Решение дз-4

Куприянов Александр Дмитриевич

Здача 1

Пусть $U = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — множество элементов (универсум), и пусть $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ — семейство подмножеств U, каждое множество S_i имеет стоимость $c_i \geq 0$.

Хотим выбрать минимально стоящее подсемейство $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$, такое что $\bigcup_{S_i \in \mathcal{C}} S_i = U$.

(LP)

Вспомним как задавали на семинаре, введём переменные $x_i \in [0, 1]$, т е задаем как степень включения множества S_i. ЛП имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\text{Минимизировать:} \quad & \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \\
\text{при условиях:} \quad & \sum_{i: e_j \in S_i} x_i \geq 1 \quad \text{для всех } e_j \in U \\
& x_i \geq 0 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, m
\end{aligned}
$$

Обозначим оптимальное значение этой задачи как $\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$.

Ограничение перекрытия

Вспомним, что на семинаре задали такую велечину как максимальное количество множеств, в которые входит один элемент. $f = \max_{e \in U} |\{i : e \in S_i\}|$ —

Схема с семинара :

$$\bar{x}_i = \mathbb{I}[x_i^* \geq \tfrac{1}{f}]$$

Сейчас немного изменили схему, надо доказать для такой:

$$\hat{x}_i = \mathbb{I}[x_i^* > 0]$$

Вспомним какую дуальную задачу получили на семенаре

Вот переменные $y_j \geq 0$ для каждого элемента $j \in U$.Сама задача получается:

$$\begin{aligned} \text{Максимизировать} \quad & \sum_{j\in U} y_j \\ \text{при условиях} \quad & \sum_{j\in S_i} y_j \le c_i \quad \forall i = 1,\dots,m \\ & y_j \ge 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

Пусть x^* и y^* — оптимальные решения примальной и дуальной задач. По теореме сильной двойственности:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i^* = \sum_{j\in U} y_j^*$$

Теперь используем это

Рассмотрим множество множеств:

$$C = \{i \mid x_i^* > 0\}$$

По условию комплементарной нежесткости:

$$x_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{j\in S_i} y_j^* = c_i$$

Тогда:

$$\sum_{i\in C} c_i = \sum_{i\in C}\sum_{j\in S_i} y_j^* = \sum_{j\in U} y_j^* \cdot |\{i\in C \mid j\in S_i\}|$$

Если каждый элемент j содержится не более чем в f множествах S_i, то:

$$|\{i\in C \mid j\in S_i\}| \le f$$

Следовательно:

$$\sum_{i\in C} c_i \le \sum_{j\in U} f\cdot y_j^* = f\cdot\sum_{j\in U} y_j^* = f\cdot \mathrm{OPT}_{LP}$$

Задача 2

Рассмотрим ориентированный граф $G=(V,E)$ с, обозначения возьмем примерно как на лекции:

- целочисленными неотрицательными длинами рёбер $l : E\to\mathbb{Z}_+$,
- стоимостью увеличения длины ребра $c : E\to\mathbb{Z}_+$,
- выделенными вершинами $s,t\in V$,
- и заданной константой $a\in\mathbb{Z}_+$.

Хотим — выбрать величины $x_{uv}\in\mathbb{Z}_+$, определяющие, на сколько увеличим длину каждого ребра $(u,v)\in E$, чтобы длина кратчайшего пути из s в t стала не меньше a, и суммарная стоимость $\sum c_{uv}x_{uv}$ была минимальной.

Начнем с прямой (ILP)

Обозначим d_v — длина кратчайшего пути от s до вершины v в модифицированном графе (с учётом увеличений длин рёбер).

$$\begin{aligned}
\text{Минимизировать:}\quad & \sum_{(u,v)\in E} c_{uv}\cdot x_{uv} \\
\text{при условиях:}\quad & d_s = 0 \\
& d_v - d_u \le l_{uv} + x_{uv}, \quad \forall (u,v)\in E \\
& d_t \ge a \\
& x_{uv} \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall (u,v)\in E \\
& d_v \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall v \in V
\end{aligned}$$

Переход к двойственной задаче

Введем двойственные переменные:

- $y_{uv} \ge 0$ — двойственная переменная для каждого ограничения $d_v - d_u \le l_{uv} + x_{uv}$;
- $\lambda \ge 0$ — двойственная переменная для ограничения $d_t \ge a$.

Получим что у нас переменные x_{uv} и d_v, а также линейные неравенства. По правилам которые получили на лекции - каждое ограничение в прямой задаче дает переменную в двойственной, значит каждое ограничение $d_v - d_u \le l_{uv} + x_{uv}$ дает $y_{uv}(d_v - d_u - l_{uv} - x_{uv}) \le 0$, - двойственная функция из суммы свободных членов ЛП: $a\cdot\lambda - \sum l_{uv}y_{uv}$.

Терперь , сгруппируем коэффициенты при переменных d_v из всех ограничений, в которых d_v участвует.

Тогда для каждой вершины $v \in V$ получаем условие:

$$\sum_{(u,v)\in\delta^-(v)} y_{uv} - \sum_{(v,w)\in\delta^+(v)} y_{vw} = \begin{cases} -\lambda, & v = s \\ \lambda, & v = t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Обозначение как на лекции и семинаре, т.е. $\delta^+(v)$ — множество исходящих рёбер, $\delta^-(v)$ — множество входящих.

итоговая (LP-dual)

$$\begin{aligned}
\text{Максимизировать:}\quad & a\cdot\lambda - \sum_{(u,v)\in E} l_{uv}\cdot y_{uv} \\
\text{при условиях:}\quad & \sum_{(u,v)\in\delta^-(v)} y_{uv} - \sum_{(v,w)\in\delta^+(v)} y_{vw} = \begin{cases} -\lambda, & \text{если } v = s \\ \lambda, & \text{если } v = t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \\
& 0 \le y_{uv} \le c_{uv}, \quad \forall (u,v)\in E \\
& \lambda \ge 0
\end{aligned}$$

Теперь формально про потоки

Заметим, что двойственная задача — это задача о потоке из s в t величины λ, при этом:

- Пропускная способность ребра (u, v) ограничена сверху: $y_{uv} \leq c_{uv}$,
- стоимость пропуска через ребро — это l_{uv},
- а целевая функция: максимизировать $a \cdot \lambda$ минус стоимость потока.

То есть двойственная задача —получилась обычная задача о максимальном потоке с ограниченными пропускными способностями и стоимостью, что эквивалентно классической задаче о потоке минимальной стоимости с ограничением на нижнюю стоимость потока (чтобы длина пути не меньше a).

Задача 3

Алгоритм

[12pt]article [a4paper,margin=1in]geometry amsmath,amssymb,amsthm enumitem
Решение пункта 1: свойства множества U_T и множества J

Пункт 1. Доказательство свойств множества U_T и множества J

Пусть $G = (V, E)$ — полный метрический граф, $s, t \in V$ — выделенные вершины. После построения минимального остовного дерева $T \subseteq G$, рассмотрим множество вершин $U_T \subseteq V$:

- Вершины s и t должны иметь **нечётную** степень.
- Все остальные вершины $v \in V \setminus \{s, t\}$ должны иметь **чётную** степень.

1.1. Множество U_T имеет чётный размер

Очевидно так как количество вершин с нечётной степенью — чётно.

Пусть T — минимальное остовное дерево на графе G. Тогда T — связный ациклический граф на n вершинах и $n-1$ рёбрах, в котором сумма степеней всех вершин равна $2(n-1)$, то есть чётна. Тогда в T чётное число вершин имеет нечётную степень.

Множество U_T берется как множество вершин, степень которых не соответствует нужной чётност (т.е. s, t должны быть нечётными, остальные — чётными) тот есть это будет симметричной разностью множества нечётных вершин и множества $\{s, t\}$, а симметричная разность двух множеств чётной мощности также имеет чётную мощность.

Таким образом, множество U_T всегда содержит чётное количество вершин.

1.2. Множество J является минимальным паросочетанием по весу на вершинах U_T

Рассмотрим определение **T-join**:

Пусть $U \subseteq V$ — множество чётной мощности. T-join на U — это множество рёбер $J \subseteq E$, такое что в графе (V, J) каждая вершина $v \in U$ имеет нечётную степень, а каждая вершина $v \in V \setminus U$ — чётную.

Для получения эйлерова графа из дерева T, необходимо изменить чётность степени вершин, указанных в U_T. Это достигается добавлением рёбер из T-join J.

Поскольку граф G — полный и метрический, расстояние между любыми двумя вершинами определено и удовлетворяет неравенству треугольника. Тогда:

- Требуется соединить вершины из U_T парами путей так, чтобы получившееся множество рёбер имело минимальный суммарный вес.
- Это задача нахождения **совершенного паросочетания минимального веса** в полном графе, индуцированном на U_T, где вес рёбер равен кратчайшему расстоянию между соответствующими вершинами в G.

Тогда, множество J можно считать как минимальное по весу паросочетание на множестве U_T.

пункт 2.Пример,где решение больше чем $\frac{3}{2} \cdot \mathrm{OPT}$

Возьмем граф $V = \{s, v_2, v_3, v_4, t\}$. с расстояниями:

$$d(s, v_2) = 1, \quad d(v_2, v_4) = 1, \quad d(v_4, v_3) = 10, \quad d(v_3, t) = 1,$$
$$\text{Все остальные расстояния пусть} = 10.$$

Тогда наш оптимальный путь: s, v_2, v_3, v_4, t. а длинна: $1 + 10 + 1 + 1 = 13$.
Но алгоритм:

- MST берет рёбра: $s{-}v_2$, $v_2{-}v_4$, $v_4{-}v_3$, $v_3{-}t$ — вес получается: 13.
- $U_T = \{v_2, t\}$ (оба имеют нечётную степень).
- T-join: добавляет ребро $v_2{-}t$ веса 10.
- в итоге длина: $13 + 10 = 23$. но после сокращений — минимум 19.

Но выходит что :

$$\frac{19}{13} > \frac{3}{2}.$$