Комбинаторная оптимизация, второе теоретическое домашнее задание

Задача 1 (2 балла)

Рассмотрим задачу о покрытии множества (Set Cover) и её линейную программу. Пусть количество множеств в семействе равно m, также пусть максимальное перекрытие множеств семейства равно f. Рассмотрим $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – решение линейной программы. На семинаре было показано, что округление $\bar{x}_i = I_{x_i \geq 1/f}$ дает f-приближение для исходной задачи. Покажите, что округление $\hat{x}_i = I_{x_i > 0}$ также дает f-приближение.

Задача 2 (2 балла)

Задан направленный граф $G = (V, E)$ с двумя выделенными вершинами s и t. На дугах графа заданы целые неотрицательные длины $l : E \to \mathbb{Z}_+$. Длину дуг графа можно увеличивать на целые значения, при этом увеличения длины дуги (u, v) на единицу стоит c_{uv}, где $c : E \to \mathbb{Z}_+$. Увеличим длины дуг так, чтобы минимальная длина пути из s в t стала не меньше заданной константы a. Среди всех таких увеличений длин дуг необходимо найти минимальное по стоимости.

1. (1 балл) Постройте линейную программу с целочисленным полиэдром, которая позволяет решить указанную задачу.
2. (1 балл) Сведите задачу к некоторой полиномиально-разрешимой потоковой задаче.

Указание. Изучите прямую и двойственную программы для задачи поиска кратчайшего пути в графе.

Задача 3 (3 балла)

Дан полный метрический граф $G = (V, E)$ с двумя выделенными вершинами s и t и длинами на ребрах. Рассмотрим задачу поиска гамильтонова пути из s в t минимальной длины (гамильтонов путь должен начинаться в вершине s проходить через все вершины графа по одному разу и заканчиваться в t).

Введем определение: T-join для заданного множества вершин U — это множество ребер, у которого *нечетное* количество концов для каждой вершины из U и *четное* для остальных вершин графа $V \setminus U$.

Рассмотрим аналог алгоритма Кристофидеса для данной задачи. Построим минимальное остовное дерево T, дальше добавлением ребер достроим его до эйлерового графа. В данном случае мы хотим, чтобы в полученном эйлеровом графе у вершин s и t степень была нечетной, а у всех остальных вершин степень была четной. Обозначим за U_T множество вершин, у которых необходимо изменить четность степеней для достижения эйлеровости. Найдем T-join для множества U_T минимальной суммарной длины и обозначим его за J. Ответом алгоритма будет путь из s в t, получаемый сокращениями эйлерового обхода графа $T \cup J$, то есть $shortcut(T \cup J)$. Сокращение строится следующим образом, начинаем из вершины s, идем по эйлеровому обходу и пропускаем вершины, которые уже посетили, а также вершину t, если встретили её не в конце пути.

1. (1 балл) Покажите, что множество вершин U_T имеет четный размер, а множество J является паросочетанием минимального веса на вершинах U_T.
2. (0.5 балла) Приведите пример графа, в котором длина полученного решения будет больше, чем 3/2 длины оптимального пути.
3. (1.5 балла) Покажите, что данный алгоритм дает 5/3-приближение.

   Указание. Пусть O — это гамильтонов путь из s в t минимальной длины, а T — минимальное остовное дерево. Покажите, что множество ребер $T \cup O$ можно дизъюнктно разбить на три T-join множества относительно U_T.