Комбинаторная оптимизация, третье теоретическое домашнее задание

Задача 1 (2 балла)

Пусть имеется целочисленный полиэдр, задаваемый системой с целыми коэффициентами $\{Ax \le b, x \ge 0\}$. Покажите, что существует целое число α такое, что система $\{(1/\alpha)Ax \le (1/\alpha)b, x \ge 0\}$ будет TDI (тотально двойственно целочисленной).

Задача 2 (1 балл)

Дан матроид $M = (E, \mathcal{I})$. Докажите следующие свойства функции $\operatorname{span}(A) = \{x \in E \mid \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \cup \{x\})\}$:

1. Если $A \subseteq B$, то $\operatorname{span}(A) \subseteq \operatorname{span}(B)$;
2. $\operatorname{rank}(\operatorname{span}(A)) = \operatorname{rank}(A)$;

Задача 3 (2 балла)

Рассмотрим матроид $M = (E, \mathcal{I})$ с функцией весов на элементах $w : E \to \mathbb{R}_+$ (все веса различны). Назовем множество C *разрезом* матроида, если любой базис матроида пересекает C, а также C является минимальным по включению среди множеств с указанным свойством. Пусть e — это максимальный по весу элемент некоторого разреза. Покажите, что максимальное по весу независимое множество содержит e.

Задача 4 (2 балла)

Определение. *Ненаправленный граф G является k-связным, если между любой парой вершин есть k реберно-непересекающихся путей.*

Пусть задан граф $G = (V, E)$ являющийся k-регулярным и k-связным одновременно. Пусть также задана функция весов на ребрах $w : E \to \mathbb{R}_+$. Используя известные вам свойства матроидов и факты о пересечении матроидов покажите, что:

1. (1 балл) Существует остовное дерево T такое, что:
$$\sum_{e \in T} w(e) < \frac{2}{k} \sum_{e \in E} w(e)$$
2. (1 балл) Существует остовное дерево T такое, что как минимум $|V|/(k+1)$ вершин в нем имеют степень ровно 2.