Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Körper, Meier, Spitzer, Theus

# Lineare Algebra für IB, AIB, BIB

Wintersemester 2023/24 Übungsblatt 14

**Hausaufgaben (paarw. Abgabe bis 06.02.2024, 12:00 Uhr in Moodle)**

**Hausaufgabe 14.1:** *Gram-Schmidt*

(4 P.) Berechnen Sie eine ONB von $V := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_5) \leq \mathbb{R}^5$ mit $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bei Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf $[\vec{u}_1, ..., \vec{u}_5]$ erhalten Sie evtl. unerwartet den Nullvektor. Dies muss nicht bedeuten, dass Sie sich verrechnet haben. Können Sie diesen Fall deuten?

**Hausaufgabe 14.2:** *Symmetrische Matrizen*

Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit ${}^{\mathrm{t}}A = A$. Sie dürfen in dieser Aufgabe Satz 6.16 verwenden, obwohl er noch nicht bewiesen wurde. Sei $\langle | \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

a) (2 P.) Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektoren von $A$ zu Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq \mu$. Zeigen Sie: $\vec{v} \perp \vec{w}$ bezüglich des Standardskalarprodukts.
**Hinweis:** Vergleichen Sie $\langle \vec{v} \mid A\vec{w} \rangle$ und $\langle A\vec{v} \mid \vec{w} \rangle$.

b) (2 P.) Folgern Sie aus der vorigen Teilaufgabe, Satz 6.16 und weiteren Ergebnissen der Vorlesung, dass $\mathbb{R}^n$ eine aus Eigenvektoren von $A$ bestehende ONB $B$ bezüglich des Standardskalarprodukts hat.

c) (4 P.) Zeigen Sie: Durch $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n\colon\ \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle_A := \langle \vec{v} \mid A\vec{w} \rangle$ ist genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert, wenn alle Eigenwerte von $A$ in $\mathbb{R}_{>0}$ liegen.
**Anmerkung:** Das Skalarprodukt $\langle | \rangle_A$ ist natürlich etwas anderes als das Standardskalarprodukt $\langle | \rangle$. Für die Untersuchung der positiven Definitheit hilft es, Vektoren in $\mathbb{R}^n$ mittels der ONB $B$ aus der vorigen Teilaufgabe darzustellen.

**Erreichbare Punktzahl:** 12

Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Körper, Meier, Spitzer, Theus

# Lineare Algebra für IB, AIB, BIB

## FMI-MA0022

Wintersemester 2023/24 Lösungen zu Übungsblatt 14

**Hausaufgabe 14.1:** *Gram-Schmidt*
Insgesamt (4 P.).

- $\vec{w}_1 := \vec{u}_1$, $\vec{u}_2 - \frac{\langle \vec{u}_2 | \vec{w}_1 \rangle}{\|\vec{w}_1\|^2} \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \\ 1/4 \\ 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}$, reskaliert $\vec{w}_2 := \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- $\vec{u}_3 - \frac{\langle \vec{u}_3 | \vec{w}_1 \rangle}{\|\vec{w}_1\|^2} \vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{u}_3 | \vec{w}_2 \rangle}{\|\vec{w}_2\|^2} \vec{w}_2 = \vec{0}$. Deutung: Das gegebene Erzeugendensystem ist keine Basis, der Vektor $\vec{u}_3$ ist überflüssig, man kann ihn einfach weglassen. Wir machen ohne ihn weiter.
- $\vec{u}_4 - \frac{\langle \vec{u}_4 | \vec{w}_1 \rangle}{\|\vec{w}_1\|^2} \vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{u}_4 | \vec{w}_2 \rangle}{\|\vec{w}_2\|^2} \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ -2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$, reskaliert $\vec{w}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\vec{u}_5 - \frac{\langle \vec{u}_5 | \vec{w}_1 \rangle}{\|\vec{w}_1\|^2} \vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{u}_5 | \vec{w}_2 \rangle}{\|\vec{w}_2\|^2} \vec{w}_2 - \frac{\langle \vec{u}_5 | \vec{w}_4 \rangle}{\|\vec{w}_4\|^2} \vec{w}_4 = \vec{0}$. Auch $\vec{u}_5$ war überflüssig.

Normierung ergibt ONB $[\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}]$.

**Hausaufgabe 14.2:** *Symmetrische Matrizen*

a) (2 P.) NICHT BEWERTET!
$\lambda \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \lambda \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle A\vec{v} | \vec{w} \rangle = {}^{\mathrm{t}}(A\vec{v})\vec{w} \overset{{}^{\mathrm{t}}A = A}{=} {}^{\mathrm{t}}\vec{v} A \vec{w} = \langle \vec{v} | A\vec{w} \rangle = \langle \vec{v} | \mu \vec{w} \rangle = \mu \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$. Also $(\lambda - \mu)\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0$ und wegen $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0$.

b) (2 P.) NICHT BEWERTET!
Sei $\sigma(A)$ die Menge der Eigenwerte von $A$. Laut Satz 6.16 ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ und $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$. Orthonormalisierungssatz: Wir können in jedem einzelnen $E_\lambda(A)$ eine ONB wählen. Nach der vorigen Teilaufgabe bildet die Vereinigung dieser Einzel-ONBn eine Orthonormalsystem von $\mathbb{R}^n$, das aus insgesamt $n$ Eigenvektoren besteht und daher die gesucht ONB von $\mathbb{R}^n$ ist.

*Bitte wenden*

c) Seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Symmetrie (1 P.): Weil $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle_A$ ein Skalar ist, gilt $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle_A = {}^{\mathrm{t}}\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle_A = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}\vec{v} A \vec{w}) = {}^{\mathrm{t}}\vec{w}\,{}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}\mathrm{t}}\vec{v} \overset{{}^{\mathrm{t}}A=A}{=} {}^{\mathrm{t}}\vec{w} A \vec{v} = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle_A$.

Bilinearität (1 P.): $\langle \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \mid \vec{w} \rangle_A = (\alpha\,{}^{\mathrm{t}}\vec{u} + \beta\,{}^{\mathrm{t}}\vec{v}) A \vec{w} = \alpha \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle_A + \beta \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle_A$, analog im zweiten Faktor.

Definitheit: (1 P.) Sei $B = [\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n]$ eine aus EVn bestehende ONB von $\mathbb{R}^n$ zu EWn $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ (vorige Teilaufgabe). Sei $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v}_i$ Dann $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle_A = {}^{\mathrm{t}}\vec{v} A \vec{v} = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i\,{}^{\mathrm{t}}\vec{v}_i A \beta_j \vec{v}_j = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i \beta_j \lambda_j\,{}^{\mathrm{t}}\vec{v}_i \vec{v}_j \overset{\text{ONB}}{=} \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \lambda_i$.

(1 P.) Wenn $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$ und $\vec{v} \neq \vec{0}$ ($\exists i\colon\ \beta_i \neq 0$), so ist $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle_A \geq \beta_i^2 \lambda_i > 0$, also positiv definit. Wenn aber $\exists j\colon\ \lambda_j \leq 0$, dann $\langle \vec{v}_j | \vec{v}_j \rangle_A = \lambda_j \leq 0$, also nicht positiv definit.

**Erreichbare Punktzahl:** 12