DS1: Aussagenbeweise - Aufgaben

Sonntag, 19. Februar 2023 05:02

Aufgabe 4) Tautologie und Erfüllbarkeit

Beweisen Sie folgende Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an. Erklären Sie den Begriff Modell und definieren Sie die unterstrichenen Wörter.

a) $(F \vee G)$ ist erfüllbar gdw. F erfüllbar oder G erfüllbar ist.

! b) $(F \wedge G)$ ist erfüllbar gdw. F erfüllbar und G erfüllbar ist.

c) $(F \vee G)$ ist Tautologie gdw. F Tautologie G Tautologie ist.

! d) $(F \wedge G)$ ist Tautologie gdw. F Tautologie und G Tautologie ist.

Def. Modell: Sei F eine aussagenlogis. Formel $(F \in \mathcal{L}_A)$
β ist Modell von F $\leftrightarrow_{df}$ β ist eine zu F passende Belegung mit $I_\beta(F) = 1$

Def. Tautologie: eine Aussage, deren Wahrheitswert immer Wahr ist $(I_\beta = 1)$

Bsp: - Es regnet oder es regnet nicht w
- Es regnet und es regnet nicht f

Tautologie

A	¬A	A ∨ ¬A
w	f	w
f	w	w

Kontradiktion

A	¬A	A ∧ ¬A
w	f	f
f	w	f

Def. Kontradiktion: eine Aussage hat immer den Wert falsch

Def. Erfüllbarkeit: eine Aussage ist erfüllbar, wenn es eine Belegung der Variable gibt, für die der Wahrheitswert des gesamten Ausdrucks wahr ist

4) a) $(F \vee G) \in SAT \iff F \in SAT \vee G \in SAT$

→ mit Tabelle:

F	G	F ∨ G
0	0	0
1	0	1

F	G	F ∨ G
0	0	0
0	1	1

in beiden Fällen gibt es mindestens eine Mglkeit bei der die Belegung ein Modell ist
↳ also: $I_\beta(F \vee G) = 1$

→ schriftlich: - bei "oder" muss nur eine der beiden Seiten wahr sein: 1 ergeben (siehe Tabelle oben)

„⇐": ① → $(F \vee G)$ ist erfüllbar, wenn F erfüllbar oder G erfüllbar

→ $F \in SAT \vee G \in SAT \longrightarrow (F \vee G) \in SAT$

② → F und G wären nicht erfüllbar

→ $(F \vee G) \iff (0 \vee 0) \iff 0$ → Kontradiktion

„⇒": indirekter Beweis zeigt, dass entweder G oder F erfüllbar sein muss

→ $(F \vee G) \in SAT \rightarrow F \in SAT \vee G \in SAT$

→ $(F \vee G) \in SAT \iff F \in SAT \vee G \in SAT$

↳ Implikation in beide Richtungen ↳ wahre Aussage

b) $(F \wedge G) \in SAT \iff F \in SAT \wedge G \in SAT$

„⇒": nur Teil der Aussage ist richtig: $(F \wedge G) \in SAT \rightarrow F \in SAT \wedge G \in SAT$

↳

F	G	(F ∧ G)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

„⇐": - Erklärung an Bsp: · A ist erfüllbar
· ¬A ist erfüllbar

↳ $(A \wedge \neg A)$ ist nicht erfüllbar
$(1 \wedge 0) \notin SAT$

→ ist nicht erfüllbar, wenn beide erfüllbar

↳ falsche Aussage

c) $(F \vee G) \in TAUT \iff F \in TAUT \vee G \in TAUT$

„⇐": nur Teil der Aussage ist richtig: $F \in TAUT \wedge G \in TAUT \rightarrow (F \wedge G) \in TAUT$

„⇒": $(F \vee G)$ kann auch Tautologie sein, wenn $F \notin TAUT \wedge G \notin TAUT$

→ Bsp: · A ist keine Tautologie
· ¬A ist keine Tautologie

↳ $(A \vee \neg A)$ ist Tautologie

↳ falsche Aussage

d) $(F \wedge G) \in TAUT \iff F \in TAUT \wedge G \in TAUT$

„⇒": $(F \wedge G)$, wenn beide F und G wahr sind

→ F(wahr) ∧ G(wahr) → Tautologie

„⇐": $F \in TAUT \wedge G \in TAUT$

$\Rightarrow 1 \wedge 1$

$\Rightarrow (1 \wedge 1) \in TAUT$ ↳ wahre Aussage

4 Aufgabe

Beweisen oder Gegenbeispiel angeben: wahr oder falsch?

1. $F \rightarrow G$ ist Tautologie und F ist Tautologie $\Rightarrow$ G ist Tautologie
2. $F \rightarrow G$ ist erfüllbar und F ist erfüllbar $\Rightarrow$ G ist erfüllbar
3. ! $F \rightarrow G$ ist Tautologie und F ist erfüllbar $\Rightarrow$ G ist erfüllbar

Des weiteren sollte Modell erläutert werden, Tautologie und erfüllbar definiert werden.

Def: Es sei F eine al Formel
·) F ist erfüllbar $\leftrightarrow_{df}$ es gibt eine zu F passende Belegung, die Modell ist
·) F ist Tautologie $\leftrightarrow_{df}$ jede zu F passende Belegung ist Modell von F
·) F ist unerfüllbar $\leftrightarrow_{df}$ keine zu F passende Belegung ist Modell von F

4) 1. zu zeigen: für alle β ist $I_\beta(G) = 1$

geg: → $I_\beta(F \rightarrow G) = 1 \iff I_\beta(F) \leq I_\beta(G)$

→ $I_\beta(F) = 1 \iff \underbrace{\underbrace{I_\beta(F)}_{=1} \leq I_\beta(G)}_{=1}$ ↳ da $(F \rightarrow G) \in Taut$, muss $I_\beta(G) = 1$

→ bei Tautologie sind alle Aussagen wahr

→ $I_\beta(G) = 1$ ↳ G ist also auch Tautologie

2. zu zeigen: $I_\beta(G) = 1$

→ wir haben geg: $I_\beta(\overset{\text{es gilt ein}}{F \to G}) = 1$ und $\overset{\text{es gilt ein}}{I_\beta(F)} = 1$

↳ müssen nicht immer 1 sein, es sagt nur aus, das es einen Fall gilt, bei dem alle Aussagen 1 sind

→ $I_\beta(F \to G) \overset{\text{(Definition)}}{=} 1 \iff \underbrace{I_\beta(F)}_{0} \leq I_\beta(G)$ → $I_\beta(F)$ = kann 1 oder 0 sein

→ $I_\beta(G)$ = kann 1 oder 0 sein

egal was $I_\beta(G)$ ist, die ganze Aussage ist wahr

→ d.h. $I_\beta(G)$ kann auch unerfüllt sein und ganze Aussage ist trz wahr

→ somit währe gegebene Hypothese nicht wahr

→ müssen also mit Kontradiktion beweisen

→ Kontradiktion: zu zeigen $(F \to G) \in$ Sat und $F \in$ Sat → $G \in \overline{\text{Sat}}$

Bsp: $F = A$ (erfüllbar für $\beta(A) = 1$)

$G = A \wedge \neg A$ (unerfüllt)

$(F \to G) \equiv A \to (A \wedge \neg A)$ (erfüllbar, wenn $\beta(A) = 0$)

$0 \to \ldots$ (ist immer Richtig)

↳ die geg. Aussage ist nicht wahr (→ Beweis durch Gegenbsp)

3. zu zeigen: es gilt ein $I_\beta(G) = 1$ (kann auch 0 sein)

→ $I_\beta(F \to G) = 1$ (muss 1 sein wegen Taut.)

→ es gilt ein $I_\beta(F) = 1$

→ $I_\beta(F \to G) = 1 \iff \underbrace{I_\beta(F)}_{1} \leq I_\beta(G)$ → nach Annahme muss es richtig sein

$\Rightarrow 1 \leq I_\beta(G)$, d.h. $I_\beta(G)$ muss 1 sein, damit $(F \to G) \in$ Sat

↳ es gilt auch einen Fall, bei dem $I_\beta(G) = 1$

⇒ d.h. G muss erfüllbar sein

⇒ somit ist gegebene Aussage wahr