2.Altkurzklausur-2017

Montag, 15. Mai 2023 00:55

1	Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern diese existieren. (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! - n!}{(n^2-1)\, n!}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2\, 7^n + 3^n}$	1 + 2

1a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! - n!}{(n^2-1)\cdot n!} = \frac{((n+2)\cdot(n+1)\cdot n!) - n!}{(n^2-1)}$ | n! ausklammern

$= \frac{\cancel{n!}\cdot((n+2)\cdot(n+1)-1)}{\cancel{n!}\cdot (n^2-1)}$

$= \frac{(n+2)\cdot(n+1)-1}{(n^2-1)}$

$= \frac{n^2+1n+2n+2-1}{(n^2-1)}$

$= \frac{n^2+3n+1}{(n^2-1)}$ | n^2 ausklammern

$= \frac{\cancel{n^2}\cdot(1+\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\cancel{n^2}\cdot(1-\frac{1}{n^2})}$

$= \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-1/n^2}$ → Brüche mit n oder n^2 im Nenner gehen gegen 0

$= \frac{1+0+0}{1-0} = \frac{1}{1}$

$= \lim_{n\to\infty} 1$

1b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2\cdot 7^n + 3^n}$ || 7 ausklammern

$= \sqrt[n]{7^n\cdot(n^2+\frac{3^n}{7^n})}$

$= \sqrt[n]{7^n}\cdot\sqrt[n]{n^2+\frac{3^n}{7^n}}$

$= 7\cdot\sqrt[n]{n^2+\frac{3^n}{7^n}}$ || Sandwichtheorem ! → man schafft Fkt die kleiner und größer ist, als gegeb. Fkt (müssen abhängig sein) → wenn beide geschaffene Fkt gleichen Grenzwert haben, dann hat gegeb. Fkt den selben Grenzw.

$= 7\cdot\underbrace{\sqrt[n]{n^2+0}}_{} \leq 7\cdot\sqrt[n]{n^2+(\frac{3}{7})^n} \leq 7\cdot\underbrace{\sqrt[n]{n^2+\underbrace{1^n}_{1}}}_{1}$ || $\sqrt[n]{n} = 1$

$7\cdot 1$

$= 7 \leq 7\cdot\sqrt[n]{n^2\cdot(\frac{3}{7})^n} \leq 7$

↳ d.h. der Grenzwert ist $\underline{\underline{7}}$

oder $\sqrt[n]{n^2\cdot 7^n + n^2\cdot 7^n}$

$\sqrt[n]{2^n\cdot 7^n}$

$7\cdot\sqrt{2^n}$

2	Untersuchen Sie die angegeben Reihen auf absolute Konvergenz bzw. Divergenz. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$	1 + 2
	(c) Bestimmen Sie die Summe der Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$.	1

· geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$; $0 \leq |q| \leq 1$

· harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → divergiert || Exp. ≤ 1, dann divergent

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ → konvergiert || Exp ≥ 1, dann abs. konvergent

2a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$ || wir suchen neuen Reihe (b_n), der ähnlich zu gegeb. Reihe (a_n) ist
→ suchen Reihe, die wir schon kennen (harm., geom. R)
→ Minorantenkr., wenn $a_n \geq b_n$ ist
→ Majorantenkr., wenn $a_n \leq b_n$ ist

was für Reihe kennt man, die ähnlich ist?

↳ $\frac{1}{n}$

Jetzt schauen, ob Minorantenk. oder Majorkr.

↳ probieren: n=2: $\frac{n+2}{n^2} = \frac{2+2}{2^2} = \frac{4}{4}$

$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ ↳ $\overset{a_n}{\frac{4}{4}} \geq \overset{b_n}{\frac{1}{2}}$, d.h Minorantenkr.

↳ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2} > \frac{1}{n}$ (harmonische Reihe)

↳ Exponent ist ≤ 1, d.h. die Reihe divergiert

2b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ // Quotientenkriterium $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}}_{-1} \cdot \frac{x^{n+1+n+1+1}}{(n+1+n+1+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{x^{2n+3} \cdot (2n+1)!}{(2n+3)! \cdot x^{2n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{x^{2n} \cdot x^3 \cdot \cancel{(2n+1)} \cdot \cancel{(2n)!}}{(2n+3)\cdot(2n+2)\cdot\cancel{(2n+1)}\cdot\cancel{(2n)!}\cdot \cancel{x^{2n}} \cdot x^1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{x^2}{(2n+3)\cdot(2n+2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{x^2}{4n^2+4n+6n+6}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{x^2}{4n^2+10n+6} \qquad \| \ n^2 \text{ ausklammern}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{\cancel{n^2} \cdot \frac{x^2}{n^2}}{\cancel{n^2}\cdot\left(4+\frac{10n}{n^2}+\frac{6}{n^2}\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2 \to 0}{4+\underbrace{\frac{10}{n}}_{0}+\underbrace{\frac{6}{n^2}}_{0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{0}{4}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 0$$

↳ absolut konvergent, weil $0 < 1$

2c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n} \qquad \| \ \sum_{n=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, geom. Reihe

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}}$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{5} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$

3	**(a)** Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D(f) = \mathbb{R}$?	1
	(b) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $$f(x) = \begin{cases} \frac{\lvert x \rvert}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$ auf Stetigkeit in $x_0 = 0$.	2

3a) *Sei* $x_0 \in D(f)$. $f(x)$ *heißt* stetig in $x_0 \iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \quad \forall\, x \in D(f),\ |x - x_0| < \delta : \ \underline{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}.$$

3b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{+x}{x} = 1$

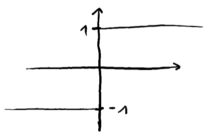
rechtsseitiger Grenzwert

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

linksseitiger Grenzw.

↳ Grenzwerte sind unterschiedlich → Unstetigkeit

↳ nicht stetig



Wiederholung - Altklausur:

1	Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern diese existieren. **(a)** $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! - n!}{(n^2-1)\,n!}$ **(b)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2\, 7^n + 3^n}$	1 + 2

1a) $\lim_{n \to \infty} \frac{(n+2)! - n!}{(n^2-1)\cdot n!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n! - n!}{(n^2-1)\cdot n!} \qquad \| \ n!$ ausklam.

1a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! - n!}{(n^2-1)\cdot n!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n! - n!}{(n^2-1)\cdot n!}$ ‖ n! ausklam.

$= \frac{\cancel{n!}\cdot((n+2)\cdot(n+1)-1)}{\cancel{n!}\cdot(n^2-1)}$

$= \frac{n^2+1n+2n+2-1}{n^2-1)}$

$= \frac{n^2+3n+1}{n^2-1}$ ‖ n^2 ausklammern

$= \frac{\cancel{n^2}\cdot(1+\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2})}{\cancel{n^2}\cdot(1-\frac{1}{n^2})}$

$= \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}}$ → gehen gegen 0

$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1+0+0}{1-0} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$

1b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2\cdot 7^n + 3^n} = \sqrt[n]{7^n\cdot(n^2+\frac{3^n}{7^n})}$

$= 7 \cdot \sqrt{n^2+\left(\frac{3}{7}\right)^n}$

→ Sandwichtheorem

$7\cdot\underbrace{\sqrt[n]{n^2}}_{1} \leq 7\cdot\sqrt{n^2+\left(\frac{3}{7}\right)^n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n^2+\underbrace{1^n}_{1}}}_{1}\cdot 7$

$\underbrace{7\cdot 1}_{7} \leq 7\cdot\sqrt{n^2+\left(\frac{3}{7}\right)^n} \leq \underbrace{7\cdot 1}_{7}$

↳ gegebene Reihe hat Grenzwert $\underline{\underline{7}}$

2	Untersuchen Sie die angegeben Reihen auf absolute Konvergenz bzw. Divergenz. (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in\mathbb{R}$	1 + 2
	(c) Bestimmen Sie die Summe der Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n}$.	1

2)a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

→ harmonische Reihe
→ Exponent von n ist kleiner gleich 1
↳ neu geschaffene Reihe divergiert
→ nach Minorantenkriterium
divergiert also auch die gegebene Reihe

2b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ‖ QK: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}\right|$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}}_{-1}\cdot\frac{x^{2\cdot(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{x^{2n+3}\cdot(2n+1)!}{(2n+3)!\cdot x^{2n+1}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{\cancel{x^{2n}}\cdot x^{3^2}\cdot\cancel{(2n+1)\cdot n!}}{(2n+3)\cdot(2n+2)\cdot\cancel{(2n+1)}\cdot\cancel{n!}\cdot\cancel{x^{2n}}\cdot\cancel{x^1}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{(2n+1)}{(2n+3)\cdot(2n+2)}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{2n+1}{4n^2+\underbrace{4n+6n}_{10n}+6}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{2n+1}{4n^2+10n+6}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{\cancel{n^2}\cdot(\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2})}{\cancel{n^2}\cdot(4+\frac{10n}{n^2}+\frac{6}{n^2})}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \underbrace{\frac{10}{n} + \frac{6}{n^2}}_{0}} \rightarrow \text{geht gegen } 0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot \frac{0+0}{\underbrace{4+0+0}_{0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 0 \quad \leadsto \quad 0 < 1 \text{, d.h. die Reihe ist absolut konvergent}$$

2c) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{// geometrische Reihe: } \sum_{n=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$$= \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$