Sto: 9.Hausaufgabe (20.12.23) - Till Billerbeck (G3), Cora Zeitler (G1)

Montag, 18. Dezember 2023 19:21

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Im Arbeitsspeicher Ihres Smartphones haben sie die Bitfolge 0000 gespeichert. Ein α-Partikel trifft auf den Speicher und bewirkt unabhängig voneinander bei jedem Bit mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ einen Flip, also eine Änderung von 0 auf 1. Es sei X die Anzahl der '1' bits in der Bitfolge nach dem Auftreffen.

Legen Sie zunächst ein Modell fest und definieren Sie hierin X als Zufallsvariable. Bestimmen Sie danach die Verteilungsfunktion von X.

4)
- $p = \frac{1}{4}$
- ZV: X = {"Anzahl der 1-Bits in der Bitfolge nach Auftreten eines α-Partikels"}
- Modell: X ist binomial-verteilt → mit $\sim B(4, \frac{1}{4})$

→ mit $P(X=k)$ wird Wahrscheinl.keit beschrieben, dass k-Bits nach Auftreffen des α-Partikels auf 1 stehen

$$\to P(X=k) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}$$

// $\binom{n}{k}$ → Binomialkoeffizent: Anzahl der Mglkeiten um k 1-Bits aus n Bits auszuwählen

$$P(X=0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-0} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{81}{256} = \frac{81}{256}$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-1} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{64} = 1 \cdot \frac{27}{64} = \frac{27}{64}$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{6}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{54}{256}$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-3} = 4 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{4} \cdot \frac{1}{64} = \frac{12}{256}$$

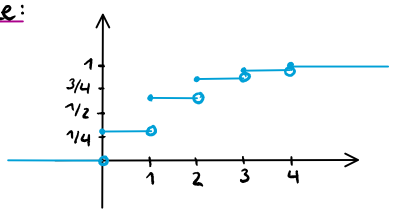
$$P(X=4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-4} = 1 \cdot \frac{1}{256} \cdot 1 = \frac{1}{256}$$

- Verteilungsfkt: $F(y)$ ist Summe dieser Wahrs.keiten für alle $k \leq x$

$$\hookrightarrow F(y) = P(X \leq y) = P(X \leq \lfloor y \rfloor) = \sum_{k=0}^{\lfloor y \rfloor} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\lfloor y \rfloor} \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}$$

$$\Rightarrow F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor y \rfloor} \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}, & x \in [0,4] \\ 1, & y > 4 \end{cases}$$

- Skizze:



Eigenschaften:
-) nicht fallend ✓
-) rechtsstetig ✓
-) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ✓

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 1$ ✓

Aufgabe 5 **(1+3 Punkte)**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.

a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P(X = x) = F(x) - F(x-).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Aussage aus Aufgabe 3a).

b) Nehmen Sie nun an, dass die Verteilungsfunktion F gegeben ist durch

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ (x+2)/8, & x \in [-1, 2), \\ 3/4, & x \in [2, 3), \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X \in (-1, 2))$ und $P(X = n)$ für alle $n \in \{-1, 1, 2, 3\}$.
Hinweis: Verwenden Sie 3b) und 5a).

// $P(X=y)$: Wahrs.keit, dass die Zufallsvariable X den Wert y annimmt, ist gleich der Wahrs.keit des Ergebnisses $\{X = y\}$

// $F(y)$: Verteilungsfkt $F(y)$ an der Stelle y, gibt die Wahrs.keit an, dass Zufallsvariable X einen Wert $\leq y$ annimt → $P(X \leq y)$

// $F(y-)$: linksseitige Grenzwert von $F(y)$ an der Stelle y, gibt die Wahrs.keit an, dass die Zufallsvariable X einen Wert $<$ als y annimt ⇒ $P(X < y)$

5a) aus 3a) bewiesen: $P(X<y) = F(y-)$

zu zeigen: $\forall x \in \mathbb{R}: P(X=y) = F(y) - F(y-)$

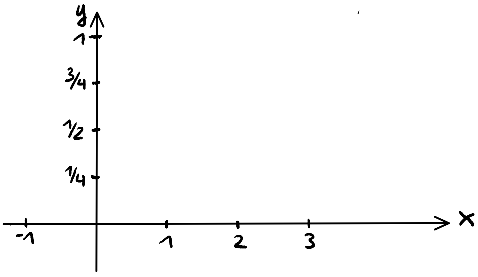
$$\begin{aligned} \rightsquigarrow P(X=y) &= F(y) - F(y-) \quad / \; 3a \\ &= F(y) - P(X<y) \quad / \; \text{Def. 7.1.} \\ &= P(X \leq y) - P(X<y) \quad = P(\cancel{X<y}) + P(X=y) - P(\cancel{X<y}) = P(X=y) \\ &= \sum_{k=0}^{y} P(X=k) - \sum_{k=0}^{y-1} P(X=k) \\ &= \sum_{k=y}^{y} P(X=k) \\ &= P(X=y) \end{aligned}$$

5b) geg:

$$F(x) = \begin{cases} \text{I} \quad 0, & x<-1, \\ \text{II} \quad (x+2)/8, & x \in [-1,2), \\ \text{III} \quad 3/4, & x \in [2,3), \\ \text{IV} \quad 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ werte von -1 bis 2 in x einsetzen um Graph zu bekommen

Skizze:



① zu zeigen: $P(X \in (-1,2))$

wir wissen aus 3b: $P(x \in (a,b)) = F(b-) - F(a)$ $= P(x<b) - P(X \leq a)$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow P(X \in (-1,2)) &\overset{3b}{=} F(2-) - F(-1) \quad // \; F(2-) = \lim_{n\to\infty} F(2-\tfrac{1}{n}) \\ &\overset{\text{II}}{=} \frac{2+2}{8} - \frac{-1+2}{8} \\ &= \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

② zu zeigen: $P(X=n)$, für $n = \{-1, 1, 2, 3\}$

wir wissen aus 5a): $F(X=y) = F(y) - F(y-)$

$$\begin{aligned} P(X=-1) &\overset{5a}{=} F(-1) - F((-1)-) \quad // \; \text{II} - \text{I} \quad // \; F((-1)-) = P(X<-1) = 0 \\ &= \frac{-1+2}{8} - 0 = \frac{1}{8} \\ P(X=1) &\overset{5a}{=} F(1) - F(1-) \quad // \; \text{II} - \text{II} \quad // \; F(1-) = \lim_{n\to\infty} F(1-\tfrac{1}{n}) = F(1) = \frac{3}{8} \\ &= \frac{1+2}{8} - \frac{1+2}{8} = 0 \\ P(X=2) &\overset{5a}{=} F(2) - F(2-) \quad // \; \text{III} - \text{II} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2+2}{8} = \frac{1}{4} \\ P(X=3) &\overset{5a}{=} F(3) - F(3-) \quad // \; \text{IV} - \text{III} \\ &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$