FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Simon King

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra für *-Informatik

Modul–Nr.: FMI-MA0022

Wintersemester 2020/21 06.04.2021

Aufgabe 1: *Lineare Gleichungssysteme*

a) (5 P.) Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\mathrm{LR}(A;\, \vec{b})$ sowie eine Basis von Spaltenraum(A). **Zur Kontrolle:** Ihre Rechnung sollte ergeben, dass $\mathrm{Rang}(A) = 3$ und $\mathrm{LR}(A;\, \vec{b}) \neq \emptyset$.

b) (3 P.) Seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$. Beweisen Sie: Wenn es <u>kein</u> $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ gibt mit $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, denn gibt es $\vec{y} \in \mathbb{K}^m$ mit $A^\top \cdot \vec{y} = \vec{0}$ und $\vec{b}^\top \cdot \vec{y} = 1$.
Hinweis: Ränge von $(A, \vec{b})$, $\begin{pmatrix} A^\top \\ \vec{b}^\top \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} A^\top & \vec{0} \\ \vec{b}^\top & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: *Euklidische Räume*

a) (4 P.) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Untersuchen Sie, ob A positiv definit ist.

b) (4 P.) Sei $\vec{u}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine ONB von $U := \mathrm{Span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \leq \mathbb{R}^4$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

Aufgabe 3: *(Abbildungs-)Matrizen*

a) (3 P.) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Berechnen Sie A^{-1}.

b) (3 P.) Wir betrachten die Basen $B := [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}]$, $C := [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}]$ sowie die Standardbasis $E := [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ des $\mathbb{R}^2$. Die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch ${}^{C}_{B}f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Berechnen Sie ${}^{E}_{E}f$.

Bitte wenden

Aufgabe 4: *Lineare Abbildungen*

a) (3 P.) Seien $f, g\colon \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^3$ $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass auch die Abbildung $h\colon \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^3$ gegeben durch $\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^5\colon\ h(\vec{v}) := \alpha f(\vec{v}) - \beta g(\vec{v})$ eine lineare Abbildung ist, und folgern Sie, dass es ein $\vec{v} \in \mathbb{K}^5$, $\vec{v} \neq 0$, mit $\alpha g(\vec{v}) = \beta f(\vec{v})$ gibt.

In den folgenden Teilaufgaben seien $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq \mu$ und $A \in M_n(\mathbb{K})$ so, dass $(A - \mu \mathbb{1}_n) \cdot (A - \lambda \mathbb{1}_n) = \mathbb{0}$. Die linearen Abbildungen $\varphi, \psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ seien gegeben durch $\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n\colon\ \varphi(\vec{v}) := A \cdot \vec{v} - \lambda \vec{v}$ und $\psi(\vec{v}) := A \cdot \vec{v} - \mu \vec{v}$.

b) (2 P.) Zeigen Sie $n = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) + \dim(E_\lambda(A))$. **Hinweis:** Wie kann man $E_\lambda(A)$, $E_\mu(A)$ mittels φ, ψ ausdrücken?

c) (1 P.) Zeigen Sie $\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq E_\mu(A)$.

d) (1 P.) Folgern Sie aus den Aussagen der vorigen beiden Teilaufgaben, dass A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 5: *Hauptachsentransformation*
(8 P.) Berechnen Sie eine Hauptachsentransformation (also eine speziell orthogonale diagonalisierende Matrix) für $A := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in M_3(\mathbb{R})$. **Hinweis:** Es ist Teil der Aufgabe, die Eigenwerte (und Eigenräume) zu berechnen. Zur Kontrolle: Sie sollten die Eigenwerte 1 und -2 finden.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Erreichbare Punktzahl: 37