Sto: 13.Hausaufgabe (31.01.24) - Till Billerbeck (G3), Cora Zeitler -(G1)

Dienstag, 30. Januar 2024 10:50

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen mit $E[X_i^2] < \infty$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

// ① $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$

oder: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

// ② $Cov(X,Y) = E[(X-E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$

// ③ Bi-Linearität: $Cov(aX + bY, Z) = a \cdot Cov(X,Z) + b \cdot Cov(Y,Z)$

4)
$$Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \overset{①}{=} E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right)^2\right]$$
$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n X_j - E\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)\right)\right]$$
$$\overset{②}{=} Cov\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j\right)$$
$$\overset{③}{=} \sum_{i=1}^n \cdot \sum_{j=1}^n \cdot Cov(X_i, X_j)$$
// Wenn $X_i = X_j$, dann: $Cov(X,X) = Var(X) \geq 0$
$$= \sum_{i=1}^n Var(X_i) + \sum_{i \neq j}^n Cov(X_i, X_j)$$
// Symmetrie: $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
→ Jeder Wert wird doppelt genommen
$$= \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} Cov(X_i, X_j)$$
■

4) mit Vollständiger Induktion:

IA: $n = 1$: $Var\left(\sum_{i=1}^1 X_i\right) = Var(X_1) = \sum_{i=1}^1 Var(X_i) + 2 \cdot \underbrace{\sum_{1 \le i < j \le n} Cov(X_i, X_j)}_{0} = Var(X_1) + 0 = Var(X_1)$ ✓

$n = 2$: $Var\left(\sum_{i=1}^2 X_i\right) = Var(X_1 + X_2) = E[(X_1 + X_2 - E(X_1 + X_2))^2]$

(→ wie Aufg. 1)
$$= E[((X_1 - E(X_1)) + X_2 - E(X_2))^2]$$
$$= E[(X_1 - E(X_1))^2 + 2 \cdot (X_1 - E(X_1)) \cdot (X_2 - E(X_2)) + (X_2 - E(X_2))^2]$$
$$= E[(X_1 - E(X_1))^2] + E[(X_2 - E(X_2))^2] + 2 \cdot E[(X_1 - E(X_1)) \cdot (X_2 - E(X_2))]$$
$$= Var(X_1) + Var(X_2) + 2 \cdot Cov(X_1, X_2)$$ ✓ // (Aufgabe Ha 13. Nr. 1)

IS: für $n = k$: $Var\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) = \sum_{i=1}^k Var(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le k} Cov(X_i, X_j)$

für $n = k+1$: $Var\left(\sum_{i=1}^{k+1} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} Var(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le k} Cov(X_i, X_j)$

Indbeweis: $Var\left(\sum_{i=1}^{k+1} X_i\right) = Var\left(\sum_{i=1}^k X_i + X_{k+1}\right)$
$$\overset{IA}{=} Var\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) + Var(X_{k+1}) + 2 \cdot Cov\left(\sum_{i=1}^k X_i, X_{k+1}\right)$$
$$\overset{IV}{=} \sum_{i=1}^k Var(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le k} Cov(X_i, X_j) + Var(X_{k+1}) + 2 \cdot Cov\left(\sum_{i=1}^k X_i, X_{k+1}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{k+1} Var(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le k} Cov(X_i, X_j) + 2 \cdot Cov\left(\sum_{i=1}^k X_i, X_{k+1}\right)$$
$$\overset{\text{bilinear}}{=} \sum_{i=1}^{k+1} Var(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le k} Cov(X_i, X_j) + 2 \cdot (Cov(X_1, X_{k+1}) + Cov(X_2, X_{k+1}) + \dots + Cov(X_k, X_{k+1}))$$
$$= \sum_{i=1}^{k+1} Var(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le k} Cov(X_i, X_j) + 2 \cdot \sum_{i=1}^k Cov(X_i, X_{k+1})$$
// $\sum_{1 \le i < j \le n} X = \sum_{i=1}^{n-1} \cdot \sum_{j=2}^n X$
$$= \sum_{i=1}^{k+1} Var(X_i) + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{k-1} \cdot \sum_{j=2}^k Cov(X_i, X_j) + \sum_{i=1}^k Cov(X_i, X_{k+1})\right)$$

// $\sum_{1 \le i < j \le k} Cov(X_i, X_j) = Cov(X_1 + X_2) + \dots + Cov(X_1, X_k) + Cov(X_2, X_3) + Cov(X_2, X_k) + \dots + Cov(X_{k-1}, X_k)$

// $\sum_{1 \le i < j \le k} Cov(X_i, X_j) + \sum_{i=1}^k Cov(X_i, X_{k+1}) = Cov(X_1, X_2) + \dots + Cov(X_1, X_{k+1}) + \dots + Cov(X_k, X_{k+1}) = \sum_{1 \le i < j \le k+1} Cov(X_i, X_j)$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} Var(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le k+1} Cov(X_i, X_j)$$ ■

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit $E[X] = E[Y] = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$, sowie $\rho \in [-1, 1]$. Wir definieren

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}, \quad B := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix},$$

mit $a := \sqrt{1+\rho}$ und $b := \sqrt{1-\rho}$, sowie $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \end{pmatrix} := B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

a) $\mathrm{Var}(X'), \mathrm{Var}(Y'), \mathrm{Corr}(X', Y')$,

b) $\mathrm{Var}(X''), \mathrm{Var}(Y''), \mathrm{Corr}(X'', Y'')$.

5a)
$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & \sqrt{1-p^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ pX + \sqrt{1-p^2} \cdot Y \end{pmatrix}$$

→ $Var(X') = Var(X) = \underline{1}$

→ $Var(Y') = Var(pX + \sqrt{1-p^2} \cdot Y)$
$$\overset{\text{unabh.}}{=} p^2 \cdot Var(X) + (1-p^2) \cdot Var(Y)$$
$$= p^2 + 1 - p^2 = \underline{1}$$

→ $Corr(X', Y') = \frac{Cov(X', Y')}{Stabw(X') \cdot Stabw(Y')}$
$$= Cov(X', Y')$$
$$= E(X', Y') - E(X') \cdot E(Y')$$

$$\to \mathrm{Corr}(X',Y') = \frac{\quad}{\mathrm{Stabw}(X')\cdot \mathrm{Stabw}(Y')}$$

$$= \mathrm{Cov}(X',Y')$$

$$= E(X',Y') - E(X')\cdot E(Y')$$

$$= E\left[X\cdot(\rho X + \sqrt{1-\rho^2}\cdot Y)\right] - E(X)\cdot E(Y')$$

$$= E\left[(\rho X^2 + \sqrt{1-\rho^2}\cdot X\cdot Y)\right]$$

$$= \rho\cdot E[X^2] + \sqrt{1-\rho^2}\cdot E(X\cdot Y)$$

$$= \rho\cdot E[X^2]$$

$$\overset{10.3a}{=} \rho\cdot(\mathrm{Var}(X) + (E(X))^2) = \underline{\underline{\rho}}$$

Andere Variante:

a) i) $\mathrm{Var}(X') = \mathrm{Var}(X) = \underline{\underline{1}}$

ii) $\mathrm{Var}(Y') = \mathrm{Var}(\rho X + \sqrt{1-\rho^2}\,Y) \overset{\text{unabh. u. 10.3b}}{=} \rho^2\,\mathrm{Var}(X) + (1-\rho^2)\,\mathrm{Var}(Y) = \rho^2 + 1 - \rho^2 = \underline{\underline{1}}$

iii) $\mathrm{Stabw}(X') = \sqrt{\mathrm{Var}(X')} = \sqrt{1} = \underline{\underline{1}} = \mathrm{Stabw}(Y')$

$\mathrm{Cov}(X',Y') = \mathrm{Cov}(X, \rho X + \sqrt{1-\rho^2}\,Y) \overset{\text{bilinear}}{=} \rho\,\mathrm{Cov}(X,X) + \sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{Cov}(X,Y) \overset{\text{unabh.}}{=} \rho\,\mathrm{Var}(X) + 0 = \underline{\underline{\rho}}$

$\Rightarrow \mathrm{Corr}(X',Y') = \dfrac{\mathrm{Cov}(X',Y')}{\mathrm{Stabw}(X')\,\mathrm{Stabw}(Y')} = \dfrac{\rho}{1} = \underline{\underline{\rho}}$

5b) $$\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\to \mathrm{Var}(X'') = \mathrm{Var}\left(\tfrac{1}{2}\cdot((a+b)X + (a-b)\cdot Y)\right)$$

$$\overset{10.3b}{=} \frac{1}{4}\cdot\mathrm{Var}((a+b)\cdot X + (a-b)\cdot Y)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot((a+b)^2\cdot\mathrm{Var}(X) + (a-b)^2\cdot\mathrm{Var}(Y)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot((\sqrt{1+\rho} + \sqrt{1-\rho})^2 + (\sqrt{1+\rho} - \sqrt{1-\rho})^2$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(1\cancel{+\rho} + \cancel{2\cdot\sqrt{1+\rho}\cdot\sqrt{1-\rho}} + 1\cancel{-\rho} + 1\cancel{+\rho} - \cancel{2\cdot\sqrt{1+\rho}\cdot\sqrt{1-\rho}} + 1\cancel{-\rho})$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(4) = \underline{\underline{1}}$$

$$\to \mathrm{Var}(Y'') = \mathrm{Var}\left(\tfrac{1}{2}\cdot((a+b)\cdot Y + (a-b)\cdot X)\right)$$

$$\overset{10.3b}{=} \frac{1}{4}\cdot\mathrm{Var}((a+b)Y + (a-b)\cdot X)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot((a+b)^2\,\mathrm{Var}(Y) + (a-b)^2\cdot\mathrm{Var}(X))$$

$$= \frac{1}{4}\cdot((\sqrt{1+\rho} + \sqrt{1-\rho})^2 + (\sqrt{1+\rho} - \sqrt{1-\rho})^2)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(1\cancel{+\rho} + \cancel{2\cdot\sqrt{1+\rho}\cdot\sqrt{1-\rho}} + 1\cancel{-\rho} + 1\cancel{+\rho} - \cancel{2\cdot\sqrt{1+\rho}\cdot\sqrt{1-\rho}} + 1\cancel{-\rho})$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(4) = \underline{\underline{1}}$$

$$\to \mathrm{Corr}(X'',Y'') = \frac{\mathrm{Cov}(X'',Y'')}{\mathrm{Stabw.}(X'')\cdot\mathrm{Stabw}(Y'')} = \frac{\rho}{1} = \underline{\underline{\rho}}$$

$\hookrightarrow \mathrm{Stabw}(X'') = \sqrt{\mathrm{Var}(X'')} = \sqrt{1} = \underline{\underline{1}} = \mathrm{Stabw}(Y'')$

$\hookrightarrow \mathrm{Cov}(X'',Y'') = \mathrm{Cov}\left(\tfrac{1}{2}\cdot((a+b)\cdot X + (a-b)\cdot Y),\ \tfrac{1}{2}\cdot((a-b)\cdot X + (a+b)\cdot Y)\right)$

$$\overset{\text{bilinear}}{=} \frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\mathrm{Cov}(X, \tfrac{1}{2}\cdot((a-b)\cdot X + (a+b)\cdot Y)) + \frac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot\mathrm{Cov}(Y, \tfrac{1}{2}((a-b)\cdot X + (a+b)\cdot Y))$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\frac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot\mathrm{Cov}(X,X) + \frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\mathrm{Cov}(X,Y) + \frac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot\frac{1}{2}(a-b)\cdot\mathrm{Cov}(Y,X) + \frac{1}{2}\cdot(a-b)\cdot\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\mathrm{Cov}(Y,Y)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(a+b)\cdot(a-b)\cdot\mathrm{Var}(X) + 2\cdot(\tfrac{1}{4}\cdot(a+b)^2\cdot\mathrm{Cov}(X,Y)) + \frac{1}{4}\cdot(a-b)\cdot(a+b)\cdot\mathrm{Cov}(Y,Y)$$

$$\overset{\text{unabh.}}{=} \frac{1}{4}\cdot(a^2-b^2)\cdot 1$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4}\cdot(a^2-b^2)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{1+\rho}^2 - \sqrt{1-\rho}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(1+\rho-(1-\rho))$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(2\rho) = \underline{\underline{\rho}}$$