FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Dr. Simon King

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra für Informatik

Modul–Nr.: FMI-MA0022

Wintersemester 2017/18 Prüfungsdatum: 23.02.2018

- Hilfsmittel: Ein handgeschriebenes Din–A4–Blatt (Vorder- und Rückseite), nicht gedruckt, nicht fotokopiert. Einfacher Taschenrechner (nicht programmierbar, keine Matrixarithmetik oder Lösung von Gleichungen). **Kommunikationsgeräte (z.B. Handys) müssen ausgeschaltet sein.**
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und geben Sie die jeweilige Aufgabennummer, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.
- Abzugeben sind: Deckblatt, Aufgabenblatt, Lösungen, Konzeptpapier
- Sie dürfen die in einer Teilaufgabe zu beweisenden Aussagen in allen späteren Teilaufgaben als gegeben ansehen.
- Antworten sind zu begründen, Rechnungen nachvollziehbar darzustellen.
- Die Lösungshinweise deuten einen *möglichen* Lösungsweg sowie erreichbare Teilpunkte an. Andere Lösungswege werden analog bewertet.

Name, Vorname:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Ich erkläre hiermit meine Prüfungsfähigkeit vor Beginn der Prüfung.

Jena, der 23.02.2018, Unterschrift:

Prüfungsdauer: 150 Min. Zum Bestehen reichen 18 Punkte aus 37.

1	2	3	4	$\sum$
/ 8	/ 9	/ 10	/ 10	/ 37

Prüfer: Simon King **Note:**

FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Dr. Simon King

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra für Informatik

Modul–Nr.: FMI-MA0022

Wintersemester 2017/18 23.02.2018

In den folgenden Aufgaben sei $\mathbb{K}$ jeweils ein Körper. Wie üblich betrachten wir Elemente von $\mathbb{K}^n$ als Spaltenvektoren.

Aufgabe 1: *Lineare Gleichungssysteme*

a) (1 P.) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m \in V$. Unter welcher Bedingung nennt man $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m$ linear unabhängig? Unter welcher Bedingung nennt man es ein Erzeugendensystem von V?

b) (7 P.) Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\mathrm{LR}(A; \vec{b})$ sowie Basen von Spaltenraum(A) und Zeilenraum(A). **Zur Kontrolle:** Ihre Rechnung sollte ergeben, dass $\mathrm{Rang}(A) = 3$ und $\mathrm{LR}(A; \vec{b}) \neq \emptyset$.

c) **Zusatzaufgabe (3 Bonus-P.):** Sei $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$. Beweisen Sie: Wenn es <u>kein</u> $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ gibt mit $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, denn gibt es $\vec{y} \in \mathbb{K}^m$ mit $A^\top \cdot \vec{y} = \vec{0}$ und $\vec{b}^\top \cdot \vec{y} = 1$.
Hinweis: Ränge von $\begin{pmatrix} A^\top \\ \vec{b}^\top \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} A^\top & \vec{0} \\ \vec{b}^\top & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: Euklidische Räume

a) Prüfen Sie jeweils mit dem Hurwitz-Kriterium, ob es sich bei der gegebenen symmetrischen Matrix um die Matrix eines Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$ handelt:

i) (1 P.) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ii) (2 P.) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & -2 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) (4 P.) Sei $\vec{u}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine ONB von $U := \mathrm{Span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \leq \mathbb{R}^4$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

c) (2 P.) Sei $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Wir betrachten $\mathbb{R}^m$ als euklidischen Raum mit dem Standardskalarprodukt. Es sei $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ mit $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ und $\vec{y} \in \mathbb{K}^m$ mit $A^\top \cdot \vec{y} = \vec{0}$. Zeigen Sie $\vec{y} \perp \vec{b}$. **Hinweis:** Einsetzen von $\vec{b}$ in das Standardskalarprodukt.

Bitte wenden

Aufgabe 3: *Lineare Abbildungen*

a) (2 P.) Was sind Kern und Bild einer linearen Abbildung? Was besagt die Rangformel?

b) (1 P.) Zeigen Sie: Sind $f, g\colon V \to W$ lineare Abbildungen, so ist auch die Abbildung $h\colon V \to W$ gegeben durch $\forall \vec{v} \in V\colon\ h(\vec{v}) := 2f(\vec{v}) - 5g(\vec{v})$ eine lineare Abbildung.

c) (2 P.) Folgern Sie aus der Aussage der vorigen Teilaufgabe: Für alle linearen Abbildungen $\varphi, \psi\colon\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ gibt es ein $\vec{v} \in \mathbb{R}^5$, $\vec{v} \neq 0$, mit $5\varphi(\vec{v}) = 2\psi(\vec{v})$.

In den folgenden Teilaufgaben seien $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq \mu$, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_n(\mathbb{K})$ mit $(A - \mu \mathbb{1}_n) \cdot (A - \lambda \mathbb{1}_n) = \mathbb{0}$. Die linearen Abbildungen $\varphi, \psi\colon\ \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ seien gegeben durch $\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n\colon\ \varphi(\vec{v}) := A \cdot \vec{v} - \lambda \vec{v}$ und $\psi(\vec{v}) := A \cdot \vec{v} - \mu \vec{v}$.

d) (2 P.) Zeigen Sie $n = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) + \dim(E_\lambda(A))$. **Hinweis:** Wie kann man $E_\lambda(A)$, $E_\mu(A)$ mittels φ, ψ ausdrücken?

e) (1 P.) Zeigen Sie $\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq E_\mu(A)$.

f) (2 P.) Folgern Sie aus den Aussagen der vorigen beiden Teilaufgaben, dass A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4: *Eigenwertprobleme*

a) (2 P.) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. **Hinweis:** Komplex, nicht reell.

b) (8 P.) Berechnen Sie eine diagonalisierende Matrix für $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 & 5 \\ 4 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

Erreichbare Punktzahl: 37