Automaten und Berechenbarkeit Klausur WS22/23

23.02.2023

- Zeit: 120 Minuten
- Blätter selber mitbringen
- 70 Punkte

Aufgabe 1 (6P.)

Wir betrachten die Sprache
$A = \{\omega | \omega \in \{a, b\}^*, \omega \text{ enthält das Teilwort } aaa \Leftrightarrow |\omega| \equiv_2 0\}$
Geben Sie einen DFA an, der A akzeptiert.

Aufgabe 2 (8P.)

a) Untersuchen Sie, ob $B_1 = \{\omega | \omega \in \{a, b\}^*, |\omega| \text{ ist eine Primzahl kleiner als } 10\}$ eine reguläre Sprache ist.

b) Es sei $B_2 = \{u\$v | u, v \in \{a, b\}^*, |u| = 2|v|\}$. Zeigen Sie unter Anwendung des Satzes von Myhill-Nerode, dass B_2 nicht regulär ist.

Aufgabe 3 (14P.)

Es sei $C_1 = \{a^i b^j \$ b^k a^l | i, j, k, l \in \mathbb{N} \text{ und } i + j = k + l\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die C_1 erzeugt.

b) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

c) Zeigen Sie, dass $C_2 = \{a^n \$ b^{n^2} | n \in \mathbb{N}\}$ keine kontextfreie Sprache ist.

Aufgabe 4 (4P.)

a) Geben Sie eine Funktion an, die nicht Turing-berechenbar sit.

b) Geben Sie eine Sprache an, die nicht durch eine Grammatik erzeugbar ist.

Aufgabe 5 (16P.)

Es sei $D = \{\langle M\rangle\ |\text{M ist eine TM und M akzeptiert ein Palindrom der Länge 3}\}$

a) Definieren Sie die Begriffe Entscheidbarkeit und rekursive Aufzählbarkeit.

b) Untersuchen Sie, ob D entscheidbar ist.

c) Zeigen Sie $D \in RE$.

d) Welche Aussage können Sie über $\bar{D}$ bezüglich Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit machen?

Aufgabe 6 (14P.)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen war sind. Eine kurze Begründung genügt jeweils.

a) Jede endliche Sprache ist entscheidbar.

b) Es gibt eine Sprache, die von einem NFA akzeptiert werden kann, aber nicht von einem deterministischen Kellerautomaten.

c) Die semi-charakteristische Funktion jeder entscheidbaren Menge ist berechenbar.

f) Das Komplement jeder rekursiv aufzählbaren Menge ist durch eine Grammatik erzeugbar.

e) Der Durchschnitt einer kontextfreien und einer regulären Sprache ist kontextfrei.

f) Falls $A \leq_p B$ gilt und A NP-Vollständig ist, so ist B NP-Schwer.

g) Falls $A \leq B$ ist und $B \notin REC$ gilt, so ist auch $A \notin REC$

Aufgabe 7 (8P.)

a) Definieren Sie die Reduzierbarkeit ($A \leq B$) einer Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ auf eine Sprache $B \subseteq \Sigma^*$.

b) Es seien
$CLIQUE = \{\langle G = (V, E), k\rangle\ |\text{G besitzt eine Clique der Größe k }\}$
und
$INDEPENDENTSET = \{\langle G = (V, E), l\rangle\ |\text{G besitzt eine unabhängige Menge der Größe k}\}$
(wie in der Vorlesung definiert).
Zeigen Sie: $CLIQUE \leq_p INDEPENDENTSET$.