Einige Rechenaufgaben

Simon King

24. Januar 2024

Beispiel 1: Berechnen Sie...

a) $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i})^{100}$.

b) alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = 8 - 8\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

c) alle $x \in \mathbb{C}$ mit $x^3 + 22\,x^2 - 22\,x + 23 = 0$. **Hinweis:** Eine der Lösungen ist eine ganze Zahl.

d) alle $x \in \mathbb{C}$ mit $x^4 - 12\,x^2 + 4 = 0$.

e) Berechnen Sie die inverse Matrix von $A := \left(\begin{smallmatrix} 2i & 1 \\ -1 & i-1 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{C})$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} -i+2 & -1 \\ i-1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Beispiel 2: Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 4 & -5 & -1 & -4 \\ 8 & -8 & -8 & -10 \\ -2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -6 & -5 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{5\times 4}$. Berechnen Sie jeweils Basen von $\mathrm{SR}(A)$, $\mathrm{ZR}(A)$, $\mathrm{LR}(A;\vec{0})$. Ergänzen Sie die gefundene Basis von $\mathrm{SR}(A)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

Beispiel 3: Sei $R := \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$. Berechnen Sie

a) die Menge der in R bzgl. Multiplikation invertierbaren Elemente.

b) die Menge der Nullteiler in R (also $x \in R^*$, so dass ein $y \in R^*$ mit $xy = 0$ existiert).

c) die Menge aller Idempotenten in R (also $x \in R$ mit $x^2 = x$).

Beispiel 4: Untersuchen Sie jeweils, ob $A \in M_n(\mathbb{Q})$ invertierbar ist, und berechnen Sie ggf. A^{-1}.

a) $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$.

c) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

d) $A := \begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 5: Berechnen Sie jeweils die Determinante der Matrix in $M_4(\mathbb{Q})$.

a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

e) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Beispiel 6: Berechnen Sie jeweils die Menge aller Nullstellen von $\chi_A(X)$ in $\mathbb{C}$ (dies nennt man das ***Spektrum*** $\sigma(A)$) und untersuchen Sie, ob A diagonalisierbar in $M_n(\mathbb{R})$ ist. **Hinweis:** A hat jeweils mindestens einen ganzzahligen Eigenwert.

a) $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Beispiel 7: Die folgenden Matrizen sind jeweils in $M_2(\mathbb{R})$ diagonalisierbar. Berechnen Sie jeweils eine diagonalisierende Matrix (nicht in allen Fällen lassen sich Wurzelterme vermeiden).

a) $\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 2 & -12 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$.

Beispiel 8: Die folgenden Matrizen sind in $M_3(\mathbb{Q})$ diagonalisierbar und haben ganzzahlige Eigenwerte. Berechnen Sie jeweils eine diagonalisierende Matrix.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 9: Berechnen Sie jeweils eine ONB von $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_d) \leq \mathbb{R}^n$ bezüglich des Standardskalarprodukts:

a) $\vec{u}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 10: Sei $V := \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit reellen Koeffizienten. Auf V betrachten wir das Skalarprodukt $\langle f|g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V, indem Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $[X^0, X^1, X^2]$ von V anwenden.

Beispiel 11: a) Sei $F := \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ und sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3\colon\ f(\vec{x}) := F \cdot \vec{x}$. Verifizieren Sie, dass f eine orthogonale Abbildung bzgl. des Standardskalraprodukts ist, bestimmen Sie den Typ von f (Drehung, Drehspiegelung, Punktspiegelung?) und berechnen Sie den Betrag des Drehwinkels.

b) Sei $F := \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Sie dürfen verwenden, dass $F \in O_3$. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(\vec{x}) := F \cdot \vec{x}$.
Untersuchen Sie den Typ von f (Drehung? Drehspiegelung?) und berechnen Sie den Betrag des Drehwinkels sowie die Achse von f.

Ergebnisse, allerdings ohne Gewähr (es können beim Bearbeiten dieses Dokuments copy&paste-Fehler aufgetreten sein, natürlich kann ich auch Rechenfehler nicht ausschließen, und abgesehen davon werden wir in diesem Semester nicht alle der hier angeschnittenen Themen behandeln können.

Ergebnis 1: a) $-(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i})$

b) $z_0 := \frac{1}{2}\sqrt{2}\Big(\sqrt{3} - 1\Big) + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2}\Big(\sqrt{3} + 1\Big)$ und dann noch $\mathrm{i}\,z_0$, $-z_0$, $-\mathrm{i}\,z_0$.

c) $x \in \Big\{-23,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i},\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\Big\}$

d) $x \in \Big\{-\sqrt{4\sqrt{2}+6},\ \sqrt{4\sqrt{2}+6},\ -\sqrt{-4\sqrt{2}+6},\ \sqrt{-4\sqrt{2}+6}\Big\}$

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}\,\mathrm{i} - \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\,\mathrm{i} + \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5}\,\mathrm{i} - \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\,\mathrm{i} - \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-\mathrm{i}+1} & \frac{1}{-\mathrm{i}+2} \end{pmatrix}$.

Ergebnis 2: $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{SR}(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$,
$\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\big(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\big)$, $\mathrm{LR}(A;\vec{0}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{R}^5$ ergänzt die Basis von $\mathrm{SR}(A)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

Ergebnis 3: a) $\{[1], [5], [7], [11], [13], [17]\}$.

b) $\{[2], [3], [4], [6], [8], [9], [10], [12], [14], [15], [16]\}$

c) $\{[0], [1], [9], [10]\}$.

Ergebnis 4: a) Nicht invertierbar.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}$

Ergebnis 5: a) -37.

b) -6

c) 0

d) 9

e) 6

Ergebnis 6: a) $\sigma(A) = \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{11} + \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{11} + \frac{1}{2},\ -2\right\} \rightsquigarrow$ diagonalisierbar, da drei verschiedene reelle EW.

b) $\sigma(A) = \left\{\sqrt{5}\,\mathrm{i},\ -\sqrt{5}\,\mathrm{i},\ 1\right\}$, also nicht diagonalisierbar in $M_3(\mathbb{R})$ (wohl aber in $M_3(\mathbb{C})$) wegen nicht-reeller Eigenwerte.

c) $\sigma(A) = \{-1,\ 2\}$, der EW -1 hat die algebraische Vielfachheit 2, aber geometrische Vielfachheit 1. Daher nicht diagonalisierbar.

d) $\sigma(A) = \{0,\ 2\}$. Eigenwert 2 hat algebraische Vielfachheit 2, das ist aber auch die geometrische Vielfachheit, also diagonalisierbar. Übrigens: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine diagonalisierende Matrix.

Ergebnis 7: a) EW $\pm 2\sqrt{10}$. $\begin{pmatrix} 1 & -3-\sqrt{10} \\ 3+\sqrt{10} & 1 \end{pmatrix}$ ist eine diagonalisierende Matrix.

b) EW $-2, -4$. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine diagonalisierende Matrix.

c) EW $-1 \pm \sqrt{13}$. $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2} \\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2} & 1 \end{pmatrix}$ ist eine diagonalisierende Matrix.

d) EW $14, -10$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine diagonalisierende Matrix.

Ergebnis 8: a) EW $2, 1$. Diagonalisierende Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) EW $3, 0$. Diagonalisierende Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) EW $2, -2$. Diagonalisierende Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ergebnis 9: a) $\left[\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right]$ ist die gesuchte ONB.

b) $\left[\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2\sqrt{5} \\ 1/2\sqrt{5} \\ -3/2\sqrt{5} \\ -3/2\sqrt{5} \end{pmatrix}\right]$. ist die gesuchte ONB.

Ergebnis 10: $[X^0, X^1, X^2 - \frac{1}{3}X^0]$ ist die gesuchte Orthogonalbasis.

Ergebnis 11: a) Prüfe, dass die Spalten von F ein Orthonormalsystem bilden.
$\det(F) = -1 \rightsquigarrow$Drehspiegelung. Betrag des Drehwinkels: $\frac{2}{3}\pi$

b) $\det(F) = 1 \rightsquigarrow$. Drehung. Betrag des Drehwinkels: $\pi/4$.
Drehachse LR $\left(\mathbb{1}_3 - F;\, \vec{0}\right) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$