Lineare Algebra für Informatiker - Klausur
WS 19/20

Dr. Simon King

26. Februar 2020

Anmerkung: Auf die Richtigkeit der Lösungswege keine Garantie. Das beschriebene Vorgehen ist nur meine eigene Lösung.

Aufgabe 1)

a) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Wie ist $Span(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ definiert?

b) Sein A eine Matrix, ich glaube mit $A \in M_4(\mathbb{R})$. Bestimme die Basen von $\ker(A)$ und $\text{Bild}(A)$.
Lösungsweg: Da $\text{kern}(A) = LR(A; \vec{0})$, ist dieser zu berechnen. Mit dem Gaußalgorithmus kann man die Matrix auf ZSF bringen. Streicht man die Nichtpivotspalten (aus der Ausgangsmatrix), hat man eine Basis von $\text{Bild}(A)$.

c) Sei $A \in M_3(\mathbb{R})$, mit $k \in \mathbb{R}$ als zweimaligen Eintrag und sei $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $LR(A; \vec{b})$ in Abhängigkeit von k. Je nach Wahl von k, existieren es keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen.
Lösungsweg: Die Aufgabe habe ich nicht so gut hinbekommen, aber man muss auf jeden Fall die Matrix auf ZSF bringen. Dann ist nämlich gut ersichtlich, mit welchen Werten von k es wie viele Lösungen gibt und mit einer Fallunterscheindung kann man von hier aus die einzelnen Fälle betrachten.

Aufgabe 2)

a) Wie lauten die Dimensionsformel und die Rangformel? Was besagt der Satz über die lineare Fortsetzung?

Im Rest der Aufgabe sei $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ eine surjektive lineare Abbildung.

b) Sei $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ linear, $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^4}$. Beweisen Sie $\mathbb{R}^7 = \ker(f) + \text{Bild}(g)$.
Hinweis: Warum ist g injektiv? Warum ist f surjektiv? Bestimmen Sie $\dim(\ker(f))$ und $\dim(\text{Bild}(g))$ mit der Rangformel. Zeigen Sie, dass $\ker(f) \cap \text{Bild}(g) = \{\vec{0}\}$ (mit der Definition von g) und folgern Sie den Rest mit der Dimensionsformel.
Lösungsweg: Die ersten beiden Fragen des Hinweises hatten wir in einer Hausaufgabe beantwortet. Aus g injektiv folgt, dass $\ker(g) = \{\vec{0}\}$, also ist $\dim(\ker(g)) = 0$ und aus f surjektiv folgt, dass $\dim(\text{Bild}(f)) = 4$. Mit der Rangformel kann nun $\dim(\text{Bild}(g))$ sowie $\dim(\ker(f))$ bestimmen.
Wenn wir nun zeigen, dass $\dim(\ker(f) \cap \text{Bild}(g)) = 0$, dann folgt mit der Dimensionsformel, dass $\dim(\ker(f) + \text{Bild}(g)) = 7$.
Angenommen es sei $\vec{v} \in \ker(f) \cap \text{Bild}(g)$ und $\vec{v} \neq \vec{0}$. Dann gibt es ein $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$ mit $\vec{w} \neq \vec{0}$ und $g(\vec{w}) = \vec{v}$.
Außerdem gilt $f(\vec{v}) = \vec{0}$. Damit folgt $f \circ g(\vec{w}) = \vec{0}$, aber auch $f \circ g(\vec{w}) = Id_{\mathbb{R}^4}(\vec{w}) = \vec{w} \neq \vec{0}$.
Die Annahme führt zu einem Widerspruch, also gilt $\ker(f) \cap \text{Bild}(g) = \{\vec{0}\}$.
Wir wissen nun $\dim(\ker(f) + \text{Bild}(g)) = 7$ und $\ker(f) + \text{Bild}(g) < \mathbb{R}^7$ (eine Addition von Untervektorräumen ist wieder ein Untervektorraum). Daraus folgt $\ker(f) + \text{Bild}(g) = \mathbb{R}^7$.

Aufgabe 3)

a) Was besagt das Kriterium von Sylvester?

b) Gegeben seinen vier Matrizen aus $M_n(\mathbb{R})$. Prüfen Sie jeweils mit dem Hurwitz-Kriterium, ob es sich bei der gegebenen Matrix um die Darstellungsmatrix eines Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$ handelt.

c) Berechnen Sie für eine Matrix $A \in SO_3$ (mit vielen Wurzeleinträgen) den Drehwinkel.

d) **Zusatzaufgabe:** Bestimmen Sie die (eindimensionale) Drehachse.

Anmerkung: Die Matrizen aus Aufgabenteil b) und c) konnte ich mir nicht merken, daher hier kein Lösungsweg.

Aufgabe 4)

a) Sei $A = A^\top \in M_3(\mathbb{R})$. Bestimmen sie eine diagonalisierende Matrix $S \in SO_3$.

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Hinweis: Es gehört zur Aufgabe, die Eigenwerte von A zu berechnen. Zur Kontrolle dieses Zwischenergebnisses: Ihre Rechnung sollte die Eigenwerte 0 und 3 ergeben.

Lösungsweg: $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 2 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 2 & 2 & X+2 \end{vmatrix} = (X-1)^2 \cdot (X+2) + 4 + 4 - 4(X-1) - (X+2) - 4(X-1)$

$= (X^2 - 2X + 1) \cdot (X+2) - 9X + 14 = (X^3 - 2X^2 + X + 2X^2 - 4X + 2) - 9X + 14 = X^3 - 12X + 16$

$= (X-2)^2 \cdot (X+4)$

Die Eigenwerte sind 2 und -4. Nun berechne ich die Eigenräume.

- $E_2(A) = LR(2 \cdot \mathbb{1} - A; \vec{0})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow E_2(A) = \text{Span}(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

- $E_{-4}(A) = LR(-4 \cdot \mathbb{1} - A; \vec{0})$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & -24 & 12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow E_{-4}(A) = \text{Span}(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}) = \text{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

Weiter mit dem Gram-Schmidt-Verfahren:

- $E_2(A)$:

$$\vec{u}_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_1 := \vec{u}_1, \qquad \vec{w}_2 := \vec{u}_2 - \tfrac{\langle \vec{u}_2 | \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1 | \vec{u}_1 \rangle}\, \vec{u}_1 = \vec{u}_2 - \tfrac{2}{5}\, \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 := \tfrac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\, \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 := \tfrac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} = \sqrt{\tfrac{5}{6}}\, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \sqrt{\frac{5}{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

- $E_{-4}(A)$:

$$\vec{u}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 := \tfrac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Da A symmetrisch ist, bilden die Vektoren $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$ eine Orthonormalbasis bzgl. des Standdartskalarprodukts. Eine diagonalisierende Matrix $\tilde{S} \in O_3$ ist damit gegeben durch:

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{5}{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{5}{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = -1$$

Die gesuchte Matrix $S \in SO_3$ mit $\det(S) = 1$ ergibt sich daher durch Vorzeichenwechsel der ersten Spalte von $\tilde{S}$:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \in SO_3.$$

b) Sei $A = A^\top \in M_n(\mathbb{R})$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Zeigen sie, dass $A \in GL_n(\mathbb{R})$, sowie $A^{-1} = (A^{-1})^\top$ und, dass ${\lambda_1}^{-1}, {\lambda_2}^{-1}, \ldots, {\lambda_r}^{-1}$ die Eigenwerte von A^{-1} sind.
Lösungsweg: $A \in GL_n(\mathbb{R}) \iff \det(A) \neq 0$. Also zeigen wir, dass $\det(A) \neq 0$:
Da $A = A^\top$, gibt es eine diagonalisierende Matrix $S \in GL_n(\mathbb{R})$, so dass die Diagonaleinträge von $S^{-1}AS$ die Eigenwerte von A sind. Da kein Eigenwert von A null ist, ist $\det(S^{-1}AS) \neq 0$.
Nach der Produktregel folgt $\det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(S) = \det(S^{-1}S) \cdot \det(A) = \det(A)$.
Also ist $\det(A) \neq 0$ und $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
Nun zeigen wir, dass $A^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$:
$A^{-1}A = \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n^\top = \left(AA^{-1}\right)^\top = \left(A^{-1}\right)^\top A^\top = \left(A^{-1}\right)^\top A$
Also ist A^{-1} symmetrisch.
Damit wissen wir auch nach dem Spektralsatz, dass eine diagonalisierende Matrix $S \in GL_n(\mathbb{R})$ von A^{-1} gibt. Sei nun $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.
$A^{-1} \cdot \vec{v} = A^{-1} \cdot (\lambda^{-1}\lambda) \cdot \vec{v} = A^{-1} \cdot \lambda^{-1} \cdot (A \cdot \vec{v}) = \lambda^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{v} = \lambda^{-1} \cdot \mathbb{1}_n \cdot \vec{v} = \lambda^{-1} \cdot \vec{v}$
Also ist jeder Eigenvektor von A auch eine Eigenvektor von A^{-1} zum inversen Eigenwert.

Aufgabe 5)

a) Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften: A hat n paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $A \cdot B = B \cdot A$.

i) Warum hat $\mathbb{R}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A?
Lösungsweg: Jeder Eigenraum ist mindestens eindimensional und es gibt n verschiedene Eigenräume. Da verschiedene Eigenvektoren aus verschiedenen Eigenräumen linear unabhängig sind, ist die Vereinigung aller Basen auch linear unabhängig. Jeder Eigenraum wird von mindestens einem Eigenvektor aufgespannt, also ist die Dimension der Vereinigung der Basen aller Eigenräume $\geq n$. Gleichzeitig ist das Erzeugnis dieser Vereinigung von Eigenvektoren ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ und somit gleich dem $\mathbb{R}^n$. Daher kann jeder Eigenraum maximal eindimensional sein und $\sum\limits_{i=0}^{n} \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n$. Nach der Charakterisierung von Diagonalisierbarkeit, existiert eine Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A.

ii) Zeigen Sie: Ist $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist $B\vec{v} \in E_\lambda(A)$.
Lösungsweg: $B\vec{v} \in E_\lambda(A) \iff A \cdot (B\vec{v}) = \lambda \cdot (B\vec{v})$. Zu zeigen ist also $A(B\vec{v}) = \lambda(B\vec{v})$:
$A(B\vec{v}) = (AB)\vec{v} = (BA)\vec{v} = B(A\vec{v}) = B(\lambda\vec{v}) = \lambda(B\vec{v})$

iii) Folgern Sie aus der vorherigen Aussage, dass jeder Eigenvektor von A ein Eigenvektor von B ist.
Hinweis: Was ist $\dim(E_\lambda(A))$?
Lösungsweg: Sei $\vec{v} \in E_\lambda(A)$. Dann ist ebenfalls $B\vec{v} \in E_\lambda(A)$. Da $\dim(E_\lambda(A)) = 1$, ist $\vec{v}$ eine Basis des Eigenraums und somit $\exists \mu \in \mathbb{R} : B\vec{v} = \mu\vec{v}$. Also ist $\vec{v} \in E_\mu(B)$ und $E_\lambda(A) = E_\mu(B)$.

iv) Folgern Sie aus den vorherigen Aussagen: $\exists S \in GL_n(\mathbb{R})$, so dass S eine diagonalisierende Matrix sowohl von A als auch von B ist.
Lösungsweg: Wir zeigten bereits, dass es für alle λ_i ein μ_i gibt mit $E_\lambda(A) = E_\mu(B)$. Eine Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A ist somit auch eine Basis aus Eigenvektoren von B. Schreibt man diese Eigenvektoren spaltenweise in eine Matrix S, ist diese sowohl eine diagonalisierende Matrix für A, als auch für B. Das die Spalten von S eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden, ist $\text{Rang}(A) = n$ und somit $S \in GL_n(\mathbb{R})$.

b) Es seinen $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ und es gebe eine $S \in GL_n(\mathbb{R})$, das gleichzeitig eine diagonalisierende Matrix von A und von B ist. Zeigen Sie: $AB = BA$.
Hinweis: Warum gilt $(S^{-1}AS)(S^{-1}BS) = (S^{-1}BS)(S^{-1}AS)$ und wie folgt daraus die zu zeigende Aussage?
Lösungsweg: Sich auszudenken warum die Matrixmultiplikation zweier Diagonalmatrizen kommutativ ist kann man auf mehrer Art und Weisen tun.
Seien $D_A, D_B \in M_n(\mathbb{R})$ zwei diagonale Matrizen mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ als Diagonaleinträgen. Die i-te Spalte von $(D_A D_B)$ wird bezeichnet als $(D_A D_B)_i$.

$$(D_A D_B)_i = D_A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = D_A \mu_i \vec{e}_i = \mu_i D_A \vec{e}_i = \mu_i (D_A)_i = \mu_i \lambda_i \vec{e}_i = \lambda_i (D_B)_i = D_B \lambda_i \vec{e}_i = (D_B D_A)_i.$$

Die Matrixmultiplikation von Diagonalmatrizen ist demnach kommutativ.
Daher gilt: $(S^{-1}AS)(S^{-1}BS) = (S^{-1}BS)(S^{-1}AS)$
$\Leftrightarrow S^{-1}A(SS^{-1})BS = S^{-1}B(SS^{-1})AS$
$\Leftrightarrow S^{-1}(AB)S = S^{-1}(BA)S$
$\Leftrightarrow SS^{-1}(AB)SS^{-1} = SS^{-1}(BA)SS^{-1}$
$\Leftrightarrow AB = BA$

c) Geben Sie ein Beispiel zweier Matrizen $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, so dass A diagonalisierbar ist und $AB = BA$, aber B *nicht* diagonalisierbar ist. Es ist zu begründen, dass Ihr Beispiel diese Eigenschaften tatsächlich besitzt.
Lösungsweg: Wähle $A := \mathbb{0}_2$. (Alternativ wähle $A := \mathbb{1}_2$.) Damit ist $AB = \mathbb{0}_2 = BA$ für beliebige $B \in M_2(\mathbb{R})$. Außerdem ist jeder Vektor aus $\mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Es gibt also eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren und somit ist A diagonalisierbar. Abgesehen davon ist A sowieso schon diagonal. Nun ist B nur so wählen zu, dass B nicht diagonalisierbar ist. B darf nicht symmetrisch sein, da alle symmetrischen Matrizen nach dem Spektralsatz diagonalisierbar sind. Es ist sinnvoll mit einem der Sonderfälle der Diagonalisierbarkeit zu arbeiten, z.B mit dem der besagt, dass wenn die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts kleiner ist als seine algebraische Vielfachheit, dass dann diese Matrix nicht diagonalisierbar ist.
Wähle $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\chi_B(X) = (X-1)^2$ und $E_1(B) = LR(\mathbb{1} - B; \vec{0}) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.
Der Eigenraum ist lediglich eindimensional, während die algebraische Vielfachheit von 1 zwei ist. Also ist B nicht diagonalisierbar.