Последнее теор-задание

Куприянов Александр Дмитриевич

Определение 1 (TDI-система) *Система линейных неравенств $Ax \le b$ называется* тотально двойственно целочисленной (TDI)*, если для любого $c \in \mathbb{Z}^n$, при условии, что задача*

$$\max\{c^\top x \mid Ax \le b\}$$

имеет конечное оптимальное решение, соответствующая двойственная задача

$$\min\{b^\top y \mid A^\top y = c,\ y \ge 0\}$$

имеет целочисленное оптимальное решение $y \in \mathbb{Z}^m$.

Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ и $b \in \mathbb{Z}^m$. Тогда существует целое число $\alpha > 0$ такое, что система

$$\left\{\frac{1}{\alpha}Ax \le \frac{1}{\alpha}b, \quad x \ge 0\right\}$$

является тотально двойственно целочисленной (TDI).

Рассмотрим систему $Ax \le b$, где $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$. Приведём её к стандартной форме, добавив неотрицательные дополнительные переменные $k \ge 0$:

$$Ax + k = b, \quad x \ge 0,\ k \ge 0.$$

Это эквивалентно уравнению:

$$[A\ I]\begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} = b,$$

где I — единичная матрица размера m. Матрица $[A\ I]$ имеет *целочисленные* коэффициенты.

Рассмотрим множество всех базисных невырожденных подматриц $B \in \mathbb{Z}^{m\times m}$, составленных из m ЛНЗ столбцов матрицы $[A\ I]$. Обозначим это множество через $\mathcal{B}$.

Каждая такая подматрица B является квадратной матрицей размера $m \times m$ с целыми элементами. Определитель такой матрицы $d_B := |\det(B)|$ является целым числом, тк определитель матрицы с целыми элементами — всегда целый

Еще тк каждая из этих матриц B невырождена (если формально $\det(B) \ne 0$), то каждое $d_B \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Рассмотрим такое значение :

$$\alpha := \prod_{B\in\mathcal{B}} d_B.$$

Так как каждый d_B — положительное целое число, то *их произведение* α тоже будет положительным целым числом:

$$\alpha \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Тогда получим:

- α — положительное целое;

- Каждое d_B делит α;

Введем этот коэфициент в исходную систему:

$$\tilde{A} := \frac{1}{\alpha}A, \quad \tilde{b} := \frac{1}{\alpha}b.$$

Рассматриваем новую систему:

$$\tilde{A}x \leq \tilde{b}, \quad x \geq 0.$$

Рассмотрим произвольный вектор $c \in \mathbb{Z}^n$, и задачу

$$\max\left\{c^\top x \,\middle|\, \tilde{A}x \leq \tilde{b}\right\}.$$

Её двойственная задача:

$$\min\left\{\tilde{b}^\top y \,\middle|\, \tilde{A}^\top y = c,\ y \geq 0\right\}.$$

Пусть y^* — базисное оптимальное решение двойственной задачи. Тогда y^* дает такую систему ЛУ:

$$B^\top y^* = c,$$

где B — базисная подматрица из $\tilde{A}^\top$. Тк $B = \frac{1}{\alpha}B'$ для некоторой $B' \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ (подматрица из $A^\top$), то:

$$\frac{1}{\alpha}(B')^\top y^* = c \quad \Rightarrow \quad (B')^\top y^* = \alpha c.$$

Используем правило Крамера:

$$y_i^* = \frac{\det(B_i')}{\det(B')},$$

где B_i' — матрица, с заменой i-го столбца $(B')^\top$ на вектор αc. Но B' и c целочисленные, получаем $\det(B_i') \in \mathbb{Z}$, а $\det(B') \mid \alpha$, тогда дробь целая:

$$y_i^* \in \mathbb{Z}.$$

Получаем y^* — целочисленное решение двойственной задачи. И выбираси c произвольно, значит система $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ будет TDI.

Задание 2

Вспомним как у нас определяется функция ранга:

$$\mathrm{rank}(A) = \max\{|I| : I \subseteq A,\ I \in \mathcal{I}\}.$$

Span множества $A \subseteq E$:

$$\mathrm{span}(A) = \{x \in E \mid \mathrm{rank}(A \cup \{x\}) = \mathrm{rank}(A)\}.$$

пункт 1

Если $A \subseteq B$, то $\mathrm{span}(A) \subseteq \mathrm{span}(B)$.

Пусть $x \in \mathrm{span}(A)$. Тогда по определению:

$$\mathrm{rank}(A \cup \{x\}) = \mathrm{rank}(A).$$

Так как $A \subseteq B$, по теореме о рангах (свойсва брал с nerc itmo):

$$\operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}(B).$$

Пусть это не так и $x \notin \operatorname{span}(B)$, тогда получается

$$\operatorname{rank}(B \cup \{x\}) > \operatorname{rank}(B).$$

Заметим, что

$$A \cup \{x\} \subseteq B \cup \{x\} \Rightarrow \operatorname{rank}(A \cup \{x\}) \leq \operatorname{rank}(B \cup \{x\}).$$

Отсюда получаем,

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \cup \{x\}) \leq \operatorname{rank}(B \cup \{x\}) < \operatorname{rank}(B) + 1.$$

Противоречие, чтд и $x \in \operatorname{span}(B)$.
Значит $\operatorname{span}(A) \subseteq \operatorname{span}(B)$.

пункт 2

Для любого множества $A \subseteq E$:

$$\operatorname{rank}(\operatorname{span}(A)) = \operatorname{rank}(A).$$

Обозначим $r = \operatorname{rank}(A)$. Тогда по определению ранга, есть независимое множество $C \subseteq A$, такое что $|C| = r$. И по определению это базис множества A.

Так как $C \subseteq A \subseteq \operatorname{span}(A)$, по монотонности:

$$\operatorname{rank}(\operatorname{span}(A)) \geq \operatorname{rank}(A) = r.$$

Опять докажем от противного и: $\operatorname{rank}(\operatorname{span}(A)) > r$. Тогда будет независимое множество $D \subseteq \operatorname{span}(A)$, такое что $|D| = r + 1$.

Рассмотрим произвольный элемент из этого множества $d \in D$. Так как $d \in \operatorname{span}(A)$, то по определению:

$$\operatorname{rank}(A \cup \{d\}) = \operatorname{rank}(A) = r.$$

Получается, $d \in \operatorname{span}(C)$, так как $C \subseteq A$ и $\operatorname{span}(C) = \operatorname{span}(A)$.

Но известно, что:

$$\operatorname{rank}(\operatorname{span}(C)) = \operatorname{rank}(C) = r,$$

то есть в $\operatorname{span}(C)$ не существует независимых множеств размера больше r.

Тогда, множество D не может быть независимым, противоречие,значит чтд: