KK}(.)} < 0$

- 檢討：大部份廠商都不是用租機器來生產，以致於實證上沒有對應的租用價格r_K。因此，產生了很多有關user cost of capital的文獻。

投資決策：新古典觀點

- 資本的使用者成本(user cost of capital)
  - 假設資本其實質的市場價格(real market price of capital)是p_k
  - 廠商在賣出資本財和持續使用資本財之間做選擇
  - 持續持有資本財，會面臨3種成本：
    1) 因沒賣出資本財，所以失去其引伸出來利息收入：$p_k \cdot r(t)$
       - $r(t)$：實質利率
    2) 會遭受資本財的折舊：$p_k \cdot \delta$
       - δ：折舊率
    3) 資本財價值(價格)的變動利得(或損失)：$-\dot{p}_k$

投資決策：新古典觀點

- 資本的使用者成本(user cost of capital)(續)
  - 因此，資本的使用者成本總共是：

$$r_k = p_k \cdot \left[r(t) + \delta - \frac{\dot{p}_k}{p_k} \right]$$

  - 不過，投資的租稅抵減、資本所得等租稅對user cost of capital有很大的影響
  - 進一步考量租稅因素對資本的使用者成本的修正
    - 上式沒有考量稅的因素

投資決策：新古典觀點

- 資本的使用者成本(user cost of capital)(續)
  - 考慮投資抵減(investment tax credit)
    a. 投資支出的f比例能夠抵減營利事業所得稅(corporate income tax)：
       $+f \cdot p_k(r(t)+\delta)K$
    b. 對稱之下，任何賣出資本財的收入的f比例也是要課稅的：$-f \cdot \dot{p}_k K$
    - 假設邊際的公司所得稅率是τ
  - 稅後的資本使用者成本是：

$$r_k = p_k \cdot \left(r(t)+\delta-\frac{\dot{p}_k}{p_k}\right)K - \tau \cdot \left[\underbrace{f \cdot p_k(r(t)+\delta)K}_{\text{a.}} - \underbrace{f \cdot \dot{p}_k K}_{\text{b.}}\right]$$

$$\therefore r_k = (1-\tau f) \cdot p_k\left(r(t)+\delta-\frac{\dot{p}_k}{p_k}\right)K$$

投資決策：新古典觀點

- 小結：
  - 均衡時，我們知道，資本的邊際產值(marginal revenue product of capital), MPK會等於資本財租用價格 $r_k(t)$，會等於資本的使用者成本。因此，新古典投資決策聯繫起資本財的租用價格和其對應的資本財價值。

$$MPK = r_k$$

  - 租稅對使用者成本有很大的影響，也因此影響了計畫的資本存量，和投資。
    - 財政政策對投資是有影響力的

投資決策：新古典觀點

- 新古典投資決策的問題：
  1. 投資率是無窮大
     - 新資本財的建置瞬間完成，並投入生產
  2. 無法確認是透過哪種預期影響了投資需求
     - 廠商的最適投資決策只是依據「資本的當期邊際生產收益(current marginal revenue product of capital)等於其(資本)當期的使用者成本」，而跟資本財的預期未來邊際生產收益或資本財未來使用者成本無關。

投資決策：新古典觀點

- 新古典投資決策的問題(續)：
  - 標準的修正辦法之一：強調 “改變資本存量的目前成本”
    - 調整成本(adjustment costs)

  - 調整成本(adjustment costs)
    1) 內部調整成本(internal adjustment costs):
       - Eisner and Strotz (1963)
    2) 外部調整成本(external adjustment costs):
       - Foley and Sidrauski (1970)

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- 這裡考量的是<u>內部調整成本</u>
  - 當廠商面對資本存量改變時，直接所產生的調整成本。
    - 例如：安裝新資本財和訓練員工來操作新機器設備
  - 這種調整成本的存在，使得投資率不再是無窮大
  - 這就是著名的<u>投資的q理論</u>(the q theory model of investment)
    - Tobin q是資本財的市場價值(physical asset’s market value)與資本財的重置成本(replacement value)之比值
      - 參閱Appendix 3的簡單證明
    - Brainard and Tobin (1968, AER)、Tobin (1969, JMCB)

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- 假設
  - 考量一個具有N家同質廠商的產業；產品市場是完全競爭，且整個產業的產品需求是負斜率
  - 除資本這項要素之外，其餘的要素供給是完全有彈性
  - 生產技術是CRTS
  - 不包含資本建置之調整成本在內的實質利潤，代表性廠商他的實質利潤是自身資本存量$k(t)$的比例函數，並隨整個產業資本存量$K(t)$而遞減。將之寫成：

$$\pi\big(K(t)\big)\cdot k(t), \qquad \pi'(\cdot) < 0$$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- 假設(續)
  - 調整成本：$C(\dot{k})$
    - 它是資本(存量)變動率的凸函數(convex function)
      - (i) $C(0) = 0$, (ii) $C'(0) = 0$, (iii) $C''(\cdot) > 0$
    - 這假設表示，廠商增加/減少它的資本存量，都要耗費成本，而且邊際調整成本隨著調整幅度而增加
  - 資本財的購買價格是常數，且等於1
    - 所以，無外部調整成本
  - 無折舊(簡化用)，所以，$\dot{k}(t) = I(t)$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- 廠商的目標函數(continuous-time)
  - 極大化利潤？或極大化證券的市場價值？
    - 後續再談，先看看離散模型的處理方式
  - 極大化這些利潤的現值

$$\max\ \Pi = \int_{t=0}^{\infty} \left[\pi\big(K(t)\big)k(t) - I(t) - C\big(I(t)\big)\right] \cdot e^{-rt}\, dt,$$
$$\text{where}\ \ I(t) = \dot{k}(t)$$

    - 簡化假設：$r = \text{constant}$
    - 最適化求解： **數學基礎參閱Appendix 4**

一年複利m次$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot t}$；一年複利無限次$\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot t}\right] = e^{rt}$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

1. Discrete-time version的廠商目標函數：

$$\tilde{\Pi} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t}[\pi(K_t)k_t - I_t - C(I_t)], \qquad \text{where } I_t = k_{t+1} - k_t$$

2. 廠商最大化問題的Lagrangian函數

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t}[\pi(K_t)k_t - I_t - C(I_t)] + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t (I_t - k_{t+1} + k_t)$$

- 其中 $q_t = (1+r)^t \cdot \lambda_t$ (在$t+1$時點額外增加一單位資本，對廠商t時點的價值)

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t}[\pi(K_t)k_t - I_t - C(I_t) + q_t(I_t - k_{t+1} + k_t)]$$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

3. FOC:

1) I_t: $\frac{1}{(1+r)^t}[-1-C'(I_t)+q_t]=0 \quad \Rightarrow \quad q_t=1+C'(I_t)$

- 在投資成本設定為1之下，廠商投資直到所獲得資本的價值(q_t)等於該資本的成本($1+C'(I_t)$)

2) k_t: $\frac{[\pi(K_t)-q_t]}{(1+r)^t}+\frac{q_{t+1}}{(1+r)^{t+1}}=0 \quad \Rightarrow \quad (1+r)\pi(K_t)=(1+r)q_t-q_{t+1}$

$$\xrightarrow{\text{def. } \Delta q_t \equiv q_{t+1}-q_t} \pi(K_t)=\frac{1}{1+r}(rq_t-\Delta q_t)$$

- 資本的邊際收益產量(marginal revenue product) = 一單位資本的機會成本之現值
  - 機會成本包括：放棄rq_t的利息收入與資本利得的回沖 (假設零折舊)
- 類似於，$r_k(t)=p_k\cdot\left[r(t)+\delta-\frac{\dot{p}_k}{p_k}\right]$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

3. FOC: (續)

   3) TVC: $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+r)^t}q_t k_t = 0$

   - 由最適資本選擇: $\pi(K_t) = \frac{1}{1+r}(rq_t - \Delta q_t) \Rightarrow \underbrace{q_t}_{\text{資本財價值}} = \underbrace{\pi(K_t) + \frac{1}{1+r}q_{t+1}}_{\text{資本對廠商邊際貢獻+資本於下期的現值}}$, $\forall t$

$$\Rightarrow q_0 = \pi(K_0) + \frac{1}{1+r}q_1 = \pi(K_0) + \frac{1}{1+r}\left[\pi(K_1) + \frac{1}{1+r}q_2\right] = \ldots$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\sum_{t=0}^{T-1}\frac{1}{(1+r)^t}\pi(K_t) + \frac{1}{(1+r)^T}q_T\right\}$$

   - 額外增加一單位資本對廠商目標函數的總和邊際貢獻：$MB = \lim_{T\to\infty}\left\{\sum_{t=0}^{T-1}\frac{1}{(1+r)^t}\pi(K_t)\right\}$
   - 對比之後，$q_0 = MB \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{(1+r)^T}q_T = 0$
   - 因此，廠商總資本存量的無窮遠期的價值亦為零

橫斷 Transversality condition: $\boldsymbol{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+r)^t}q_t k_t = 0}$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- 廠商最大化問題的*current-value* Hamiltonian：

$$\mathcal{H}\big(k(t),I(t)\big)=\pi\big(K(t)\big)k(t)-I(t)-C\big(I(t)\big)+q(t)\cdot I(t)$$

  - 控制變數：$I(t)$、狀態變數：$k(t)$、共狀態變數：$q(t)$
- FOC：
  - $\frac{\partial\mathcal{H}(k(t),I(t))}{\partial I(t)}=0 \;\Rightarrow\; q(t)=1+C'\big(I(t)\big)$
  - $\frac{\partial\mathcal{H}(k(t),I(t))}{\partial k(t)}=-\dot{q}(t)+rq(t) \;\Rightarrow\; \pi\big(K(t)\big)=-\dot{q}(t)+rq(t)$
  - $\frac{\partial\mathcal{H}(k(t),I(t))}{\partial q(t)}=\dot{k}(t) \Rightarrow\; I(t)=\dot{k}(t)$
  - $\lim_{t\to\infty} e^{-rt}q_t k_t=0$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- $q(t)$的意涵：
  - q彙集了有關未來廠商投資決策的相關資訊；
  - q顯示了額外一元資本如何地影響了廠商利潤的現值；
  - 當q值是高的，廠商將想增加它的資本存量；當q值是低的，廠商將想減少它的資本存量。
    - $q(t) = 1 + C'\big(I(t)\big)$
  - q是一單位資本所創造的所有未來邊際收益產量(MRP)的現值
    - $q_t = \sum_t^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \pi(K_t)$；或$q(t) = \int_t^{\infty} e^{-r(\tau-t)} \pi(K_\tau) d\tau$
    - 增加一單位資本存量能提高廠商利潤現值q，並因此提高廠商價值q。
    - 因此， q的另一種解釋是：q是一單位資本財的市場價值(market value)

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- $q(t)$的意涵：(續)

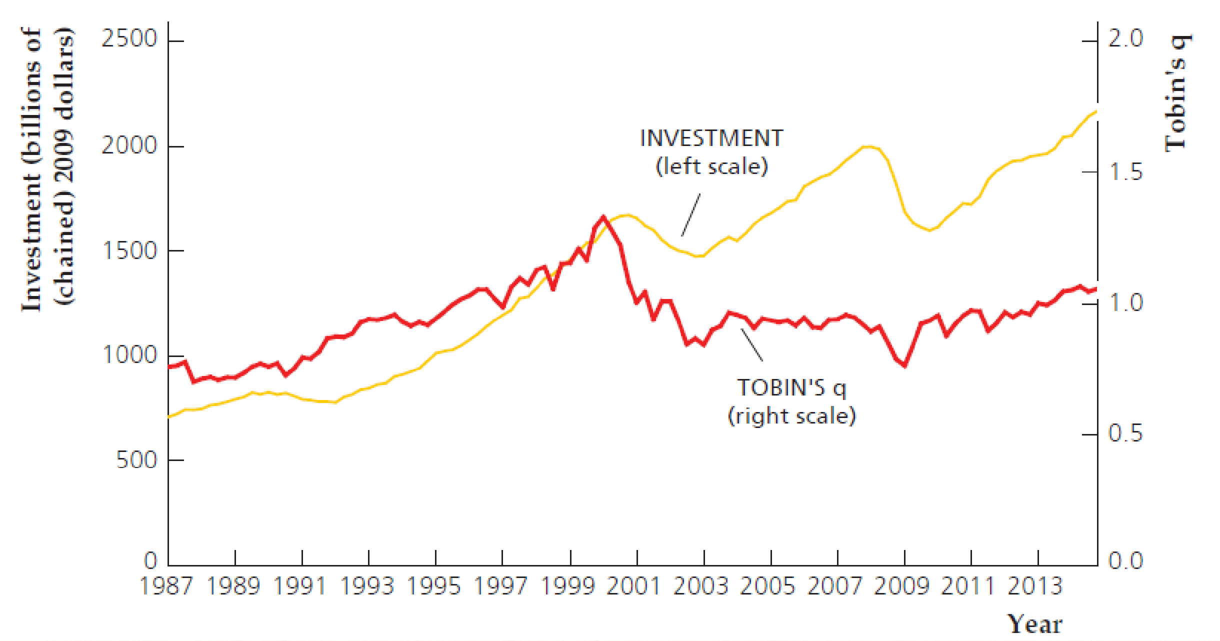
$$\underbrace{\sum_t^{\infty}\frac{1}{(1+r)^t}\pi(K_t)}_{\text{資本財的市場價值}} = q_t = \underbrace{1+C'\big(I(t)\big)}_{\text{資本財的重置成本}}$$

- Tobin *marginal* q: 額外一單位資本的市場價值對資本的重置成本之比值
  - 均衡時，$\pi(K_t)=\pi(K^*),\ \forall t \ \Rightarrow\ \dfrac{\pi(K^*)}{r}=q^*(t)=1+C'\big(I^*(t)\big)$

    $$\Rightarrow\ q^*(t)=1=\frac{\pi\big(K^*(t)\big)/r}{1+C'\big(I^*(t)\big)}=\frac{\text{額外一單位資本財的廠商市場價值}}{\text{額外一單位資本財的重置成本}}\text{...不好衡量}$$

  - Tobin *average* q: $\dfrac{\text{廠商的總市場價值}}{\text{資本財的總重置成本}}$
  - 調整成本函數：
    - 若規模報酬遞減，則*marginal* q < *average* q (因廠商終生利潤上升比例<廠商資本存量增加的比例)
    - 若規模報酬固定，則*marginal* q = *average* q (Hayashi, 1982)

Investment and Tobin's q, 1987Q1–2014Q4



Source: Investment from Abel et al., (2015)'s calculations based on real nonfinancial fixed investment quantity index and real nonfinancial fixed investment in 2009 dollars from Bureau of Economic Analysis, downloaded from St. Louis Fed Website at *research.stlouisfed.org/fred2/*series *B008RA3Q086SBEA* and *PNFIC1*; Tobin's *q* from Federal Reserve Flow of Funds Accounts, Table B.102, for nonfarm nonfinancial corporate business, market value plus liabilities divided by assets.

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- 例題：Chiang (1992, pp.212-214): Eisner-Strotz Model

- $$\begin{cases} \max \int_0^T [\pi(k) - C(I)]e^{-\rho t}\, dt\,,\ C = \text{含投資在內的調整成本} \\ s.t.\ \ \dot{k} = I \ \text{ and }\ boundary\ conditions \end{cases}$$

1. (present-value) Hamiltonian function

$$\mathcal{H}(k, I) = [\pi(k) - C(I)]e^{-\rho t} + \lambda I$$

2. current-value Hamiltonian

$$\mathcal{H}_c(k, I) = \pi(k) - C(I) + qI$$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析
  - 數學基礎：參考Appendix 2

1. $\boldsymbol{q(t) = 1 + C'\big(I(t)\big)}$表示， $I(t)$是q的增函數
   - 而I和K的關係，只在廠商數目N。 $(\because I \cdot N = \dot{k} \cdot N = \dot{K})$

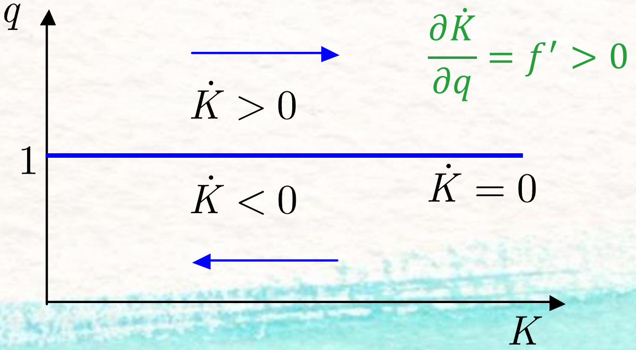
$\therefore I = (C')^{-1}(q-1) \;\Rightarrow\; NI = N(C')^{-1}(q-1) \equiv f(q) \;\Rightarrow\; \dot{K}(t) = f(q(t)),$

- $f'(\cdot) > 0,\ f(1) = 0$

1) $q = 1 \;\Rightarrow\; \dot{K} = 0$

2) $q > 1 \;\Rightarrow\; \dot{K} > 0$

3) $q < 1 \;\Rightarrow\; \dot{K} < 0$



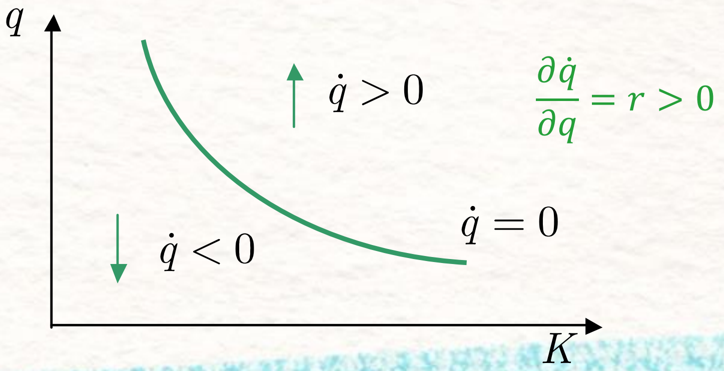
具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析 – 續

  2. $\dot{q}(t) = rq(t) - \pi\big(K(t)\big)$

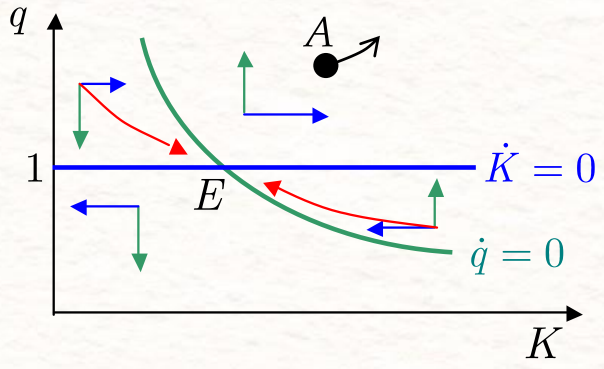
     - 當$rq(t) = \pi\big(K(t)\big)$，則$\dot{q}(t) = 0$，亦即$q(t) =$ constant，或

$$q(t) = \frac{\pi\big(K(t)\big)}{r} \text{ with } \pi'\big(K(t)\big) < 0$$ …在(q, K)平面上是負斜率



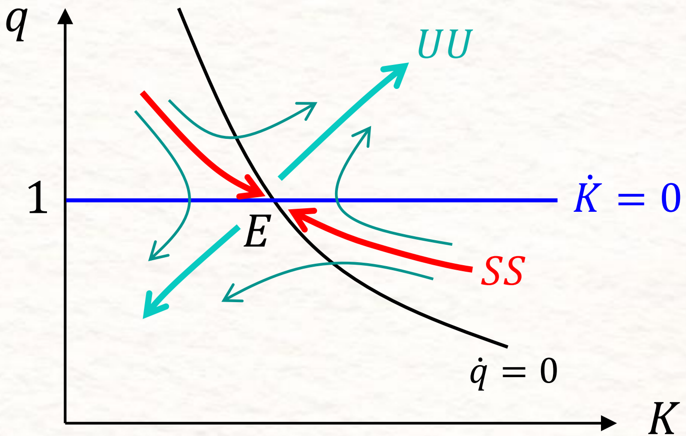
具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析 – 續
  - 兩特性根是如何呢?
    - 一正根、一負根
  - A點：
    - $q > 1$：
      - 資本財的市場價值>資本財的購買成本。廠商會增加資本存量，從而$\dot{K} > 0$
    - 高的K：
      - 利潤因此較低($\pi(K) < rq$)。只有當人們預期q會上升，才會發生這種情形。所以$\dot{q} > 0$。
  - 因此，給定期初的K_0值，q與K將沿著馬鞍路徑(紅色路徑)移動到E點，體系存在唯一均衡(unique equilibrium)。
  - 長期均衡點E點，被$q = 1$所描述。



具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析 – 續



$$\begin{cases} \dot{K}(t) = f(q) \\ \dot{q}(t) = rq(t) - \pi(K) \end{cases}$$

Ex.: $C(I) = \frac{c_0}{2} I^2, \pi(K) = \alpha K^{\alpha-1}, \alpha \in (0,1)$

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = \dfrac{q-1}{c_0} \\ \dot{q}(t) = rq(t) - \alpha K^{\alpha-1} \end{cases}$$

- 相位圖上任一點的時間路徑是什麼呢？須由general solution回答

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析 – 續

$$Ex.: \begin{cases} \dot{K}(t) = \dfrac{q-1}{c_0} \\ \dot{q}(t) = rq(t) - \alpha K^{\alpha-1} \end{cases}$$

1) **Particular solution** ($\dot{K} = 0$ and $\dot{q} = 0$) 且$K^p = \bar{K}, q^p = \bar{q}$

$$\therefore \begin{cases} 0 = \dfrac{\bar{q}-1}{c_0} \\ 0 = r - \alpha K^{\alpha-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^p = \bar{q} = 1 \\ K^p = \bar{K} = (\dfrac{r}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}} \end{cases}$$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析 – 續

$$Ex.: \begin{cases} \dot{K}(t) = \dfrac{q-1}{c_0} \\ \dot{q}(t) = rq(t) - \alpha K^{\alpha-1} \end{cases}$$

2) **Homogenous solution:**

- $\begin{bmatrix} \dot{K}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)K^{\alpha-2} & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{c_0} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{K}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2} & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ q \end{bmatrix}$

- Jacobian matrix: $[J] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2} & r \end{bmatrix}$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q,K)相位圖(phase diagram)分析 – 續
  2) **Homogenous solution: – 續**
     - 令特性根為s，則齊次解$\begin{bmatrix} K^h(t) \\ q^h(t) \end{bmatrix}$的假設解表示成$\begin{bmatrix} Be^{st} \\ \hat{B}e^{st} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} B \\ \hat{B} \end{bmatrix}$為特性向量。因此，假設解的時間微分是$\begin{bmatrix} \dot{K}^h(t) \\ \dot{q}^h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Bse^{st} \\ \hat{B}se^{st} \end{bmatrix}$。
     - 將這些假設解代入齊次微分方程組：$\begin{bmatrix} \dot{K}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2} & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ q \end{bmatrix}$，得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bse^{st} \\ \hat{B}se^{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2} & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Be^{st} \\ \hat{B}e^{st} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2} & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Be^{st} \\ \hat{B}e^{st} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Be^{st} \\ \hat{B}e^{st} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0-s & \dfrac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2} & r-s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ \hat{B} \end{bmatrix} e^{st} = 0$$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析 – 續
  2) **Homogenous solution: – 續**
     - 因為$\begin{bmatrix} 0-s & \frac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2} & r-s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ \hat{B} \end{bmatrix}e^{st}=0$，所以，有意義的解需滿足 $\begin{bmatrix} 0-s & \frac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2} & r-s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ \hat{B} \end{bmatrix}=0$。因此，矩陣$\begin{bmatrix} 0-s & \frac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2} & r-s \end{bmatrix}$要為singular matrix。
     - 由此得到，特性根要滿足：$\begin{vmatrix} 0-s & \frac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2} & r-s \end{vmatrix}=0$，此即特性跟方程式：

$$s^2-rs-\frac{\alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2}}{c_0}=0$$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析 – 續
  2) **Homogenous solution: – 續**
     - 令兩個根為s_1, s_2，則根與係數關係得知：

$$s_1 s_2 = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = Det.(J) = \frac{-\alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2}}{c_0} < 0$$

       - 二根為一正根、一負根，市場動態安定性呈現馬鞍安定(saddle stability)特質
     - 求特性向量：
       1) 當特性根是s_1時，特性向量要滿足$\begin{bmatrix} 0 - s_1 & \frac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2} & r - s_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ \hat{B} \end{bmatrix} = 0$，由此可求得$(0 - s_1)B + \frac{1}{c_0}\hat{B} = 0$，或$\alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2}B + (r - s_1)\hat{B} = 0$，亦即

$$\hat{B} = \frac{s_1}{1/c_0}B \text{，或} \hat{B} = -\frac{\alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2}}{r-s_1}B$$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析 – 續
  2) **Homogenous solution: – 續**
     - 求特性向量：續
       2) 當特性根是s_2時，特性向量要滿足$\begin{bmatrix} 0-s_2 & \frac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2} & r-s_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B' \\ \hat{B}' \end{bmatrix}=0$，由此可求得$(0-s_2)B'+\frac{1}{c_0}\hat{B}'=0$，或$\alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2}B'+(r-s_2)\hat{B}'=0$，亦即

$$\hat{B}'=\frac{s_2}{1/c_0}B'，或\hat{B}'=-\frac{\alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2}}{r-s_2}B'$$

     - 由上求得$\begin{bmatrix} K(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$：$\begin{bmatrix} Be^{s_1t} \\ \hat{B}e^{s_1t} \end{bmatrix}$為一個齊次解；$\begin{bmatrix} B'e^{s_2t} \\ \hat{B}'e^{s_2t} \end{bmatrix}$也是一個齊次解，因此線性組合也會是齊次解，亦即$\begin{bmatrix} K^h(t) \\ q^h(t) \end{bmatrix}=A_1\cdot\begin{bmatrix} Be^{s_1t} \\ \hat{B}e^{s_1t} \end{bmatrix}+A_2\cdot\begin{bmatrix} B'e^{s_2t} \\ \hat{B}'e^{s_2t} \end{bmatrix}$也是一個齊次解，$A_1$和$A_2$是未定係數。
       - 其中，$\begin{bmatrix} Be^{s_1t} \\ \hat{B}e^{s_1t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Be^{s_1t} \\ \frac{s_1}{1/c_0}Be^{s_1t} \end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix} Be^{s_1t} \\ -\frac{\alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2}}{r-s_1}B \end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix} B'e^{s_2t} \\ \hat{B}'e^{s_2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B'e^{s_2t} \\ \frac{s_2}{1/c_0}B'e^{s_2t} \end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix} B'e^{s_2t} \\ -\frac{\alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2}}{r-s_2}B' \end{bmatrix}$
       - 通常為了簡化，令$B=B'=1$，因為我們只需要知道特性向量的比值即可。

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析 – 續
  2) **Homogenous solution: – 續**
     - 所以，齊次解為：$\begin{bmatrix} K^h(t) \\ q^h(t) \end{bmatrix} = A_1 \cdot \begin{bmatrix} e^{s_1 t} \\ \frac{s_1}{1/c_0} e^{s_1 t} \end{bmatrix} + A_2 \cdot \begin{bmatrix} e^{s_2 t} \\ \frac{s_2}{1/c_0} e^{s_2 t} \end{bmatrix}$
     - 令$s_1 < 0 < s_2$，則 Homogenous solution 分別寫成:

$$\begin{cases} K^h = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ q^h = A_1 B_1 e^{s_1 t} + A_2 B_2 e^{s_2 t}, \end{cases} \text{where } B_1 = \frac{s_1}{1/c_0}, B_2 = \frac{s_2}{1/c_0}$$

$$(\text{或} B_1 = \frac{\alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2}}{s_1 - r}, B_2 = \frac{\alpha(1-\alpha)\bar{K}^{\alpha-2}}{s_2 - r})$$

- 特性向量$\begin{bmatrix} 1 \\ B_1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 \\ B_2 \end{bmatrix}$滿足：

$$\begin{bmatrix} 0 - s_i & \frac{1}{c_0} \\ \alpha(1-\alpha)K^{\alpha-2} & r - s_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ B_i \end{bmatrix} = 0\ ;\ i = 1, 2$$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析 – 續

  3) **General Solution:**

$$\begin{cases} K(t) = K^p + K^h = (\frac{r}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}} + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ q(t) = q^p + q^h = 1 + A_1 B_1 e^{s_1 t} + A_2 B_2 e^{s_2 t} \end{cases}, \text{ where } B_1 = \frac{s_1}{1/c_0}, B_2 = \frac{s_2}{1/c_0}$$

- 若$A_1 = 0$，則$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ A_1=0}} q = \lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ A_1=0}} \left(\bar{q} + A_2 B_2 e^{\lambda_2 t}\right) \to \infty \\ \lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ A_1=0}} K = \lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ A_1=0}} \left(\bar{K} + A_2 e^{\lambda_2 t}\right) \to \infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ Divergence

  $\Rightarrow$ 所有$A_1 = 0$時的軌跡，稱unstable arm (稱為UU 線)

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q,K)相位圖(phase diagram)分析 – 續
  3) **General Solution: – 續**

$$\begin{cases} K(t) = K^p + K^h = (\frac{r}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}} + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ q(t) = q^p + q^h = 1 + A_1 B_1 e^{s_1 t} + A_2 B_2 e^{s_2 t} \end{cases}, \text{ where } B_1 = \frac{s_1}{1/c_0}, B_2 = \frac{s_2}{1/c_0}$$

- 若$A_2 = 0$，則$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ A_2=0}} q = \lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ A_2=0}} (\bar{q} + A_1 B_1 e^{s_1 t}) \to \bar{q} \\ \lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ A_2=0}} K = \lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ A_2=0}} (\bar{K} + A_1 e^{s_1 t}) \to \bar{K} \end{cases} \Rightarrow$ Convergence

$\Rightarrow$ 所有$A_2 = 0$時的軌跡，稱stable arm (稱為SS 線)

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析 – 續
  3) **General Solution: – 續**

$$\begin{cases} K(t) = K^p + K^h = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ q(t) = q^p + q^h = 1 + A_1 B_1 e^{s_1 t} + A_2 B_2 e^{s_2 t} \end{cases}, \text{ where } B_1 = \frac{s_1}{1/c_0}, B_2 = \frac{s_2}{1/c_0}$$

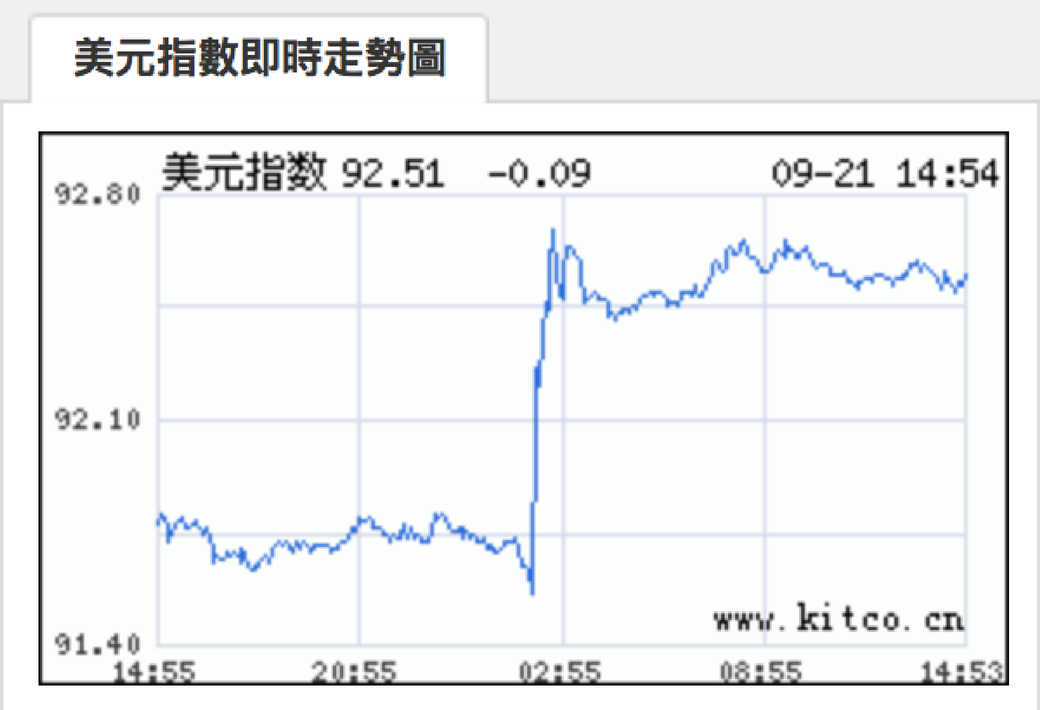
- 相位圖上任一點動態軌跡的一般式斜率為：$\frac{q-\bar{q}}{K-\bar{K}} = \frac{A_1 B_1 e^{s_1 t} + A_2 B_2 e^{s_2 t}}{A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$
  - UU 線斜率：$\lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ A_1=0}} \left.\frac{q-\bar{q}}{K-\bar{K}}\right|_{UU} = \lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ A_1=0}} \left(\frac{A_2 B_2 e^{s_2 t}}{A_2 e^{s_2 t}}\right) = B_2$
  - SS線斜率：$\lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ A_2=0}} \left.\frac{q-\bar{q}}{K-\bar{K}}\right|_{SS} = \lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ A_2=0}} \left(\frac{A_1 B_1 e^{s_1 t}}{A_1 e^{s_1 t}}\right) = B_1$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- (q, K)相位圖(phase diagram)分析 – 續
  3) **General Solution: – 續**
     - 相位圖上任一點動態軌跡的一般式斜率為：$\frac{q-\bar{q}}{K-\bar{K}} = \frac{A_1 B_1 e^{s_1 t} + A_2 B_2 e^{s_2 t}}{A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$
     - $\lim_{t\to\infty} \frac{q-\bar{q}}{K-\bar{K}} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{A_1 B_1 e^{s_1 t} + A_2 B_2 e^{s_2 t}}{A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}} \right) = B_1$
       - 漸進收斂到stable arm:$q - \bar{q} = B_1 (K - \bar{K})$
     - $\lim_{t\to-\infty} \frac{q-\bar{q}}{K-\bar{K}} = \lim_{t\to-\infty} \left(\frac{A_1 B_1 e^{s_1 t} + A_2 B_2 e^{s_2 t}}{A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}} \right) = B_2$
       - 漸進從unstable arm出發:$q - \bar{q} = B_2 (K - \bar{K})$

     $\Rightarrow$ 除SS 線外，其餘所有動態調整路徑(path)都幾乎是由SS線出發、往UU線漸近

2017.09.21 FOMC政策宣布衝擊:出乎市場意料外



Fed決議 將於10月開始縮減資產負債表 聲明全文

- 自聯邦公開市場委員會 (FOMC) 7 月會議後接獲的訊息顯示，今年至目前為止，勞工市場持續轉強，經濟活動一直以溫和的速度上升。近幾個月，就業成長依舊穩固，失業率停留於低點。近幾季，家庭支出以溫和的速度擴張，企業固定投資成長則見加速。以 12 個月為基準，今年整體通貨膨脹與扣除食品與能源後的通貨膨脹均見下降，且低於 2%。平均而言，根據市場衡量的通貨膨脹率仍然偏低，根據調查衡量的長期通貨膨脹預期則少有變動。

Fed決議 將於10月開始縮減資產負債表 聲明全文

- 為符合法定任務，委員會尋求促進最大就業與物價穩定。颶風哈維，艾瑪與瑪莉亞毀壞了許多社區，帶來嚴重苦難。短期而言，與颶風有關的損害與重建將會影響經濟活動，但過去的經驗顯示，中期而言，暴風雨不太可能大幅影響國家經濟進展。因而，委員會持續預期，在貨幣政策立場緩慢調整的情況下，經濟活動將以溫和速度擴張，勞工市場情況將進一步有所轉強。颶風影響過後，汽油與其他某些項目價格上漲，可能暫時推升通貨膨脹，不計這項影響，以 12 個月為基準，預其短期內，通貨膨脹仍將略低於 2%，但中期而言，將持穩於委員會的 2% 目標水準。經濟展望的短期風險，似乎大致平衡，但委員會正密切監督通貨膨脹的發展。

Fed決議 將於10月開始縮減資產負債表 聲明全文

- 基於已實現與預期的勞工市場情況與通貨膨脹，委員會決議維持聯邦基金利率目標範圍於 1% 至 1.25% 不變。貨幣政策立場仍然寬鬆，藉以支持勞工市場情況進一步轉強，並持續重返至 2% 通貨膨脹。在決定未來調整聯邦基金利率目標範圍的時機與幅度方面，委員會將評估有關最大就業與 2% 通貨膨脹目標的已實現與預期的經濟情況。這項評估將考量廣泛訊息，包括勞工市場情況數據，通貨膨脹壓力與通貨膨脹預期指標，及金融與國際發展數據。委員會將密切注意與通貨膨脹目標有關的實際及預期的通貨膨脹發展。委員會預期經濟情況將以確保聯邦基金利率緩慢上升的情況演變。一段時間內，聯邦基金利率可能仍將低於預期長期將持續的水平。然而，聯邦基金利率的確實走勢，將視公布的數據所呈現的經濟展望而定。

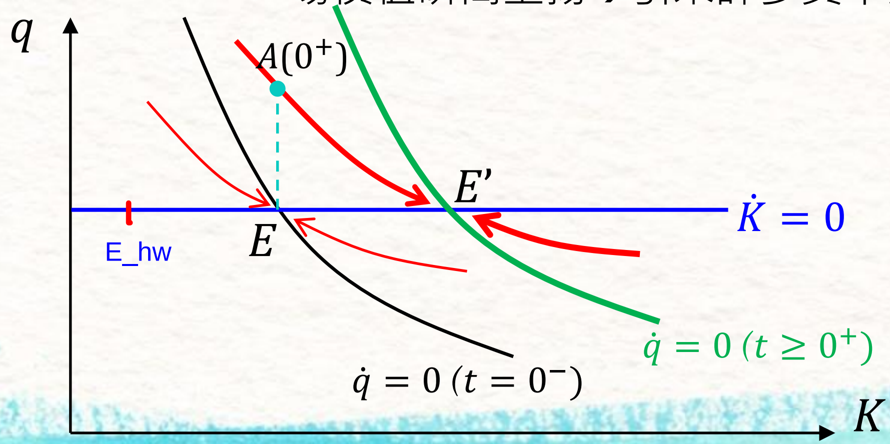
Fed決議 將於10月開始縮減資產負債表 聲明全文

- 10 月，委員會將開始執行資產負債表正常化計劃。這項計劃已於 2017 年 6 月委員會的 "政策正常化的原則與計劃" 所附加的文件中，詳加載明。
  - 60億美元國庫券；40億美元MBS

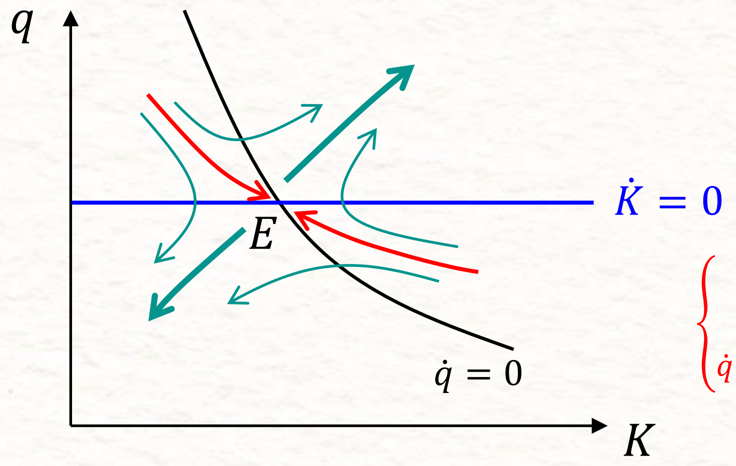
考試跟作業: 未預料之永久性升息　　10/9 deadline (graph, maths, intuition)

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

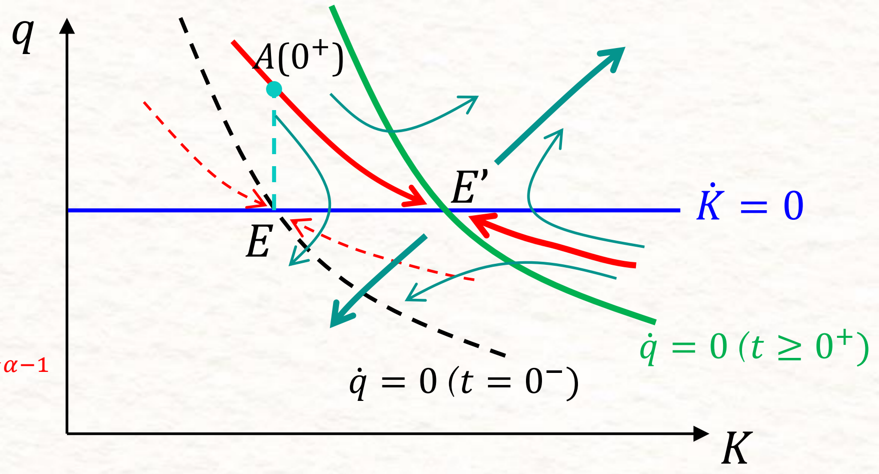
- 衝擊分析：
  1. Effects of a unanticipated permanent increase in output
     1) 未預料所得**永久性**增加→提高了商品需求→料想廠商利潤會上升
     - 但資本財卻不能瞬間擴大→既有資本財對應的價值增加→資本財的市場價值瞬間上揚→引來許多資本投資，資本存量開始累積



- 廠商產出開始增加→產品相對價格逐漸滑落→資本財的利潤與價值也對應著滑落
- 過程繼續，直到資本財價值回落到正常值 $q = 1$的位置
- 投資停止，達成新均衡。



$$\begin{cases} \dot{K}(t) = \dfrac{q-1}{c_0} \\ \dot{q}(t) = rq(t) - \beta\alpha K^{\alpha-1} \end{cases}$$



- Time path corresponded to a unanticipated permanent shock:

$$K(t) = \begin{cases} \bar{K}(\beta_0 = 1); & t = 0^- \\ \bar{K}(\beta_1 > 1) + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}; & t \geq 0^+ \end{cases}$$

參數β：代表未預料所得**永久**增加對邊際收益產量的影響

$$q(t) = \begin{cases} \bar{q}(\beta_0 = 1); & t = 0^- \\ \bar{q}(\beta_1 > 1) + A_1 B_1 e^{s_1 t} + A_2 B_2 e^{s_2 t}; & t \geq 0^+ \end{cases}$$

- 待解參數：A_1、A_2
- 條件：(1) Continuity Condition：$K_{0^-} = K_{0^+}$。(2) Transversality Condition：$A_2 = 0$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

1. Effects of a unanticipated permanent increase in output

- 條件(1)：Continuity Condition：$K_{0^-} = K_{0^+}$。

$$\Rightarrow \bar{K}(\beta_0) = \bar{K}(\beta_1) + A_1 e^{s_1 \cdot 0^+} + A_2 e^{s_2 \cdot 0^+}$$

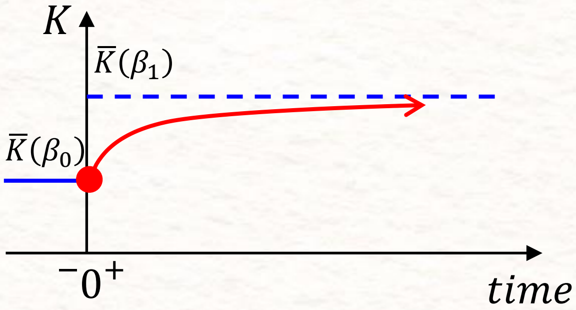
$$\Rightarrow \bar{K}(\beta_0) = \bar{K}(\beta_1) + A_1 + A_2$$

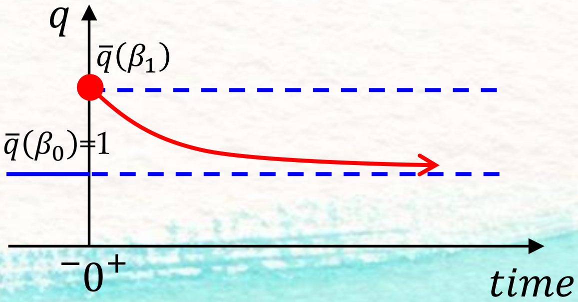
- 條件(2)：Transversality Condition：$A_2 = 0$
- 由上兩條件，求得$A_1 = \bar{K}(\beta_0) - \bar{K}(\beta_1)$
- 因此，一般解為：

$$K(t) = \begin{cases} \bar{K}(\beta_0 = 1); & t = 0^- \\ \bar{K}(\beta_1 > 1) + [\bar{K}(\beta_0) - \bar{K}(\beta_1)]e^{s_1 t}; & t \geq 0^+ \end{cases}$$

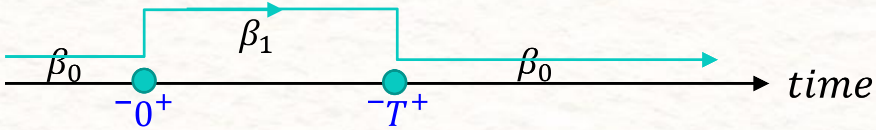
$$q(t) = \begin{cases} \bar{q}(\beta_0 = 1); & t = 0^- \\ \bar{q}(\beta_1 > 1) + [\bar{K}(\beta_0) - \bar{K}(\beta_1)]B_1 e^{s_1 t}; & t \geq 0^+ \end{cases}$$

其中，$B_1 = \frac{s_1}{1/c_0}$





具有調整成本的投資決策：投資的q理論

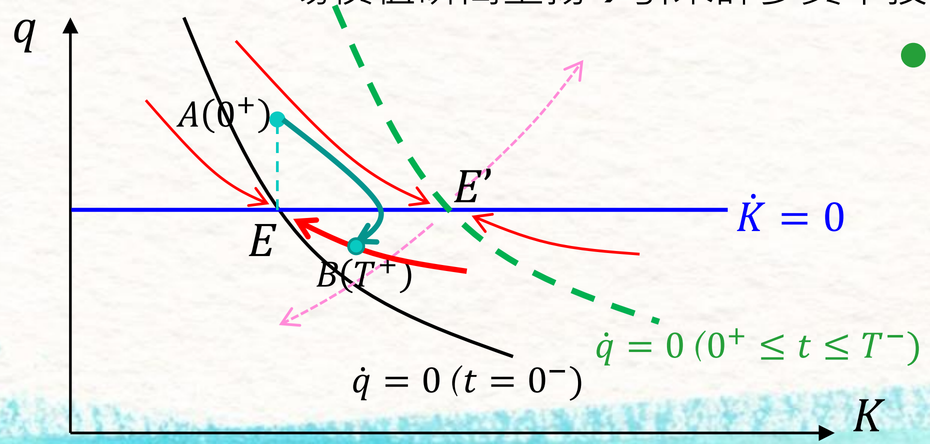


●衝擊分析：

2. Effects of an unanticipated temporary increase in output

   2) 未預料所得**暫時性**增加→提高了商品需求→料想廠商利潤會上升

   - 但資本財卻不能瞬間擴大→既有資本財對應的價值增加→資本財的市場價值瞬間上揚→引來許多資本投資，資本存量開始累積

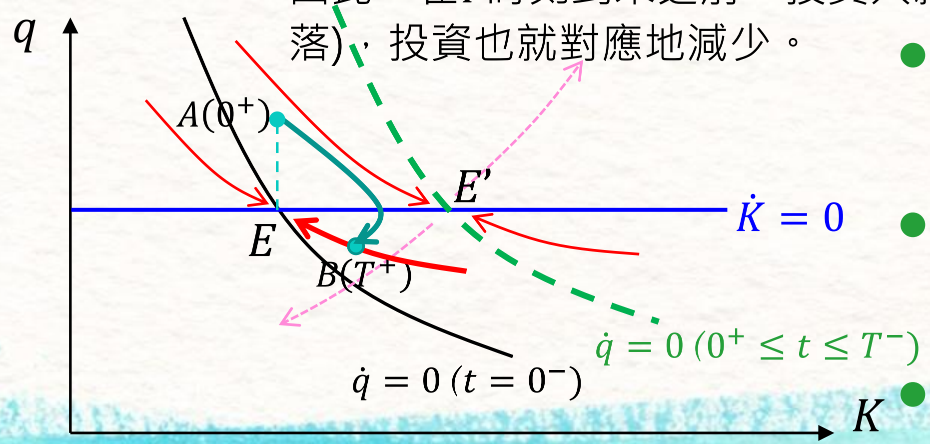


- 廠商產出開始增加→產品相對價格逐漸滑落→資本財的利潤與價值也對應著滑落。過程會繼續一段時間。

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- 衝擊分析：

  2. Effects of an unanticipated temporary increase in output
     - 然而，大家都知道T時點，所得將回落到原水準。因此，若持有股票到那時，將因市場需求減少導致廠商利潤滑落而遭致資本(價格)損失。
     - 因此，在T時刻到來之前，投資人就開始減少持股(資本財市場評價滑落)，投資也就對應地減少。



- 在達到T時點，所得真的跌回原水準→廠商的市場需求滑落→既存資本財對應的價值下降→引起資本減資、投資下降
- 資本財減少→產品生產減少，對應的產品價格開始回升→資本財的利潤與價值逐漸回升。
- 直到回復$q = 1$，投資停止，達成新均衡。

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

2. Effects of an unanticipated temporary increase in output

- 假設一般解為：

$$K(t)=\begin{cases}\bar{K}(\beta_0=1); & t=0^-\\ \bar{K}(\beta_1>1)+A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}; & 0^+\le t\le T^-\\ \bar{K}(\beta_0=1)+A_1^*e^{s_1t}+A_2^*e^{s_2t}; & t\ge T^+\end{cases}$$

$$q(t)=\begin{cases}\bar{q}(\beta_0=1); & t=0^-\\ \bar{q}(\beta_1>1)+A_1B_1e^{s_1t}+A_2B_2e^{s_2t}; & 0^+\le t\le T^-\\ \bar{q}(\beta_0=1)+A_1^*B_1e^{s_1t}+A_2^*B_2e^{s_2t}; & t\ge T^+\end{cases}$$

- 待解參數：A_1、A_2、A_1^*、A_2^* .... **作業！**
- 條件：(1) Continuity Condition：$K_{0^-}=K_{0^+}$、$K_{T^-}=K_{T^+}$、$q_{T^-}=q_{T^+}$。(2) Transversality Condition：$A_2^*=0$

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- 衝擊分析：

2. Effects of a unanticipated temporary increase in output

3) 涵義：

a) 暫時性所得增加 → (廠商看準這點而加以利用) 提高投資

b) 暫時性所得增加對q的增幅 < 永久性所得增加對q的增幅；也因此，暫時性所得增加對投資的增幅 < 永久性所得增加對投資的增幅

- 因為廠商了解撤回增加的投資也是要付出成本，因此，面對暫時性所得增加的投資反應就會較小

c) 資本存量在產出回到正常水準前就開始下降 (q與K在達B點前就穿過 $\dot{K}=0$ 線)。

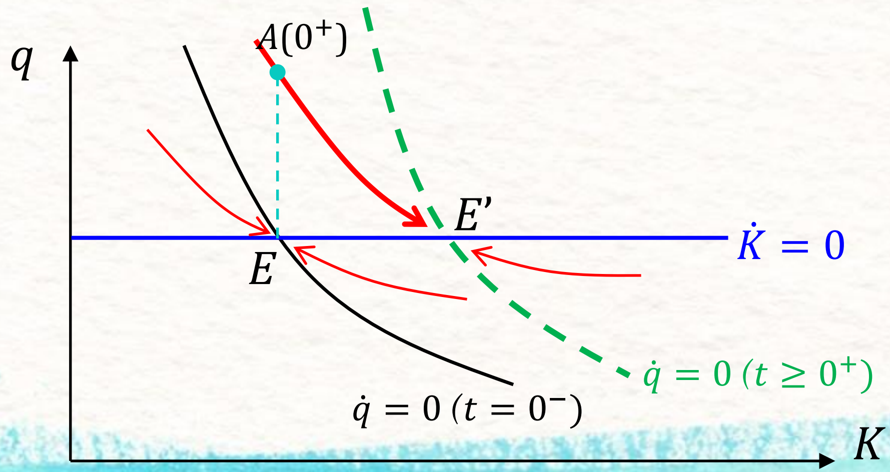
- 考慮T時點的前一刻(例如T-1)，此時，利潤函數即將回歸原位，所以廠商大概也希望著手減少資本存量。然而，調整資本存量是要付出代價，而剩下較高利潤的時間卻是很短暫的，因此，立即地開始減少資本存量是有好處、且幾乎沒有成本。

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- 衝擊分析：
  2. Effects of a unanticipated temporary increase in output
     3) 涵義：
        - 以上隱含了：影響投資的不只是當期所得，還包括整個所得的調整路徑都會影響投資。
        - 當預期未來產出較高時，投資是較高的。因此，預期未來所得上升會提高當期需求。
        - 景氣(所得)剛剛上升時刻所做的投資大於景氣(所得)已上升一段時間所做的投資
        - 產出變動對投資需求的效果就是著名的加速器(accelerator)

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

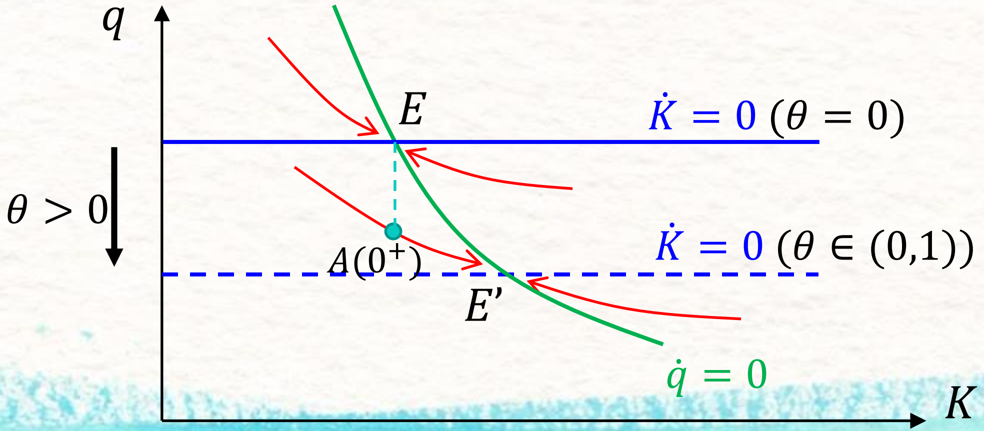
- 衝擊分析：
  3. The effects of a permanent decrease in the interest rate
     - 永久性降低(短期)利率→資本財的機會成本下降→$\dot{q}(t) = rq(t) - \pi\big(K(t)\big)$方程式上移…→…→ 思考！！經濟直覺



- 過去利率和整個預期未來利率都會影響投資。
- 短率並未反應與投資有關之利率的所有資訊。長率才可能蘊含有<u>對未來短率的預期</u>。
- 預期未來短率的上升，會使投資下降。這表明了，給定目前短率，若長率較高(亦即預期短率上升)，則投資會較低。

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- 衝擊分析：
  4. The effects of a permanent investment tax credit
     - 用暫時性租稅優惠可激勵投資(景氣)
     - 假設投資稅收優惠形式：直接退還廠商某θ比例的資本價格，但不適用在調整成本：$q + \theta = 1 + C'(I)$



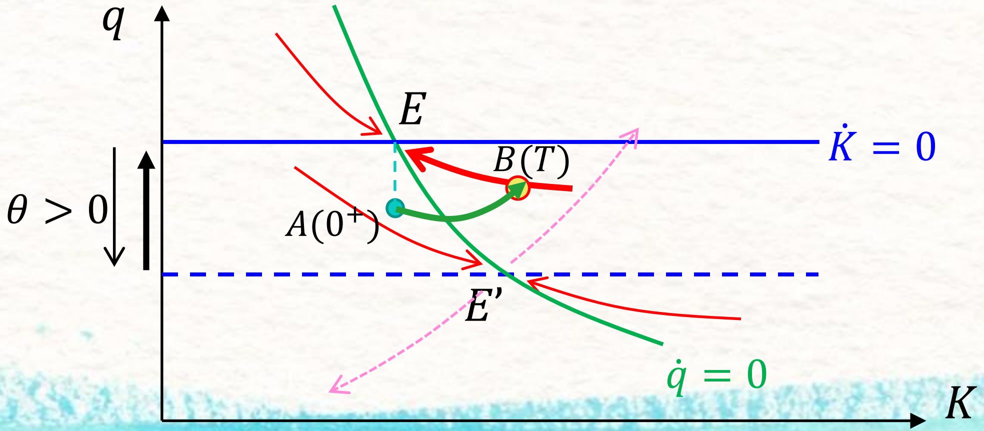
- 永久性投資租稅優惠將使投資增加，這意味了不計租稅優惠部分，產業利潤會降低，所以既存資本的價值下降
- 廠商開始增加投資→產品生產對應增加，產品價格開始下跌→資本財的利潤與價值持續滑落。
- 直到達成新均衡。K值變高、q值變低。

具有調整成本的投資決策：投資的q理論

- 衝擊分析：

5. The effects of a temporary investment tax credit

- 暫時性投資租稅優惠不會造成資本存量的永久性增加，所以，既存資本存量的價值下降幅度較小。
- 暫時性投資租稅優惠的q值高於永久性投資租稅優惠的q值。



- 在接近租稅優惠取消(T時)時刻，廠商想要進行投資，因而暫時性優惠將在某一點後導致投資激增。
- 對應下，q值開始上升、資本存量繼續累積

投資決策：不確定性的影響

- 實際上，廠商對未來獲利能力、利率、租稅政策等都可能面臨不確定性
- 在這裡，我們僅介紹對未來獲利能力的不確定性，利率暫無不確定性狀況 (利率假設成常數)。
- 兩關鍵方程式：
  1. 一單位資本財的價值，修正成：

$$q(t)=\int_{\tau=t}^{\infty} E_t\left[\pi\left(K(\tau)\right)\right]\cdot e^{-r(\tau-t)}\,d\tau$$

    - 上式可用來觀察，q如何被預期隨著時間演變。

投資決策：不確定性的影響

- 不確定下，資本財價值的**<u>另一種</u>**表示式：

$$E_t[\dot{q}(t)] = rq(t) - \pi\big(K(\tau)\big)$$

- 因為，在任何時點 $q(t) = \int_{\tau=t}^{\infty} E_t\big[\pi\big(k(\tau)\big)\big]e^{-r(\tau-t)}\, d\tau$ 均成立。因此，對 $t + \Delta t$時點的q做預期，得到：

$$E_t[q(t+\Delta t)] = E_t\left[\int_{\tau=t+\Delta t}^{\infty} E_{t+\Delta t}\big[\pi\big(k(\tau)\big)\big] \cdot e^{-r(\tau-(t+\Delta t))}\, d\tau\right]$$

$$\Rightarrow E_t[q(t+\Delta t)] = \int_{\tau=t+\Delta t}^{\infty} \boldsymbol{E_t}\big[\pi\big(k(\tau)\big)\big] \cdot e^{-r(\tau-(t+\Delta t))}\, d\tau$$

  - 其中，$E_t\Big[E_{t+\Delta t}\big[\pi\big(k(\tau)\big)\big]\Big] = E_t\big[\pi\big(k(\tau)\big)\big]$。

- 對上式做 Δt 的微分(應用微積分基本定理)，並在 $\Delta t = 0$ 點展開，即得之。
- $E_t[\dot{q}(t)] = rq(t) - \pi\big(K(\tau)\big)$與確定性的$\dot{q}(t) = rq(t) - \pi\big(K(t)\big)$相近。

投資決策：不確定性的影響

2. 各廠商進行投資，直到獲得新資本的成本等於該資本的市場價值(與前述一樣)。因此，

$$\dot{K}(t) = f\big(q(t)\big)$$

- 到此，不確定性對投資決策，似乎沒有直接影響：只要新資本的價值超過其獲得資本的成本，廠商就會進行投資。而且，資本的價值僅決定於期望報酬(payoff)。
- 但這種分析忽略了一件事：假設$\pi(K)$的未來值有著外生的不確定性，這並不是十分正確的。
  - 因為，K的路徑在模型中被決定了，因而能被視為外生的是$\pi(\cdot)$函數位置的不確定性。這個不確定性與廠商決策共築了$\pi(K)$值的不確定性。

投資決策：不確定性的影響

- 不過，在一個自然的基本例子裡，這種細微差異並不重要：
  - 如果$\pi(\cdot)$是線性、$C(\cdot)$是二次式，且不確定性是有關$\pi(\cdot)$函數的截距，則不確定性不會影響投資。
  - 也就是說，在這個例子裡，當如果$\pi(\cdot)$函數之截距的未來值確定等於它們的預期值，那麼，任何時刻的投資都是一樣的。

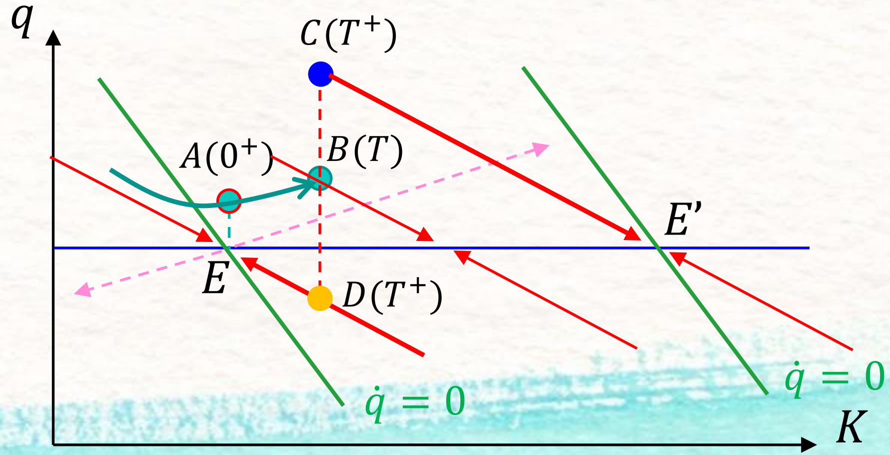
投資決策：不確定性的影響

- 例1：減稅（檢視獲利能力不確定性的角色影響）
  - 期初，$\pi(\cdot)$函數是常數、產業處於長期均衡
  - 民眾知道政府正考慮減稅法案
    - → 提高了$\pi(\cdot)$函數截距
  - 未來T時點進行法案表決，50%機率會通過。
    - → 50%機率不會通過
  - 無其他不確定性

投資決策：不確定性的影響

- 例1：減稅（檢視獲利能力不確定性的角色影響）：續
  - 民眾知道政府正考慮永久性減稅法案→料想廠商利潤會上升
  - 但資本財卻不能瞬間擴大→既有資本財對應的價值增加→資本財的市場價值瞬間上揚；然而，只有50%機率法案會通過，所以，資本財的市場價值並不瞬間上揚太高→引來許多資本投資，資本存量開始累積

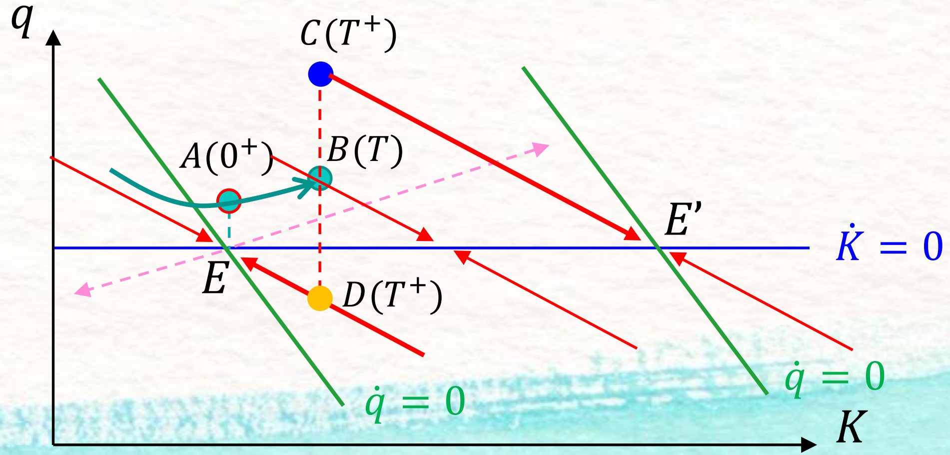
- 在利多法案還沒表決前，資本投資、資本財市場價值持續增加，資本存量繼續累積
  - 廠商產量雖已增加，產品價格也開始滑落，但預期利多效果(>資本財的利潤與價值對應滑落的利空因素)仍持續發酵中
- 在法案表決的T時刻，資本投資與累積的部位走到了實現利多效果的一半程度。



投資決策：不確定性的影響

- 例1：減稅（檢視獲利能力不確定性的角色影響）：續
  - 法案通過→ 預料廠商利潤上升→ 資本財價值、資本財市場價格又瞬間上揚→ 資本投資、資本累積又開始增加→ 廠商產出開始大幅增加→ 產品相對價格滑落力道變強→資本財的利潤與價值滑落幅度變大
  - 過程繼續，直到資本財價值回落到$q = 1$的位置。投資停止，達成新均衡E'。

- 法案若不通過→ 預料廠商利潤下滑→ 資本財價值、資本財市場價格瞬間大幅跳水→ 投資減少、資本開始減資→ 廠商產量開始下降→ 產品相對價格止跌回升→資本財的利潤與價值對應開始回升
- 過程繼續，直到回到舊均衡E點。

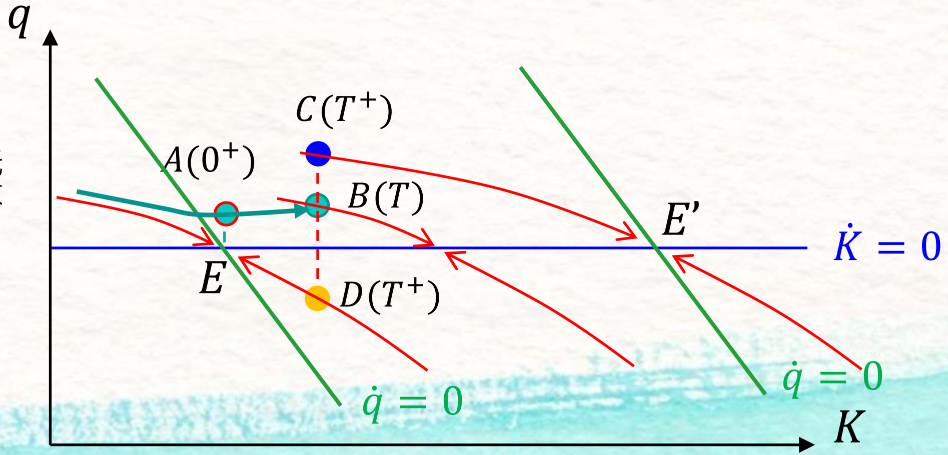


投資決策：不確定性的影響

- 例2：減稅— 不對稱的調整成本
  - 若$\pi(\cdot)$不是線性、或$C(\cdot)$不是二次式，則$\pi(\cdot)$位置的不確定性，會影響對$\pi(K)$未來值的預期，進而影響投資決策。
  - 不對稱調整成本意味著投資在某程度上是不可回復的(irreversible)。
    - 增加資本存量比減少資本存量更容易 → 彎曲的馬鞍路徑
    - 若$K > K^*$，則K只會緩慢減少，所以，利潤會呈現較長期的低迷，q是遠低於1。
    - 若$K < K^*$，則K會快速增加，所以，q只是稍大於1。

投資決策：不確定性的影響

- 例2：減稅— 不對稱的調整成本
  - 調整成本的不對稱使得q躍升幅度小於對稱調整成本的情況
  - 因為降低資本要付代價，這代表若廠商在表決前累積較大部位資本存量，一旦法案沒過，因廠商無法逆轉增加的投資，從而使得q值平價沒那麼高。
  - 換句話說，投資不可逆，等待投資就有了選擇的價值
    - 若廠商不投資，那他還有可能保持較低的資本存量；但他若投資了，那他將不得不保持較高的資本存量
  - 若投資涉及固定成本的投入，那廠商投資會有集中性的傾向。亦即，廠商大多數時間不投資，必要時進行大規模投資。



投資決策：不確定性的影響

- 貼現因子的不確定性
  - 實際上，廠商不僅無法確定未來獲利情況，也無法(評估)確定這些利潤的現值。
  - 假設廠商是由消費者持有(股東)，消費者不是透過固定利率而是透過消費的邊際效用，來評估廠商未來收益的現值。
  - 相對於t時點的邊際效用，τ時點的邊際效用的現值是：$e^{-\rho(\tau-t)}\cdot\frac{u'(C(\tau))}{u'(C(t))}$
    - ρ是消費者的折現率
  - 因此，一單位資本財的價值變成了：

$$q(t)=\int_{\tau=t}^{\infty}E_t\left[\frac{u'(C(\tau))}{u'(C(t))}\pi(K(\tau))\right]\cdot e^{-\rho(\tau-t)}\,d\tau$$

投資決策：不確定性的影響

- 貼現因子的不確定性
  - 一單位資本財的價值：

$$q(t)=\int_{\tau=t}^{\infty}E_t\left[\frac{u'(C(\tau))}{u'(C(t))}\pi(K(\tau))\right]\cdot e^{-\rho(\tau-t)}\,d\tau$$

  - Craine (1989)強調，上式隱含了：
    - 計畫風險對計劃投資的衝擊受到消費CAPM中，資產風險對其價值衝擊的影響
    - 特定風險(idiosyncratic risk)—$\pi(K(\tau))$中，與$u'(C)$無關的不確定性—對資本財市場價值沒有影響，且因此沒有影響投資。
    - 但與總風險有正相關的那些不確定性—$\pi(K)$與C之間正相關，且因此$\pi(K)$與$u'(C)$有負相關—會降低資本財的市場價值，並因此降低投資。
      - 與總風險負相關的那些不確定性則會提高投資。

- The End

Homework

1. 請求解未預料的永久性所得增加，對資本財價格、投資、資本存量的動態路徑。

2. 請以相位圖分析並經濟解釋：未預料的暫時性利率上升，對資本財價格、投資、資本存量的動態調整路徑。

Appendix 3:

The objective function of the firm

Sargent (1987, Ch.6)

廠商的目標函數

- Sargent (1981)
  - 基本假設：
    - 利潤來源：$\Pi = f(k,l) - wl$，其中，$f(.)$: CRTS in k, l
    - 利潤分配： $\Pi = D + RE$，股利D、保留盈餘RE
    - 投資用途：$\dot{k} = I$
    - 投資資金來源： $RE = I$，不增資(E是常數)也不發債(債務是常數)
    - 假設廠商無負債，資產只有實物資本K
    - 廠商發行的總股份是$E = \bar{E}$，每股價格是V (以商品價格計價)
  - 淨值(net worth)=總資產市場價值 – 總負債(假設為零)
    - 總資產市場價值$\equiv \Omega$
    - 淨值$\equiv \bar{E}V$
    - $\therefore \Omega = \bar{E}V$
      - 既是總資產的市場價值，也是market value of the firm’s outstanding equities

廠商的目標函數

- Sargent (1981)(續)
  - 投資人(家計單位)的資產套利條件：
    - $\underbrace{\frac{D/E}{V}}_{dividend\ yield} + \frac{\dot{V}}{V} = \rho - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \equiv r$ (real interest rate)
  - 目標函數的推導：
    - $\dot{\Omega} = \dot{\bar{E}}V + \bar{E}\dot{V} = \bar{E}V\frac{\dot{V}}{V} = \bar{E}V \cdot \left(r - \frac{\frac{D}{E}}{V}\right) = r\bar{E}V - D = r\Omega - (\Pi - RE) = r\Omega - \Pi + I$
    - $\dot{\Omega} = r\Omega - \gamma$
      - 定義：γ：淨現金流(net cash flow)，$\gamma \equiv \Pi - I$ 或 $\Pi - \dot{k}$。
      - 因為廠商發行的總股份是常數，$E = \bar{E}$，所以總資產市場價值$\Omega = \bar{E}V$的變動，就是反應股價的變動。

$$\bar{E}\dot{V} = r\bar{E}V - \gamma$$

廠商的目標函數

- Sargent (1981) (續)
  - 對$\dot{\Omega} = r\Omega - \gamma$ 做兩邊積分 $\Rightarrow \int_0^\infty \dot{\Omega} e^{-rt}\, dt = \int_0^\infty (r\Omega - \gamma) e^{-rt}\, dt$

$$\Rightarrow \left[\lim_{t\to\infty} \Omega(t) e^{-rt} - \Omega(0)\right] + \int_0^\infty r\Omega e^{-rt}\, dt = \int_0^\infty (r\Omega - \gamma) e^{-rt}\, dt$$

    - 假設 $\lim_{t\to\infty} \Omega(t) e^{-rt} = 0$，然後上式可被整理成：

$$\Rightarrow \Omega(0) = \int_0^\infty \gamma e^{-rt}\, dt$$

      - 廠商期初的總資產市場價值等於終生現金流的現值總和，或是
      - 廠商流通在外之股票的期初總市場價值亦等於終生現金流的現值總和
  - 廠商的跨期最適化問題：

$$\begin{cases} \max\limits_{k,l,I} \ \Omega(0) = \int_0^\infty [(f(k,l) - wl) - I] e^{-rt}\, dt \\ s.t. \ \ \dot{k} = I \end{cases}$$

廠商的目標函數

- Sargent (1981) (續)
  - 廠商的跨期最適化問題 (續)：

$$\begin{cases} \max\limits_{k,l,I} \ \Omega(0) = \int_0^\infty [(f(k,l) - wl) - I]e^{-rt}\,dt \\ s.t. \ \ \dot{k} = I \end{cases}$$

    - FOC:
      - $f_k = r$、$f_l = w$、$\lambda = 1$ (shadow price)
  - Tobin q值：
    - 將最適化一階條件代回目標函數

$$\Omega^*(0) = \int_0^\infty (f(k^*,l^*) - wl^*)e^{-rt}\,dt - \int_0^\infty [\dot{k}]e^{-rt}\,dt$$

$$\Rightarrow \Omega^*(0) = \int_0^\infty (f(k^*,l^*) - f_l l^*)e^{-rt}\,dt - \left(\lim_{t\to\infty} ke^{-rt} - k(0)\right) - \int_0^\infty rk^* e^{-rt}\,dt$$

廠商的目標函數

- Sargent (1981) (續)
  - Tobin q值 (續)：

$$\Rightarrow \Omega^*(0) = \int_0^{\infty} (f(k^*, l^*) - f_l l^* - f_k k^*) e^{-rt}\, dt - \left(\lim_{t\to\infty} k e^{-rt} - k(0)\right) = k(0)$$

- 由於以上用實質面表示，而非名目面(貨幣價值)，因此，資本財的市場價格等於商品的售價。
- $\therefore q^*(t) = \dfrac{\text{資本財的廠商市場價值}}{\text{資本財的重置成本}} = \dfrac{\Omega^*(0)}{k(0)} = 1$

資產	負債
qk	0
	淨值=$\bar{E}V$

Execise

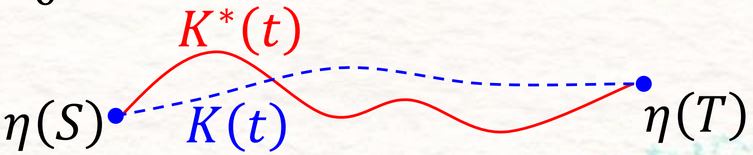
1. 若投資具有調整成本時，Tobin q值如何重新推導?
2. 當廠商的投資可以使用股權與債權時，廠商的資本使用者成本是多少?

Appendix 4:

Calculus of Variations and Optimal Control Theory

變分法簡介

- 令$\dot{K} = \frac{dK}{dt}$。在給定$K(S)$、$K(T)$ 下，尋找一組路徑$K(t)$，使得$K(t)$能夠$\max \int_S^T \mathcal{H}\left(K, \dot{K}, t\right) dt$
  - 假設 $K^*(t)$是局部最適解，則考慮在這個解附近的些微擾動：$K(t) = K^*(t) + \varepsilon \cdot \eta(t)$，其中$\varepsilon$是scalar variable，$\eta(t)$描述$K(t)$與$K^*(t)$偏離的方向。
  - 因為 $K(S)$ 、$K(T)$均為已知給定的，因此，任何可行的偏離仍須滿足$\eta(S) = \eta(T) = 0$



變分法簡介

- 令$J(\varepsilon,\{\eta(t)\}) \equiv \int_S^T \mathcal{H}\left(K,\dot{K},t\right) dt$
  - 對J做ε的微分，得到：$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \int_S^T \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{K}}\frac{\partial \dot{K}}{\partial \varepsilon}\right) dt$
  - 另外，由$K(t) = K^*(t) + \varepsilon \cdot \eta(t)$知道：

$$\frac{\partial K(t)}{\partial \varepsilon} = \eta(t) \text{、} \frac{\partial \dot{K}}{\partial \varepsilon} = \dot{\eta}(t)$$

  - 因此，改寫$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}$，得到：$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \int_S^T \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K}\eta(t) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{K}}\dot{\eta}(t)\right) dt$

變分法簡介

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \int_S^T \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} \eta(t) \right) dt + \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{K}} \eta(t) \bigg|_S^T - \int_S^T \left[\eta(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{K}} \right) \right] dt \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \int_S^T \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{K}} \right) \right) \eta(t)\, dt, \qquad \because \eta(S) = \eta(T) = 0$$

- 如果$K^*(t)$是局部最適解，則在$\varepsilon = 0$附近任何微小的ε擾動都不會影響 J。所以，$\left.\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$

$$\Rightarrow \int_S^T \left(\frac{\partial \mathcal{H}(K^*, \dot{K}^*, t)}{\partial K} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{H}(K^*, \dot{K}^*, t)}{\partial \dot{K}} \right) \right) \eta(t)\, dt = 0$$

變分法簡介

$$\Rightarrow \int_S^T \left(\frac{\partial \mathcal{H}(K^*, \dot{K}^*, t)}{\partial K} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{H}(K^*, \dot{K}^*, t)}{\partial \dot{K}} \right) \right) \eta(t)\, dt = 0$$

$$\therefore\ \frac{\partial \mathcal{H}(K^*, \dot{K}^*, t)}{\partial K} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{H}(K^*, \dot{K}^*, t)}{\partial \dot{K}} \right)$$

… 最適變分的一階條件

- 這是dynamic optimization的一般通式。

動態最適化

- Chiang, Alpha C. *Elements of Dynamic Optimization*, 1992. New York: McGraw Hill.

- 最適控制理論(optimal control theory)的最重要結論 – 一階必要條件 – 就是著名的*the maximum principle*。

動態最適化

- 典型的動態最適化問題

$$
\text{(A)}: \begin{cases} \max V = \int_0^T \boldsymbol{F(t, y, u)} dt \\ s.t. \\ \dot{y} = \boldsymbol{f(t, y, u)} \\ y(0) = A \\ y(T) \text{ free } \ (A, T \text{ given}) \\ u(t) \in \text{some bounded control set for all } t \in [0, T] \end{cases}
$$

- u: 控制變數(control variable)，它是政策變數，能夠讓我們來影響狀態變數y (state variable)。
- 選擇了控制的路徑$u(t)$，即隱含了對應的狀態路徑$y(t)$。

動態最適化

- Hamiltonian function:

$$(B): \qquad \mathcal{H}(t,y,u,\lambda) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) + \lambda(t)\cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$$

  - $\lambda(t)$是共狀態變數(*costate variable*)
- 對(A)和(B)的Hamiltonian問題來說，the maximum principle的條件是：

$$\begin{cases} \mathcal{H}(t,y,u^*,\lambda) \geq \mathcal{H}(t,y,u,\lambda) \text{ for all } t \in [0,T] & \ldots\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0, \text{if } \mathcal{H} \text{ is differentiable} \\ \dot{y} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} & \ldots\ \text{equation of motion for } y \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} & \ldots\ \text{equation of motion for } \lambda \\ \lambda(T) = 0 & \ldots\ \text{transversality condition} \end{cases}$$

動態最適化

- 最適控制的經濟應用裡，被積分函數F常包含$e^{-\rho t}$ (或 e^{-rt})

$$F(t,y,u) = G(t,y,u) \cdot e^{-\rho t}$$

  - 最適控制問題是：

$$\begin{cases} \max V = \displaystyle\int_0^T G(t,y,u) \cdot e^{-\rho t} dt \\ s.t. \\ \qquad \dot{y} = f(t,y,u) \text{ and} \\ \qquad boundary\ conditions \end{cases}$$

- *present-value* Hamiltonian：

$$\mathcal{H}(t,y,u,\lambda) = G(t,y,u) \cdot e^{-\rho t} + \lambda(t) \cdot f(t,y,u)$$

動態最適化

- 重新定義costate variable：$\lambda(t) = \lambda_c(t) \cdot e^{-\rho t}$
- 利用重新定義的costate variable來改寫$\mathcal{H}(t, y, u, \lambda)$：

$$\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = G(t, y, u) \cdot e^{-\rho t} + \lambda(t) \cdot f(t, y, u)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = \underbrace{[G(t, y, u) + \lambda_c(t) \cdot f(t, y, u)]}_{\equiv \boldsymbol{\mathcal{H}_c}(t, y, u, \lambda_c)} \cdot e^{-\rho t}$$

- *current-value* Hamiltonian:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}_c}(t, y, u, \lambda_c) = G(t, y, u) + \lambda_c(t) \cdot f(t, y, u)$$

- maximum principle revised

動態最適化

- maximum principle revised

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}_c}(t, y, u^*, \lambda_c) \geq \boldsymbol{\mathcal{H}_c}(t, y, u, \lambda_c) \ \text{ for all } t \in [0, T] & \ldots \ \dfrac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}_c}}{\partial u} = 0, \text{if } \boldsymbol{\mathcal{H}_c} \text{is differentiable} \\ \dot{y} = \dfrac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}_c}}{\partial \lambda_c} & \ldots \ \text{equation of motion for } y \\ \dot{\lambda}_c - \rho \lambda_c = -\dfrac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}_c}}{\partial y} & \ldots \ \text{equation of motion for} \lambda_c \\ \lambda_c(T) = 0 \text{ (for vertical terminal line) or } [\boldsymbol{\mathcal{H}_c}]_{t=T} = 0 \text{ (for horizonta terminal line)} \ldots TVC \end{cases}$$

動態最適化

- 以廠商的動態最適化為例
  - 廠商最適化問題：

$$\max\ \Pi = \int_{t=0}^{\infty} \left[\pi\big(K(t)\big)k(t) - I(t) - C\big(I(t)\big)\right] \cdot e^{-rt}\, dt, \qquad \text{s.t.}\ \ I(t) = \dot{k}(t)$$

  - *present-value* Hamiltonian function:

$$\mathcal{H} = \left[\pi\big(K(t)\big)k(t) - I(t) - C\big(I(t)\big)\right] \cdot e^{-rt} + q \cdot I(t)$$

  - *current-value* Hamiltonian function:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}_c} = \pi\big(K(t)\big)k(t) - I(t) - C\big(I(t)\big) + q_c \cdot I(t)$$

動態最適化

- 以廠商的動態最適化為例
  - maximum principle for *present-value* Hamiltonian function

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = 0, \qquad \dot{k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \qquad \dot{q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k}, \qquad q(\infty) = 0$$

  - maximum principle for *current-value* Hamiltonian function:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_c}{\partial I} = 0, \dot{k} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_c}{\partial q_c}, \dot{q}_c - \rho q_c = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_c}{\partial k}, q_c(\infty) = 0 \ or \ [\boldsymbol{\mathcal{H}}_c]_{t=T} = 0$$

    - Recall: $q_c \cdot e^{-rt} = q$

動態最適化

- Hamiltonian function for calculus of variations

  $$\mathcal{H} = \{\pi\big(K(t)\big)k(t) - I(t) - C\big(I(t)\big) + q[I(t) - \dot{k}(t)]\} \cdot e^{-rt}$$

  - FOC.
  - $\frac{\partial\mathcal{H}(k(t),I(t))}{\partial I(t)} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{H}(k(t),I(t))}{\partial \dot{I}(t)} \Rightarrow [-1 - C'(I)] \cdot e^{-rt} = 0$
  - $\frac{\partial\mathcal{H}(k(t),I(t))}{\partial k(t)} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{H}(k(t),I(t))}{\partial \dot{k}(t)} \Rightarrow \pi\big(K(t)\big)e^{-rt} = -\frac{\partial(qe^{-rt})}{\partial t} = (-\dot{q} + rq)e^{-rt}$
  - $\frac{\partial\mathcal{H}(k(t),I(t))}{\partial q(t)} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{H}(k(t),I(t))}{\partial \dot{q}(t)} \Rightarrow [I(t) - \dot{k}(t)]e^{-rt} = 0$
  - $\lim_{t\to\infty} e^{-rt}q_t k_t = 0$
- 自行練習：$\mathcal{H} = [\pi\big(K(t)\big)k(t) - I(t) - C\big(I(t)\big)] \cdot e^{-rt} + q[I(t) - \dot{k}(t)]$