

# Случайные процессы

## Весна 2023

### зачет/экзамен

Лифшиц М.А.

Серым фоном отмечены пункты, выпадающие при сдаче зачёта вместо экзамена

#### Раздел 1: Основные типы случайных процессов

Понятие случайного процесса. Конечномерные распределения процесса. Стационарные процессы. Стационарность в узком и широком смысле.  
Процессы со стационарными приращениями. Процессы с независимыми приращениями. Модификация процесса.  
Математическое ожидание и ковариационная функция процесса. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс и его свойства.

#### Раздел 2: Гауссовские случайные процессы

Определение гауссовского процесса. Математическое ожидание и ковариационная функция как элементы, определяющие конечномерные распределения процесса.  
Примеры гауссовских случайных процессов. Броуновский мост и его связь с винеровским процессом. Процесс Поле Винера-Ченцова (броуновский лист). Броуновская функция Леви. Дробное броуновское движение. Гауссовский белый шум и интеграл по нему.  
Выражение основных гауссовских процессов (винеровский процесс, броуновский мост, броуновский лист, броуновская функция Леви, дробное броуновское движение) в виде значений белого шума или интегралов по белому шуму.

#### Раздел 3: Случайные меры и стохастические интегралы

Определение меры с некоррелированными значениями и интеграла по ней. Простейшие свойства интеграла. Изометрическое свойство интеграла. Комплексные меры.  
Меры с независимыми значениями. Пуассоновские меры. Центрированные пуассоновские меры. Пример использования: выражение нагрузки в системе обслуживания через интеграл по пуассоновской мере.

#### Раздел 4: Стационарные процессы и их спектральные представления

Стационарный процесс в широком смысле. Спектральное представление, спектральная мера, спектральная плотность. Связь корреляционной функции и спектральной меры. Построение процесса с заданным спектром через меру с некоррелированными значениями. Закон больших чисел.  
Пример: процесс с двухточечным спектром.  
Особенности спектрального представления вещественного процесса.  
Стационарные последовательности и поля. Периодические стационарные процессы. Авторегрессионная последовательность.

#### Раздел 5: Прогнозирование стационарных последовательностей

Понятие линейного прогноза. Ошибка прогноза. Регулярные и сингулярные процессы. Примеры.  
Аналитическая интерпретация задачи прогнозирования. Различные пространства функций, связанные с понятиями "прошлого" и "будущего".  
Построение прогноза в случае факторизуемой спектральной плотности.

Вычисление ошибки прогноза. Построение факторизации спектральной плотности при помощи разложения логарифма в ряд Фурье.

Определение ошибки прогноза на один шаг в общем случае.

Рациональные спектральные плотности. Приведение их к каноническому виду, факторизация и построение прогноза.

## **Раздел 6: Процессы с независимыми приращениями**

Сложные пуассоновские величины. Сложная пуассоновская величина как сумма случайного числа независимых величин. Нормальное распределение как спектральный предел в нуле.

Безгранично делимые распределения. Теорема Леви--Хинчина (формулировка).

Триплет, определяющий безгранично делимое распределение.

Построение процесса с независимыми приращениями с заданным триплетом как интеграла по пуассоновской мере.

Устойчивые случайные величины. Определение, спектральное представление, параметризация семейства устойчивых величин. Строгая устойчивость.

Устойчивое распределение и устойчивый процесс с индексом  $\frac{1}{2}$ . Связь с винеровским процессом, плотность распределения.

## **Раздел 7: Сходимость процессов**

Сходимость конечномерных распределений (КМР).

Примеры: принцип инвариантности, сходимость пуассоновских процессов высокой интенсивности, сходимость эмпирических процессов.

Определения слабой сходимости процессов и их эквивалентность. Связь между слабой сходимостью и сходимостью КМР. Плотность семейства распределений. Теорема Прохорова о плотности и слабой сходимости. Моментное условие плотности семейства процессов в  $C[0,1]$ . Принцип инвариантности в  $C[0,1]$ .

Пространство Скорохода  $D[0,1]$ . Метризация и свойства. Условие принадлежности процесса пространству Скорохода. Принадлежность процессов с независимыми приращениями пространству  $D[0,1]$ . Достаточные условия слабой сходимости в  $D[0,1]$ . Пример: слабая сходимость эмпирических процессов.

Предельные теоремы для нагрузки в системе обслуживания (сходимость к винеровскому процессу, дробному броуновскому движению, устойчивым процессам с независимыми приращениями) - формулировки.