Vorlesung

Grundlagen der Analysis

Dorothee D. Haroske

$\boxed{\text{Stand : 26. Februar 2013}}$

Inhaltsverzeichnis

Stand : 26. Februar 2013

Motivation

Analysis wichtig für Informatikausbildung, weil

- die Beschreibung vieler Vorgänge und Modelle in der Physik, in anderen Naturwissenschaften und in der Technik auf der Analysis beruhen, z.B. auch Computergraphik oder Approximationsverfahren,
- zur Analyse von Algorithmen die Analysis gebraucht wird,
- in der Analysis selbst viele Probleme existieren, die mittels numerischer Verfahren (Algorithmen) gelöst werden, z.B. die Berechnung von Integralen oder die Lösung von Differentialgleichungen

wesentliche Ziele der Vorlesung

- z.T. Wiederholung und Vertiefung der Kenntnisse aus dem Mathematikunterricht und vorherigen Vorlesungen (reelle/komplexe Zahlen, Folgen und Reihen, Funktionen, Differential- und Integralrechnung)
- Anfangsgründe der höheren Mathematik (Differentialgleichungen, Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$)
- Vermittlung von mathematischen Lehrinhalten aus der Analysis, die für die weitere Ausbildung erforderlich sind
- Schwerpunkte: Verständnis mathematischer Denkweisen und Modelle in der Analysis, Herausbildung von rechnerischen Fertigkeiten und deren Anwendungen

1 Reelle und komplexe Zahlen

1.1 Zahlbereiche

1.1.1 Bezeichnungen, Körperaxiome

Natürliche Zahlen	$1, 2, 3, \dots$	$\mathbb{N}$, $\quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
Ganze Zahlen	$0, 1, -1, 2, -2, \dots$	$\mathbb{Z} = \{n - m : n, m \in \mathbb{N}\}$
Rationale Zahlen	$r = \dfrac{n}{m}, \quad n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$
Reelle Zahlen (*Dezimalbruchdarstellung*)	$a = \pm n_1 n_2 \dots n_k, n_{k+1} n_{k+2} \dots$ $n_j \in \{0, \dots, 9\}$	$\mathbb{R}$

Bemerkung*:

- Kronecker[1]: *"Die natürlichen Zahlen sind vom lieben Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk."*
- eineindeutige Zuordnung $\mathbb{R} \leftrightarrow$ (Zahlen-)Gerade
- bereits in Antike: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (als Länge der Diagonale des Einheitsquadrates) widerlegt von Euklid, *indirekter Beweis*

Folgerung : *Es gilt:* $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Auf der Menge der reellen Zahlen sind die Addition $(x, y) \mapsto x + y$ und die Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$ erklärt und damit dann auch Subtraktion, Division). Es existiert $0 \in \mathbb{R}$ (neutrales Element der Addition, Nullelement) und $1 \in \mathbb{R}$ (neutrales Element der Multiplikation, Einselement). Dabei gelten folgende Körperaxiome (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :

[1] Leopold Kronecker (* 7.12.1823 Liegnitz/Preußen † 29.12.1891 Berlin)

(A1)	$\forall\, a,b,c \in \mathbb{K}:\ (a+b)+c = a+(b+c)$	*Assoziativität Addition*
(A2)	$\exists\, 0 \in \mathbb{K}\quad \forall\, a \in \mathbb{K}:\ a+0 = 0+a = a$	*Nullelement*
(A3)	$\forall\, a \in \mathbb{K}\quad \exists\, (-a) \in \mathbb{K}:\ a+(-a) = (-a)+a = 0$	*inverses Element der Addition*
(A4)	$\forall\, a,b \in \mathbb{K}:\ a+b = b+a$	*Kommutativität Addition*
(M1)	$\forall\, a,b,c \in \mathbb{K}:\ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$	*Assoziativität Multiplikation*
(M2)	$\exists\, 1 \in \mathbb{K}\quad \forall\, a \in \mathbb{K}:\ a\cdot 1 = 1\cdot a = a$	*Einselement*
(M3)	$\forall\, a \in \mathbb{K}\setminus\{0\}\quad \exists\, a^{-1} \in \mathbb{K}:\ a\cdot\left(a^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right)\cdot a = 1$	*inverses Element der Mutliplikation*
(M4)	$\forall\, a,b \in \mathbb{K}:\ a\cdot b = b\cdot a$	*Kommutativität Multiplikation*
(D)	$\forall\, a,b,c \in \mathbb{K}:\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$	*Distributivgesetz*

Auf $[\mathbb{R},+,\cdot]$ und $[\mathbb{Q},+,\cdot]$ existiert eine totale (vollständige) Ordnung '$\leq$', d.h. eine binäre, reflexive, antisymmetrische, transitive und lineare Relation :

(O1) $a \leq a$
$a \leq b$ und $b \leq a \implies a = b$
$a \leq b$ und $b \leq c \implies a \leq c$
Für alle a, b gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$

Zusätzlich genügt '$\leq$' noch den Monotoniegesetzen (Verträglichkeit mit $+$ und $\cdot$) :

(O2) $a \leq b$ und $c \in \mathbb{R} \implies a+c \leq b+c$
(O3) $a \leq b$ und $c \in \mathbb{R},\ c \geq 0 \implies a\cdot c \leq b\cdot c$
$a \leq b$ und $c \in \mathbb{R},\ c \leq 0 \implies a\cdot c \geq b\cdot c$

Es gilt $a < b \iff a \leq b$ und $a \neq b$.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen: $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ (*Trichotomiegesetz*).

Bemerkung*: $[\mathbb{R},+,\cdot]$ und $[\mathbb{Q},+,\cdot]$ sind vollständig geordnete Körper

- Für $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definiert man induktiv Potenzen: $a^1 := a,\ a^{m+1} := a^m \cdot a,\ m \in \mathbb{N}$.
- Für $a \neq 0$ kann man dies auf Exponenten $k \in \mathbb{Z}$ ausdehnen mittels $a^0 := 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ n \in \mathbb{N}$.
- Für $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ gelten die Potenzgesetze: $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$, $(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $(a^k)^m = a^{km}$.

Beispiel : Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) $ab > 0 \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

(ii) Seien $a > 0$ und $b > 0$. Dann gilt: $a < b \iff a^2 < b^2$.

(iii) Für $0 < a < b$ gilt $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$.

Bezeichnungen :

(a,b)	$=$	$\{x : x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a,b)$	$=$	$\{x : x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall
$(a,b]$	$=$	$\{x : x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$[a,b]$	$=$	$\{x : x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall

Für $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$, heißt $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = U_\varepsilon(a)$ *ε-Umgebung von a.*

ergänzen : $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \ldots$

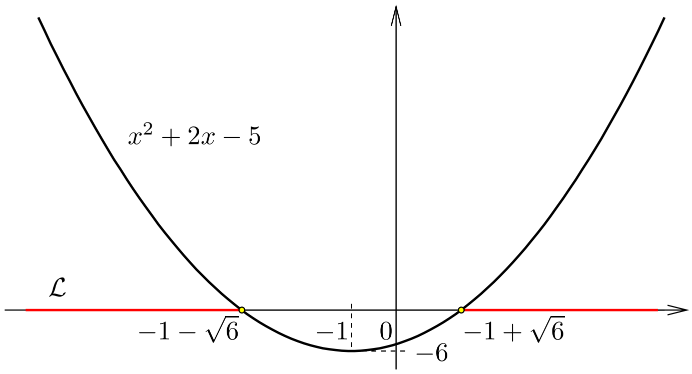
Spezialfälle :

$(-\infty,\infty)$	$=$	$\mathbb{R}$	
$(0,\infty)$	$=$	$\mathbb{R}_+$	Menge der positiven (reellen) Zahlen
$(-\infty,0)$	$=$	$\mathbb{R}_-$	Menge der negativen (reellen) Zahlen
$[0,\infty)$	$=$	$\overline{\mathbb{R}_+}$	Menge der nichtnegativen (reellen) Zahlen
$(-\infty,0]$	$=$	$\overline{\mathbb{R}_-}$	Menge der nichtpositiven (reellen) Zahlen

Beispiel : $x^2 + 2x - 5 > 0 \iff (x+1-\sqrt{6})\,(x+1+\sqrt{6}) > 0$

$\underset{\text{s.o.}}{\implies} \quad (x+1-\sqrt{6} > 0 \ \wedge\ x+1+\sqrt{6} > 0) \ \vee\ (x+1-\sqrt{6} < 0 \ \wedge\ x+1+\sqrt{6} < 0)$

$\curvearrowright\ x > -1+\sqrt{6} \ \vee\ x < -1-\sqrt{6} \iff \mathcal{L} = (-\infty, -1-\sqrt{6}) \cup (-1+\sqrt{6}, \infty)$



Absoluter Betrag

Definition 1.1.1 *Für $a \in \mathbb{R}$ setzt man* $|a| := \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$ $|a|$ *heißt* (absoluter) Betrag *von a.*

Lemma 1.1.2 **(i)** *Der Betrag reeller Zahlen hat folgende Grundeigenschaften :*

(N1) $|a| \geq 0, \quad |a| = 0 \iff a = 0$

(N2) $|ab| = |a||b|$

(N3) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (*Dreiecksungleichung*)

(ii) *Für $a \in \mathbb{R}$ gelten* $|a| = |-a|, \quad -|a| \leq a \leq |a|.$

(iii) *Falls $b > 0$, dann ist* $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b \iff a \leq b$ *und* $-a \leq b.$

(iv) *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten:* $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$ *und* $\big||a| - |b|\big| \leq |a+b|.$

Beweis*: bekannt □

Lösung von Ungleichungen/Gleichungen mit Beträgen $\dashrightarrow$ (mehrere) Fallunterscheidung(en) nötig !

Beispiel : $|x+1| - |x-1| < 1$

<u>1. Fall</u>: $x < -1 \ \curvearrowright\ |x+1| = -x-1, \ |x-1| = -x+1$

$$|x+1| - |x-1| < 1 \iff -x-1-(-x+1) < 1 \iff -2 < 1 \iff x \in \mathbb{R}$$

$\curvearrowright\ \mathcal{L}_1 = (-\infty, -1) \cap \mathbb{R} = (-\infty, -1)$

<u>2. Fall</u>: $-1 \leq x < 1 \ \curvearrowright\ |x+1| = x+1, \ |x-1| = -x+1$

$$|x+1| - |x-1| < 1 \iff x+1-(-x+1) < 1 \iff 2x < 1 \iff x < \frac{1}{2}$$

$\curvearrowright\ \mathcal{L}_2 = [-1, 1) \cap (-\infty, \frac{1}{2}) = [-1, \frac{1}{2})$

3. Fall: $x \geq 1 \curvearrowright |x+1| = x+1, \; |x-1| = x-1$

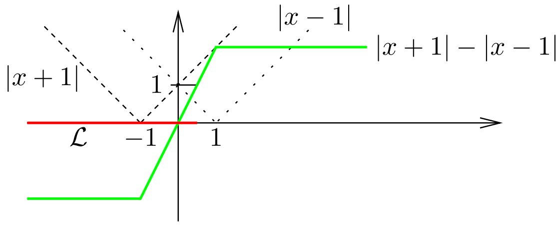
$$|x+1| - |x-1| < 1 \iff x+1-(x-1) < 1 \iff 2 < 1 \text{ ↯}$$

$\curvearrowright \mathcal{L}_3 = [1,\infty) \cap \emptyset = \emptyset$

$\curvearrowright \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3$

$= (-\infty,-1) \cup [-1,\frac{1}{2}) \cup \emptyset$

$= (-\infty,\frac{1}{2})$



1.1.2 Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Axiom *Hat eine Menge* $M \subset \mathbb{N}$ *die beiden Eigenschaften* $1 \in M$*, sowie aus* $k \in M$ *folgt* $k+1 \in M$*, so ist* $M = \mathbb{N}$.

Anwendung : *Beweisprinzip der vollständigen Induktion*

Induktionsanfang : Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $A(n_0)$ gilt.
Induktionsschritt
Induktionsvoraussetzung : Es gelte $A(k)$ für ein $k \geq n_0$.
Induktionsbehauptung : Dann gilt $A(k+1)$.
Induktionsbeweis : $A(k) \implies A(k+1)$

Lemma 1.1.3 (Ungleichung von Bernoulli[2]) *Für* $n \in \mathbb{N}$ *und* $a \geq -1$ *gilt stets* $(1+a)^n \geq 1+na$.

Beweis : Induktionsanfang : $n = 1$: $1+a \geq 1+1\cdot a$

Induktionsschritt
Induktionsvoraussetzung : Für $n = k$ gelte $(1+a)^k \geq 1+ka$.
Induktionsbehauptung : Dann gilt für $n = k+1$: $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$.
Induktionsbeweis : $(1+a)^{k+1} = \underbrace{(1+a)}_{\geq 0}(1+a)^k \overset{I.V.}{\geq} (1+a)(1+ka) = 1+a+ka+\underbrace{ka^2}_{\geq 0} \geq 1+(k+1)a$ □

Bezeichnungen : *Fakultät* : $0! := 1, \quad n! := n(n-1)! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k, \quad n \in \mathbb{N}$

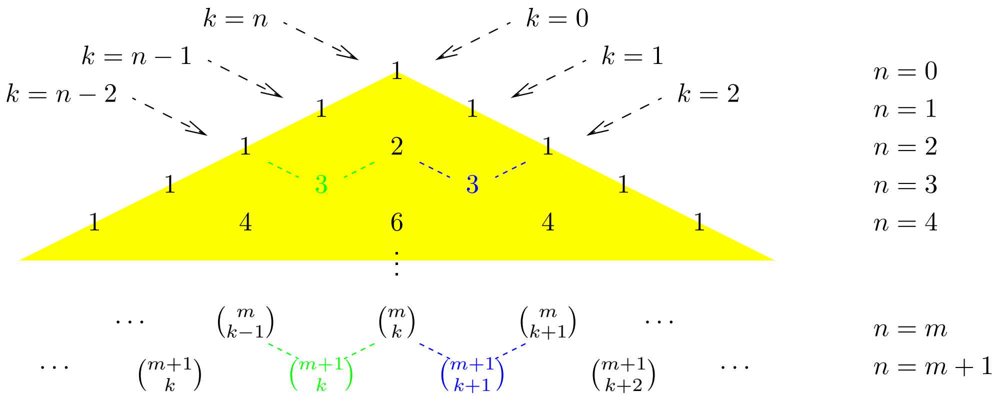
Binomialkoeffizient : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}\,, \quad n,k \in \mathbb{N}_0, \; n \geq k$

Bemerkung*: Ausdehnung auf $\binom{a}{k}$ mit $a \in \mathbb{R}$ möglich, $\binom{a}{k} := \dfrac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$

Beispiel : $\binom{5}{3} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10, \quad \binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1, \quad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3\cdot 2} = \dfrac{\frac{3}{8}}{6} = \dfrac{1}{16}$

Bemerkung : Es gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\,,$ Pascal[3]sches Dreieck

[2] Jakob Bernoulli (* 27.12.1654 Basel † 16.8.1705 Basel)
[3] Blaise Pascal (* 19.6.1623 Clermont/Frankreich † 19.8.1662 Paris)



Satz 1.1.4 (Binomischer Lehrsatz)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}\,, \qquad a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Beweis : bekannt bzw. Übung $\square$

Einige Eigenschaften von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Axiom (Archimedes[4]) : *Für alle $a,b \in \mathbb{R}_+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b < an$ gilt.*

$\curvearrowright$ $\mathbb{N}$ unendlich

bekannt: Die Mengen A und B sind *gleichmächtig*, $A \sim B$, falls es eine Bijektion[5] von A auf B gibt.

Definition 1.1.5 *Sei $\mathbb{N}_k = \{m \in \mathbb{N} : m \leq k\}$ für $k \in \mathbb{N}$.*

(i) *Eine Menge M heißt* endlich, *falls $M = \emptyset$ oder es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}_k \sim M$. Dann ist $k = \#M = \mathrm{card} M$ die* Kardinalzahl *bzw.* Mächtigkeit *von M.*

(ii) *Eine Menge M heißt* unendlich, *falls M nicht endlich ist.*

(iii) *Eine unendliche Menge M heißt* abzählbar unendlich, *falls $\mathbb{N} \sim M$ gilt.*

(iv) *Eine unendliche Menge M heißt* überabzählbar unendlich, *falls M nicht abzählbar unendlich ist.*

Bemerkung*:

- M endlich, $M \sim \mathbb{N}_k$, $\varphi : \{1,\ldots,k\} \to M$ Bijektion, setzen $\varphi(j) =: m_j \in M$, $j = 1,\ldots,k$ $\curvearrowright$ $M = \{m_1,\ldots,m_k\}$
- Unendliche Mengen können zu *echten* Teilmengen gleichmächtig sein, z.B.

$$\mathbb{N} \sim \{m \in \mathbb{N} : \ \exists\, k \in \mathbb{N} : \ m = 2k\} \quad \text{(gerade Zahlen)}$$

"Hilbert's[6] Hotel"

[4] Archimedes von Syrakus (* 287 v. Chr. Syrakus, Sizilien † 212 v. Chr. Syrakus, Sizilien)
[5] f Bijektion von A auf B $\iff$ $f : A \to B$ mit $\forall a \in A\ \exists! b \in B : b = f(a)$ und $\forall b \in B\ \exists! a \in A : f(a) = b$
[6] David Hilbert (* 23.1.1862 Königsberg † 14.2.1943 Göttingen)

Satz 1.1.6 **(i)** *$\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich, d.h. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.*

(ii) *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Menge, $M \neq \emptyset$. Dann besitzt M ein eindeutig bestimmtes größtes Element m° und ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element $m_\circ$, d.h. für alle $m \in M$ gilt: $m_\circ \leq m \leq m^\circ$.*

(iii) (Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$)
In jeder nichtleeren Menge natürlicher Zahlen gibt es ein kleinstes Element.

(iv) *Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es genau eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$, für die gilt* $m \leq x < m+1$.

B e w e i s*: <u>zu (i)</u>: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2) = -1$, $\varphi(3) = 1$, $\varphi(4) = -2$, $\ldots$, d.h.

$$\varphi(k) = \begin{cases} j, & k = 2j+1, \ j \in \mathbb{N}_0 \\ -j, & k = 2j, \quad j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

<u>zu (ii)</u>: $M \neq \emptyset$, M endlich $\curvearrowright$ $\exists\, k \in \mathbb{N} \ : \ M \sim \mathbb{N}_k$; jetzt vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}$

<u>zu (iv)</u>: *Eindeutigkeit*: seien $m, m' \in \mathbb{Z}$ so, dass $m \leq x < m+1$, $m' \leq x < m'+1$
$\curvearrowright$ $m < m'+1 < m+2 \underset{m'+1 \in \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} m'+1 = m+1 \iff m = m'$

Existenz: sei zunächst <u>$x \geq 1$</u>, betrachten $M = \{n \in \mathbb{N} : n > x-1\} \xrightarrow[\text{Archimedes}]{} M \neq \emptyset$
$\underset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \exists\, m = m_\circ \in M : \ m > x-1, \ m-1 \leq x-1 \implies m \leq x < m+1$

für <u>$x < 0$</u>: analog mit $M = \{n \in \mathbb{N} : n \geq -x\}$, <u>$0 \leq x < 1$</u>: $m := 0 \in \mathbb{Z}$ □

Bemerkung*: $m = m(x)$ heißt *ganzer Anteil* von $x \in \mathbb{R}$ und wird mit $m(x) = \lfloor x \rfloor$ bezeichnet.

Satz 1.1.7 **(i)** *In jedem nichtleeren offenen Intervall reeller Zahlen gibt es mindestens eine rationale Zahl.*

(ii) *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.*

B e w e i s*: <u>zu (i)</u>: sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ beliebig, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *z.z.*: $\exists\, r \in \mathbb{Q} : \ a < r < b$
Archimedes-Axiom $\curvearrowright$ $\exists\, n \in \mathbb{N} : n > \dfrac{1}{b-a} \implies \exists\, n \in \mathbb{N} : nb - na > 1 \iff \exists\, n \in \mathbb{N} : nb > na + 1$
sei $m = \lfloor na \rfloor \in \mathbb{Z} \iff m \leq na < m+1 \curvearrowright na < m+1 \leq na+1 < nb \iff a < \underbrace{\dfrac{m+1}{n}}_{=:r \in \mathbb{Q}} < b$

<u>zu (ii)</u>: verwenden *1. Cantor*[7] *sches Diagonalverfahren*, zunächst: $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+ \sim \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{m}{n} : \ m, n \in \mathbb{N}\}$,
dann analog: $\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} \\ & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\ \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} \\ \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\ \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} \\ & \swarrow & & & & & \\ \frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \end{array} \quad \dashrightarrow \quad \mathbb{Q}_+ \subset \left\{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\} \longleftrightarrow \mathbb{N}$$

□

Bemerkung*: $\mathbb{Q}$ liegt *dicht* in $\mathbb{R}$; es gilt auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrationale Zahlen) *dicht* in $\mathbb{R}$

[7] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (* 3. 3. 1845 St. Petersburg † 6. 1. 1918 Halle)

1.2 Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Definition 1.2.1 **(i)** *Eine Menge* $M \subset \mathbb{R}$ *heißt* nach oben beschränkt, *falls*

$$\exists\, S \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in M: \; x \le S.$$

Anderenfalls heißt M (nach oben) unbeschränkt.

(ii) *Eine Teilmenge* M *von* $\mathbb{R}$ *heißt* nach unten beschränkt, *falls*

$$\exists\, s \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in M: \; s \le x.$$

Anderenfalls heißt M (nach unten) unbeschränkt.

(iii) *Eine Teilmenge* M *von* $\mathbb{R}$ *heißt* beschränkt, *wenn* M *nach unten und oben beschränkt ist.*

Bemerkung*: s, S nicht eindeutig bestimmt; S ... obere Schranke, s ... untere Schranke

Beispiel : $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ $\curvearrowright$ z.B. $S = 5$ obere Schranke, $s = -2$ untere Schranke für M

Definition 1.2.2 **(i)** $S^* \in \mathbb{R}$ *heißt* Supremum (kleinste obere Schranke) *von* $M \subset \mathbb{R}$, *d.h.* $S^* = \sup M = \sup\{x : x \in M\}$, *wenn gelten*

a) S^* *ist obere Schranke von* M, *d.h.* $x \le S^*$ *für alle* $x \in M$.
b) S^* *ist kleinste obere Schranke, d.h. für jede obere Schranke* S *von* M *gilt* $S^* \le S$.

Falls zusätzlich gilt $S^* \in M$, *so heißt* S^* Maximum *von* M, $S^* = \max M = \max\{x : x \in M\}$.

(ii) $s^* \in \mathbb{R}$ *heißt* Infimum (größte untere Schranke) *von* $M \subset \mathbb{R}$, $s^* = \inf M = \inf\{x : x \in M\}$, *falls*

a) s^* *ist untere Schranke von* M, *d.h.* $s^* \le x$ *für alle* $x \in M$.
b) s^* *ist größte untere Schranke, d.h. für jede untere Schranke* s *von* M *gilt* $s \le s^*$.

Falls zusätzlich gilt $s^* \in M$, *so heißt* s^* Minimum *von* M, $s^* = \min M = \min\{x : x \in M\}$.

Beispiel : $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \curvearrowright S^* = \sup M = \max M = 1 \in M, \quad s^* = \inf M = 0 \notin M$:
$\forall\, k \in \mathbb{N}: \frac{1}{k} \le 1 \curvearrowright$ 1 obere Schranke; sei S beliebige obere Schranke $\curvearrowright S \ge 1 \in M$
$\underset{S \ge S^*}{\Longrightarrow} S^* = \sup M = \max M = 1;$
$\forall\, k \in \mathbb{N}: \frac{1}{k} > 0 \curvearrowright$ 0 untere Schranke; sei s weitere untere Schranke $\curvearrowright s \le \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$;
Annahme: $s > 0 \curvearrowright \exists\, m \in \mathbb{N}: m > \frac{1}{s} \iff s > \frac{1}{m} \Longrightarrow$ s nicht untere Schranke, d.h.
$s \le 0 \Longrightarrow s^* = 0$, aber $s^* \notin M$ ($\min M$ existiert nicht!)

Lemma 1.2.3
(i) $S^* = \sup M \iff$ **a)** $\forall\, x \in M: \; x \le S^*$
b') $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon \in M: \; S^* - \varepsilon < x_\varepsilon$

(ii) $s^* = \inf M \iff$ **a)** $\forall\, x \in M: s^* \le x$
b') $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon \in M: \; x_\varepsilon < s^* + \varepsilon$

B e w e i s : Aussage a) in (i), (ii) jeweils äquivalent zu Definition 1.2.2 (i), (ii); zeigen nur (i)

'$\Longrightarrow$' z.z. : b) $\Longrightarrow$ b'), d.h. entsprechendes x_ε finden

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, $S^* - \varepsilon < S^* \underset{b)}{\Rightarrow} S^* - \varepsilon$ keine obere Schranke für $M \curvearrowright \exists\, x_\varepsilon \in M: x_\varepsilon > S^* - \varepsilon$

'$\Longleftarrow$' Sei S obere Schranke von M, z.z. : $S^* \leq S$, d.h. b)
indirekt : Annahme : $S^* > S$, $\varepsilon := S^* - S > 0 \underset{b')}{\Longrightarrow} \exists\, x_\varepsilon \in M : S^* - \varepsilon < x_\varepsilon$
$\curvearrowright \exists\, x_\varepsilon \in M : S = S^* - \underbrace{(S^* - S)}_{\varepsilon} < x_\varepsilon$ $\curvearrowright$ S nicht obere Schranke für M $\Longrightarrow$ ↯ *Widerspruch*
$\curvearrowright$ d.h. Annahme falsch $\curvearrowright$ $S^* \leq S$ □

Die Menge der reellen Zahlen ist nun aus den rationalen Zahlen so konstruiert worden (Dedekindsche[8] Schnitte, Vervollständigung), dass folgendes gilt :

Axiom (Vollständigkeitsaxiom)
Jede nach oben beschränkte, nichtleere Menge reeller Zahlen besitzt genau ein Supremum in den reellen Zahlen.

Bemerkung*:
- $\sup M = \inf(-M)$, $-M = \{-x \in \mathbb{R} : x \in M\}$
  $\curvearrowright$ Jede nach unten beschränkte, nichtleere Menge reeller Zahlen besitzt genau ein Infimum in den reellen Zahlen.
- Besonderheit von $\mathbb{R}$ ($\exists\, M \subset \mathbb{Q}$: $\sup M \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, z.B. $M = \{x : x \in \mathbb{Q},\ x^2 \leq 2\}$)
- Basis für Intervallschachtelung / Dezimalbruchdarstellung
  - Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ kann durch einen unendlichen Dezimalbruch dargestellt werden.
  - Jeder endliche oder periodische Dezimalbruch definiert eine rationale Zahl.
  - In jedem nichtleeren offenen Intervall reeller Zahlen gibt es mindestens eine irrationale Zahl.

Folgerung 1.2.4 *Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ ist überabzählbar unendlich.*

Bemerkung*:
- *algebraische Zahlen*: Lösungen von Gleichungen n-ten Grades mit rationalen Koeffizienten,
  $$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{Q}$$
  z.B. $\sqrt{5}, \ldots$; abzählbar unendlich viele (Beweis von Cantor)
- *transzendente Zahlen* = nicht-algebraische Zahlen $\curvearrowright$ überabzählbar viele, z.B. e, π

Anwendung: Wurzeln und Potenzen reeller Zahlen $x \in \mathbb{R}$; *bisher:* x^m, $m \in \mathbb{Z}$

- $x > 0,\ n \in \mathbb{N}$: $\quad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} := \sup\{r : r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ r^n \leq x\}$ nach Axiom V eindeutig
- $x > 0,\ \ell \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$: $\quad x^{\frac{\ell}{n}} = \sqrt[n]{x^\ell}$ (Wert eindeutig bestimmt, unabhängig von Darstellung $s = \frac{\ell}{n}$)
- $x > 0,\ y \in \mathbb{R}$:
$$x^y = \begin{cases} \sup\{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq y\} &, \quad x > 1 \\ 1 &, \quad x = 1 \\ \inf\{x^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq y\} &, \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

(Existenz durch Axiom V gesichert, Eindeutigkeit klar)

Bemerkung*: Rechenregeln entsprechen bekannten Regeln, sind aber eigentlich aus diesen und obigen Definitionen herzuleiten !

[8] Richard Dedekind (* 6.10.1831 Braunschweig † 12.2.1916 Braunschweig)

1.3 Komplexe Zahlen

Idee : Zahlbereichserweiterung, um z.B. $x^2 + 1 = 0$ lösen zu können

Definition 1.3.1 *Seien* a, b, c, d *reelle Zahlen. Wir betrachten die geordneten Zahlenpaare* (a, b) *und* (c, d) *mit folgenden Rechenoperationen :*

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d)\\ (a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd, ad+bc)\end{aligned}$$

$z = (a, b)$ *und* $w = (c, d)$ *heißen* komplexe Zahlen, *die Menge aller komplexen Zahlen ist* $\mathbb{C}$.

Beispiele :

- $(2, 0) + (-3, 5) = (-1, 5)$
- $(3, 0) \cdot (\pi, 0) = (3\pi, 0)$
- $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$

Satz 1.3.2 $[\mathbb{C}, +, \cdot]$ *ist ein Körper mit Nullelement* $(0, 0)$ *und Einselement* $(1, 0)$. *Dabei ist für* $z = (a, b)$ *das inverse Element der Addition gegeben durch* $-z = (-a, -b)$, *für* $z = (a, b) \neq (0, 0)$ *ist das inverse Element der Multiplikation gegeben durch* $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Beweis : bereits bekannt (bzw. einsetzen & nachrechnen) □

Bemerkung*:

- betrachten reelle Zahlen als *spezielle komplexe Zahlen*, indem wir identifizieren

$$\mathbb{R} \ni x \longleftrightarrow (x, 0) \in \mathbb{C} \qquad \curvearrowright \quad \textit{Zahlbereichserweiterung}$$

- In $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnungsrelation!

Definition 1.3.3 (Normaldarstellung komplexer Zahlen)

(i) *Für eine komplexe Zahl* $z = (a, b)$ *heißen*

$\Re\mathrm{e}\, z := a$ Realteil *von* z, $\Im\mathrm{m}\, z := b$ Imaginärteil *von* z, *und* $i := (0, 1)$ imaginäre Einheit .

(ii) *Für* $z = (a, b)$ *ist*

$$z = \Re\mathrm{e}\, z + \Im\mathrm{m}\, z \cdot i = a + bi$$

die Normaldarstellung *der komplexen Zahl* z.

(iii) *Für* $z = a + bi$ *heißen* $\overline{z} := a - bi$ konjugiert komplexe Zahl *zu* z, *und* $|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ Betrag *von* z.

<u>*Addition und Multiplikation*</u> (in Normaldarstellung)

$z = \Re\mathrm{e}\, z + i\, \Im\mathrm{m}\ z,\quad w = \Re\mathrm{e}\, w + i\, \Im\mathrm{m}\ w$

$$\begin{aligned}
z + w &= (\Re\mathrm{e}\, z + i\,\Im\mathrm{m}\ z) + (\Re\mathrm{e}\, w + i\,\Im\mathrm{m}\ w) \ = (\Re\mathrm{e}\, z + \Re\mathrm{e}\, w) + i(\Im\mathrm{m}\, z + \Im\mathrm{m}\, w)\\
z \cdot w &= (\Re\mathrm{e}\, z + i\,\Im\mathrm{m}\ z) \cdot (\Re\mathrm{e}\, w + i\,\Im\mathrm{m}\ w)\\
&= (\Re\mathrm{e}\, z\, \Re\mathrm{e}\ w + \underbrace{i^2}_{-1} \Im\mathrm{m}\, z\, \Im\mathrm{m}\ w) + i(\Re\mathrm{e}\, z\, \Im\mathrm{m}\ w + \Im\mathrm{m}\, z\, \Re\mathrm{e}\ w)\\
&= (\Re\mathrm{e}\, z\, \Re\mathrm{e}\ w - \Im\mathrm{m}\, z\, \Im\mathrm{m}\ w) + i(\Re\mathrm{e}\, z\, \Im\mathrm{m}\ w + \Im\mathrm{m}\, z\, \Re\mathrm{e}\ w)
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: $i^2 = i \cdot i = (0 + 1i) \cdot (0 + 1i) = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$

Lemma 1.3.4 **(i)** *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten folgende Rechenregeln:*

- $z = \overline{\overline{z}}\,, \qquad z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R} \iff \Im\mathrm{m}\, z = 0, \qquad |z| = |\overline{z}|$
- $\Re\mathrm{e}\, z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \Im\mathrm{m}\, z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \qquad \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}, \quad w \neq 0$
- $\Re\mathrm{e}\, z \ \leq\ |\Re\mathrm{e}\, z| \ \leq\ |z|\ , \qquad \Im\mathrm{m}\, z \ \leq\ |\Im\mathrm{m}\, z| \ \leq\ |z|$

(ii) *Der Betrag komplexer Zahlen hat folgende Grundeigenschaften :*

(N1) $|z| \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}; \qquad |z| = 0 \iff z = 0$

(N2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad z, w \in \mathbb{C}$

(N3) $|z + w| \leq |z| + |w|, \quad z, w \in \mathbb{C}$

Beweis*: bekannt (bzw. einsetzen & nachrechnen) $\square$

Anwendung: seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 \neq 0$ gegeben $\curvearrowright$ $z_1 \cdot w = z_2$ besitzt genau eine Lösung:

$$w = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2 \cdot \overline{z_1}}{z_1 \cdot \overline{z_1}} = \frac{1}{|z_1|^2}\, \overline{z_1} \cdot z_2\ ,$$

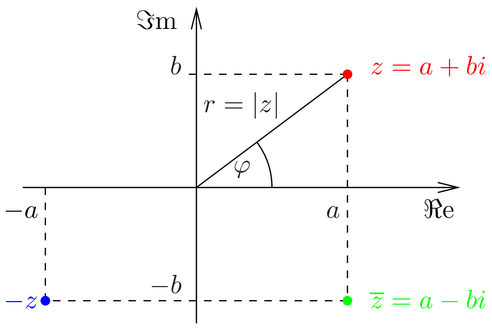
insbesondere gilt für $z_1 = z \neq 0$, $z_2 = 1$ also $\quad w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = z^{-1}$.

Gauß[9]sche Zahlenebene & Polarkoordinaten-Darstellung

$z = a + bi \ \curvearrowright\ \overline{z} = a - bi, \ \ |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$r = |z|$
$\varphi = \arg z \ldots$ Winkel zwischen positiver reeller Achse und Ortsvektor vom Ursprung zu z

$a = r\ \cos\varphi, \quad b = r\ \sin\varphi$



Definition 1.3.5 (Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen)

(i) *Für $z \in \mathbb{C}$ heißt*

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)\,, \qquad \varphi = \arg z,$$

trigonometrische Darstellung *bzw.* Polarkoordinatendarstellung *für z.*

(ii) *Für $\varphi \in \mathbb{R}$ setzt man*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

(Euler[10]sche Formel), *so dass $z \in \mathbb{C}$ darstellbar ist als*

$$z = |z| e^{i\varphi}, \qquad \varphi = \arg z.$$

[9] Carl Friedrich Gauß (* 30.4.1777 Brunswick † 23.2.1855 Göttingen)
[10] Leonhard Euler (* 15.4.1707 Basel † 18.9.1783 St. Petersburg)

Bemerkung*:

- $e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}$, $k \in \mathbb{Z}$
- $z \neq 0$, dann ist φ bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt, deshalb $0 \leq \varphi < 2\pi$ oder $-\pi < \varphi \leq \pi$
- $z = 0$, dann ist φ unbestimmt
- $z = w \iff |z| = |w|, \quad \arg z = \arg w + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \implies \overline{z} = |z|\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|\,(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$

Multiplikation und Division komplexer Zahlen in Polarkoordinatendarstellung

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad |w| = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$

$$z\,w = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)|w|(\cos\psi + i\sin\psi) = |z||w|\Big[\underbrace{(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi)}_{\cos(\varphi+\psi)} + i(\underbrace{\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi}_{\sin(\varphi+\psi)})\Big]$$

$$= |z||w|\Big[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\Big]$$

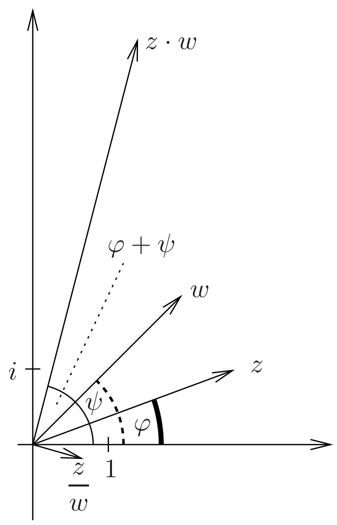
$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{|z|}{|w|^2}\,|w|\Big[\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\Big] = \frac{|z|}{|w|}\,\Big[\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\Big],\ w \neq 0$$

$\curvearrowright$ Beträge werden wie in $\mathbb{R}$ multipliziert/dividiert, Winkel werden addiert bzw. subtrahiert!

Beispiel :

$$z = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$w = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$



$$z \cdot w = 2e^{i\frac{\pi}{6}}2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$
$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\ \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

bisher:

$$z \cdot w = 2\sqrt{3} - 2 + i(2\sqrt{3} + 2)$$
$$= 4\sqrt{2}\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}_{\cos(\frac{5}{12}\pi)} + i\ \underbrace{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}_{\sin(\frac{5}{12}\pi)}\Bigg)$$

Potenzen : $z^k := \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{k\text{-mal}}$, $z \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}$

Folgerung 1.3.6 (Formel von Moivre[11]) *Für* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$ *und* $k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$z^k = |z|^k\,(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)) = |z|^k e^{ik\varphi}.$$

[11] Abraham de Moivre (* 26.5.1667 Vitry-le-François/Frankreich † 27.11.1754 London)

Wurzeln komplexer Zahlen

Gegeben : $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad n \in \mathbb{N}$

Gesucht : $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$ (bzw. $w = \sqrt[n]{z}$)

Lösung : $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \implies w^n = |w|^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))$

$$w^n = z \iff |w|^n = |z|, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff |w| = \underbrace{\sqrt[n]{|z|}}_{\text{reelle Wurzel}}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\ \sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Es treten also zunächst unendlich viele Werte w auf.

Beispiel : $z = 1$, $n = 4$, d.h. suchen w mit $w^4 = 1$ (4-te *Einheitswurzel*)

$$z = 1(\cos 0 + i\ \sin 0) \quad \curvearrowright \quad \begin{aligned} w_0 &= 1\ (\cos 0 + i\ \sin 0) &&= 1 \\ w_1 &= 1\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right) &&= i \\ w_2 &= 1\ (\cos\pi + i\ \sin\pi) &&= -1 \\ w_3 &= 1\left(\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\right) &&= -i \\ w_4 &= 1\ (\cos(2\pi) + i\ \sin(2\pi)) &&= 1 = w_0 \\ w_5 &= 1\left(\cos\left(\tfrac{5}{2}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{2}\pi\right)\right) &&= i = w_1 \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

Satz 1.3.7 *Die n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl $z \neq 0$ hat genau n verschiedene Werte, d.h. für*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ , \quad n \in \mathbb{N},$$

gibt es genau n verschiedene komplexe Zahlen

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\ \sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

mit $w^n = z$.

Beweis*:

1. Die w_k sind Lösungen (siehe Herleitung).

2. Für $k = 0, \ldots, n-1$ sind die w_k paarweise verschieden, d.h. $w_k \neq w_\ell$ für alle $\ell, k \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $\ell \neq k$:
   g.z.z. $\arg w_k \neq \arg w_\ell + 2\pi m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$
   $$\iff \arg w_k - \arg w_\ell \neq 2\pi m \iff \frac{\varphi+2k\pi}{n} - \frac{\varphi+2\ell\pi}{n} \neq 2\pi m \quad \text{für ein } m \in \mathbb{Z}$$
   $$\iff \frac{k-\ell}{n} \neq m \quad \text{für ein } m \in \mathbb{Z} \iff \frac{k-\ell}{n} \notin \mathbb{Z}$$
   $$0 \le k \le n-1,\ 0 \le \ell \le n-1 \implies -1 < \frac{-n+1}{n} \le \frac{k-\ell}{n} \le \frac{n-1}{n} < 1,\ k-\ell \neq 0 \implies \frac{k-\ell}{n} \notin \mathbb{Z}$$

3. Es gibt keine weiteren Lösungen.
   z.z. : Für alle $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, n-1\}$ existiert ein $k_\ell \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $w_\ell = w_{k_\ell}$.
   g.z.z. : Es existieren $k_\ell \in \{0, \ldots, n-1\}$, $m \in \mathbb{Z}$, mit $\arg w_\ell = \arg w_{k_\ell} + 2m\pi$
   $$\iff \frac{\varphi+2\ell\pi}{n} = \frac{\varphi+2k_\ell\pi}{n} + 2m\pi \iff \ell - mn = k_\ell$$

$$0 \le k_\ell \le n{-}1 \quad\Longleftrightarrow\quad 0 \le \ell{-}mn \le n{-}1 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\ell+1}{n}{-}1 \le m \le \frac{\ell}{n} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\ell}{n}{-}1 < m \le \frac{\ell}{n}\,,$$

wählen m entsprechend und setzen $k_\ell := \ell - mn$

$\square$

Rechenregeln für komplexe Wurzeln

$$z,w \in \mathbb{C},\ \ n,m \in \mathbb{N} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt[n]{z}\cdot\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{z\cdot w}, \qquad \frac{\sqrt[n]{z}}{\sqrt[n]{w}} = \sqrt[n]{\frac{z}{w}}\,,\quad w \ne 0, \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{z}} = \sqrt[nm]{z}$$

Bemerkung*: Wegen der Mehrdeutigkeit der Wurzeln komplexer Zahlen sind diese Regeln so zu verstehen, dass man ‘geeignete Werte’ zu wählen hat !

Beispiel : $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4} = \sqrt{4}$

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\ ,\ k=0,1 \Longrightarrow \left(\sqrt{-1}\right)_0 = i,\ \left(\sqrt{-1}\right)_1 = -i$$

$$\sqrt{-4} = 2\sqrt{\cos\pi + i\sin\pi} = 2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right),\ k=0,1 \Longrightarrow \left(\sqrt{-4}\right)_0 = 2i,\ \left(\sqrt{-4}\right)_1 = -2i$$

$$\sqrt{4} = 2\sqrt{\cos 0 + i\sin 0} = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{2} + i\sin\frac{2k\pi}{2}\right)\ ,\ k=0,1 \Longrightarrow \left(\sqrt{4}\right)_0 = 2,\ \left(\sqrt{4}\right)_1 = -2$$

also :

$$\left(\sqrt{-1}\right)_0\cdot\left(\sqrt{-4}\right)_0 = \left(\sqrt{-1}\right)_1\cdot\left(\sqrt{-4}\right)_1 = -2 = \left(\sqrt{4}\right)_1$$

$$\left(\sqrt{-1}\right)_0\cdot\left(\sqrt{-4}\right)_1 = \left(\sqrt{-1}\right)_1\cdot\left(\sqrt{-4}\right)_0 = 2 = \left(\sqrt{4}\right)_0$$

2 Folgen und Reihen

2.1 Zahlenfolgen

2.1.1 Konvergenz

Definition 2.1.1 *Eine* reelle Zahlenfolge $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ *ist eine Abbildung natürlicher Zahlen in die reellen Zahlen. Eine* komplexe Zahlenfolge $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ *ist eine Abbildung natürlicher Zahlen in die komplexen Zahlen.*

Beispiele :

(i) $a_n = a_0 + nd,\ n \in \mathbb{N},\ a_0, d \in \mathbb{C} \curvearrowright a_{n+1} - a_n = d,\ n \in \mathbb{N}$ $\dashrightarrow$ *arithmetische Folge*

(ii) $a_n = a_0 q^n,\ n \in \mathbb{N},\ a_0 \in \mathbb{C},\ q \neq 0 \curvearrowright a_{n+1} = q a_n \underset{a_0 \neq 0}{\Longrightarrow} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q,\ n \in \mathbb{N}$
$\dashrightarrow$ *geometrische Folge*

(iii) $a_n = (-1)^n b_n,\ b_n \geq 0$ (oder $b_n \leq 0$), $n \in \mathbb{N}$ $\dashrightarrow$ *alternierende Folge*

Definition 2.1.2 *Eine reelle oder komplexe Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *heißt* beschränkt, *falls es eine Konstante* $K > 0$ *gibt, so dass* $|a_n| \leq K$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Bemerkung*: Für Folgen in $\mathbb{R}$ auch sinnvoll:

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt nach unten* $\iff \exists\, K_1 \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n \geq K_1$
- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt nach oben* $\iff \exists\, K_2 \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n \leq K_2$
- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt* $\iff$ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt nach unten und oben*
  $\iff \exists\, K_1, K_2 \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}:\ K_1 \leq a_n \leq K_2$

Grenzwertbegriff : *Motivation*

a_n	$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$\dfrac{1}{n}$	$1,\ 0.5,\ 0.333,\ 0.25,\ \ldots$	0
$n\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$	$0.9,\ 1.62,\ 2.187,\ 2.6244, \ldots,\ a_{10} \sim 3.487, \ldots,\ a_{100} \sim 2.66 \cdot 10^{-3},\ \ldots$	0
$\sqrt[n]{n}$	$1,\ 1.414,\ 1.442,\ 1.414, \ldots, a_{50} \sim 1.081, \ldots$	1
$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$	$1,\ 1.5,\ 1.833, \ldots, a_{10} \sim 2.929, \ldots, a_{100} \sim 5.187, \ldots, a_{1000} \sim 7.485, \ldots a_{10000} \sim 9.788, \ldots$	div.
$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$	$0.5,\ 0.667,\ 0.75,\ 0.8, \ldots,\ a_{100} \sim 0.99, \ldots$	1
$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$	$1,\ 0.5,\ 0.833, 0.583, \ldots, a_{10} \sim 0.646, \ldots, a_{20} \sim 0.669, \ldots$	$\ln 2$
i^n	$i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ \ldots$	div.
$\dfrac{i^n}{n}$	$i,\ -0.5,\ -0.333i,\ 0.25,\ 0.2i, \ldots$	0

Definition 2.1.3 *Eine reelle oder komplexe Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *heißt* konvergent, *wenn es eine reelle oder komplexe Zahl* a *mit folgender Eigenschaft gibt: Für jedes* $\varepsilon > 0$ *existiert eine natürliche Zahl* $n_0(\varepsilon)$, *so dass für all* $n \geq n_0(\varepsilon)$ *gilt:*

$$|a - a_n| < \varepsilon \ .$$

Dann heißt a Grenzwert *bzw.* Limes *von* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *geschrieben als* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

alternative Schreibweise: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ oder $a_n \longrightarrow a$ für $n \to \infty$

Bemerkung*:

- In jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ bzw. $U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\}$ um den Grenzwert liegen „fast alle“ – d.h. alle bis auf endlich viele – Glieder der Folge.
- in $\mathbb{C}$: $|a - a_j| = \sqrt{[\Re\mathrm{e}\,(a-a_j)]^2 + [\Im\mathrm{m}\,(a-a_j)]^2}$

Beispiele :

(a) $a_j \equiv a$ für $j \geq j^*$ (konstante Folge)

$$\Longrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, j_0(\varepsilon) := j^* \quad \forall\, j \geq j_0(\varepsilon) : |a_j - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$$

(b) $a_j = \dfrac{1}{j}$ (*Idee:* $a_j \longrightarrow 0$)

Sei $\varepsilon > 0$, setzen: $j_0(\varepsilon) = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \quad \Longrightarrow \quad j_0(\varepsilon) > \dfrac{1}{\varepsilon}$

$$\Longrightarrow \quad |a_j - 0| = |a_j| = \frac{1}{j} \leq \frac{1}{j_0(\varepsilon)} < \varepsilon \ , \quad j \geq j_0(\varepsilon)$$

(c) $a_j = 1 + \dfrac{(-1)^j}{j}$ (*Idee:* $a_j \longrightarrow 1$)

Sei $\varepsilon > 0$, suchen $j_0(\varepsilon)$ so, dass für $j \geq j_0(\varepsilon)$ gilt:

$$|a_j - 1| = \left| 1 + \frac{(-1)^j}{j} - 1 \right| = \frac{1}{j} < \varepsilon$$

Setzen wie in (b) $j_0(\varepsilon) = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1, \ \varepsilon > 0$

Bemerkung*: Es kommt nicht darauf an, „bestes“ (d.h. kleinstes) $j_0(\varepsilon)$ anzugeben !

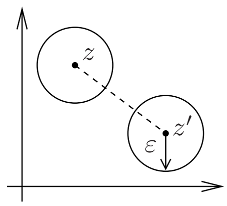
Satz 2.1.4 **(i)** *Ist eine Folge konvergent, so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.*

(ii) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

B e w e i s*: zu (i): indirekt

Annahme: $\exists\, z, z' \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$, $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = z$, $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = z'$ mit $z \neq z'$, d.h. $|z - z'| > 0$

setzen $\varepsilon := \dfrac{|z-z'|}{3} > 0$



$$\lim_{j\to\infty} z_j = z \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, j_0(\varepsilon) \quad \forall\, j \geq j_0(\varepsilon) : |z_j - z| < \varepsilon$$

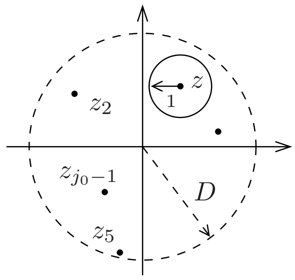
$$\lim_{j\to\infty} z_j = z' \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, j_1(\varepsilon) \quad \forall\, j \geq j_1(\varepsilon) : |z_j - z'| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, j_2(\varepsilon) := \max\{j_0(\varepsilon), j_1(\varepsilon)\} \quad \forall\, j \geq j_2(\varepsilon) : |z_j - z| + |z_j - z'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|z - z'|$$

Andererseits ist für alle $j \in \mathbb{N}: \quad |z - z'| \le |z - z_j| + |z_j - z'|$, d.h.

$$\Longrightarrow \quad \exists\ j_2(\varepsilon) \quad \forall\ j \ge j_2(\varepsilon): \underbrace{|z - z'|}_{>0} \le |z - z_j| + |z_j - z'| < \frac{2}{3}|z - z'| \quad \lightning \quad \Longrightarrow \quad \textit{Annahme falsch !}$$

<u>zu (ii)</u>: Sei $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = z$, setzen $\varepsilon = 1$



$$\Longrightarrow \quad \exists\ j_0 = j_0(1) \quad \forall\ j \ge j_0 : |z_j - z| \le 1$$

Sei $D := \max\left\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_{j_0-1}|, |z| + 1\right\}$

$$\Longrightarrow \quad |z_j| \le \left\{ \begin{array}{ll} \max\left\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_{j_0-1}|\right\}, & j = 1, \ldots, j_0 - 1 \\ |z_j - z| + |z| \ \le\ |z| + 1 & , j \ge j_0 \end{array} \right\} \le D$$

□

Lemma 2.1.5 $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *konvergent* $\iff$ $(\Re\mathrm{e}\, z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *und* $(\Im\mathrm{m}\, z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *konvergent*

B e w e i s*: Vorbemerkung: $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2}}(|a| + |b|) \underset{\substack{\uparrow \\ (|a|-|b|)^2 \ge 0}}{\le} \sqrt{a^2 + b^2} \underset{\substack{\uparrow \\ 2|ab| \ge 0}}{\le} |a| + |b| \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$

$$a_j = \Re\mathrm{e}\,(z_j - z), \quad b_j = \Im\mathrm{m}\,(z_j - z)$$

$$\curvearrowright \ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\Re\mathrm{e}\, z_j - \Re\mathrm{e}\, z| + |\Im\mathrm{m}\, z_j - \Im\mathrm{m}\, z|\Big) \le |z_j - z| \le |\Re\mathrm{e}\, z_j - \Re\mathrm{e}\, z| + |\Im\mathrm{m}\, z_j - \Im\mathrm{m}\, z|$$

„$\Longrightarrow$“ $\quad |z - z_j| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ für $j \ge j_0(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lclcl} |\Re\mathrm{e}\, z_j - \Re\mathrm{e}\, z| & < & \sqrt{2}\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & = & \varepsilon \\ |\Im\mathrm{m}\, z_j - \Im\mathrm{m}\, z| & < & \sqrt{2}\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} & = & \varepsilon \end{array} \right\}, \quad j \ge j_0(\varepsilon)$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lllll} (\Re\mathrm{e}\, z_j) & \text{konvergent,} & \Re\mathrm{e}\, z_j & \longrightarrow & \Re\mathrm{e}\, z \\ (\Im\mathrm{m}\, z_j) & \text{konvergent,} & \Im\mathrm{m}\, z_j & \longrightarrow & \Im\mathrm{m}\, z \end{array} \right.$$

„$\Longleftarrow$“ $\quad (\Re\mathrm{e}\, z_j)_j$ konv. $\Longrightarrow \ \exists\ a \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ j_1(\varepsilon) \quad \forall\ j \ge j_1(\varepsilon): \quad |\Re\mathrm{e}\, z_j - a| \ < \ \dfrac{\varepsilon}{2}$

$(\Im\mathrm{m}\, z_j)_j$ konv. $\Longrightarrow \ \exists\ b \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ j_2(\varepsilon) \quad \forall\ j \ge j_2(\varepsilon): \quad |\Im\mathrm{m}\, z_j - b| \ < \ \dfrac{\varepsilon}{2}$

Setzen $z := a + ib, \quad j_0(\varepsilon) := \max\{j_1(\varepsilon), j_2(\varepsilon)\}$

$$\Longrightarrow \quad |z - z_j| \ \le\ |\Re\mathrm{e}\, z_j - a| + |\Im\mathrm{m}\, z_j - b| < \varepsilon\,, \quad j \ge j_0(\varepsilon)$$

□

Folgerung : *Es reicht aus, reelle Folgen zu betrachten.*

2.1.2 Häufungspunkte und Vollständigkeit

Definition 2.1.6 **(i)** $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ *sei eine Folge reeller / komplexer Zahlen und* $(j_k)_{k=1}^{\infty}$ *eine Folge natürlicher Zahlen mit* $j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ *(streng monoton wachsend). Dann heißt die Folge* $(a_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ Teilfolge *von* $(a_j)_{j=1}^{\infty}$.

(ii) $a_0 \in \mathbb{C}$ *heißt* Häufungspunkt *der Folge* $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *, wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *unendlich viele* j *gibt mit*

$$|a_j - a_0| < \varepsilon\,.$$

Bemerkung*:
- $a_0 \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt* von $(a_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ $\iff$ $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists$ unendlich viele j : $|a_j - a_0| < \varepsilon$
- In jeder $\varepsilon-$Umgebung von a_0 liegen unendlich viele Folgenglieder.

Satz 2.1.7 **(i)** *Sei* $(a_j)_{j=1}^\infty$ *eine konvergente Folge mit Grenzwert* a. *Dann ist auch jede Teilfolge* $(a_{j_k})_{k=1}^\infty$ *konvergent und hat den gleichen Grenzwert.*

(ii) *Eine Zahl* a_0 *ist Häufungspunkt von* $(a_j)_{j=1}^\infty$ *genau dann, wenn eine Teilfolge* $(a_{j_k})_{k=1}^\infty$ *von* $(a_j)_{j=1}^\infty$ *existiert mit*

$$\lim_{k\to\infty} a_{j_k} = a_0\ .$$

Bemerkung*: Umkehrung von (i) gilt i.a. nicht, z.B. $a_j = (-1)^j$ nicht konvergent;
$j_k = 2k \implies a_{j_k} \equiv 1 \longrightarrow 1$ für $k \to \infty$, analog für $\widetilde{j_k} = 2k+1$

Satz 2.1.8 (Bolzano[12]-Weierstraß[13])
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.

Beweis : Sei $(a_j)_{j=1}^\infty$ mit $c \le a_j \le d$, $j \in \mathbb{N}$;

$$F := \{x : x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a_j < x \quad \text{für höchstens endlich viele } j\}$$

$$\begin{array}{lll} \implies & F \neq \emptyset & : \ c \in F \quad (\text{kein Index } j \text{ mit } a_j < c), \\ & F \text{ nach oben beschränkt} & : \ y > d \implies y \notin F, \quad \text{da} \quad a_j \le d < y \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$\underset{\text{Axiom V}}{\Longrightarrow} \quad a_* = \sup F \quad \text{existiert, reell}$$

<u>z.z.</u>: a_* ist Häufungspunkt

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben; für F gilt: $x \in F \implies y \in F$ für alle $y < x$

$a_* = \sup F \implies \exists\ x_\varepsilon \in F : a_* - \varepsilon < x_\varepsilon \le a_*$ (nach Lemma 1.2.3) $\implies a_* - \varepsilon \in F$,

andererseits ist $a_* + \varepsilon \notin F$, d.h. es existieren höchstens endlich viele ℓ mit $a_\ell < a_* - \varepsilon$,
es existieren unendlich viele k mit $a_k < a_* + \varepsilon$
$\implies$ es existieren unendlich viele j mit $a_* - \varepsilon \le a_j < a_* + \varepsilon$
$\implies$ a_* ist Häufungspunkt □

Folgerung 2.1.9 *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen* $(a_j)_{j=1}^\infty$ *besitzt einen kleinsten Häufungspunkt,*

$$a_* = \sup\{x \in \mathbb{R} : a_j < x \textit{ für höchstens endlich viele } j\},$$

sowie einen größten Häufungspunkt,

$$a^* = \inf\{x \in \mathbb{R} : a_j > x \textit{ für höchstens endlich viele } j\}.$$

Beweis*: sei $F = \{x \in \mathbb{R} : a_j < x \text{ für höchstens endlich viele } j\} \underset{\text{Satz 2.1.8}}{\Longrightarrow} a_* = \sup F$ ist Häufungspunkt;
n.z.z.: a_* kleinster Häufungspunkt
indirekt, <u>*Annahme*</u>: $a_0 < a_*$ sei auch ein Häufungspunkt; setzen $\varepsilon := \dfrac{a_* - a_0}{2} > 0$

[12]Bernhard Bolzano (* 5.10.1781 Prag † 18.12.1848 Prag)
[13]Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (* 31.10.1815 Ostenfelde/Westfalen † 19.2.1897 Berlin)

$\curvearrowright$ es existieren unendlich viele j mit $a_j \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$, d.h. es existieren unendlich viele j mit

$$a_j < a_0 + \varepsilon = a_0 + \frac{a_* - a_0}{2} = \frac{a_* + a_0}{2} = a_* - \frac{a_* - a_0}{2} = a_* - \varepsilon \in F$$

$\curvearrowright$ Widerspruch (zur Definition von F) $\curvearrowright$ Annahme falsch; a^* analog □

<u>*Bezeichnung*</u>
Der größte Häufungspunkt einer beschränkten Folge $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ heißt *Limes superior*,

$$a^* = \limsup_{j\to\infty} a_j = \overline{\lim_{j\to\infty}} a_j ,$$

der kleinste Häufungspunkt einer beschränkten Folge $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ heißt *Limes inferior*,

$$a_* = \liminf_{j\to\infty} a_j = \underline{\lim_{j\to\infty}} a_j .$$

Bemerkung*: Begriff nur für reelle Folgen möglich (*Ordnungseigenschaft*)

Folgerung 2.1.10 **(i)** *Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

(ii) *Jede beschränkte reelle / komplexe Zahlenfolge enthält eine konvergente Teilfolge.*

B e w e i s*: <u>zu (i)</u>: Sei $(z_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $|z_j| \le M \implies (\Re\mathrm{e}\, z_j)_j, (\Im\mathrm{m}\, z_j)_j$ beschränkt, reell

$\xRightarrow[\text{Satz 2.1.8}]{} (\Re\mathrm{e}\, z_j)_j$ hat einen Häufungspunkt a_0

$\xRightarrow[\text{Satz 2.1.7}]{} \exists\ (j_k)_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} (\Re\mathrm{e}\, z_{j_k}) = a_0 , \quad (\Im\mathrm{m}\, z_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ beschränkt

$\xRightarrow[\text{Satz 2.1.8}]{} (\Im\mathrm{m}\, z_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ hat einen Häufungspunkt $b_0 \xRightarrow[\text{Satz 2.1.7}]{} \exists\ (j_{k_\ell})_{\ell=1}^{\infty} : \lim_{\ell\to\infty} \left(\Im\mathrm{m}\, z_{j_{k_\ell}}\right) = b_0$

$\xRightarrow[\text{Satz 2.1.7}]{} \exists\ (j_{k_\ell})_{\ell=1}^{\infty} : \lim_{\ell\to\infty} z_{j_{k_\ell}} = a_0 + ib_0 =: z_0 \xRightarrow[\text{Satz 2.1.7}]{} z_0$ ist Häufungspunkt

<u>zu (ii)</u>: folgt aus Sätzen 2.1.7, 2.1.8, Folgerung 2.1.9 und (i) □

Bemerkung*:

- Jeder Grenzwert ist Häufungspunkt.
- Folgen können mehrere Häufungspunkte haben, z.B. $(-1)^j + \frac{1}{j}$, sind aber dann nicht konvergent
- Jede beschränkte Folge mit genau einem Häufungspunkt ist konvergent.

  Beschränktheit notwendig, z.B. $a_j = \begin{cases} j^{-1} & , \ j \text{ gerade} \\ j & , \ j \text{ ungerade} \end{cases}$

2.1.3 Konvergenzkriterien und Grenzwertsätze

Definition 2.1.11 *Eine Folge* $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ *heißt* Cauchy[14]-Folge (Fundamentalfolge), *wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, j_0(\varepsilon) \quad \forall\, j,k \ge j_0(\varepsilon) \ : \ |z_j - z_k| < \varepsilon .$$

[14] Augustin Louis Cauchy (* 21.8.1789 Paris † 23.5.1857 Paris)

Satz 2.1.12 (Konvergenzkriterium von Cauchy)
Eine reelle oder komplexe Folge $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ *ist konvergent genau dann, wenn* $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ *eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis*:

„$\Longrightarrow$“ : Sei $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = z \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, j_0(\varepsilon) \quad \forall\, j \geq j_0(\varepsilon) \quad : \quad |z_j - z| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, j_0(\varepsilon) \quad \forall\, j,\ k \geq j_0(\varepsilon) : \quad |z_j - z_k| \leq |z_j - z| + |z_k - z| < \varepsilon$$

„$\Longleftarrow$“ : Seien $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge und $\varepsilon = 1$

$\Longrightarrow \quad \exists\, j_0 = j_0(1) \quad \forall k \geq j_0 \ : \ |z_{j_0} - z_k| < 1$

$\Longrightarrow \quad (z_j)_{j=1}^{\infty}$ beschränkt mit $D = \max\left\{|z_1 - z_{j_0}|, \ldots, |z_{j_0-1} - z_{j_0}|,\ 1\right\}$

$\xrightarrow[\text{Satz 2.1.8, Folg.}]{}$ Es existieren ein Häufungspunkt z_0 und eine konvergente Teilfolge $(z_{j_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$ mit $\lim\limits_{\ell\to\infty} z_{j_\ell} = z_0$

<u>Zeigen jetzt</u> : $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge, und $(z_{j_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$ konvergente Teilfolge

$$\Longrightarrow \quad (z_j)_{j=1}^{\infty} \ \text{konvergent mit} \ \lim_{j\to\infty} z_j = z_0$$

dazu : $$|z_j - z_0| \leq \underbrace{|z_j - z_{j_\ell}|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{für } j,\, j_\ell \geq j_1 \\ \text{(Cauchy-Folge)}}} + \underbrace{|z_{j_\ell} - z_0|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{für } j_\ell \geq j_2 \\ \text{(konv. Teilfolge)}}} < \varepsilon \qquad \text{für} \quad j \geq \max\{j_1, j_2\}$$

□

Folgerung 2.1.13 *Eine Folge* $(b_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *ist nicht konvergent, falls ein* $\varepsilon_0 > 0$ *existiert, so dass für alle* $J \in \mathbb{N}$ *stets* $j, k \geq J$ *mit* $|b_j - b_k| \geq \varepsilon_0$ *gefunden werden können.*

Bemerkung*: Konvergenz $\Longrightarrow$ Cauchy-Folge; hier: nicht Cauchy-Folge $\Longrightarrow$ nicht konvergent

Beispiel : Sei $b_j = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{j} = \sum\limits_{k=1}^{j} \dfrac{1}{k} \curvearrowright b_{2j} - b_j = \dfrac{1}{j+1} + \cdots + \dfrac{1}{2j} \geq j \cdot \dfrac{1}{2j} = \dfrac{1}{2}\ ,\ j \in \mathbb{N}$

$\varepsilon_0 := \dfrac{1}{2},\ j := J,\ k := 2j \geq J \xrightarrow[\text{Folg. 2.1.13}]{} : \ |b_k - b_j| \geq \varepsilon_0 \curvearrowright (b_j)_{j=1}^{\infty}$ nicht konvergent

Satz 2.1.14 *Es seien* $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ *und* $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ *konvergente Folgen reeller/komplexer Zahlen mit* $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = a$, $\lim\limits_{j\to\infty} b_j = b$, *sowie* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. *Dann gelten*

$$\lim_{j\to\infty} (\lambda a_j + \mu b_j) = \lambda a + \mu b,$$

$$\lim_{j\to\infty} (a_j b_j) = a\ b,$$

$$\lim_{j\to\infty} |a_j| = |a|,$$

sowie, falls $b \neq 0$ *ist,*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = \frac{a}{b}.$$

Beweis*: o.B.d.A. $\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0,\ (a_j)_j, (b_j)_j$ reelle Folgen

Sei $\varepsilon > 0 \curvearrowright \exists\, j_0(\varepsilon) \quad \forall\, j \geq j_0(\varepsilon) : |a_j - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|\lambda|}, \quad \exists\, j_1(\varepsilon) \quad \forall\, j \geq j_1(\varepsilon) : |b_j - b| < \dfrac{\varepsilon}{2|\mu|}$

$$\curvearrowright \; |\lambda a_j + \mu b_j - (\lambda a + \mu b)| \;\le\; |\lambda| \underbrace{|a_j - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2|\lambda|}} + |\mu| \underbrace{|b_j - b|}_{<\frac{\varepsilon}{2|\mu|}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{für} \quad j \ge \max\{j_0(\varepsilon), j_1(\varepsilon)\}$$

Außerdem gilt $\Big||a_j| - |a|\Big| \;\le\; |a_j - a| < \varepsilon$ für $j \ge j_0(\varepsilon) \implies \lim\limits_{j\to\infty} |a_j| = |a|$

zu $\lim\limits_{j\to\infty} (a_j b_j)$: $|a_j b_j - ab| \le |a_j|\,|b_j - b| + |b|\,|a_j - a| \;\le\; M\,|b_j - b| + |b|\,|a_j - a|$ nach Satz 2.1.4, sowie:

$$\begin{array}{lllll} b \ne 0 & : \; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, j_1, j_2 & \forall\, j \ge \max\{j_1, j_2\} & : & |b_j - b| < \dfrac{\varepsilon}{2M}\,, \quad |a_j - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|} \\ b = 0 & : \; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, j_3 & \forall\, j \ge j_3 & : & |b_j| < \dfrac{\varepsilon}{M} \end{array}$$

$$\implies \; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, j_0 \;\; \forall\, j \ge j_0 \; : \; |a_j b_j - ab| < \varepsilon$$

zu $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{a_j}{b_j}$, $b \ne 0$: $\varepsilon := \dfrac{|b|}{2} > 0$

$$\begin{aligned} &\implies \exists\, j_0 \;\; \forall\, j \ge j_0 \; : \; |b_j - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2} \\ &\implies \exists\, j_0 \;\; \forall\, j \ge j_0 \; : \; |b| \le |b_j - b| + |b_j| < \frac{|b|}{2} + |b_j| \\ &\implies \exists\, j_0 \;\; \forall\, j \ge j_0 \; : \; 0 < \frac{|b|}{2} \le |b_j| \;\curvearrowright\; \frac{a_j}{b_j} \;\; \text{erklärt für } j \ge j_0, \end{aligned}$$

$$\left|\frac{a_j}{b_j} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a_j b - a b_j|}{|b_j b|} \le \frac{2}{|b|^2}\Big(|b||a_j - a| + |a||b - b_j|\Big) \;=\; \frac{2}{|b|}\,|a_j - a| + \frac{2|a|}{|b|^2}\,|b - b_j|\,, \quad j \ge j_0$$

Rest analog zum ersten Teil ... □

Bemerkung*:

- insbesondere im Satz enthalten: Konvergenz der Folgen $(\lambda a_j + \mu b_j)_j$, $(|a_j|)_j$, $(a_j b_j)_j$ sowie $\left(\frac{a_j}{b_j}\right)_j$
- umgekehrt impliziert Konvergenz von $(\lambda a_j + \mu b_j)_j$, $(|a_j|)_j$, $(a_j b_j)_j$ sowie $\left(\frac{a_j}{b_j}\right)_j$ i.a. nicht Konvergenz von $(a_j)_j$ und (b_j), z.B. $a_j = b_j = (-1)^j$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$
- Für komplexe Folgen $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = z$ gilt $\lim\limits_{j\to\infty} \overline{z_j} = \overline{z}$:

$$\begin{aligned} z_j \longrightarrow z \quad &\iff \; \Re\mathrm{e}\, z_j \longrightarrow \Re\mathrm{e}\, z, \quad \Im\mathrm{m}\, z_j \longrightarrow \Im\mathrm{m}\, z \qquad \text{(nach Lemma 2.1.5)} \\ &\iff \; (\Re\mathrm{e}\, z_j - i\;\Im\mathrm{m}\; z_j) \longrightarrow (\Re\mathrm{e}\, z - i\;\Im\mathrm{m}\; z) \;\iff\; \overline{z_j} \longrightarrow \overline{z} \end{aligned}$$

Satz 2.1.15 (Schachtelungssatz/Sandwichtheorem)

Seien $(a_j)_{j=1}^{\infty}$, $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ *und* $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ *reelle Folgen, für die gelte* $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = \lim\limits_{j\to\infty} c_j = a$ *, und*

$$a_j \;\le\; b_j \;\le\; c_j \quad , \quad j \ge j_0.$$

Dann ist $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ *konvergent, es gilt* $\lim\limits_{j\to\infty} b_j = a$.

Beweis: $a_j \;\le\; b_j \;\le\; c_j \;\implies\; 0 \;\le\; b_j - a_j \;\le c_j - a_j \;\implies\; |b_j - a_j| \;\le\; |c_j - a_j|\,, \quad j \ge j_0$

Sei $\varepsilon > 0$, $|b_j - a| \;\le\; |b_j - a_j| + |a_j - a| \;\le\; |c_j - a_j| + |a_j - a| \le \underbrace{|c_j - a|}_{<\frac{\varepsilon}{3},\; j \ge j_1} + 2 \underbrace{|a_j - a|}_{<\frac{\varepsilon}{3},\; j \ge j_2} < \varepsilon$

$\curvearrowright$ $|b_j - a| < \varepsilon$ für $j \ge \max\{j_0, j_1, j_2\}$ □

Beispiele : **(a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$:

$$n = \left[1 + \left(\sqrt[n]{n}-1\right)\right]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^k 1^{n-k} \geq \binom{n}{2} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2 \geq 0\,, \quad n \geq 2$$

$$\curvearrowright\ 0 \leq \binom{n}{2}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2 \leq n \iff 0 \leq \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2 \leq n$$
$$\iff 0 \leq \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2 \leq \frac{2}{n-1}$$
$$\implies 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} + 1$$
$$\implies 1 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \leq 1$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$

$\cdot\ a = 1$: trivial

$\cdot\ a > 1$: $a = \Big[1 + \underbrace{\left(\sqrt[n]{a}-1\right)}_{>0}\Big]^n \underset{\substack{\text{Lemma 1.1.3}\\ \text{(Bernoulli-Ungl.)}}}{\geq} 1 + n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$

$$\implies 0 < n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) \leq a-1 \implies 0 < \sqrt[n]{a} - 1 \leq \underbrace{\frac{a-1}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}$$

$$\xRightarrow[\text{Satz 2.1.15}]{} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = 0 \iff \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$$

$\cdot\ 0 < a < 1$: $b := \dfrac{1}{a} > 1 \xRightarrow[\text{Satz 2.1.14}]{} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, \quad q \in \mathbb{C}, \quad |q| < 1$:

$\cdot\ q = 0$: $a_n = q^n \equiv 0$

$\cdot\ 0 < |q| < 1 \curvearrowright h = \dfrac{1}{|q|} - 1 > 0 \quad \curvearrowright (1+h)^n = 1 + nh + \cdots + h^n > nh$

$$\curvearrowright\ 0 \leq |q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \underset{\text{s.o.}}{\leq} \frac{1}{nh} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Folgerung 2.1.16 **(i)** *Seien* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *und* $(b_j)_j$ *beschränkt, aber nicht notwendig konvergent. Dann ist*
$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0\,.$$

(ii) *Seien* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *, und für* $j \geq J$ *gelte stets* $a_j \leq b_j$*. Dann folgt* $a \leq b$.

Beweis*: zu (i): $0 \leq |a_j b_j| \leq M|a_j| \quad , \quad |b_j| \leq M \implies 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} |a_j b_j| \leq M \cdot 0 = 0$

zu (ii): *Annahme*: $a > b$

$$\implies 0 < a - b \leq a - b + \underbrace{b_j - a_j}_{\geq 0,\ j \geq J} \leq \underbrace{|a - a_j|}_{\xrightarrow[j\to\infty]{}0} + \underbrace{|b - b_j|}_{\xrightarrow[j\to\infty]{}0} \implies 0 < a - b \leq 0 \quad ↯$$

□

Definition 2.1.17 **(i)** $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *heißt* bestimmt divergent gegen $+\infty$, *d.h.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *falls*

$$\forall\ c > 0 \quad \exists\ j_0(c) \in \mathbb{N} \quad \forall\ j \geq j_0(c)\ :\ a_j > c\ .$$

(ii) $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *heißt* bestimmt divergent gegen $-\infty$, *d.h.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *falls*

$$\forall\ c > 0 \quad \exists\ j_0(c) \in \mathbb{N} \quad \forall\ j \geq j_0(c)\ :\ a_j < -c\ .$$

(iii) *Zahlenfolgen, die weder konvergent noch bestimmt divergent sind, heißen* unbestimmt divergent.

Bemerkung*: Unbeschränkte Folgen sind nicht notwendig bestimmt divergent, z.B. $a_n = (-1)^n n$.

Bemerkung*: <u>'Rechenregeln mit ∞'</u>

- $$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{j\to\infty} a_j &=& \pm\infty \\ \lim\limits_{j\to\infty} b_j &=& b \end{array}\right\} \quad \lim_{j\to\infty}(a_j \pm b_j) = \pm\infty, \qquad \lim_{j\to\infty}(a_j \cdot b_j) = \begin{cases} \pm\infty &, \quad b > 0 \\ \mp\infty &, \quad b < 0 \end{cases}$$

- $$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{j\to\infty} a_j &=& \pm\infty \\ \lim\limits_{j\to\infty} b_j &=& \pm\infty \end{array}\right\} \quad \lim_{j\to\infty}(a_j + b_j) = \pm\infty, \qquad \lim_{j\to\infty}(a_j \cdot b_j) = +\infty$$

- $$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{j\to\infty} a_j &=& +\infty \\ \lim\limits_{j\to\infty} b_j &=& -\infty \end{array}\right\} \quad \lim_{j\to\infty}(a_j \cdot b_j) = -\infty, \qquad \lim_{j\to\infty}\frac{1}{a_j} = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{b_j} = 0$$

Alle anderen Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ **,** $\frac{\infty}{\infty}$ **,** $\infty - \infty$ **und** $0 \cdot \infty$ **sind unbestimmt !**

Definition 2.1.18 **(i)** *Eine Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *heißt* monoton wachsend (fallend) *genau dann, wenn für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$a_{n+1} \geq a_n \qquad (a_{n+1} \leq a_n)$$

(ii) *Eine Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *heißt* streng monoton wachsend (fallend) *genau dann, wenn für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$a_{n+1} > a_n \qquad (a_{n+1} < a_n)$$

Satz 2.1.19 *Eine monotone Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. Insbesondere gilt:*

(i) *Sei* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann ist* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$

(ii) *Sei* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *monoton fallend und nach unten beschränkt, dann ist* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$

B e w e i s*: „$\Longrightarrow$“ sei (a_n) monoton und konvergent $\xRightarrow[\text{Satz 2.1.4 (ii)}]{}$ (a_n) beschränkt

„$\Longleftarrow$“ Sei (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt (nach unten durch a_1). Dann besitzt

$$M := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

nach Axiom V genau ein reelles Supremum, $a_0 := \sup M$, da $M \neq \emptyset$ und nach oben beschränkt ist.

<u>g.z.z.</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$

Sei $\varepsilon > 0$, $a_0 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad \Longrightarrow \quad \exists\ n_\varepsilon\ :\quad a_{n_\varepsilon} \in M, \quad a_{n_\varepsilon} > a_0 - \varepsilon$

$$(a_n) \text{ monoton wachsend} \implies \exists\, n_\varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon \;:\; a_n \geq a_{n_\varepsilon} > a_0 - \varepsilon$$
$$\implies \exists\, n_\varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon \;:\; |a_n - a_0| = a_0 - a_n < \varepsilon$$

analog: (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt $\implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ $\square$

$\boxed{\textbf{Beispiele}}$: **(i)** $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1 = 2$; zeigen: $(a_n)_n$ monoton fallend & nach unten beschränkt; klar: $a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$

- $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \frac{1}{2}\, 2\, \sqrt{a_n}\sqrt{\frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}$
- $a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \leq a_n \iff \frac{2}{a_n} \leq a_n \iff \sqrt{2} \leq a_n$ ✓ s.o.

$$\xRightarrow[\text{Satz 2.1.19}]{} \exists\, a = \lim_{n\to\infty} a_n \curvearrowright \underbrace{a_{n+1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} a} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} a+\frac{2}{a}} \iff a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \iff a = \sqrt{2}$$

(ii) Seien $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Man kann zeigen:

- $(a_n)_n$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt
- $(b_n)_n$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = e = 2.71828\ldots$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{j+1}\right)^{j+1}}{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{j+1}} = \left[\frac{j(j+2)}{(j+1)^2}\right]^{j+1} = \left(1 - \frac{1}{(j+1)^2}\right)^{j+1} \underset{\substack{\text{Lemma 1.1.3}\\ \text{Bernoulli-Ungl.}}}{\geq} 1 - (j+1)\frac{1}{(j+1)^2}$$
$$= \frac{j}{j+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j}}$$
$$\curvearrowright \left(1 + \frac{1}{j+1}\right)^{j+1} \geq \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j \iff a_{j+1} \geq a_j \curvearrowright (a_j)_j \text{ monoton wachsend}$$

analog: $(b_j)_j$ monoton fallend; zur Beschränktheit:

$$2 = \underbrace{(1+1)^1 \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \cdots \leq \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j}_{\text{monoton wachsend}} < \underbrace{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{j+1} < \cdots < (1+1)^2}_{\text{monoton fallend}} = 4$$

$$\xRightarrow[\text{Satz 2.1.19}]{} \exists\, E_1 = \lim_{j\to\infty} a_j,\quad \exists\, E_2 = \lim_{j\to\infty} b_j \xRightarrow[\text{Folg. 2.1.16}]{} E_1 \leq E_2, \quad \textit{n.z.z.: } E_1 = E_2$$

Sei $\varepsilon > 0 \curvearrowright \exists\, j_1 \quad \forall\, j \geq j_1 \;:\; |a_j - E_1| \underset{\sup}{=} E_1 - a_j < \varepsilon$

$$\exists\, j_2 \quad \forall\, j \geq j_2 \;:\; |b_j - E_2| \underset{\inf}{=} b_j - E_2 < \varepsilon$$

$$\curvearrowright |E_1 - E_2| \leq \underbrace{|E_1 - a_j|}_{<\varepsilon,\ j\geq j_1} + \underbrace{|a_j - b_j|}_{=a_j|1-(1+\frac{1}{j})|} + \underbrace{|b_j - E_2|}_{<\varepsilon,\ j\geq j_2} < 2\varepsilon + \underbrace{a_j}_{<4} \underbrace{\frac{1}{j}}_{\varepsilon,\ j\geq j_3} < 6\varepsilon$$

für $j \geq j_0 := \max\{j_1, j_2, j_3\}$, $\varepsilon > 0$ beliebig $\curvearrowright E_1 = E_2 =: e$

2.2 Reihen

2.2.1 Konvergenz und Divergenz

Definition 2.2.1 *Gegeben sei eine reelle oder komplexe Zahlenfolge* $(z_j)_{j=1}^{\infty}$.

(i) *Für* $m \in \mathbb{N}$ *heißt* $S_m = \sum_{j=1}^{m} z_j$ m-te Partialsumme *der unendlichen Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$.

(ii) *Die Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *heißt* konvergent *genau dann, wenn* $\lim_{m\to\infty} S_m$ *existiert und endlich ist. Man setzt dann*

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j := \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} z_j$$

Anderenfalls heißt die Reihe divergent.

(iii) *Die Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *heißt* absolut konvergent (divergent), *wenn die Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|$ *konvergiert (divergiert).*

Beispiele : **(1)** $a_j = q^j,\ |q|<1,\ j \in \mathbb{N}_0$ (mit $0^0 := 1$) :

$$S_m = \sum_{j=0}^{m} q^j = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$$ (Induktion), Bsp. (c) nach Satz 2.1.15 $\curvearrowright \lim_{n\to\infty} q^n = 0$

$$\curvearrowright \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \frac{1-q^{m+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}\,,$$ d.h. $$\boxed{\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}\,, \quad |q|<1}$$

<u>*geometrische Reihe*</u>

(2) $a_k = (-1)^k,\ k \in \mathbb{N}$:

$$S_m = \begin{cases} 0, & m \text{ gerade} \\ -1, & m \text{ ungerade} \end{cases} \curvearrowright |S_{m+1} - S_m| \equiv 1 \curvearrowright (S_m)_{m=1}^{\infty} \text{ nicht Cauchy-Folge}$$

$$\iff (S_m)_{m=1}^{\infty} \text{ nicht konvergent } \iff \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ divergent}$$

(3) $a_j = \frac{1}{j(j+1)}\,,\ j \in \mathbb{N}$: $$S_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = 1 - \frac{1}{m+1}$$

$$\curvearrowright \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j(j+1)} = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1 \quad \text{(abs.) konvergent}$$

Satz 2.2.2 **(i)** *Ist* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *konvergent, so gilt* $\lim_{k\to\infty} z_k = 0.$

(ii) *Ist* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *absolut konvergent, so ist* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *auch konvergent.*

(iii) $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *ist konvergent* $\iff$ $\sum_{j=1}^{\infty} \Re\mathrm{e}\, z_j$ *und* $\sum_{j=1}^{\infty} \Im\mathrm{m}\, z_j$ *sind konvergent*

(iv) $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *ist absolut konvergent* $\iff$ $\sum_{j=1}^{\infty} \Re\mathrm{e}\, z_j$ *und* $\sum_{j=1}^{\infty} \Im\mathrm{m}\, z_j$ *sind absolut konvergent.*

B e w e i s*: *früher* (Beweis Lemma 2.1.5) : $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a|+|b|) \le \sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|\,, \quad a,b \in \mathbb{R} \qquad (*)$

<u>zu (i)</u> : $|z_k| = |S_k - S_{k-1}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, da $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ konvergent $\xRightarrow[\text{Satz 2.1.12}]{} (S_k)_{k=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge

<u>zu (ii)</u> : $|S_k - S_m| = \left|\sum_{j=m+1}^{k} z_j\right| \le \sum_{j=m+1}^{k} |z_j| \le \left|S_k^{|\cdot|} - S_m^{|\cdot|}\right|$, mit $S_m^{|\cdot|} := \sum_{j=1}^{m} |z_j|$ und $k > m$

$\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ absolut konvergent $\iff \left(S_k^{|\cdot|}\right)_{k=1}^{\infty}$ konvergent $\xRightarrow[\text{Satz 2.1.12}]{} \left(S_k^{|\cdot|}\right)_{k=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge, d.h.

$|S_k - S_m| \le \left|S_k^{|\cdot|} - S_m^{|\cdot|}\right|$ impliziert $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ ist Cauchy-Folge, nach Satz 2.1.12 damit konvergent

<u>zu (iii)</u>: $$|S_k - S_m| = \sqrt{\Big(\sum_{j=m+1}^{k} \Re\mathrm{e}\, z_j\Big)^2 + \Big(\sum_{j=m+1}^{k} \Im\mathrm{m}\, z_j\Big)^2} \underset{(*)}{\le} \left|\sum_{j=m+1}^{k} \Re\mathrm{e}\, z_j\right| + \left|\sum_{j=m+1}^{k} \Im\mathrm{m}\, z_j\right|$$

$$\underset{(*)}{\le} \sqrt{2}\sqrt{\Big(\sum_{j=m+1}^{k} \Re\mathrm{e}\, z_j\Big)^2 + \Big(\sum_{j=m+1}^{k} \Im\mathrm{m}\, z_j\Big)^2} = \sqrt{2}\, |S_k - S_m|$$

d.h. $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge $\iff \Big(\sum_{j=1}^{k} \Re\mathrm{e}\, z_j\Big)_{k=1}^{\infty}, \Big(\sum_{j=1}^{k} \Im\mathrm{m}\, z_j\Big)_{k=1}^{\infty}$ Cauchy-Folgen $\xRightarrow[\text{Satz 2.1.12}]{}$ (iii)

<u>zu (iv)</u>: $\left|S_k^{|\cdot|} - S_m^{|\cdot|}\right| = \sum_{j=m+1}^{k} |z_j| \underset{(*)}{\le} \sum_{j=m+1}^{k} |\Re\mathrm{e}\, z_j| + \sum_{j=m+1}^{k} |\Im\mathrm{m}\, z_j| \underset{(*)}{\le} \sqrt{2}\left|S_k^{|\cdot|} - S_m^{|\cdot|}\right| \xRightarrow[\text{analog zu (iii)}]{}$ (iv) □

Bemerkung*:
- ausreichend, reelle Reihen zu betrachten
- Bedingung (i), d.h. $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$ <u>*notwendig*</u>, aber nicht *hinreichend* (z.B. Satz 2.2.4(i))

Folgerung 2.2.3 **(i)** *Sei* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *eine unendliche Reihe mit* $\lim_{k\to\infty} z_k \ne 0$. *Dann ist* $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ *divergent.*

(ii) *Die geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *ist genau dann konvergent, wenn* $0 \le |q| < 1$ *gilt.*

B e w e i s*: <u>zu (i)</u>: folgt aus Satz 2.2.2(i) und Definition 2.2.1(i)
<u>zu (ii)</u>: folgt aus Beispiel (1) und (i) (Kontraposition) □

Satz 2.2.4 **(i)** *Die <u>harmonische Reihe</u>* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *divergiert (absolut).*

(ii) *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *ist (absolut) konvergent.*

B e w e i s : <u>zu (i)</u> : Beispiel nach Folg. 2.1.13 $\curvearrowright (S_m)_{m=1}^{\infty}$ keine Cauchy-Folge, d.h. nicht konvergent
$\curvearrowright$ Reihe divergiert

<u>zu (ii)</u> : $S_{m+1} = S_m + \frac{1}{(m+1)^2} > S_m \curvearrowright (S_m)_{m=1}^{\infty}$ monoton wachsend,

$$S_m = 1 + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j^2} \le 1 + \underbrace{\sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j(j-1)}}_{\le \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)} = 1} \le 2 \curvearrowright (S_m)_m \text{ nach oben beschränkt} \xRightarrow[\text{Satz 2.1.19}]{} (S_m)_m \text{ konvergent}$$ □

Bemerkung*:

- in beiden Fällen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, aber in (i) Divergenz, in (ii) Konvergenz $\curvearrowright$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist *notwendig*, aber nicht *hinreichend* für die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
- Es gilt sogar: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ konvergiert (absolut) $\iff$ $\alpha > 1$

2.2.2 Konvergenzkriterien

Satz 2.2.5 (Majoranten- / Minoraten-Kriterium)
Gegeben seien zwei unendliche Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *, wobei ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiere, so dass für alle* $n \geq n_0$ *gelte :*

$$0 \leq a_n \leq b_n .$$

(i) *Aus der Konvergenz von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *folgt die Konvergenz von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) *Divergiert die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *, so divergiert auch* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beweis*: zu (i) : o.B.d.A. $m > k \geq n_0 \curvearrowright \left|S_m^{(a)} - S_k^{(a)}\right| = \sum\limits_{n=k+1}^{m} a_n \leq \sum\limits_{n=k+1}^{m} b_n = \left|S_m^{(b)} - S_k^{(b)}\right| < \varepsilon$ für $m, k \geq k_0(\varepsilon)$, da $\left(S_m^{(b)}\right)_{m=1}^{\infty}$ nach Voraussetzung konvergent ist $\Longrightarrow$ $\left(S_m^{(b)}\right)_{m=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge $\Longrightarrow$ $\left(S_m^{(a)}\right)_{m=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge $\xRightarrow[\text{Satz 2.1.12}]{}$ $\left(S_m^{(a)}\right)_{m=1}^{\infty}$ konvergent $\Longrightarrow$ (i)

zu (ii) : folgt aus (i) und *(Beweis-) Prinzip der Kontraposition* $\Big((A \Longrightarrow B) \iff (\neg B \Longrightarrow \neg A)\Big)$ □

Beispiele : **(a)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n-5}$ konvergent:

$$a_n = \frac{1}{n^2+2n-5} \leq \frac{1}{n^2} =: b_n, \ n \geq 3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{konvergent} \quad \text{(Satz 2.2.4(ii))}$$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5n^2}$ divergent:

$$b_n = \frac{4^n}{5n^2} \geq \frac{4^n}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n =: a_n, \ n \geq 4, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad \text{divergent} \quad \text{(Folg. 2.2.3(ii))}$$

Satz 2.2.6 (Wurzelkriterium)

(i) *Falls es Zahlen* $c > 0$ *und* q *mit* $0 < q < 1$*, gibt, so dass für alle* $n \geq n_0$ *gilt*

$$|a_n| \leq c\, q^n ,$$

so ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(ii) *Falls es ein* $c > 0$ *gibt, so dass für unendlich viele* n *gilt* $|a_n| \geq c$*, so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

(iii) *Falls der Grenzwert* $a = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *existiert, so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *für* $a < 1$ *absolut konvergent, und für* $a > 1$ *absolut divergent. Im Fall* $a = 1$ *kann keine Aussage getroffen werden.*

Beweis*: folgt aus Satz 2.2.5 und Beispiel 2.2 (1) (geometrische Reihe) □

Beispiel : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, z^n, \quad z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 1, \quad (z = 0$ klar)

$$a_n = nz^n \curvearrowright \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n|z|^n} = \sqrt[n]{n}|z| \xrightarrow[n\to\infty]{} |z| < 1 \underset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \text{ absolut konvergent}$$

$$\xrightarrow[\text{Satz 2.2.2(ii)}]{} \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \text{ konvergent },\quad |z| < 1 \xrightarrow[\text{Satz 2.2.2(i)}]{} \lim_{n\to\infty} nz^n = 0\,, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$$

Bemerkung*: $a = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \curvearrowright$ Konvergenz/Divergenz möglich, z.B. $\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} & \text{divergent} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} & \text{konvergent} \end{cases}$

Satz 2.2.7 (Quotientenkriterium)

Gegeben sei eine unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *mit* $a_n > 0$.

(i) *Existieren ein q mit $0 < q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\,,$$

dann ist die Reihe (absolut) konvergent.

(ii) *Gilt für alle $n \geq n_0$ ab einem gewissen $n_0 \in \mathbb{N}$*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\,,$$

so ist die Reihe (absolut) divergent.

(iii) *Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = a$ existiert, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut für $a < 1$, und sie divergiert absolut für $a > 1$. Im Fall $a = 1$ kann keine Aussage getroffen werden.*

Beweis*: zu (i) : $a_{n+1} \leq qa_n \leq q^2 a_{n-1} \leq \ldots \leq q^{n+1-n_0} a_{n_0} = \underbrace{q^{-n_0} a_{n_0}}_{:=c}\, q^{n+1}\,, \quad n \geq n_0$

$$0 < q < 1 \xrightarrow[\text{geom. Reihe}]{} \sum_{n=1}^{\infty} cq^n \text{ konvergent } \xrightarrow[\text{Satz 2.2.5}]{} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent}$$

zu (ii) : $a_{n+1} \geq a_n \geq \ldots \geq a_{n_0} > 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0 \xrightarrow[\text{Satz 2.2.2}]{} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

zu (iii) : folgt aus (i), (ii) und Definition von lim □

Beispiel : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}; \qquad z = 0 \curvearrowright \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1$

$$z \neq 0: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \curvearrowright \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ absolut konvergent für alle } z \in \mathbb{C}$$

Bemerkung*: $a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \curvearrowright$ Konvergenz/Divergenz möglich, z.B. $\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} & \text{divergent} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} & \text{konvergent} \end{cases}$

Satz 2.2.8 (Leibniz[15]-Kriterium)

Es sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *eine alternierende Reihe mit* $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *und* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *monoton fallend. Dann ist diese unendliche Reihe konvergent.*

Beweis*:

$$\begin{aligned} S_{2m} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots - a_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} \\ &= a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(a_{2m-2} - a_{2m-1})}_{\geq 0} - \underbrace{a_{2m}}_{>0} \leq a_1, \end{aligned}$$

außerdem : $S_{2m} = S_{2(m-1)} + \underbrace{a_{2m-1} - a_{2m}}_{\geq 0} \geq S_{2(m-1)}$

d.h. $(S_{2m})_{m=1}^{\infty}$ monoton wachsend, nach oben beschränkt $\xRightarrow[\text{Satz 2.1.19(i)}]{}$ $(S_{2m})_{m=1}^{\infty}$ konvergent,

$\exists\, s : s = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}$; andererseits ist $S_{2m+1} = \underbrace{S_{2m}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} s} + \underbrace{a_{2m+1}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 0} \curvearrowright \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = s$,

also ist $(S_m)_{m=1}^{\infty}$ konvergent $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergent □

Folgerung 2.2.9 *Die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.*

Beweis : folgt aus Sätzen 2.2.4(i) und 2.2.8 □

Bemerkung*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \approx 0.6931\ldots$

2.2.3 Addition, Umordnung und Multiplikation von Reihen

Satz 2.2.10 (Additionssatz)

Die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *seien konvergent und* $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$. *Dann ist* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ *konvergent, es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Beweis*: Seien $S_n^a := \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ und $S_n^b := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, dann folgt aus Satz 2.1.14

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda a_j + \mu b_j) = \lim_{n\to\infty}\left(\lambda\, S_n^a + \mu\, S_n^b\right) = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n^a + \mu \lim_{n\to\infty} S_n^b = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} a_j + \mu \sum_{j=1}^{\infty} b_j \qquad \square$$

[15] Gottfried Wilhelm von Leibniz (* 1.7.1646 Leipzig † 14.11.1716 Hannover)

Satz 2.2.11 **(i)** *Seien* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent und* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine Umordnung, d.h. eine Permutation der natürlichen Zahlen. Dann ist* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ *absolut konvergent, es gilt* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$.

(ii) (**Umordnungssatz von Riemann**[16])

Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent, aber nicht absolut konvergent, sowie* $s \in \mathbb{R}$ *beliebig. Dann existiert eine Umordnung* $\varphi_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi_s(n)} = s$.

Bemerkung*:

- (i) $\sim$ absolut konvergente Reihen sind beliebig umzuordnen mit Konvergenz gegen denselben Grenzwert $\dashrightarrow$ *unbedingt konvergent*
- (ii) $\sim$ im Falle 'nur' konvergenter Reihen falsch $\dashrightarrow$ *bedingt konvergent*

Beispiel: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots \xRightarrow[\text{Folg. 2.2.9}]{} \exists\, \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \frac{1}{2} \le \sigma \le 1$

aber z.B.:

- $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}) \pm \cdots$ konvergiert gegen $\frac{\sigma}{2}$
- $(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}) \pm \cdots$ konvergiert gegen $\frac{3\sigma}{2}$
- $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16}) \pm \cdots$ konvergiert gegen 0

Satz 2.2.12 (Cauchy-Produkt)

Die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *seien absolut konvergent. Dann gilt*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} a_{m-j} b_j \;.$$

Bemerkung*:

$$\begin{array}{lccccc}
 & a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots \\
 & a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
j+k=1 & a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
j+k=2 & a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
j+k=3 & & & \vdots & &
\end{array}$$

Produkte werden diagonal aufsummiert, alle unendlich vielen Terme $a_j b_k$ werden genau einmal erfasst

Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C} \xRightarrow[\text{Bsp. nach Satz 2.2.7}]{}$ absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\Big) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}\,\frac{w^{n-j}}{(n-j)!}}_{\text{Cauchy-Produkt}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \overbrace{\frac{n!}{j!(n-j)!}}^{\binom{n}{j}} z^j w^{n-j}}_{(z+w)^n,\ \text{Binom. Satz}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$$

[16] Georg Friedrich Bernhard Riemann (* 17.9.1826 Hannover † 20.7.1866 Selasca/Italien)

3 Reelle Funktionen

3.1 Polynome und rationale Funktionen

Definition 3.1.1 *Eine Abbildung* f, *die jedem* x *aus einer nicht-leeren Teilmenge* $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ *genau ein* $f(x) \in \mathbb{R}$ *zuordnet, nennt man eine auf* $D(f)$ *definierte* reelle Funktion, $f : D(f) \to \mathbb{R}$. $D(f)$ *heißt* Definitionsbereich *von* f, $W(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in D(f),\ y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}$ Wertebereich *von* f.

Beispiele :

- $g(x) = ax + b, \quad D(g) = \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}$ fest ... *lineare Funktion*
- $b(x) = |x|, \quad D(b) = \mathbb{R}$
- $s(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}, \ D(s) = \mathbb{R}$ ... *Größte-Ganze-Funktion*
- $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \quad D(\varphi) = [0, 1]$ ... *Dirichlet*[17]*-Funktion*
- $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $D(p) = \mathbb{R}$ ... (*reelles*) *Polynom*
  - $a_k \in \mathbb{C}$, $D(p) = \mathbb{C}$ $\curvearrowright$ *komplexes Polynom*
  - $a_n \neq 0$ $\curvearrowright$ $\deg(p) = n$ $\curvearrowright$ *Polynom* n*-ten Grades*
  - p, q Polynome $\curvearrowright$ $p \equiv q \iff \deg(p) = \deg(q),\ a_k = b_k,\ k = 0, \ldots, \deg(p)$
    $\deg(p \pm q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}, \quad \deg(p \cdot q) = \deg(p) \cdot \deg(q)$

Satz 3.1.2 (Fundamentalsatz der Algebra)
Ein Polynom n*-ten Grades* $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$, $\alpha_n \neq 0$, *besitzt genau* n *komplexe Nullstellen* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.
Es gilt

$$p(z) = \alpha_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \ .$$

Bemerkung*:

- hier ohne Beweis
- einige Nullstellen können übereinstimmen $\curvearrowright$ man kann $p(z)$ schreiben als

$$p(z) = \alpha_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_\ell)^{m_\ell} \quad \text{mit} \quad z_k \neq z_j \quad \text{für } k \neq j,\ m_j \in \mathbb{N}$$

$$\curvearrowright\ m_1 + \cdots + m_\ell = n \underset{m_j \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} \ell \leq n; \qquad m_j \ldots$$ *Vielfachheit* der Nullstelle $z_j \in \mathbb{C}$

- Seien $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, und $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$ $\curvearrowright$ $p(\overline{z_0}) = 0$:

$$\begin{aligned} p(z_0) = 0 = \overline{p(z_0)} &= \overline{a_n z_0^n + \cdots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{a_n}\, \overline{z_0}^n + \cdots + \overline{a_1}\, \overline{z_0} + \overline{a_0} \\ &\underset{\overline{a_k} = a_k \in \mathbb{R}}{=} a_n \overline{z_0}^n + \cdots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = p(\overline{z_0}) \end{aligned}$$

- *Linearfaktorzerlegung* (reeller) Polynome: $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $D(p) = \mathbb{R}$, mit $a_n \neq 0$:

$$p(x) = a_n (x - \xi_1)^{m_1} \cdots (x - \xi_k)^{m_k} \left(x^2 + c_1 x + d_1\right)^{r_1} \cdots \left(x^2 + c_l x + d_l\right)^{r_l} \ ,$$

$\xi_1, \ldots, \xi_k$ reelle Nullstellen, $z_1, \ldots, z_m$ (echte) komplexe Nullstellen mit $c_j = -2\Re\text{e}\, z_j$, $d_j = |z_j|^2$, $j = 1, \ldots, l$, sowie $m_1 + \cdots + m_k + 2(r_1 + \cdots + r_l) = n$

[17] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (* 13.2.1805 Düren † 5.5.1859 Göttingen)

Beispiel :

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 4x + 2 \\ &= 2\,(x-1)\underbrace{\left(x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1\right)}_{=:q_1(x)} && \xi_1 = 1 \ \text{ mit } \ p(\xi_1) = 0 \ \text{'erraten'}, \ q_1(x) \ \text{durch Polynomdivision} \\ &= 2\,(x-1)^2\underbrace{\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)}_{=:q_2(x)} && \xi_2 = 1 \ \text{ mit } \ q_1(\xi_2) = 0 \ \text{'erraten'}, \ q_2(x) \ \text{durch Polynomdivision} \\ &= 2\ (x-1)^2\ \left(x^2+1\right)^2 \\ \text{in } \mathbb{C}\ : p(x) &= 2\,(x-1)^2\,(x+i)^2\,(x-i)^2 \end{aligned}$$

Satz 3.1.3 (Identitätssatz für Polynome)

Stimmen die Werte zweier Polynome $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ *und* $q(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k z^k$ *vom Grad* $m \le n$ *auch nur an* $(n+1)$ *verschiedenen Stellen überein, so sind die Polynome identisch, d.h.* $\alpha_k = \beta_k$*,* $k = 0, \ldots, n$*.*

Beweis*: <u>*Annahme*</u> : Es existiert ein $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \le \ell \le n$, so dass $\alpha_\ell \ne \beta_\ell$ und $\alpha_k = \beta_k$ für $k > \ell$ gilt.

$$\Longrightarrow \quad r(z) := p(z) - q(z) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(\alpha_k - \beta_k)}_{=\,0,\ k\,>\,\ell} z^k = \sum_{k=0}^{\ell} (\alpha_k - \beta_k)\, z^k$$

Polynom vom Grad $\ell < n+1$ mit $n+1$ Nullstellen $\Longrightarrow$ Widerspruch zu Satz 3.1.2 □

Bemerkung*: $p(x)$ unbeschränkt auf $\mathbb{R}$:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)}_{m \le |\cdot| \le M,\ |x| \ge K}, \quad x \ne 0, \quad a_n \ne 0$$

$$\curvearrowright \ |p(x)| \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \infty, \text{ d.h. } p(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \begin{cases} \begin{cases} \infty, & a_n > 0, \\ -\infty, & a_n < 0 \end{cases} & \text{für } \deg(p) = n = 2m \\[2ex] \begin{cases} \pm\infty, & a_n > 0 \\ \mp\infty, & a_n < 0 \end{cases} & \text{für } \deg(p) = n = 2m+1 \end{cases}$$

Definition 3.1.4 *Seien* $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ *und* $q(x) = \sum\limits_{l=0}^{m} b_l x^l$ *Polynome, dann nennt man*

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{l=0}^{m} b_l x^l}, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\xi \in \mathbb{R} : q(\xi) = 0\}$$

eine rationale Funktion.

(i) *Eine (ℓ-fache) Nullstelle* $x_0 \in \mathbb{R}$ *des Zählerpolynoms* $p(x)$*, für die zusätzlich gilt* $q(x_0) \ne 0$*, heißt* (ℓ-fache) Nullstelle *der Funktion* f*.*

(ii) *Eine (m-fache) Nullstelle* $x^0 \in \mathbb{R}$ *des Nennerpolynoms* $q(x)$*, für die zusätzlich gilt* $p(x^0) \ne 0$*, heißt* (m-fache) Polstelle *der Funktion* f*.*

Bemerkung*:

- $f(x_0) = 0 \iff p(x_0) = 0,\ q(x_0) \neq 0$
- möglich: $f(x)$ beschränkt bzw. $f(x)$ unbeschränkt auf $D(f)$
- Sei $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ mit $\deg(p) \geq \deg(q) \xrightarrow[\text{Polynomdivision}]{} f$ zerlegbar in

$$f(x) = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \quad g(x) \ \ldots \ \textit{Polynom}, \quad r(x) \ \ldots \ \textit{Restpolynom}, \ \deg(r) < \deg(q)$$

3.2 Grenzwerte und Stetigkeit reeller Funktionen

Definition 3.2.1 *Gegeben sei eine Funktion* $y = f(x)$ *mit* $D(f)$.

(i) *Sei* $x_0 \in D(f)$. $f(x)$ *heißt* stetig in $x_0 \iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \quad \forall\, x \in D(f),\ |x - x_0| < \delta : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(ii) f *heißt* stetig auf $D(f)$, *falls* f *in jedem Punkt* $x_0 \in D(f)$ *stetig ist.*

(iii) f *heißt* gleichmäßig stetig auf $D(f) \iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, x \in D(f),\ |x - x_0| < \delta : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Bemerkung*: f gleichmäßig stetig auf $D(f) \curvearrowright f$ stetig auf $D(f)$; in (iii) δ unabhängig von x_0

Beispiele :

(1) $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, (gleichmäßig) stetig in $D(f) = \mathbb{R}$:

sei $x_0 \in D(f)$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ beliebig $\curvearrowright \forall\, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \overbrace{|f(y) - f(x_0)|}^{|c-c|=0} < \varepsilon$

(2) $f(x) = x^2$ stetig in $D(f) = \mathbb{R}$, nicht gleichmäßig stetig:

sei $x_0 \in D(f)$, $\varepsilon > 0$, suchen $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ mit

$$|y - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(y) - f(x_0)| = |y^2 - x_0^2| < \varepsilon$$

- $x_0 = 0$, $|y| < \delta \curvearrowright |f(y) - f(x_0)| = y^2 < \delta^2 \leq \varepsilon$ für $\delta \leq \sqrt{\varepsilon}$
- $x_0 \neq 0 \curvearrowright$ wählen zunächst $\delta \leq |x_0|$

$$\curvearrowright \ |y + x_0| = |y - x_0 + 2x_0| \leq |y - x_0| + 2|x_0| < \delta + 2|x_0| \leq 3|x_0|$$

$$\curvearrowright \ |y^2 - x_0^2| = \underbrace{|y + x_0|}_{<3|x_0|}\,\underbrace{|y - x_0|}_{<\delta} < 3|x_0|\delta \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad \delta \leq \frac{\varepsilon}{3|x_0|}$$

$$\curvearrowright \ \delta(\varepsilon, x_0) := \min\left(|x_0|, \frac{\varepsilon}{3|x_0|}\right)$$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D(f) = (0, 1] \Longrightarrow f$ stetig auf $D(f)$, nicht gleichmäßig stetig:

sei $x_0 \in D(f)$, $\varepsilon > 0$, suchen $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ mit

$$|y - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(y) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x_0 - y|}{|y|x_0} < \frac{\delta}{|y|x_0}, \qquad |y| \geq \Big||y - x_0| - |x_0|\Big| \geq x_0 - \delta \geq \frac{x_0}{2} \quad \text{für} \quad \delta \leq \frac{x_0}{2}$$

$$\curvearrowright \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x_0}\right| < \frac{\delta}{|y|x_0} \leq \frac{2\delta}{x_0^2} \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad \delta \leq \frac{\varepsilon x_0^2}{2} \quad \curvearrowright \ \delta(\varepsilon, x_0) := \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2}\varepsilon\right)$$

Beispiele : **(4)** $s(x) = \lfloor x \rfloor, \quad D(s) = \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad s$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$:

sei $x_0 \in D(s) = \mathbb{R} \curvearrowright \exists\, m \in \mathbb{Z}:\ m \leq x_0 < m+1 \curvearrowright s(x_0) = \lfloor x_0 \rfloor = m$

– $x_0 = m \in \mathbb{Z}$, z.z.: $\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, y_\delta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta):\ |s(x_0) - s(y_\delta)| \geq \varepsilon$

wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}$, sei $\delta > 0 \curvearrowright \exists\, y_\delta \in (x_0 - \delta, x_0) \curvearrowright |y_\delta - x_0| < \delta$,

$$|s(y_\delta) - s(x_0)| = |(m-1) - m| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$$

– $x_0 \notin \mathbb{Z}$, d.h. $m < x_0 < m+1 \curvearrowright$ wählen $\delta < \min(x_0 - m, m+1-x_0) < 1$

sei $|y - x_0| < \delta \curvearrowright m < x_0 - \delta < y < x_0 + \delta < m+1 \curvearrowright \lfloor y \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor = m$

$$\curvearrowright |s(x_0) - s(y)| = |m - m| = 0 < \varepsilon$$

(5) Dirichlet-Funktion $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \quad D(\varphi) = [0,1] \quad \Longrightarrow$ nirgends stetig:

z.z.: $\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, y_\delta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta):\ |\varphi(x_0) - \varphi(y_\delta)| \geq \varepsilon$

wählen $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, sei $\delta > 0$ beliebig, wählen

$$y_\delta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \begin{Bmatrix} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, & x_0 \in \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} \quad , & x_0 \notin \mathbb{Q} \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(x_0) - \varphi(y_\delta)| = 1 \geq \frac{1}{2}$$

Satz 3.2.2 *Eine Funktion f ist stetig in $x_0 \in D(f)$ genau dann, wenn für alle Folgen $(x_k)_k \subset D(f)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$.*

Beweis*: „$\Longrightarrow$“ : sei f stetig in x_0, $(x_k)_k$ Folge mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, z.z. : $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$

Sei $\varepsilon > 0 \curvearrowright \exists\, \delta > 0$

$\forall\, x \in D(f),\ 0 < |x - x_0| < \delta\ :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\exists\, k_0 = k_0(\delta) \quad \forall\, k \geq k_0\ :\ 0 < |x_k - x_0| < \delta$

$\curvearrowright \exists\, k_0 = k_0(\delta(\varepsilon)) \quad \forall\, k \geq k_0 : |f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$

„$\Longleftarrow$“ : *Kontraposition*, d.h.: f nicht stetig in $x_0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, (x_n)_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$

f nicht stetig in $x_0 \curvearrowright \exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x_\delta, |x_\delta - x_0| < \delta : |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

setzen $\delta_n = \frac{1}{n}$, $x_n = x_{\delta_n}$, $n \in \mathbb{N} \curvearrowright \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n,\ |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

$\curvearrowright \exists\, (x_n)_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\ |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon \iff \exists\, (x_n)_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$ $\square$

Definition 3.2.3 *Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ mit $D(f) = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Dann ist $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0 \iff$ Für alle Folgen $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset D(f)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = y_0$.*

Schreibweise : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0, \qquad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} y_0, \qquad f(x) \longrightarrow y_0$ für $x \to x_0$

Folgerung 3.2.4 *Die Funktion $f(x)$ ist in $x_0 \in D(f)$ stetig genau dann, wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.*

Einseitige Grenzwerte & Stetigkeit

Definition 3.2.5 *Gegeben seien eine Funktion* $f(x)$ *und* $\sigma > 0$.

(i) *Sei* $D(f) = [x_0, x_0 + \sigma)$. $f(x)$ *heißt* rechtsseitig stetig in x_0 $\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \quad \forall\, x \in D(f),\ x_0 < x < x_0 + \delta : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(ii) *Sei* $D(f) = (x_0 - \sigma, x_0]$. $f(x)$ *heißt* linksseitig stetig in x_0 $\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \quad \forall\, x \in D(f),\ x_0 - \delta < x < x_0 : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(i) *Sei* $D(f) = (x_0, x_0 + \sigma)$. $f(x)$ *besitzt einen* rechtsseitigen Grenzwert y_0 *in* x_0, $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = y_0$ $\Longleftrightarrow$
Für alle Folgen $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset D(f)$ *mit* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ *gilt* $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = y_0$.

(ii) *Sei* $D(f) = (x_0 - \sigma, x_0)$. $f(x)$ *besitzt einen* linksseitigen Grenzwert y_0 *in* x_0, $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = y_0$ $\Longleftrightarrow$
Für alle Folgen $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset D(f)$ *mit* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ *gilt* $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = y_0$.

Folgerung 3.2.6 *Gegeben sei eine Funktion* $f(x)$ *mit* $D(f) = (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ *für ein* $\sigma > 0$.

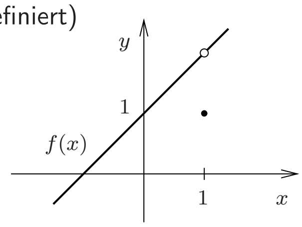
$$f(x) \text{ ist stetig in } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Unstetigkeiten: Sei $f(x)$, $D(f) \subset \mathbb{R}$, unstetig in x_0 $\xRightarrow[\text{Folg.3.2.4}]{}$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

(1) Hebbare Unstetigkeit, 'Lücke'

$\exists\, y_0 \in \mathbb{R} : \ \lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = y_0 \neq f(x_0)$ (bzw. $f(x_0)$ nicht definiert)

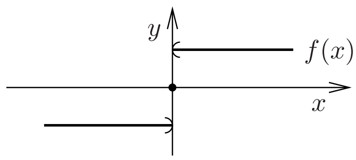
Beispiel : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases} \qquad x_0 = 1$



(2) Sprungstelle

$\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) \neq \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$, aber beide Grenzwerte existieren

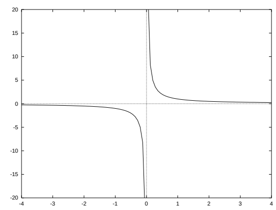
Beispiel : $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0$



(3) Polstelle

$\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$ und / oder $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$ streben gegen $\pm\infty$

Beispiel : $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$

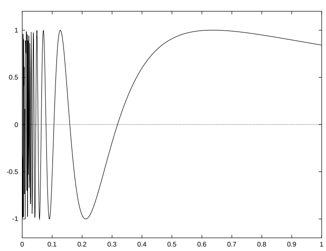


(4) wesentliche Singularität, Unstetigkeit 2. Art

$\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$ und / oder $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$ existieren nicht

Beispiel : $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $D(f) = (0, 1]$, $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} x_k &= \tfrac{1}{\pi k} && \Longrightarrow \quad f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \\ \xi_k &= \tfrac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} && \Longrightarrow \quad f(\xi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \\ \eta_k &= \tfrac{1}{2\pi k + \frac{3\pi}{2}} && \Longrightarrow \quad f(\eta_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} -1 \end{aligned}$$



3.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 3.3.1 *Es seien $f(x)$ und $g(x)$ mit $D(f) = D(g)$ gegeben, die in $x_0 \in D(f) = D(g)$ stetig sind.*

(i) *Sind $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, so ist $(\lambda f + \mu g)(x)$ in x_0 stetig.*

(ii) *Die Funktion $(fg)(x)$ ist in x_0 stetig.*

(iii) *Ist zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ in x_0 stetig.*

Beweis : folgt aus Sätzen 2.1.14 und 3.2.2 □

Folgerung 3.3.2 *Jedes Polynom $p(x)$, $D(p) = \mathbb{R}$, und jede rationale Funktion*

$$f(x) = \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k\, x^k}{\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\, x^\ell}\ , \qquad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x : \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\, x^\ell = 0 \right\}$$

sind auf ihren Definitionsgebieten stetig.

Bezeichnung: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $W(f) \subseteq D(g)$ $\curvearrowright$ $g \circ f : D(f) \to W(g)$, $x \mapsto g(f(x)) \ldots$ Verkettung/Komposition

Satz 3.3.3 *Seien f stetig in $x_0 \in D(f)$ und g mit $W(f) \subseteq D(g)$ stetig in $y_0 = f(x_0) \in D(g)$, so ist $g \circ f$ stetig in $x_0 \in D(g \circ f)$.*

Beweis*: sei $(x_n)_n \subset D(f)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \underset{\text{Satz 3.2.2}}{\overset{f \text{ stetig in } x_0}{\Longrightarrow}} \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

$$\underset{\text{Satz 3.2.2}}{\overset{g \text{ stetig in } f(x_0)}{\Longrightarrow}} \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0)) \underset{\text{Satz 3.2.2}}{\Longrightarrow} g \circ f \text{ stetig in } x_0$$ □

Satz 3.3.4 *Die Funktion $f(x)$ sei stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $D(f) = [a, b]$.*

(i) *Dann nimmt f auf $[a, b]$ sein Minimum und Maximum an, d.h.*

$$\exists\ x_*,\ x^* \in [a, b] : \quad f(x_*) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \qquad f(x^*) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Insbesondere ist $W(f) = \{f(x) :\ x \in [a, b]\}$ beschränkt.

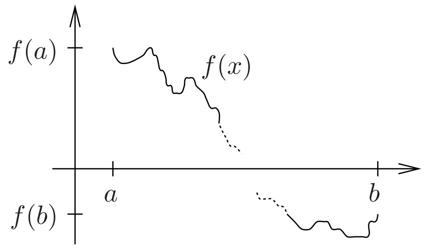
(ii) *Dann ist f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig.*

Bemerkung*: Alle Voraussetzungen in (i) sind wesentlich:

- $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, $D(f) = [0, 2]$ *nicht stetig:*
  $\sup\limits_{x\in[0,2]} (x - \lfloor x \rfloor) = 1$, aber $\nexists\ x^* \in [0, 2] : x^* - \lfloor x^* \rfloor = 1$
- $f(x) = \frac{1}{x}$, $D(f) = (0, 1] :$ $\sup\limits_{x\in(0,1]} \frac{1}{x} = +\infty$, aber $\forall\ x^* \in (0, 1] : \frac{1}{x^*} < \infty$
- $f(x) = x$, $D(f) = [0, 1) :$ $\sup\limits_{x\in[0,1)} x = 1$, aber $\forall\ x^* \in [0, 1) : x^* < 1$

Lemma 3.3.5 *Die Funktion $f(x)$ sei stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $D(f) = [a, b]$, und es gelte $f(a)f(b) < 0$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, für das $f(\xi) = 0$ gilt.*

B e w e i s*: Sei o.B.d.A. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, setzen $M = \{y \in [a,b]$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,y]\}$



$\curvearrowright$ $M \neq \emptyset$ $(a \in M)$, M beschränkt $(y \leq b)$

$\xRightarrow[\text{Axiom V}]{}$ $\exists\, \xi \in [a,b]:\ \xi = \sup M$

n.z.z. : (i) $f(\xi) = 0$

(ii) $\xi \in (a,b)$

zu (i): Annahme : $f(\xi) \neq 0$

$f(\xi) > 0 \xRightarrow[f \text{ stetig}]{} \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (\xi - \delta, \xi + \delta):\ f(x) > 0 \implies$ ξ nicht obere Schranke von M

$f(\xi) < 0 \xRightarrow[f \text{ stetig}]{} \exists\, \eta > 0 \quad \forall\, x \in (\xi - \eta, \xi + \eta):\ f(x) < 0 \implies$ ξ nicht kleinste obere Schranke von M

$\curvearrowright$ Widerspruch, d.h. $f(\xi) = 0$

zu (ii): $f(a)f(b) < 0 \implies f(a) \neq 0,\ f(b) \neq 0 \xRightarrow[\xi \in [a,b]]{f(\xi)=0} \xi \in (a,b)$ □

Satz 3.3.6 (Zwischenwertsatz)

Es sei I *ein Intervall (offen, halboffen, abgeschlossen) und* $f(x)$ *eine stetige Funktion mit* $D(f) = I$*. Ist* α *eine reelle Zahl mit*

$$\inf\{f(x) : x \in I\} < \alpha < \sup\{f(x) : x \in I\},$$

so gibt es mindestens einen Punkt $x_0 \in I$ *mit* $f(x_0) = \alpha$*.*

B e w e i s : Def. sup, inf $\curvearrowright$ $\exists\, x_1,\ x_2 \in I : \inf\{f(x) : x \in I\} \leq f(x_1) < \alpha < f(x_2) \leq \sup\{f(x) : x \in I\}$, o.B.d.A. sei $x_1 < x_2$, setzen

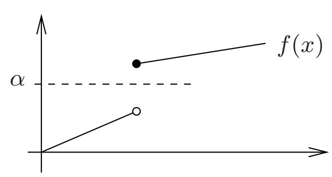
$$h(x) := f(x) - \alpha\,, \quad D(h) = [x_1, x_2],$$

$\curvearrowright$ $h(x)$ stetig, $h(x_1) < 0$, $h(x_2) > 0 \xRightarrow[\text{Lemma 3.3.5}]{} \exists\, x_0 \in (x_1, x_2):\ h(x_0) = 0 \curvearrowright \exists\, x_0 \in D(f):\ f(x_0) = \alpha$

□

Bemerkung*:

- *Beim Übergang von einem Wert zu einem anderen Funktionswert nimmt eine stetige Funktion jeden dazwischen liegenden Wert mindestens einmal an.*
- Ist $\{f(x) : x \in I\}$ nicht nach oben bzw. unten beschränkt, so setzt man $\sup\{f(x) : x \in I\} := +\infty$ bzw. $\inf\{f(x) : x \in I\} := -\infty$.
- Ist $f(x)$ nicht stetig, dann gilt Satz 3.3.6 i.a. nicht.



3.4 Umkehrfunktion

Ähnlich wie bei Matrizen ($\curvearrowright$ linearen Abbildungen) sucht man für $f : X \to Y$ die inverse bzw. Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ mit $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$.

Begriffe

- $f : D(f) \to Y$ heißt *surjektiv* ("von ... auf"), falls $Y = W(f)$, d.h. $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in D(f) : f(x) = y$
- $f : D(f) \to Y$ heißt *injektiv* (eineindeutig), falls $\forall\, x_1, x_2 \in D(f):\ f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$
- $f : D(f) \to Y$ heißt *bijektiv* $\iff$ f surjektiv & injektiv

sei $f : D(f) \to W(f)$ bijektiv $\curvearrowright$ $\forall\, y \in W(f)\ \exists\, !\, x \in D(f) : y = f(x)$, d.h. $x \leftrightarrow y = f(x)$ eineindeutig
$\curvearrowright$ $f^{-1} : W(f) \to D(f)$, $y \mapsto x = f^{-1}(y)$, $D(f^{-1}) = W(f)$ ... *Umkehrfunktion/inverse Funktion* zu f

Bemerkung*:

- $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in D(f)$, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$, $y \in W(f)$
- f bijektiv $\iff$ f^{-1} bijektiv, $D(f^{-1}) = W(f)$, $W(f^{-1}) = D(f)$
- $f : X \to Y$ bijektiv, $g : Y \to Z$ bijektiv $\curvearrowright$ $\exists\ (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X$

Definition 3.4.1 *Sei* $y = f(x)$ *mit* $D(f)$ *gegeben.*

(i) f *heißt* monoton wachsend (*bzw.* monoton fallend) *in* $(a,b) \subset D(f)$, *falls für alle* $x_1, x_2 \in (a,b)$ *gilt*

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2) \qquad \big(\textit{bzw. } f(x_1) \ge f(x_2)\big).$$

(ii) f *heißt* streng monoton wachsend (*bzw.* streng monoton fallend) *in* $(a,b) \subset D(f)$, *falls für alle* $x_1, x_2 \in (a,b)$ *gilt*

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \qquad \big(\textit{bzw. } f(x_1) > f(x_2)\big).$$

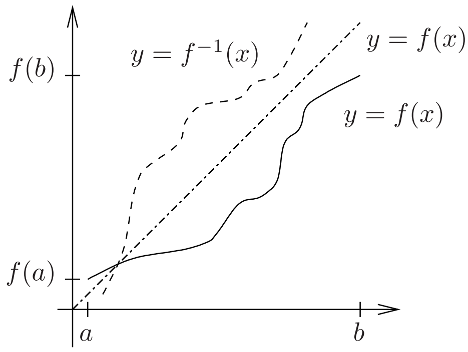
Das offene Intervall $(a,b) \subset D(f)$ *heißt* Monotonie-Intervall der Funktion f.

Ist f in (a,b) streng monoton, so ist sie eine eineindeutige Abbildung von $D(f) = (a,b)$ auf $W(f)$, es existiert also die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \longrightarrow (a,b)$.

Möchte man f^{-1} wieder als Funktion von x darstellen, so 'vertauscht man x- und y-Achse' (Spiegelung an $y = x$).

$$\begin{aligned} \Gamma_f &= \{(x,y) :\ y = f(x),\ x \in D(f)\} \quad \text{Graph von } f \\ &= \{(x,y) :\ x = f^{-1}(y),\ y \in W(f)\} \end{aligned}$$

$$(x, f(x)) \leftrightarrow \left(f^{-1}(y), y\right) \underset{\text{Spiegelung}}{\longrightarrow} \left(y, f^{-1}(y)\right) \underset{\text{Umbenennung}}{\longrightarrow} \left(x, f^{-1}(x)\right)$$



Bemerkung*: Sei f streng monoton wachsend und stetig auf $[a,b]$ $\underset{\text{Satz 3.3.6}}{\Longrightarrow}$ $W(f) = [f(a),\ f(b)]$.

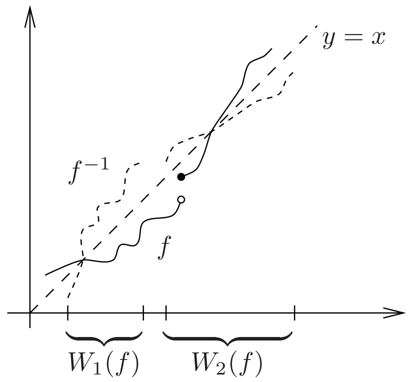
Satz 3.4.2 *Sei* f *streng monoton auf* $D(f) = (a,b)$ *und* $W(f) = \{y :\ y = f(x),\ x \in (a,b)\}$. *Dann existiert* $f^{-1}(y)$ *auf* $D\left(f^{-1}\right) = W(f)$ *und ist streng monoton und stetig.*

Bemerkung*: $f(x)$ muss auf $D(f) = (a,b)$ nicht stetig sein, kann aber aufgrund der Monotonie dort höchstens Sprünge (*als Unstetigkeiten*) besitzen,

$\curvearrowright$ $W(f) = W_1(f) \cup W_2(f) \cup \cdots \cup W_k(f)$,

und f^{-1} auf einzelnen Intervallen definiert,

$$D\left(f^{-1}\right) = W(f) = \bigcup_{m=1}^{k} W_m(f)$$



Beispiel : **(1)** *Umkehrfunktionen zu* $f(x) = x^2,\ D(f) = \mathbb{R}$

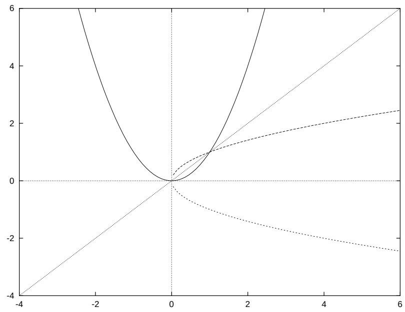
$D(f) = \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = x^2$ nicht eineindeutig

$\Longrightarrow \quad f^{-1}$ existiert nicht !

aber : $f_1(x) = x^2\ ,\quad D(f_1) = [0, \infty)$
streng monoton wachsend

$f_2(x) = x^2\ ,\quad D(f_2) = (-\infty, 0]$
streng monoton fallend

$\Longrightarrow \quad f_1^{-1},\ f_2^{-1}$ existieren



Umkehrfunktion von $f_1(x) = x^2,\ D(f_1) = [0, \infty)$

$W(f_1) = [0, \infty) \quad \Longrightarrow \quad x = f_1^{-1}(y) = \sqrt{y},\quad D\left(f_1^{-1}\right) = W(f_1) = [0, \infty)\ ,$ denn

$$\begin{array}{lllllll} \left(f_1^{-1} \circ f_1\right)(x) & = & f_1^{-1}\left(f_1(x)\right) & = & \sqrt{x^2} & = & x & \forall\ x \in [0, \infty) \\ \left(f_1 \circ f_1^{-1}\right)(y) & = & f_1\left(f_1^{-1}(y)\right) & = & \left(\sqrt{y}\right)^2 & = & y & \forall\ y \in [0, \infty) \end{array}$$

Umkehrfunktion von $f_2(x) = x^2,\ D(f_2) = (-\infty, 0]$

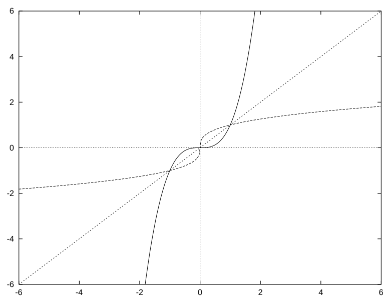
$W(f_2) = [0, \infty) \quad \Longrightarrow \quad x = f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y},\quad D\left(f_2^{-1}\right) = W(f_2) = [0, \infty)\ ,$ denn

$$\begin{array}{lllllllll} \left(f_2^{-1} \circ f_2\right)(x) & = & f_2^{-1}\left(f_2(x)\right) & = & -\sqrt{x^2} & = & -|x| & = & x & \forall\ x \in (-\infty, 0] \\ \left(f_2 \circ f_2^{-1}\right)(y) & = & f_2\left(f_2^{-1}(y)\right) & = & \left(-\sqrt{y}\right)^2 & = & \left(\sqrt{y}\right)^2 & = & y & \forall\ y \in [0, \infty) \end{array}$$

(2) *Umkehrfunktion zu* $f(x) = x^3,\ D(f) = \mathbb{R}$

$f(x) = x^3$ auf $D(f) = \mathbb{R}$ streng monoton wachsend
$\curvearrowright$ Umkehrfunktion f^{-1} existiert auf $W(f) = \mathbb{R}$:

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & ,\quad y \in [0, \infty) \\ -\sqrt[3]{-y} & ,\quad y \in (-\infty, 0] \end{cases}$$



$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(x^3\right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt[3]{x^3}\ , & x^3 \in [0, \infty) \\ -\sqrt[3]{-x^3}\ , & x^3 \in (-\infty, 0] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} x\ , & x \in [0, \infty) \\ -|x|\ , & x \in (-\infty, 0] \end{array} \right\}$$

$$= x\ ,\quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right)$$

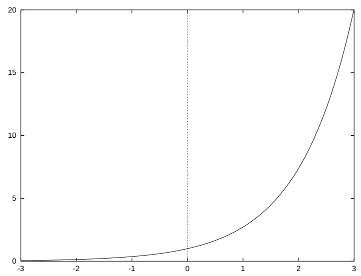
$$= \left\{ \begin{array}{ll} f\left(\sqrt[3]{y}\right)\ , & y \in [0, \infty) \\ f\left(-\sqrt[3]{-y}\right)\ , & y \in (-\infty, 0] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{lll} \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = & y\ , & y \in [0, \infty) \\ \left(-\sqrt[3]{-y}\right)^3 = & -(-y)\ , & y \in (-\infty, 0] \end{array} \right\}$$

$$= y\ ,\quad y \in \mathbb{R}$$

3.5 Elementare Funktionen

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad x \in \mathbb{R}, \quad D(\exp) = \mathbb{R}$$



$\exp(x), \quad x \in [-3,3]$

Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$: siehe Beispiel nach Satz 2.2.7

Eigenschaften der Exponentialfunktion

(1$_e$) $\underline{\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)}$: *Beispiel nach Satz 2.2.12*

(2$_e$) $\underline{\exp(0) = 1}$

(3$_e$) $\underline{\exp(x) \text{ stetig auf } \mathbb{R}}$:

sei $|y| < 1 \;:\; |\exp(y) - 1| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{y^k}{k!} \right| = |y| \lim\limits_{n\to\infty} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{y^{k-1}}{k!} \right| \le |y| \underbrace{\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!}}_{\le \exp(1)} \le \exp(1)|y| \qquad (*)$

sei $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \delta$, wählen $\delta < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{\exp(1)|\exp(x_0)|}\right)$

$$\xRightarrow[(*),\, y = x - x_0,\, (1_e)]{} |\exp(x) - \exp(x_0)| = |\exp(x_0)|\,|\exp(x - x_0) - 1| \le |\exp(x_0)| \underbrace{\exp(1)}_{>0} \underbrace{|x - x_0|}_{<\delta} < \varepsilon$$

(4$_e$) $\underline{\exp(x) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}}$:

Annahme: $-\quad \exists\, \xi \in \mathbb{R}: \; \exp(\xi) = 0 \underset{(1_e)}{\Longrightarrow} \forall\, x \in \mathbb{R} : \exp(x + \xi) = 0 \;\lightning\; (\exp(0) = 1)$

$-\quad \exists\, \eta \in \mathbb{R}: \; \exp(\eta) < 0 \underset{(1_e)}{\Longrightarrow} \exp(2\eta) = (\exp(\eta))^2 > 0 \xRightarrow[\text{Satz 3.3.6}]{} \exists\, \gamma : \; \exp(\gamma) = 0 \;\lightning$

(5$_e$) $\underline{\exp(x) \text{ streng monoton wachsend auf } \mathbb{R}}$:

Sei $\quad h > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exp(h) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = 1 + h + \underbrace{\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!}}_{>0} > 1 + h > 1$

Sei nun $\quad x < y \quad \Longrightarrow \quad h := y - x > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exp(y) = \exp(x + h) = \overbrace{\exp(x)}^{>0}\; \overbrace{\exp(h)}^{>1} > \exp(x)$

(6$_e$) $\underline{\exp(1) = e} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \notin \mathbb{Q} \quad \curvearrowright \quad \boxed{\exp(x) = e^x}$

(7$_e$) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty, \quad k \in \mathbb{N}_0 : \quad \frac{e^x}{x^k} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \frac{1}{x^k} = \frac{x}{(k+1)!} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

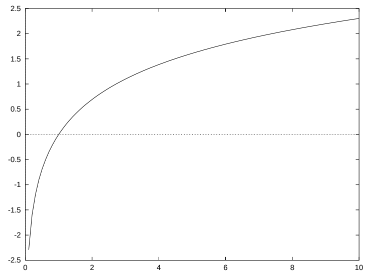
(8$_e$) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}\,, \quad x \in \mathbb{R} : \qquad 1 \underset{(2_e)}{=} \exp(0) \underset{(1_e)}{=} \exp(x)\, \exp(-x) = e^x\, e^{-x}$

(9$_e$) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k\, e^x = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0 : \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \left|x^k\, e^x\right| \underset{(4_e)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} |x|^k\, e^x = \lim\limits_{y\to\infty} y^k\, e^{-y} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^k}{e^y} \underset{(7_e)}{=} 0$

(10$_e$) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 : \qquad \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = 1 + \underbrace{\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}}_{\text{stetig, } \xrightarrow[x\to 0]{} 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$

$$\log x = \ln x = \exp^{-1}(x)\ , \quad x \in (0,\infty)$$



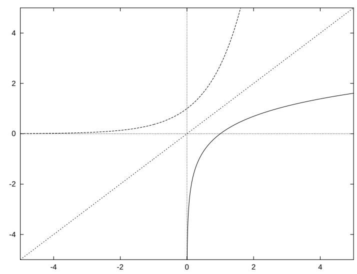
$\ln x, \quad x \in (0,10]$

Umkehrfunktion von $\exp(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$ $\curvearrowright$ nach Eigenschaft (5_e) wohldefiniert gemäß Abschnitt 3.4

$$\Longrightarrow \quad D(\ln x) = W(e^x) \underset{(4_e),(7_e),\,(9_e)}{=} (0,\infty)$$

Eigenschaften der Logarithmusfunktion

(1_ℓ) $\ln x$ ist auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend und stetig (*folgt aus Satz 3.4.2 und* (5_e))



$e^x \quad \& \quad \ln x$

(2_ℓ) $\underline{\ln(xy) = \ln x + \ln y}\ , \quad x,y > 0\ :$

$$\ln(xy) \ = \ \ln\big(\underbrace{e^{\ln x}\, e^{\ln y}}_{=e^{\ln x + \ln y}}\big) \ = \ \ln x + \ln y$$

(3_ℓ) $\underline{\ln 1 = 0}:\qquad \ln 1 = \ln e^0 = 0$

(4_ℓ) $\underline{\ln\left(x^k\right) \ = \ k\ \ln x}\ , \quad x > 0, \quad k \in \mathbb{Z}:$ *folgt aus* (2_ℓ), (3_ℓ)

(5_ℓ) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x \ = \ \infty:\ x \in D(\ln x) = W(e^x) \ \curvearrowright\ \exists\, y \in \mathbb{R}:\ x = e^y,$

$$\xRightarrow[(5_e),\,(7_e),\,(9_e)]{} \lim_{x\to\infty} \underbrace{\ln x}_{=y} \ = \ \lim_{e^y\to\infty} y \ = \ \lim_{y\to\infty} y \ = \ \infty$$

$\lim\limits_{x\downarrow 0} \ln x \ = \ -\infty$: analog

(6_ℓ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} \ = \ 1$: folgt analog aus (10_e)

Bemerkung*: Es gilt $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \ = \ e^x\ , \quad x \in \mathbb{R}\ :$

Sei $x \in \mathbb{R}$, setzen $a_n := 1 + \dfrac{x}{n} \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ = \ 1$

$$\curvearrowright\ 1 \underset{(6_\ell)}{=} \lim_{a_n\to 1} \frac{\ln a_n}{a_n - 1} \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \underset{(4_\ell)}{=} \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\curvearrowright\ \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \ = \ x, \quad \exp-\text{Funktion stetig}$$

$$\curvearrowright\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \ = \ \lim_{n\to\infty} \exp\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] \underset{\text{exp stetig}}{=} \exp\underbrace{\left[\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]}_{=x} \ = \ e^x$$

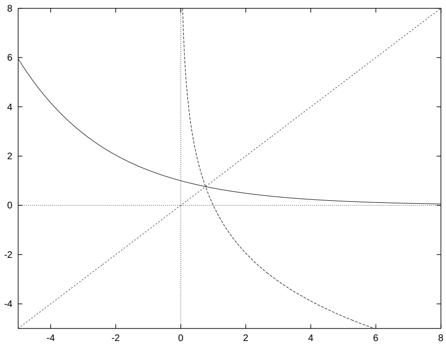
Die Funktionen a^x**,** $\log_a x$ **und** x^α

- $a > 0 \ \curvearrowright \quad a^x := e^{x\cdot\ln a}\ , \quad D(a^x) = \mathbb{R}$

$$\curvearrowright\ a^x \left\{\begin{array}{lcl} \text{streng monoton fallend} & , & a < 1 \\ \equiv\ 1 & , & a = 1 \\ \text{streng monoton wachsend} & , & a > 1 \end{array}\right\} \curvearrowright \text{ Umkehrfunktion existiert für } a > 0,\ a \neq 1$$

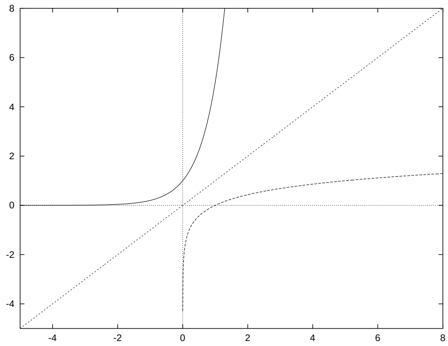
- Umkehrfunktion zu a^x für $a > 0,\ a \neq 1$: $\quad \log_a x, \quad D(\log_a) = (0,\infty)$
- $\alpha \in \mathbb{R} \ \curvearrowright \quad x^\alpha := e^{\alpha\cdot\ln x}, \quad D(x^\alpha) = (0,\infty)$

Bemerkung*: *Rechtfertigung der Schreibweise* : $\quad a^n \ = \ e^{n\cdot\ln a} \underset{(4_\ell)}{=} e^{\ln(a^n)} \ = \ a^n, \quad n \in \mathbb{N}$



$(a = 0.7)$

a^x & $\log_a x\,,\quad 0 < a < 1$



$(a = 5)$

a^x & $\log_a x\,,\quad a > 1$

Die Winkelfunktionen $\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}\,, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}\,, \quad D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$$

Konvergenz: verwenden Quotientenkriterium (Satz 2.2.7):

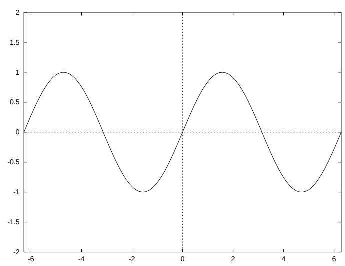
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{2n+3}(2n+1)!}{(2n+3)!|x|^{2n+1}} = \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{2n+2}(2n)!}{(2n+2)!|x|^{2n}} = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Eigenschaften von $\sin x,\ \cos x$:

($1_{\rm sc}$) $\sin 0 = 0, \quad \sin(-x) = -\sin x$

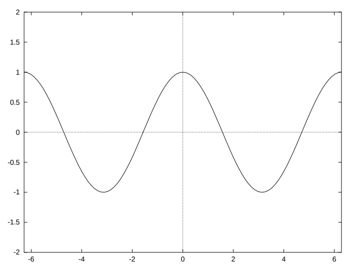
$\cos 0 = 1, \quad \cos(-x) = \cos x$



$\sin x, \quad x \in [-2\pi, 2\pi]$

($2_{\rm sc}$) *Additionstheoreme* (Herleitung mit Cauchy-Produkt, Satz 2.2.12)

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin x\cos x \\ \sin(x \pm y) &= \sin x\cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \curvearrowright\ \sin x - \sin y &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos x - \cos y &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \end{aligned}$$



$\cos x, \quad x \in [-2\pi, 2\pi]$

($3_{\rm sc}$) $1 \underset{(1_{\rm sc})}{=} \cos 0 = \cos(x-x) \underset{(2_{\rm sc})}{=} \cos^2 x + \sin^2 x$

$\curvearrowright\ |\sin x| \le 1, \quad |\cos x| \le 1$

($4_{\rm sc}$) $0 < \sin x < x < \dfrac{\sin x}{\cos x},\ 0 < x < 1$

($5_{\rm sc}$) $\sin x$, $\cos x$ stetig: o.B.d.A. $|x-y| < \delta \le 2$

$$\xRightarrow[(1_{\rm sc}),\ (2_{\rm sc}),\ (4_{\rm sc})]{} |\sin x - \sin y| = 2\underbrace{\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|}_{\le 1,\ (3_{\rm sc})}\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|}_{\le\left|\frac{x-y}{2}\right|,\ (4_{\rm sc})} \le |x-y| \quad \curvearrowright\ \sin x \quad \text{stetig}$$

$$|\cos x - \cos y| = 2\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|}_{\le 1,\ (3_{\rm sc})}\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|}_{\le\left|\frac{x-y}{2}\right|,\ (4_{\rm sc})} \le |x-y| \quad \curvearrowright\ \cos x \quad \text{stetig}$$

(6$_{\mathrm{sc}}$) *Nullstellen & Periodizität:* $\cos x > 0$ für $x < 1.4$, $\cos x < 0$ für $x > 1.6$

$$\xRightarrow[\text{Lemma 3.3.5}]{} \exists\, \xi, \quad 1.4 < \xi < 1.6 : \ \cos\xi = 0, \qquad \text{man setzt} \quad \boxed{\pi := 2\,\xi}$$

$\curvearrowright \ \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \ \underset{(3_{\mathrm{sc}})}{\Longrightarrow} \ \left|\sin\dfrac{\pi}{2}\right| = 1$, andererseits ist $\sin x > 0$ für $0 < x < 2 \ \curvearrowright \ \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

mit (2$_{\mathrm{sc}}$) folgt dann sukzessive :

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x\,, & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \\ \sin(x + \pi) &= -\sin x\,, & \cos(x + \pi) &= -\cos x \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x\,, & \cos(x + 2\pi) &= \cos x \end{aligned}$$

$\curvearrowright \ \sin x,\ \cos x$ sind 2π-periodisch

Nullstellen: $\cos x_0 = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}:\ x_0 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \sin x_0 = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : x_0 = k\pi$

(7$_{\mathrm{sc}}$) *Grenzwerte:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 : \quad \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}}_{|\cdot| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty}|x|^{2n} = \frac{|x|^2}{1-|x|^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

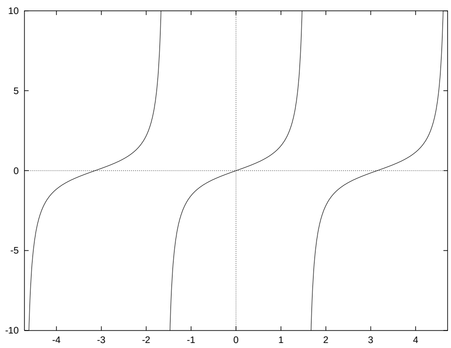
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} : \textit{analog}$$

Bemerkung*: analog zu $\mathbb{R}$ sind folgende Reihen konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$:

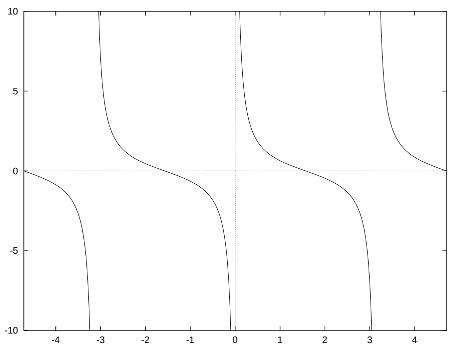
$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\,, \qquad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,z^{2n+1}, \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,z^{2n}$$

speziell : $z = iy, \quad y \in \mathbb{R}$ (d.h. $\Re\mathrm{e}\,(z) = 0$)

$$\begin{aligned} \curvearrowright \quad e^{iy} &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(iy)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{i^{2n}}_{(-1)^n}\frac{y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{i^{2n+1}}_{i(-1)^n}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,y^{2n}}_{\cos y} + i\,\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,y^{2n+1}}_{\sin y} \\ &= \cos y + i\,\sin y \qquad \textit{Eulersche Formel} \end{aligned}$$



$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}, \quad D(\tan) = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$



$$g(x) = \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}, \quad D(g) = \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Additionstheoreme ergeben sich aus Definition und (2$_{\mathrm{sc}}$)

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: seien $x, y \in D(\tan)$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\sin x \cos y \pm \sin y \cos x}{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y} = \frac{\sin x \cos y \pm \sin y \cos x}{\cos x \cos y(1 \mp \tan x \tan y)} = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Die Arcusfunktionen $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$

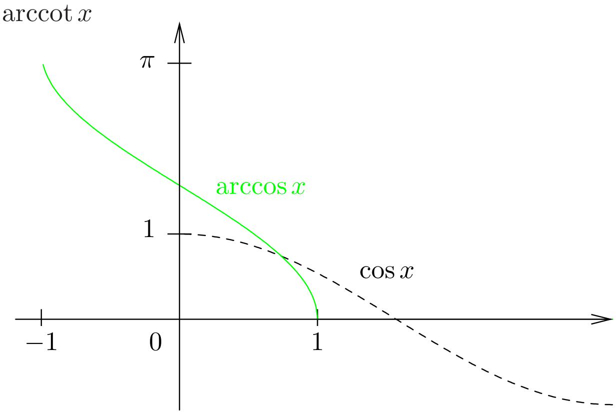
$f(x) = \cos x$ streng monoton fallend in $[0, \pi]$
$\curvearrowright$ f^{-1} existiert auf $W(f) = [-1, 1]$, setzen

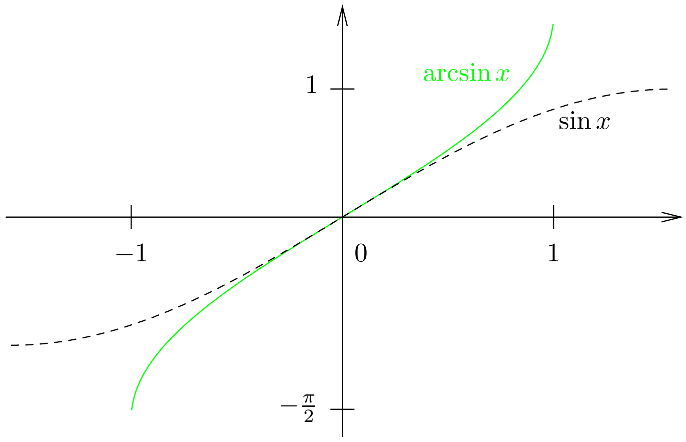
$$\arccos y := f^{-1}(y), \quad D(\arccos) = [-1, 1]$$

$\curvearrowright$ $\arccos y$ stetig, streng monoton fallend,

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0, \pi]$$

$$\cos(\arccos y) = y, \quad y \in [-1, 1]$$





$g(x) = \sin x$ streng monoton wachsend auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\curvearrowright$ g^{-1} existiert auf $W(g) = [-1, 1]$,

$$\arcsin y := g^{-1}(y), \quad D(\arcsin) = [-1, 1]$$

$\curvearrowright$ $\arcsin y$ stetig, streng monoton wachsend,

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\arcsin y) = y, \quad y \in [-1, 1]$$

$h(x) = \tan x$ streng monoton wachsend auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\curvearrowright$ h^{-1} existiert auf $W(h) = \mathbb{R}$

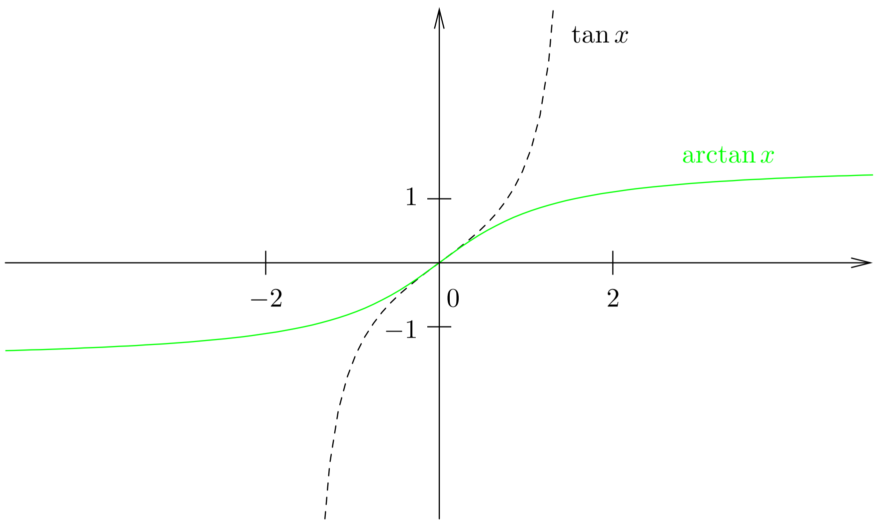
$$\begin{aligned} \arctan y &:= h^{-1}(y) \\ D(\arctan) &= \mathbb{R} \\ W(\arctan) &= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$\arctan y$ stetig, streng monoton wachsend,

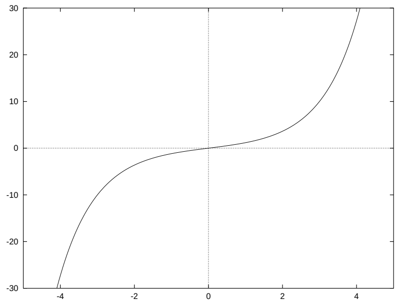
$$\arctan : \mathbb{R} \rightleftarrows \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

eineindeutig

später: wichtige Funktion !



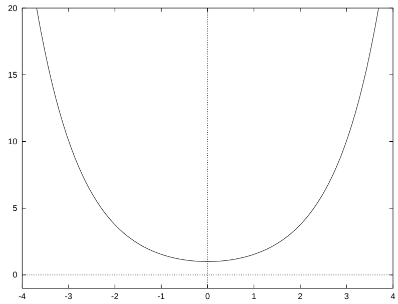
Die Hyperbelfunktionen $\sinh x,\ \cosh x,\ \tanh x,\ \coth x$



$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \cosh x \ + \sinh x \ &= e^x \end{aligned}$$

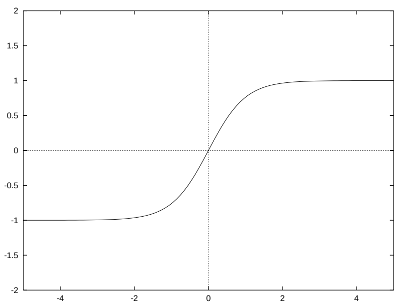
$$\begin{aligned} \cosh x &= \ \ \cosh(-x) \\ \sinh x &= -\sinh(-x) \end{aligned}$$

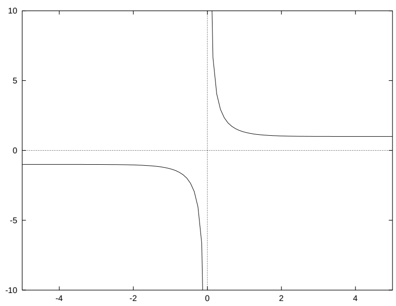
$$\vdots$$



$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ , \quad D(\sinh) = \mathbb{R}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ , \quad D(\cosh) = \mathbb{R}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$





$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$D(\tanh) = \mathbb{R}$$

$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$
$$D(\coth) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

4 Differentiation

4.1 Differenzierbarkeit

Definition 4.1.1 *Sei* $f(x)$ *eine reelle Funktion mit* $D(f) = (a, b)$ *und* $x_0 \in (a, b)$.

(i) $f(x)$ *ist in* x_0 differenzierbar *genau dann, wenn der Limes*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ *bzw.* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ *bezeichnet.*

(ii) $f(x)$ *heißt in* (a, b) differenzierbar, *falls* f *in jedem* $x_0 \in (a, b)$ *differenzierbar ist.*

Bemerkung*: äquivalente Schreibweise : $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Beispiele : **(1)** $f(x) = c, \ c \in \mathbb{R}, \ D(f) = \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} \equiv 0 \implies f'(x_0) \equiv 0$$

(2) $f(x) = x, \ D(f) = \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h) - x_0}{h} \equiv 1 \implies f'(x_0) \equiv 1$$

(3) $f(x) = x^n, \ n \in \mathbb{N}, \ D(f) = \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^k \, h^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^k \underbrace{\lim_{h \to 0} h^{n-1-k}}_{=0 \ , \ k<n-1} = \binom{n}{n-1} x_0^{n-1} = n \, x_0^{n-1}$$

Geometrische Interpretation

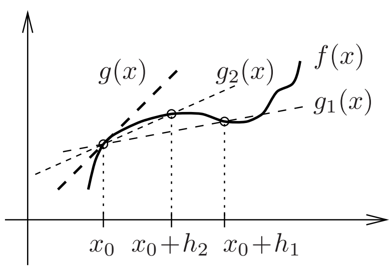
Sekantengleichung : $s(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} (x - x_0) + f(x_0)$

$h_1 > 0 \implies g_1(x)$, $h_2 > 0 \implies g_2(x) \ldots$

'Grenzlage' der Sekante für $h \to 0$ ⇢ Tangente

$$g(x) = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{=: \ f'(x_0)} (x - x_0) + f(x_0)$$

$$=: f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0)$$



$f(x)$ differenzierbar in $x_0 \curvearrowright f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

$$\curvearrowright \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)} - f'(x_0) \iff \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0}_{\text{Approximationseigenschaft von } g}$$

Lemma 4.1.2 *Seien $f(x)$ eine reelle Funktion mit $D(f) = (a,b)$ und $x_0 \in (a,b)$.*

(i) *f ist in x_0 differenzierbar genau dann, wenn ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt*

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x) \qquad \textit{mit} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0.$$

In diesem Fall ist $\alpha = f'(x_0)$.

(ii) *Ist f in x_0 differenzierbar, so ist $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ die einzige Gerade, die die Approximationseigenschaft $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0$ besitzt.*

Beweis*: zu (i): $\boxed{\Longrightarrow}$ Sei f differenzierbar in x_0, d.h. $f'(x_0)$ existiere, setzen $\alpha := f'(x_0)$

$$\curvearrowright\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{r(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sei $f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x) \ \curvearrowright\ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha + \underbrace{\dfrac{r(x)}{x - x_0}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0}$

$$\curvearrowright\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \ \text{ existiert, d.h. } f \text{ differenzierbar in } x_0,\ f'(x_0) = \alpha$$

zu (ii): α ist eindeutig bestimmt, $\alpha = f'(x_0)$:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r_\alpha(x) \\ f(x) &= f(x_0) + \beta(x - x_0) + r_\beta(x) \end{aligned}\right\} \curvearrowright\ \alpha - \beta = \underbrace{\frac{r_\alpha(x)}{x - x_0}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0} - \underbrace{\frac{r_\beta(x)}{x - x_0}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0} \ \curvearrowright\ \alpha = \beta \qquad \square$$

Lemma 4.1.3 *Sei $f(x)$ in $x_0 \in D(f)$ differenzierbar, $D(f) = (a,b)$. Dann ist $f(x)$ in x_0 stetig.*

Beweis : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{=0} + \lim_{x \to x_0} r(x) = f(x_0) + \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{=0} \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0}}_{=0} = f(x_0)$$

$\square$

Bemerkung*: *einseitige Differenzierbarkeit*

- f ist in x_0 *linksseitig differenzierbar*, falls der Limes existiert

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'_-(x_0)$$

- f ist in x_0 *rechtsseitig differenzierbar*, falls der Limes existiert

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'_+(x_0)$$

Für ein in x_0 stetiges f gilt: f ist differenzierbar in x_0 genau dann, wenn f in x_0 links- und rechtsseitig differenzierbar ist mit $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Beispiele : **(4)** $f(x) = |x|, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad x_0 = 0$:

$f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0) \quad \Longrightarrow \quad f(x)$ nicht differenzierbar in $x_0 = 0$ (aber stetig)

(5) $f(x) = e^x, \quad D(f) = \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1,\ (12_e)} = e^{x_0} = \frac{\mathrm{d}(e^x)}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

$$\curvearrowright \quad e^x = (e^x)' = \cdots = \frac{\mathrm{d}^m e^x}{\mathrm{d}x^m}, \qquad m \in \mathbb{N}$$

(6) $f(x) = \sin x, \quad D(f) = \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \sin(x_0) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0,\ (7_{sc})} + \cos(x_0) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1,\ (7_{sc})}$$

$$= \cos(x_0) = \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

Höhere Ableitungen

Sei $f(x)$ in $D(f) = (a,b) \subset \mathbb{R}$ differenzierbar $\curvearrowright$ $f'(x)$ existiert für alle $x \in (a,b)$, setzen

$$g_1(x) := f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x), \quad D(g_1) = D(f') = (a,b),$$

untersuchen Differenzierbarkeit von $g_1(x), \ x \in (a,b)$,

$$\curvearrowright \quad g_1'(x) = (f')'(x) =: f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x), \quad x \in (a,b),$$

Begriff der *zweimaligen Differenzierbarkeit* und *zweiten Ableitung*, ... Iteration

$$\curvearrowright \quad g_n(x) = f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in (a,b),$$

Begriff der *n-maligen Differenzierbarkeit* und *n-ten Ableitung* von f

Bezeichnung: f heißt (n*-mal*) *stetig differenzierbar*, falls die Funktion $f^{(n)}$ stetig ist, $n \in \mathbb{N}$

Bemerkung*: Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion muss nicht stetig sein.

Bsp. : $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

d.h. $f'(x)$ existiert überall, unstetig in $x_0 = 0$

Beispiel : geradlinige Bewegung eines Punktes entlang einer Strecke, Beginn zum Zeitpunkt t_0 in $s_0 = s(t_0)$, Position zum Zeitpunkt $t_1 > t_0 : s_1 = s(t_1)$ $\curvearrowright$ durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $\Delta t = t_1 - t_0$:

$$v = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Idee: momentane Geschwindigkeit $\sim$ kleine Zeitintervalle, $t_1 - t_0 \to 0$, d.h.

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_0) = \dot{s}(t_0) = v(t_0)$$

analog: momentane Beschleunigung, d.h. Geschwindigkeitsänderung $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} \rightsquigarrow$

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t_0) = \dot{v}(t_0) = \ddot{s}(t_0) = a(t_0)$$

4.2 Rechenregeln

Satz 4.2.1 *Die Funktionen* $f(x)$ *und* $g(x)$ *seien im Punkt* x_0 *differenzierbar. Dann gilt :*

(i) $(f \pm g)(x)$ *ist in* x_0 *differenzierbar,*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

(ii) $(fg)(x)$ *ist in* x_0 *differenzierbar, insbesondere gilt*

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0), \qquad \textit{sowie} \quad (\lambda f)'(x_0) = \lambda\, f'(x_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(iii) *Falls* $g(x_0) \neq 0$ *gilt, so ist* $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ *in* x_0 *differenzierbar, es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2},$$

insbesondere

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\,\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\;.$$

(iv) *Seien* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *und* $f(x_0) \neq 0$ *für* $k < 0$*. Dann ist* $f^k(x)$ *differenzierbar in* x_0*; es gilt*

$$\left(f^k\right)'(x_0) \;=\; k\; f^{k-1}(x_0)\; f'(x_0).$$

Beweis*:

<u>zu (i)</u> :
$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)}$$

<u>zu (ii)</u> :
$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \underbrace{f(x_0+h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)} \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} g'(x_0)} + g(x_0) \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)} \\ &\xrightarrow{h\to 0} f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)\end{aligned}$$

<u>zu (iii)</u> :
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{g(x_0)\; g(x_0+h)\; h} \\ &= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h}}_{-g'(x_0)} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0)\; g(x_0+h)}}_{\frac{1}{[g(x_0)]^2}} = -\,\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\end{aligned}$$

□

Beispiele :

- $f(x) = x^k,\ k \in \mathbb{Z}$: $\begin{cases} k \geq 1 & : \ D(f) = \mathbb{R}, \qquad\quad f'(x) = k\; x^{k-1} \\ k \leq 0 & : \ D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f'(x) = k\; x^{k-1} \end{cases}$

- $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2},\ \ D(f) = \mathbb{R}\ :\ f'(x) = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

Beispiele :

- $f(x) = \tan x,\ D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Folgerung 4.2.2 *Die rationalen Funktionen, die trigonometrischen Funktionen* $(\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x)$ *und die hyperbolischen Winkelfunktionen* $(\sinh x,\ \cosh x,\ \tanh x,\ \coth x)$ *sind auf ihrem Definitionsgebiet differenzierbar.*

Satz 4.2.3 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)
Sei $f(x)$ *auf* $D(f) = (a, b)$ *streng monoton, differenzierbar in* (a, b) *, und es gelte* $f'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$. *Dann ist auch die Umkehrfunktion* $f^{-1}(y)$, $D\left(f^{-1}\right) = W(f)$, *differenzierbar, und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \text{bzw.} \qquad f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}\ .$$

Beispiele :

- $f(x) = \sqrt[n]{x},\ \ n \geq 2,\ \ D(f) = (0, \infty)$:
$$f^{-1}(y) = y^n \curvearrowright \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{(y^n)'}\bigg|_{y=\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{n\ y^{n-1}}\bigg|_{y=\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}$$

- $f(x) = \ln x,\ \ D(f) = (0, \infty)$:
$$f^{-1}(y) = e^y \curvearrowright (\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'}\bigg|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^y}\bigg|_{x=e^y} = \frac{1}{x}$$

- $f(x) = \arcsin x,\ \ D(\arcsin) = (-1, 1)$:
$$f^{-1}(y) = \sin y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \curvearrowright \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}\ , \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (*)$$
$$\curvearrowright (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}\bigg|_{y=\arcsin x} = \frac{1}{\cos y}\bigg|_{x=\sin y} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}\bigg|_{x=\sin y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- $f(x) = \arctan x,\ \ D(\arctan) = (-\infty, \infty)$:
$$f^{-1}(y) = \tan y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\curvearrowright (\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'}\bigg|_{y=\arctan x} = \frac{1}{1 + \tan^2 y}\bigg|_{x=\tan y} = \frac{1}{1 + x^2}\ , \quad x \in \mathbb{R}$$

Satz 4.2.4 (Kettenregel)
Sei $f(x)$ *auf* $D(f) = (a, b)$ *differenzierbar mit der Ableitung* $f'(x)$, *sei* $g(t)$ *auf* $D(g) = (\alpha, \beta)$ *differenzierbar mit der Ableitung* $g'(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, *und es gelte* $W(g) \subset D(f)$. *Dann ist auch die Funktion* $(f \circ g)(t)$ *auf* $D(g) = (\alpha, \beta)$ *differenzierbar, wobei gilt*

$$(f \circ g)'(t) = \frac{\mathrm{d}(f \circ g)}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\bigg|_{x=g(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t) = f'(g(t))\, g'(t), \qquad t \in (\alpha, \beta).$$

Beispiele :

- $f(x) = a^x,\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}\ :\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) \;=\; \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{x\ln a}\right) = \underbrace{e^{x\ln a}}_{a^x}\underbrace{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln a)}_{\ln a} \;=\; \ln a\; a^x$

- $f(x) = x^\alpha,\ x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}\ :\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\alpha) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\alpha\ln x}\right) = \underbrace{e^{\alpha\ln x}}_{x^\alpha}\underbrace{(\alpha\ln x)'}_{\alpha\frac{1}{x}} \;=\; \alpha\; x^{\alpha-1}$

- $f(x) = x^x,\ x > 0\ :\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{x\ln x}\right) = x^x\left(\ln x + x\dfrac{1}{x}\right) \;=\; x^x\,(1+\ln x)$

4.3 Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Definition 4.3.1 *Eine Funktion* $f(x)$, $D(f) = (a,b)$, *hat in* $x_0 \in (a,b)$ *ein* lokales Maximum bzw. Minimum *genau dann, wenn eine Zahl* $\sigma > 0$ *existiert, so dass gilt.*

$$f(x) \le f(x_0) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \ge f(x_0) \qquad \text{für alle} \quad x \in (x_0-\sigma, x_0+\sigma) \subset (a,b)$$

f *besitzt in* $x_0 \in D(f)$ *ein* globales Maximum bzw. Minimum *genau dann, wenn für alle* $x \in D(f)$ *gilt*

$$f(x) \le f(x_0) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \ge f(x_0).$$

Lemma 4.3.2 *Sei* $f(x)$ *differenzierbar in* $x_0 \in D(f) = (a,b)$, *und* $f(x)$ *besitze in* x_0 *ein lokales Maximum bzw. Minimum. Dann gilt* $f'(x_0) = 0$.

Beweis*: o.B.d.A. habe $f(x)$ in x_0 ein lokales Maximum, d.h. $f(x) \le f(x_0)$, $x \in (x_0-\sigma, x_0+\sigma)$

f differenzierbar in x_0 $\underset{\text{Bem. nach Lemma 4.1.3}}{\Longrightarrow}$ $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

$$\left.\begin{array}{l}
x_0-\sigma < x < x_0 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \;\ge\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{\lim_{x\uparrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'_-(x_0)} \;\ge\; 0 \\[4ex]
x_0 < x < x_0+\sigma \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \;\le\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{\lim_{x\downarrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'_+(x_0)} \;\le\; 0
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
f'(x_0) \;=\; f'_+(x_0) \le 0 \\
\qquad\quad\;\, = f'_-(x_0) \ge 0 \\[2ex]
\Longrightarrow\; f'(x_0) = 0
\end{array}$$

□

Bemerkung*:

- Eine Funktion kann in x_0 ein lokales Extremum haben, ohne (dort) differenzierbar zu sein, z.B. hat $f(x) = |x|$ ein lokales Minimum in $x_0 = 0$.
- Aus $f'(x_0) = 0$ folgt noch nicht die Existenz eines lokalen Extremums, z.B. hat $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$ kein lokales Extremum, aber $f'(0) = 0$.

Satz 4.3.3 (Satz von Rolle[18])
Sei $f(x)$ *stetig auf* $[a,b]$ *und differenzierbar in* (a,b), *wobei zusätzlich* $f(a) = f(b) = 0$ *gelte. Dann existiert mindestens ein* $\xi \in (a,b)$, *für das* $f'(\xi) = 0$ *gilt.*

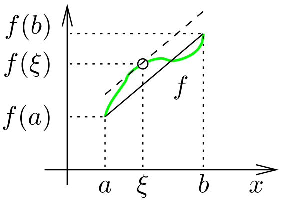
Beweis*: $f \equiv 0$ trivial, also o.B.d.A. $f \not\equiv 0$,

$$f \text{ stetig auf } [a,b] \underset{\text{Satz 3.2.2}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \exists\, x_* \in [a,b] & : \quad f(x_*) \;=\; \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \\ \exists\, x^* \in [a,b] & : \quad f(x^*) \;=\; \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \end{cases}$$

$f(a) = f(b) = 0$, $f \not\equiv 0 \implies$ es können nicht beide Punkte x_*, x^* Randpunkte sein, o.B.d.A. $x^* \in (a,b) \implies x^*$ ist lokales Maximum $\underset{\text{Lemma 4.3.2}}{\Longrightarrow} f'(x^*) = 0$, $\xi := x^*$. □

Satz 4.3.4 (Mittelwertsatz)
Sei $f(x)$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b). Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$, für das gilt

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \; .$$



Beweis: $h(x) := f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \curvearrowright h(x)$ stetig auf $[a,b]$, differenzierbar in (a,b), $h(a) = h(b) = 0$

$\underset{\text{Satz 4.3.3}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (a,b) : h'(\xi) = 0 \iff \exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

Beispiel: Für $x > 0$ gilt $\sin x < x$.

<u>1. Fall</u>: $x \geq 2\pi > 1 \curvearrowright \sin x \leq 1 < x$

<u>2. Fall</u>: $0 < x < 2\pi \curvearrowright$ *Beweis mit Satz 4.3.4*: $f(x) = \sin x \curvearrowright f(0) = 0$, f differenzierbar auf $\mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x$; setzen $a = 0$, $b = x$

$$\underset{\text{Satz 4.3.4}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (0,x) \; : \; \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos \xi \underset{0<\xi<x\leq 2\pi}{\Longrightarrow} \frac{\sin x}{x} < 1$$

Bemerkung*: Seien f und g stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b), mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$

$$\curvearrowright \exists\, \xi \in (a,b) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \qquad \textbf{verallgemeinerter Mittelwertsatz}$$

Folgerung 4.3.5 *Sei $f(x)$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b).*

(i) *Gilt $f'(x) \geq 0$ in (a,b), so ist f monoton wachsend auf (a,b) (bzw. streng monoton wachsend für $f'(x) > 0$).*

(ii) *Gilt $f'(x) \leq 0$ in (a,b), so ist f monoton fallend auf (a,b) (bzw. streng monoton fallend für $f'(x) < 0$).*

(iii) *Sei $f'(x) = 0$, $x \in (a,b)$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) \equiv c$ für alle $x \in (a,b)$ gilt.*

Beweis*: <u>zu (i), (ii)</u>: klar aus Definition und MWS; <u>zu (iii)</u>: seien $x_1, x_2 \in (a,b) \curvearrowright f$ erfüllt auf $[x_1,x_2]$ die Voraussetzungen von Satz 4.3.4 $\curvearrowright \exists\, \xi \in (x_1,x_2) : 0 = f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \curvearrowright f(x_2) = f(x_1)$ für beliebige $x_1, x_2 \in (a,b)$ □

Bemerkung*: Falls $f'(x)$ stetig ist in $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) \neq 0$, so existiert ein $\sigma > 0$, so dass f auf $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ streng monoton ist.

[18]Michel Rolle (* 21.4.1652 Ambert / Frankreich † 8.11.1719 Paris)

Satz 4.3.6 (Satz von L'Hospital[19])
Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetig auf $[a,b]$, differenzierbar in (a,b) mit $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ auf (a,b).

(i) *Sei $f(a) = g(a) = 0$. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so auch $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, es gilt*

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

(ii) *Sei $\lim\limits_{x \downarrow a} g(x) = \infty$. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so auch $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, es gilt*

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Beweis*: zu (i): $x \in (a,b)$, $\displaystyle \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \overbrace{f(a)}^{0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{0}} \underset{\text{verallg. MWS}}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \xrightarrow[a<\xi<x]{} \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \downarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

(ii) analog □

Bemerkung*:

- analoges Resultat für $\lim\limits_{x \uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$, $a = -\infty$, $b = \infty$ zulässig
- Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ so berechenbar, mit $x = e^{\ln x}$ auch 1^∞, 0^0, ∞^0

Beispiele :

- $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} \underset{\text{Satz 4.3.6}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{n x^{n-1}}{1} = n, \quad n \in \mathbb{N}$
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \underset{\text{Satz 4.3.6}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \underset{\text{Satz 4.3.6}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$
- $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} \underset{\text{Satz 4.3.6}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$
- $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln x} \underset{\text{Satz 4.3.6}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1/x} = \infty, \qquad \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{\ln x} \underset{\text{Satz 4.3.6}}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{1/x} = 0$
- $\displaystyle \lim_{x \downarrow 0} x^x \underset{\exp \text{ stetig}}{=} \exp\left(\lim_{x \downarrow 0} x \ln x\right) = \exp \underbrace{\left(\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)}_{0,\text{Satz 4.3.6}} = 1 \curvearrowright$ Rechtfertigung für $0^0 := 1$

4.4 Kurvendiskussion

Für eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sollte man (u.a.) folgende Eigenschaften untersuchen:

(K1) Definitionsbereich $D(f)$, Wertebereich $W(f)$ ermitteln

(K2) Untersuchung auf Stetigkeit, (Typ der) Unstetigkeitsstellen, Differenzierbarkeit

(K3) Monotonie-Verhalten ermitteln, gegebenenfalls mittels $f'(x)$ (Folg. 4.3.5)

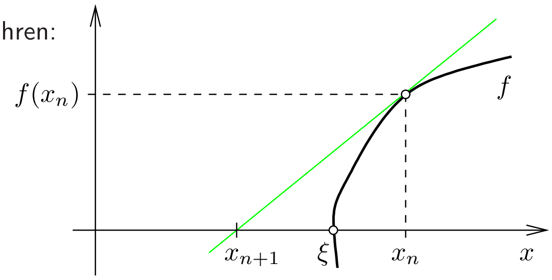
(K4) asymptotisches Verhalten „an den Rändern" von $D(f)$ bzw. bei $\pm\infty$ (und gegebenenfalls in der Nähe der Polstellen) untersuchen

[19] Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital (* 1661 † 1704)

(K5) Nullstellen bestimmen, z.B. mittels *Newton*[20]-Verfahren:

seien f stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ in $[a,b]$, $x_1 \in [a,b]$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$



Satz 4.4.1 *Sei f zweimal stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und $f'(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$. Seien $x_1 \in [a,b]$ und*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin gelte

$$\alpha = \max_{x\in[a,b]} \frac{|f(x)f''(x)|}{(f'(x))^2} < 1.$$

(i) *Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$, $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

(ii) *ξ ist die einzige Nullstelle von f in $[a,b]$, $f(\xi)=0$.*

(iii) *Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt die Fehlerabschätzung: $|x_{n+1} - \xi| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\,|x_2 - x_1|$.*

Beweis*: zu (i): sei $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $\curvearrowright$ $x_{n+1} = g(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, g stetig differenzierbar mit

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \underset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} |g'(x)| \leq \alpha < 1, \ x \in [a,b]$$

seien $x, y \in [a,b]$ beliebig $\underset{\text{MWS}}{\Longrightarrow}$ $|g(x) - g(y)| = |x-y|\,\underbrace{|g'(u)|}_{\leq\alpha} \leq \alpha|x-y|$

seien nun $x_1 \in [a,b]$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt

$$\curvearrowright \ |x_{k+1} - x_k| = |g(x_k) - g(x_{k-1})| \underset{\text{s.o.}}{\leq} \alpha\,|x_k - x_{k-1}| \leq \cdots \leq \alpha^{k-1}\,|x_2 - x_1|,$$

also gilt für $j > \ell$,

$$|x_j - x_\ell| \leq \sum_{k=\ell}^{j-1} |x_{k+1} - x_k| \leq \sum_{k=\ell}^{j-1} \alpha^{k-1}\,|x_2 - x_1| = |x_2 - x_1| \sum_{i=0}^{j-\ell-1} \alpha^{\ell+i-1}$$

$$\leq \alpha^{\ell-1}\,|x_2 - x_1| \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i}_{=\frac{1}{1-\alpha}} = \underbrace{\frac{\alpha^{\ell-1}}{1-\alpha}}_{\xrightarrow[\ell\to\infty]{}0} |x_2 - x_1|$$

$$\curvearrowright \ |x_j - x_\ell| \xrightarrow[j,\ell\to\infty]{} 0 \iff (x_j)_{j=1}^\infty \ \text{Cauchy-Folge} \underset{\text{Satz 2.1.12}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in [a,b] : \lim_{k\to\infty} x_k = \xi$$

zu (ii): g stetig, $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$ $\underset{\text{Folg. 3.2.4}}{\Longrightarrow}$ $\lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(\xi) \iff \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = g(\xi)$

$$\iff \xi = g(\xi) \iff f(\xi) = 0$$

n.z.z. : Eindeutigkeit, *Annahme*: $\exists\, \xi \neq \eta$: $f(\xi) = f(\eta) = 0 \iff \xi = g(\xi), \quad \eta = g(\eta)$

$\curvearrowright$ $0 < |\xi - \eta| = |g(\xi) - g(\eta)| \leq \alpha\,|\xi - \eta|$ ↯ Widerspruch zu $\alpha < 1$

[20]Sir Isaac Newton (* 4.1.1643 Woolsthorpe/England † 31.3.1727 London)

zu (iii): Abschätzung der 'Güte' der Approximation im $(n+1)$-ten Schritt :

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-\xi| &\le |x_{n+1}-x_{n+2}|+|x_{n+2}-\xi| \le \alpha^n\,|x_2-x_1|+|g(x_{n+1})-\underbrace{g(\xi)}_{=\xi}|\\ &\le \alpha^n\,|x_2-x_1|+\alpha\,|x_{n+1}-\xi|\\ \curvearrowright\ |x_{n+1}-\xi| &\le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,|x_2-x_1|\end{aligned}$$

□

Beispiel : $f(x)=x^2-2,\ D(f)=[1,2]$ (*klar:* $\xi=\sqrt{2}$)

$$f(1)=-1<0,\ \ f(2)=2>0 \xRightarrow[\text{Lemma 3.3.5}]{} \exists\,\xi\in(1,2):\ f(\xi)=0$$

$$\alpha=\max_{x\in[1,2]}\frac{|f(x)f''(x)|}{(f'(x))^2}=\max_{x\in[1,2]}\frac{\left|2(x^2-2)\right|}{4x^2}=\max_{x\in[1,2]}\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{2}<1$$

$$f'(x)=2x>0 \xRightarrow[\text{Newton}]{} x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right) \xRightarrow[\text{Bsp., Satz 2.1.19}]{} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}=\xi$$

z.B. $x_1=1 \ \curvearrowright\ x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1-\dfrac{-1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$$\curvearrowright\ |x_{n+1}-\xi| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_2-x_1|=\frac{(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}}\left|\frac{3}{2}-1\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^n,\quad n\in\mathbb{N}$$

Bemerkung*: verbesserte Approximation: $|x_{n+1}-\xi|=|g(x_n)-g(\xi)|\le\alpha|x_n-\xi|\le\cdots\le\alpha^n|x_1-\xi|$

(K6) lokale Extrema

bisher : notwendige Bedingung (Lemma 4.3.2): f differenzierbar habe in x_0 lokales Extremum $\curvearrowright\ f'(x_0)=0 \rightsquigarrow$ hinreichende Bedingung ?

Satz 4.4.2 *Sei f n-mal differenzierbar auf (a,b), $n\ge 2$, und für $x_0\in(a,b)$ gelte*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

(i) *Ist n gerade, so besitzt f in x_0 ein lokales Extremum, und zwar*

- *ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0)>0$ bzw.*
- *ein lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x_0)<0$ gilt.*

(ii) *Ist n ungerade, so besitzt f in x_0 kein lokales Extremum, sondern einen* Sattelpunkt.

Bemerkung*:

- Sei $f'(x_0)=0$.
  - $f''(x_0)>0 \ \curvearrowright\ f$ hat in x_0 ein lokales Minimum
  - $f''(x_0)<0 \ \curvearrowright\ f$ hat in x_0 ein lokales Maximum
  - $f''(x_0)=0,\ f'''(x_0)\neq 0 \ \curvearrowright\ f$ hat in x_0 Sattelpunkt, kein lokales Extremum
- *früher:* f kann lokales Extremum in x_0 haben, ohne dort differenzierbar zu sein, z.B. $f(x)=|x|$ in $x_0=0$
- Satz 4.4.2 gibt (nur) *hinreichendes Kriterium* für lokale Extrema an, z.B.

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{x^2}} & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{array}\right\} \Longrightarrow f^{(n)}(0)=0,\quad n\in\mathbb{N},$$

$\curvearrowright$ Satz 4.4.2 nicht anwendbar, aber f hat lokales Minimum in $x_0=0$

(K7) globale Extrema: aus **(K4)** und **(K6)** ableitbar

(K8) Krümmungsverhalten: konvexe/konkave Funktionen, Wendepunkte

Definition 4.4.3 *Sei f mit $D(f)$ gegeben.*

(i) *f heißt auf $(a, b) \subset D(f)$* konvex, *falls für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 \neq x_2$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

(ii) *f heißt auf $(a, b) \subset D(f)$* konkav, *falls für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 \neq x_2$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt*

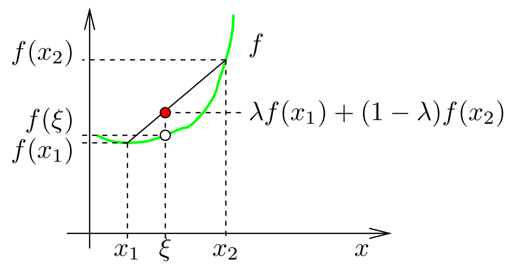
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

(iii) *f heißt* streng konvex *bzw.* streng konkav, *falls die Ungleichungen strikt sind.*

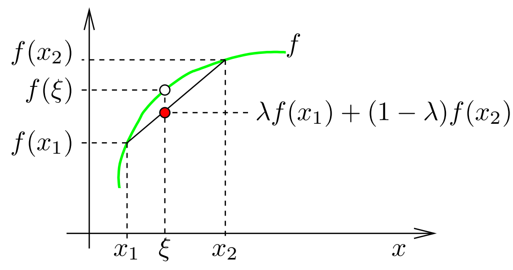
(iv) *Sei f stetig. Dann heißt $x_0 \in D(f)$* Wendepunkt *von f, falls ein Intervall $(\alpha, \beta) \subset D(f)$ mit $x_0 \in (\alpha, \beta)$ existiert, so dass eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:*

- *f ist in (α, x_0) konvex und in (x_0, β) konkav,*
- *f ist in (α, x_0) konkav und in (x_0, β) konvex.*

Bemerkung*: seien $\lambda \in (0, 1)$, $a < x_1 < x_2 < b \curvearrowright \xi = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in (a, b)$



f konvex $\iff f(\xi) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$



f konkav $\iff f(\xi) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

Beispiele: **(a)** $f(x) = \alpha x + \beta \curvearrowright f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ für alle $\lambda \in (0, 1)$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \curvearrowright f$ konvex und konkav auf $\mathbb{R}$ (aber nirgends *streng* konvex/konkav)

(b) $f(x) = x^2$ streng konvex auf $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= \lambda(x_1^2 - x_2^2) + x_2^2 - (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 \\ &= \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 > 0\end{aligned}$$

Satz 4.4.4 (Konvexitätskriterium) *Sei f in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar.*

(i) *f ist in (a, b) genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton wächst in (a, b).*

Ist f in (a, b) zweimal differenzierbar, so ist f (streng) konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ (bzw. $f''(x) > 0$) für $x \in (a, b)$ gilt.

(ii) *f ist in (a, b) genau dann (streng) konkav, wenn f' (streng) monoton fällt in (a, b).*

Ist f in (a, b) zweimal differenzierbar, so ist f (streng) konkav genau dann, wenn $f''(x) \leq 0$ (bzw. $f''(x) < 0$) für $x \in (a, b)$ gilt.

(iii) *Ist f in (a, b) zweimal stetig differenzierbar und x_0 ein Wendepunkt von f, so gilt $f''(x_0) = 0$.*

Beispiel: **(a)** $f(x) = \alpha x + \beta \curvearrowright f''(x) \equiv 0 \curvearrowright f(x) = \alpha x + \beta$ konvex & konkav auf $\mathbb{R}$

(b) $f(x) = x^2 \curvearrowright f''(x) \equiv 2 > 0 \curvearrowright f(x) = x^2$ streng konvex auf $\mathbb{R}$

(c) $f(x) = \sqrt{x} \curvearrowright f''(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}} < 0 \curvearrowright f(x) = \sqrt{x}$ streng konkav auf $\mathbb{R}_+$

(d) $f(x) = e^x \curvearrowright f''(x) = e^x > 0 \curvearrowright f(x) = e^x$ streng konvex auf $\mathbb{R}$

(e) $f(x) = \ln x \curvearrowright f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \curvearrowright f(x) = \ln x$ streng konkav auf $\mathbb{R}_+$

Bemerkung*: f muss in x_0 nicht differenzierbar sein, z.B. ist $f(x) = \begin{Bmatrix} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{Bmatrix}$ nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, hat aber dort Wendepunkt

(K9) Symmetrieeigenschaften

Definition 4.4.5 **(i)** *Der Graph einer Funktion f heißt* achsensymmetrisch *zur Gerade $x = a \in \mathbb{R}$, falls*

$$f(2a - x) = f(x), \quad x \in D(f).$$

Insbesondere heißt f gerade, *wenn ihr Graph achsensymmetrisch zu $x = 0$ ist, d.h. falls gilt*

$$f(-x) = f(x), \quad x \in D(f).$$

(ii) *Der Graph einer Funktion f heißt* punktsymmetrisch *zum Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, wenn gilt*

$$f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x), \quad x \in D(f).$$

Insbesondere heißt f ungerade, *wenn ihr Graph punktsymmetrisch zu $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ist, d.h. falls gilt*

$$f(-x) = -f(x), \quad x \in D(f).$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2 - 1} + 1$

- $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm - 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty), \quad W(f)$ später
- stetig auf $D(f)$, dort auch beliebig oft differenzierbar
- Asymptotik: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{e^{-x}}{x^2 - 1} + 1 \right) = 1, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{e^{-x}}{x^2 - 1} + 1 \right) = \infty$

  Annäherung an Polstellen $x_{P,1} = -1, \; x_{P,2} = 1$:

$$\lim_{x\downarrow 1} \left(\frac{e^{-x}}{x^2 - 1} + 1 \right) = \infty, \qquad \lim_{x\uparrow 1} \left(\frac{e^{-x}}{x^2 - 1} + 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x\downarrow -1} \left(\frac{e^{-x}}{x^2 - 1} + 1 \right) = -\infty, \qquad \lim_{x\uparrow -1} \left(\frac{e^{-x}}{x^2 - 1} + 1 \right) = \infty$$

- Monotonie: $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{(x^2 - 1)^2} (x^2 + 2x - 1) = -\underbrace{\dfrac{e^{-x}}{(x^2 - 1)^2}}_{>0} ((x + 1)^2 - 2)$

  $f'(x) > 0 \iff (x + 1)^2 < 2 \iff x \in (-\sqrt{2} - 1, -1) \cup (-1, \sqrt{2} - 1) \curvearrowright f$ mon. wachsend

  $f'(x) < 0 \iff (x + 1)^2 > 2 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{2} - 1) \cup (\sqrt{2} - 1, 1) \cup (1, \infty) \curvearrowright f$ mon. fallend

  $f'(x) = 0 \iff (x + 1)^2 = 2 \iff x = -1 \pm \sqrt{2} \curvearrowright f$ hat evtl. lokale Extrema

  (*aus Kurvenverlauf und Stetigkeit bereits klar:* f hat lokales Minimum in $x_{E,1} = -1 - \sqrt{2}$ und lokales Maximum in $x_{E,2} = -1 + \sqrt{2}$)

- <u>Nullstellen</u>: *sofort:* $x_{0,1} = 0$, $x_{0,2} \approx 0.714556$ (z.B. mit Newton-Verfahren)
- <u>Krümmungsverhalten</u>:

$$f''(x) = \frac{e^{-x}}{(x^2-1)^3}\left(x^4+4x^3+4x^2-4x+3\right) = \underbrace{\frac{e^{-x}}{(x^2-1)^2}}_{>0}\frac{\overbrace{\left(x^4+4x^3+4x^2-4x+3\right)}^{>2}}{x^2-1}$$

$$\curvearrowright\ f''(x)\left\{\begin{array}{l} >0 \iff |x|>1 \iff f \text{ konvex} \\ <0 \iff |x|<1 \iff f \text{ konkav}\end{array}\right\},\quad f \text{ hat keinen Wendepunkt}$$

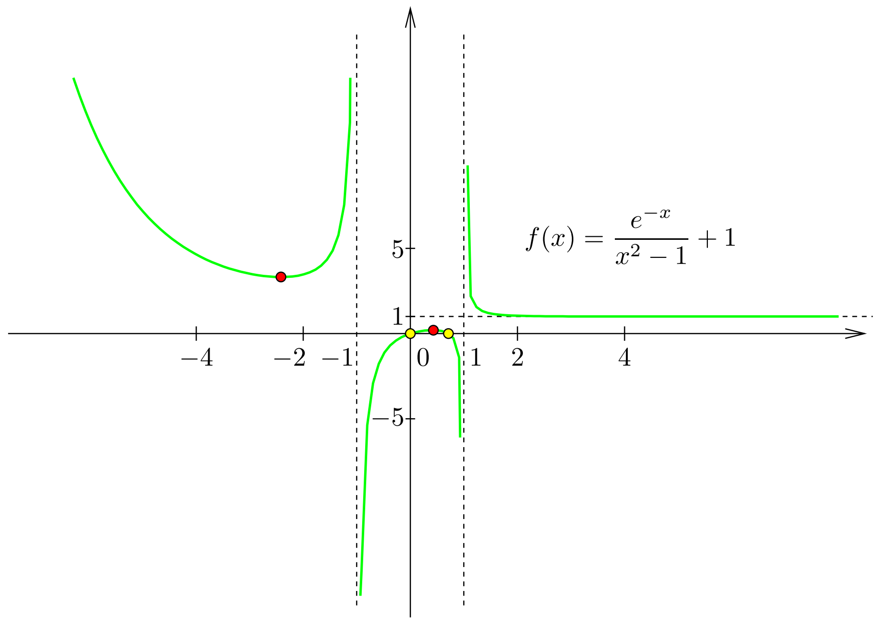
$|x_{E,1}| = \left|-1-\sqrt{2}\right| > 1 \ \curvearrowright\ f''(x_{E,1}) > 0 \ \curvearrowright\ y_* = f(x_{E,1})$ lokales Minimum,

$$y_* = f(x_{E,1}) = \frac{e^{1+\sqrt{2}}}{2(1+\sqrt{2})} + 1 \approx 3.3156$$

$|x_{E,2}| = \left|-1+\sqrt{2}\right| < 1 \ \curvearrowright\ f''(x_{E,2}) < 0 \ \curvearrowright\ y^* = f(x_{E,2})$ lokales Maximum,

$$y^* = f(x_{E,2}) = \frac{e^{1-\sqrt{2}}}{2(1-\sqrt{2})} + 1 \approx 0.2023$$

- $W(f) = (-\infty, y^*] \cup (1, \infty)$



5 Integration

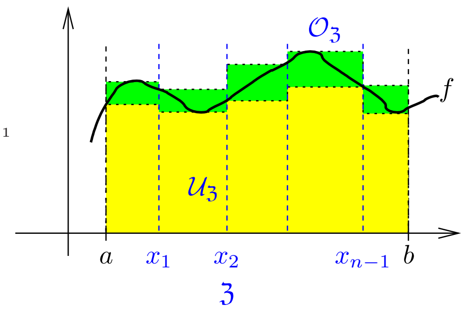
5.1 Das Riemannsche Integral

Sei $f(x)$, $D(f) = [a,b]$, eine beschränkte Funktion.

Bezeichnungen

$\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$	**Zerlegung** des Intervalls $[a,b]$
$I_j = [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, \ldots, n$	j-tes **Teilintervall**
$\lvert\mathfrak{Z}\rvert = \max\{x_j - x_{j-1},\ j = 1, \ldots, n\}$	**Feinheit** der Zerlegung $\mathfrak{Z}$
$\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \inf\limits_{x \in I_j} f(x)\,(x_j - x_{j-1})$	(Darboux[21]sche) **Untersumme** von f bezüglich $\mathfrak{Z}$
$\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sup\limits_{x \in I_j} f(x)\,(x_j - x_{j-1})$	(Darbouxsche) **Obersumme** von f bezüglich $\mathfrak{Z}$
$\mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}} = \sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j^*)\,(x_j - x_{j-1}), \quad x_j^* \in I_j, \quad j = 1, \ldots, n$	**Zwischensumme** von f bezüglich $\mathfrak{Z}$

Folgerungen:



(i) $\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \le \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$

(ii) $\mathfrak{Z}_1 \subset \mathfrak{Z}_2$ ($\mathfrak{Z}_2$ ist 'feiner' als $\mathfrak{Z}_1$) $\curvearrowright \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_1} \le \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_2}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_2} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_1}$

(iii) Für beliebige Zerlegungen $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$ von $[a,b]$ gilt

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'},$$

denn $\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \le \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}\cup\mathfrak{Z}'} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}\cup\mathfrak{Z}'} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'}$

(iv) Es existieren

$$\mathcal{U} := \sup\left\{\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \ : \ \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]\right\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{O} := \inf\left\{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \ : \ \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]\right\}.$$

Es gilt $\mathcal{U} \le \mathcal{O}$.

Beweis*: $|f(x)| \le M \ \curvearrowright \ -M(b-a) \le \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'} \le M(b-a) \ \curvearrowright \{\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}}\}_{\mathfrak{Z}}$ nach oben beschränkt, $\{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}\}_{\mathfrak{Z}}$ nach unten beschränkt, nicht-leer $\underset{\text{Axiom V}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{U}$, $\mathcal{O}$ existieren

Annahme: $\mathcal{U} > \mathcal{O} \iff \mathcal{U} - \mathcal{O} =: \varepsilon > 0 \ \curvearrowright \ \exists\, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}' : \mathcal{O} + \frac{\varepsilon}{3} > \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'}, \quad \mathcal{U} - \frac{\varepsilon}{3} < \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}}$

$$\curvearrowright \mathcal{U} - \frac{\varepsilon}{3} < \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \le \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}'} < \mathcal{O} + \frac{\varepsilon}{3} \iff \mathcal{U} - \frac{2}{3}\varepsilon < \mathcal{O} = \mathcal{U} - \varepsilon \ \lightning \text{ Widerspruch} \qquad \square$$

Definition 5.1.1 *Sei $f(x)$, $D(f) = [a,b]$, beschränkt. f heißt* (Riemann-)integrierbar auf $[a,b]$, *falls $\mathcal{U} = \mathcal{O}$ gilt. Dann heißt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{U} = \mathcal{O}$$

bestimmtes Integral.

Bemerkung*: $\mathcal{U}$ ... (Darboux'sches) 'Unterintegral', $\mathcal{O}$ ... (Darboux'sches) 'Oberintegral'

Ziel : Beschreibung des Integrals mit Grenzwerten anstelle von $\sup$, $\inf$

[21] Jean Gaston Darboux (* 14.8.1842 Nîmes † 23.2.1917 Paris)

Satz 5.1.2 *Sei f eine beschränkte Funktion mit $D(f) = [a,b]$.*

(i) *Sei* $(\mathfrak{Z}_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge von Zerlegungen des Intervalls* $[a,b]$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$. *Dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} = \mathcal{U}$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} = \mathcal{O}$.

(ii) *Falls eine Folge von Zerlegungen* $(\mathfrak{Z}_n)_{n=1}^{\infty}$ *existiert mit* $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n}) = 0$, *so ist* $f(x)$ *auf* $[a,b]$ *integrierbar.*

Beispiel : $f(x) = x, \quad D(f) = [a,b]$, wählen äquidistante Zerlegungen

$$\mathfrak{Z}_n := \left\{ x_k = a + k\frac{b-a}{n}\ ,\ k = 0,\ldots,n \right\} \curvearrowright\ |\mathfrak{Z}_n| = \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\inf_{x\in I_k} f(x) = a + (k-1)\frac{b-a}{n}, \qquad \sup_{x\in I_k} f(x) = a + k\frac{b-a}{n},\ k = 1,\ldots,n$$

$$\curvearrowright\ \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} = \sum_{k=1}^{n} \left(a + (k-1)\frac{b-a}{n} \right) \frac{b-a}{n} = a(b-a) + \left[\frac{b-a}{n}\right]^2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right)$$

$$= a(b-a) + (b-a)^2\, \frac{n(n-1)}{2n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} a(b-a) + \frac{1}{2}\,(b-a)^2 = \frac{b^2-a^2}{2} = \mathcal{U}$$

analog : $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} = \cdots = a(b-a) + (b-a)^2\,\dfrac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{b^2-a^2}{2} = \mathcal{O}$

$$\curvearrowright\ f(x) = x \quad \text{integrierbar auf} \quad [a,b], \quad \int_a^b x\,\mathrm{d}x = \mathcal{U} = \mathcal{O} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Ist genaue Kenntnis von $\inf\limits_{x\in I_k} f(x)$ *und* $\sup\limits_{x\in I_k} f(x)$ *nötig ?*

Satz 5.1.3 *Sei* $f(x)$ *auf* $D(f) = [a,b]$ *beschränkt.*
f ist auf $[a,b]$ integrierbar genau dann, wenn für alle Folgen von Zerlegungen $(\mathfrak{Z}_n)_{n=1}^{\infty}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$ *gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{Z}_{\mathfrak{Z}_n} = I$ *unabhängig von der Auswahl der Zwischenpunkte* x_j^*. *In diesem Fall ist*

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Integrierbare und nicht integrierbare Funktionen

Satz 5.1.4

(i) *Ist* $f(x)$, $D(f) = [a,b]$, *beschränkt und monoton, so ist* $f(x)$ *integrierbar auf* $[a,b]$.

(ii) *Ist* $f(x)$, $D(f) = [a,b]$, *stetig, so ist* $f(x)$ *integrierbar auf* $[a,b]$.

B e w e i s*: <u>zu (i)</u> : nach Satz 5.1.2 ausreichend, (spezielle) Zerlegungsfolge $(\mathfrak{Z}_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}_n| = 0$ zu betrachten, wählen äquidistante Zerlegungen (*siehe Beispiel*)

$$\mathfrak{Z}_n := \left\{ x_k = a + k\frac{b-a}{n}\ ,\ k = 0,\ldots,n \right\} \quad \curvearrowright\ |\mathfrak{Z}_n| = \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

o.B.d.A. $f(x)$ monoton wachsend $\curvearrowright\ \inf\limits_{x\in I_k} f(x) = f(x_{k-1}),\ \sup\limits_{x\in I_k} f(x) = f(x_k),\ k = 1,\ldots,n$

$$\curvearrowright \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\frac{b-a}{n}, \qquad \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}$$

$$\curvearrowright \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_n} - \mathcal{U}_{\mathfrak{Z}_n} = \frac{b-a}{n}\left(f(x_n) - f(x_0)\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\underset{\text{Satz 5.1.2}}{\Longrightarrow} f(x) \text{ integrierbar auf } [a,b] \qquad \square$$

Bemerkung*: Abschwächung der Voraussetzung möglich : *stückweise* monoton bzw. *stückweise* stetig ausreichend, d.h. es existiert eine endliche Zerlegung $\mathfrak{Z}^* = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m\}$ von $[a,b]$, so dass $f(x)$ auf (ξ_{k-1}, ξ_k) monoton bzw. stetig ist, und $\lim\limits_{x\downarrow\xi_{k-1}} f(x) = \alpha_{k-1}$, $\lim\limits_{x\uparrow\xi_k} f(x) = \beta_k$, $k = 1, \ldots, n$, existieren und endlich sind.

Folgerung 5.1.5 *Sei $f(x)$ auf $D(f) = [a,b]$ beschränkt und stückweise stetig oder monoton. Dann ist $f(x)$ auf $[a,b]$ integrierbar.*

Bemerkung*: Es existieren beschränkte Funktionen, die nicht integrierbar sind; z.B.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad , \quad D(\varphi) = [0,1] \ .$$

Es ist $\mathcal{U}_{\mathfrak{Z}} \equiv -1$ und $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \equiv 1$ für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z}$, also auch $\mathcal{U} = -1 \neq 1 = \mathcal{O}$. Allerdings ist $|f(x)| \equiv 1$ integrierbar auf $[0,1]$.

Satz 5.1.6 (Eigenschaften des Riemann-Integrals)
Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien auf $D(f) = D(g) = [a,b]$ integrierbar.

(i) *Dann ist für beliebige reelle Zahlen λ, μ auch $(\lambda f + \mu g)(x)$ auf $[a,b]$ integrierbar, es gilt*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

(ii) *Für beliebiges $c \in (a,b)$ ist f auf $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar, es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

(iii) *Es gelte $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

(iv) *Es ist auch $|f(x)|$ auf $D(f) = [a,b]$ integrierbar, wobei gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \ .$$

Bemerkung*: Die Umkehrung von (iv) ist i.a. nicht richtig, d.h. $|f|$ integrierbar $\underset{\text{i.a.}}{\not\Longrightarrow}$ f integrierbar, siehe vorhergehende Bemerkung

5.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition 5.2.1 *Eine Funktion* $f(x)$, $D(f) = [a,b]$, *heißt* Lipschitz[22]-stetig, *falls ein* $M \geq 0$ *existiert, so dass für alle* $x_1,\ x_2 \in [a,b]$ *gilt*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \ \leq\ M\ |x_1 - x_2|\,.$$

Lemma 5.2.2 **(i)** *Jede in* $[a,b]$ *Lipschitz-stetige Funktion ist dort stetig.*

(ii) *Ist* $f(x)$ *in* $[a,b]$ *stetig und in* (a,b) *differenzierbar mit* $\sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| < \infty$, *so ist* $f(x)$ *in* $[a,b]$ *Lipschitz-stetig.*

Beweis*: zu (i) : klar, $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$ für $\varepsilon > 0$

zu (ii) : Mittelwertsatz (Satz 4.3.4) $\curvearrowright \left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| = |f'(\xi)| \ \leq \sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| =: M \ < \infty$ □

Beispiele :

1. $f(x) = |x|$, $D(f) = [-1,1]$ $\curvearrowright$ Lipschitz-stetig ($M = 1$), aber nicht differenzierbar in 0
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $D(f) = [0,1]$ $\curvearrowright$ stetig, differenzierbar in $(0,1)$, aber nicht Lipschitz-stetig: $\ |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = |x_1 - x_2| \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}}_{\to\infty \text{ für } x_1,x_2\downarrow 0}$

Satz 5.2.3 **(i)** *Ist* $f(x)$ *integrierbar über* $[a,b]$, *so ist* $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *in* $[a,b]$ *Lipschitz-stetig.*

(ii) *Ist* $f(x)$ *stetig, so ist* $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *in* (a,b) *differenzierbar. Es gilt* $\Phi'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$.

Beweis*: zu (i) : o.B.d.A. $x_1 < x_2$ $\curvearrowright$ $\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \displaystyle\int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{Satz 5.1.6(ii)}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t$

$$\curvearrowright |\Phi(x_2) - \Phi(x_1)| \underset{\text{Satz 5.1.6(iv)}}{\leq} \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t \underset{\text{Satz 5.1.6(iii)}}{\leq} \int_{x_1}^{x_2} M\,\mathrm{d}t \ \leq\ M\ |x_2 - x_1|$$

zu (ii) : sei $x_0 \in (a,b)$, $x > x_0$ $\curvearrowright$ $\Phi(x) - \Phi(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t}_{=(x-x_0)f(x_0)}$

$$\curvearrowright \left|\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \ \leq\ \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(t)-f(x_0)|}_{<\varepsilon,\ |x-x_0|<\delta}\,\mathrm{d}t \ \leq\ \frac{x-x_0}{x-x_0}\,\varepsilon \qquad \text{für} \quad |x-x_0| < \delta$$

$$\curvearrowright \lim_{x\downarrow x_0} \left|\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi'_+(x_0) = \lim_{x\downarrow x_0} \frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$$

analog : $\quad \Phi'_-(x_0) = \lim\limits_{x\uparrow x_0} \dfrac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = f(x_0) \ \curvearrowright\ \Phi'(x_0) = f(x_0)$ □

[22] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (* 14.5.1832 Königsberg † 7.10.1903 Bonn)

Bemerkung*: Ist f in $[a,b]$ integrierbar und in x_0 stetig, so ist Φ in x_0 differenzierbar mit $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Definition 5.2.4 *Eine Funktion $F(x)$, $D(F) = I$, heißt* Stammfunktion *zu einer auf $D(f) = I$ gegebenen Funktion $f(x)$, falls $F(x)$ differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D(f) = D(F) = I$ gilt.*

Schreibweise : $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ oder $F(x) = c + \int f(x)\,\mathrm{d}x$

Satz 5.2.5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

(i) *Die Stammfunktionen zu einer auf $D(f)$ gegebenen Funktion $f(x)$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.*

(ii) *Jede stetige Funktion f, $D(f) = [a,b]$, besitzt mindestens eine Stammfunktion*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

(iii) *Sei f in $D(f) = [a,b]$ stetig und F eine beliebige Stammfunktion von f mit $D(F) = [a,b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ = \ F(b) - F(a)\ .$$

B e w e i s : zu (i): Seien F_1 und F_2 Stammfunktionen zu f, $D(F_1) = D(F_2) = D(f)$

$\curvearrowright$ $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0,\ x \in D(F_1) = D(F_2) \xRightarrow[\text{Folg. 4.3.5(iv)}]{} (F_1 - F_2)(x) \equiv c$

zu (ii): folgt aus Satz 5.2.3; außerdem folgt aus dessen Beweis $\Phi'_+(a) = f(a)$, $\Phi'_-(b) = f(b)$

zu (iii): $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + c \curvearrowright F(a) = c,\ F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + c \curvearrowright F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ □

Bemerkung*:

- Satz 5.2.5 : *Berechnung eines bestimmten Integrals mit Hilfe der Stammfunktion*
- Eine Ableitung muss nicht Riemann-integrierbar sein, obwohl sie immer eine Stammfunktion besitzt; z.B.

  $$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\,, & x > 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases} \quad \curvearrowright \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

  $\curvearrowright$ $f'(x)$ ist auf keinem Intervall $[0,b]$, $b > 0$, Riemann-integrierbar (unbeschränkt bei 0)
- Eine Riemann-integrierbare Funktion muss keine Stammfunktion besitzen, z.B. ist

  $$f(x) = \begin{cases} 0\,, & -1 \le x \le 0 \\ 1\,, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

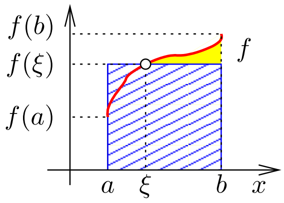
  integrierbar, hat aber keine Stammfunktion ($F'(0)$ existiert nicht).
- Es gilt also $\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ bzw. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]_a^b}_{\text{Stammfunktion}}$

  nur dann, wenn alle auftretenden Ausdrücke existieren !

Folgerung 5.2.6 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei f in $D(f) = [a,b]$ stetig, dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi).$$



B e w e i s : MWS der Differentialrechnung (Satz 4.3.4) auf F anwenden □

5.3 Integrationsregeln

'Integrationstechnik' : Liste von *Grundintegralen*, diverse (mehr oder weniger trickreiche) Methoden (*partielle Integration, Substitutionsregeln incl. Standardsubstitutionen, Partialbruchzerlegung, ...*) $\curvearrowright$ Ziel : Stammfunktionen zu möglichst vielen Funktionenklassen finden

Grundintegrale :

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ für } \begin{cases} x>0, & \alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq -1 \\ x\neq 0, & \alpha\in\mathbb{Z},\ \alpha\neq -1 \\ x \text{ beliebig}, & \alpha\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|, \quad x\neq 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad |x|<1$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\,a^x, \quad a>0, \qquad \textit{speziell}: \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x, \qquad \int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x, \qquad \int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x, \quad x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x, \quad x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Einige weitere bekannte Grundintegrale (*siehe auch zahlreiche Tabellen etc.*):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|, \quad |x|>1; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Bemerkung*: Es gibt Funktionen, deren Stammfunktionen nicht durch elementare Funktionen dargestellt werden können, z.B.

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \dots$$

Satz 5.3.1 (Partielle Integration)
Seien $u(x)$ und $v(x)$ auf I differenzierbar. Dann gilt auf I:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis: $u(x)v(x)+c \;=\; \int \underbrace{(uv)'(x)}_{u'(x)v(x)+u(x)v'(x)}\mathrm{d}x \;=\; \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, o.B.d.A $c=0$ □

Beispiele: (1) $\displaystyle\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}\,\mathrm{d}x \;=\; \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\underbrace{e^x}_{v}\,\mathrm{d}x \;=\; xe^x - e^x + c \;=\; (x-1)e^x + c$

(2) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x \;=\; \int \underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{1}_{v'}\,\mathrm{d}x \;=\; \underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\underbrace{x}_{v}\,\mathrm{d}x \;=\; x\ln x - x + c$

(3) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x \;=\; \int \underbrace{\sin x}_{u}\underbrace{\sin x}_{v'}\,\mathrm{d}x \;=\; \underbrace{\sin x}_{u}\underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{\cos x}_{u'}\underbrace{(-\cos x)}_{v}\,\mathrm{d}x$

$$= \; -\sin x\;\cos x + \int \underbrace{(1-\sin^2 x)}_{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \;=\; -\sin x\;\cos x + x - \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$\curvearrowright\; 2\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = x - \sin x\cos x + c \quad\Longleftrightarrow\quad \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\cos x + c'$$

Bemerkung*: mögliche Anwendungsgebiete : Integrale der Form $\displaystyle\int p(x)e^{bx}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int p(x)\ln x\,\mathrm{d}x$,

$\displaystyle\int p(x)\sin(ax)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int p(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \sin(ax)\,e^{bx}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \cos(ax)\,e^{bx}\,\mathrm{d}x$,

wobei $p(x)$ ein Polynom und $a,b\in\mathbb{R}$ sind

Satz 5.3.2 (Variablensubstitution)
Seien f stetig auf $D(f)$ mit der Stammfunktion $F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c$, und g stetig differenzierbar auf $D(g)$, wobei zusätzlich $W(g)\subset D(f)$ gelte. Dann ist

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(g(x)) + c\,.$$

Beweis*: $\displaystyle\frac{\mathrm{d}F(g(x))}{\mathrm{d}x} \underset{\text{Satz 4.2.4}}{=} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t)\Big|_{t=g(x)}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) \;=\; f(g(x))\,g'(x)$ □

<u>*Spezialfälle*</u>:

$\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$	$=\; \dfrac{1}{a}\,F(ax+b)$	$t=g(x)=ax+b$
$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$	$=\; \ln\lvert g(x)\rvert + c$	$f(t)=\dfrac{1}{t}$, $F(t)=\ln\lvert t\rvert$
$\displaystyle\int g(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$	$=\; \dfrac{1}{2}\,[g(x)]^2 + c$	$f(t)=t$, $F(t)=\dfrac{1}{2}t^2$

Beispiele : **(a)** $\int \tan x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \qquad (g(x) = \cos x)$

(b) $\int x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{t = x^3 \\ \mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x}}{=} \frac{1}{3}\int e^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}e^t + c \underset{t = x^3}{=} \frac{1}{3}e^{x^3} + c$

Standardsubstitutionen für Integrale der Form $\int R(\cdot)\,\mathrm{d}x$ *mit speziellen Integranden*

- $R(e^x)$, Variablensubstitution : $\boxed{t = e^x} \curvearrowright \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = e^x = t \curvearrowright \int R(e^x)\,\mathrm{d}x = \int R(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$

- $R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)$, $|x| \geq 1$; Variablensubstitution : $\boxed{x = \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}}$, $t \geq 0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sinh t, \quad t = (\cosh)^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1 :$$

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \iff e^t + e^{-t} - 2x = 0 \iff e^{2t} - 2xe^t + 1 = 0 \curvearrowright e^t = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

$$\underset{\substack{e^t > 1 \\ x > 1}}{\Longrightarrow} e^t = x + \sqrt{x^2-1} \implies t = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$$

$$x^2 - 1 = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \curvearrowright \int R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)\frac{e^t - e^{-t}}{2}\,\mathrm{d}t$$

- $R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$, $|x| \geq a$, $a > 0$, Variablensubstitution : $\boxed{x = a\cosh t}$

- $R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, Variablensubstitution : $\boxed{x = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cosh t, \quad t = (\sinh)^{-1}(x) \underset{\text{wie oben}}{=} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x^2 + 1 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2$$

$$\curvearrowright \int R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}, \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)\frac{e^t + e^{-t}}{2}\,\mathrm{d}t$$

- $R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, Variablensubstitution : $\boxed{x = a\sinh t}$

- $R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$, $|x| \leq 1$, Variablensubstitution : $\boxed{x = \sin t\,,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t$

$$\curvearrowright \int R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \int R(\sin t, \cos t)\cos t\,\mathrm{d}t$$

Beispiel : $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,\mathrm{d}x \underset{x = 2\cosh t}{=} \int \frac{2\sinh t}{4\cosh^2 t}\overbrace{2\sinh t\,\mathrm{d}t}^{\mathrm{d}x} = \int \frac{\overbrace{\cosh^2 t - 1}^{\sinh^2 t}}{\cosh^2 t}\,\mathrm{d}t = t - \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t}}_{\tanh t}$

$$\underset{t = \ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right)}{=} \underbrace{\ln\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)}_{t} - \underbrace{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}_{\frac{\sinh t}{\cosh t}} + c$$

Integration rationaler Funktionen

Grundintegrale und Sätze 5.3.1, 5.3.2 $\curvearrowright$ bisher bekannt :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} &= \ln|x-a| &&, \quad a \in \mathbb{R} \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} &= -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} &&, \quad a \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N},\ k \geq 2 \\
\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x &= \ln\left|x^2+px+q\right| &&, \quad p,\ q \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Bemerkung*: direkt mit bekannten Grundintegralen bzw. partieller Integration sind weiter ableitbar:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} &= \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right), \quad q-\frac{p^2}{4} > 0 \\
\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}, \quad k \geq 2
\end{aligned}$$

bzw. Iterationsformeln für $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^k}, \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}, \quad k \geq 2$

Satz 5.3.3 (Partialbruchzerlegung)

Seien $p(x)$ *ein Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad* $n \in \mathbb{N}$, *und*

$$q(x) = a_m\,(x-\xi_1)^{m_1}\cdots(x-\xi_k)^{m_k}\,\left(x^2+c_1x+d_1\right)^{r_1}\cdots\left(x^2+c_lx+d_l\right)^{r_l} ,$$

ein reelles Polynom vom Grad $m > n$, *wobei* $m_1+\cdots+m_k+2\,(r_1+\cdots+r_l) = m$ *gilt.*
Dann existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen $A_{1,1}, \ldots, A_{1,m_1}, \ldots, A_{k,1}, \ldots, A_{k,m_k}, B_{1,1}, C_{1,1}, \ldots, B_{1,r_1}, C_{1,r_1}, \ldots, B_{l,1}, C_{l,1}, \ldots, B_{l,r_l}, C_{l,r_l}$, *so dass gilt*

$$\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} = {} & \frac{A_{1,1}}{x-\xi_1}+\cdots+\frac{A_{1,m_1}}{(x-\xi_1)^{m_1}}+\cdots+\frac{A_{k,1}}{x-\xi_k}+\cdots+\frac{A_{k,m_k}}{(x-\xi_k)^{m_k}} \\
& + \frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+c_1x+d_1}+\cdots+\frac{B_{1,r_1}x+C_{1,r_1}}{(x^2+c_1x+d_1)^{r_1}} \\
& \vdots \\
& + \frac{B_{l,1}x+C_{l,1}}{x^2+c_lx+d_l}+\cdots+\frac{B_{l,r_l}x+C_{l,r_l}}{(x^2+c_lx+d_l)^{r_l}}
\end{aligned}$$

Beweis : Linearfaktorenzerlegung aus Abschnitt 3.1, konstruktiver Beweis möglich □

Beispiel: (1) $\displaystyle \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2} =: \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{(x-1)^2}$

$\iff \quad x^2+1 = A_1(x-1)^2+A_2x(x-1)+A_3x \quad \curvearrowright$ *Nullstellen/Werte einsetzen*:

$$\begin{aligned}
x=0 &: \quad 1 = A_1 && \curvearrowright \quad A_1 = 1 \\
x=1 &: \quad 2 = A_3 && \curvearrowright \quad A_3 = 2 \\
x=-1 &: \quad 2 = 4A_1+2A_2-A_3 = 4+2A_2-2 = 2+2A_2 && \curvearrowright \quad A_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\curvearrowright \int \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{2}{x-1} + c, \quad x \neq 0,\ x \neq 1$$

Beispiel : **(2)** $\dfrac{x+1}{x^4-x^3+x^2-x} = \dfrac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2+1}$

Ansatz: $\dfrac{x+1}{x(x-1)(x^2+1)} =: \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

$$\iff \quad x+1 = A_1(x-1)(x^2+1) + A_2 x(x^2+1) + (Bx+C)x(x-1)$$

Koeffizientenvergleich nach Potenzen von x:

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & 0 = A_1 + A_2 + B \\ x^2: & 0 = -A_1 - B + C \\ x^1: & 1 = A_1 + A_2 - C \\ x^0: & 1 = -A_1 \end{array}\right\} \curvearrowright \; A_1 = -1,\; A_2 = 1,\; B = 0,\; C = -1$$

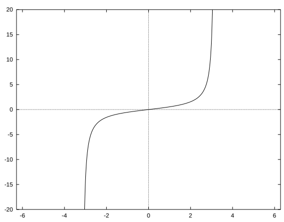
$$\curvearrowright \int \frac{x+1}{x^4-x^3+x^2-x}\,\mathrm{d}x = -\ln|x| + \ln|x-1| - \arctan x + c, \quad x \neq 0,\; x \neq 1$$

<u>*Standardsubstitution für Integranden der Form $R(\cos x, \sin x)$*</u>

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} a_{k\ell} \cos^k x \sin^\ell x}{\sum_{j=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} b_{jm} \cos^j x \sin^m x}, \quad a_{k\ell},\; b_{jm} \in \mathbb{R}$$

$\cos x,\ \sin x$ sind $2\pi-$ periodisch $\curvearrowright$ ausreichend, $R(\cos x, \sin x)$ für $-\pi < x < \pi$ und $Q(\cos x, \sin x) \neq 0$ zu betrachten

<u>Variablensubstitution</u> : $\boxed{t = \tan\frac{x}{2}}$ $\quad x = 2\arctan t, \quad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{1+t^2}$



$t = \tan\frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi)$

$$\sin 2y = 2\sin y\cos y = 2\tan y \cdot \cos^2 y = \frac{2\tan y}{1+\tan^2 y}$$

$$\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y = \frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y}$$

$$\underset{x=2y}{\Longrightarrow} \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\curvearrowright \int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

... weiter wie bei der Integration rationaler Funktionen, anschließend Rücksubstitution

Beispiel :
$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x \underset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1+t)^2}{2t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t} + 2 + t\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2 + c$$

Bemerkung*: viele weitere Standardsubstitutionen, z.B. für $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) \dashrightarrow t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

Beispiele :

- $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}} \underset{\substack{t=\sqrt{1+x}\\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t}}{=} \int \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1+t-1}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int \left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$
$$= 2t - 2\ln(1+t) + c = 2\sqrt{1+x} - 2\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right) + c$$
- $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} \underset{\substack{t=\sqrt{x}\\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t}}{=} 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\arctan\sqrt{x} + c$$

5.4 Uneigentliche Integrale

bisher : beschränkte Funktionen auf endlichen Intervallen $\Longrightarrow$ zwei mögliche Typen 'uneigentlicher' Integrale

Definition 5.4.1

(i) *Sei* $f(x)$ *auf* $D(f)=(a,b]$ *definiert und auf jedem Teilintervall* $[a+\varepsilon,b]$, $\varepsilon>0$, *integrierbar. Dann setzt man*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
falls der Grenzwert existiert und endlich ist. Dieser Wert heißt uneigentliches (Riemannsches) Integral.

(ii) *Sei* $f(x)$ *auf* $D(f)=[a,b)$ *definiert und auf jedem Teilintervall* $[a,b-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, *integrierbar. Dann setzt man*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
falls der Grenzwert existiert und endlich ist. Dieser Wert heißt uneigentliches (Riemannsches) Integral.

(iii) *Sei* $g(x)$ *auf* $D(g)=[a,\infty)$ *definiert und auf jedem Teilintervall* $[a,T]$, $T>a$, *integrierbar. Dann setzt man*
$$\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty}\int_a^T g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
falls der Grenzwert existiert und endlich ist. Dieser Wert heißt uneigentliches (Riemannsches) Integral.

(iv) *Sei* $g(x)$ *auf* $D(g)=(-\infty,b]$ *definiert und auf jedem Teilintervall* $[T,b]$, $T<b$, *integrierbar. Dann setzt man*
$$\int_{-\infty}^b g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to-\infty}\int_T^b g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
falls der Grenzwert existiert und endlich ist. Dieser Wert heißt uneigentliches (Riemannsches) Integral.

Beispiele : **(1)** $f(x)=x^\alpha$, $D(f)=(0,1]$, $\alpha<0$ (für $\alpha\geq 0$ stetig $\curvearrowright$ durch Satz 5.1.4 abgedeckt)

$$\int_\varepsilon^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_\varepsilon^1 = \dfrac{1}{\alpha+1}\left(1-\varepsilon^{\alpha+1}\right) & , \ \alpha\neq -1 \\ \ln x\big|_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon & , \ \alpha=-1 \end{cases}$$

Es gilt $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{\alpha+1} = \begin{cases} 0 & , \ \alpha+1>0 \\ \infty & , \ \alpha+1<0 \end{cases}$, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ln\varepsilon = -\infty$

$$\curvearrowright \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x \text{ existiert} \iff \alpha>-1\,, \qquad \int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}\,, \quad \alpha>-1$$

Beispiele : **(2)** $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $D(f) = [0,\infty)$

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^T = \arctan T \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{\pi}{2} \curvearrowright \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{(existiert)}$$

analog : $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

(3) $$\int_0^T \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^T = 1 - \underbrace{\cos T}_{\lim\limits_{T\to\infty} \text{ ex. nicht}} \curvearrowright \int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x \quad \text{existiert nicht}$$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \curvearrowright \frac{\sin x}{x}$ stetig bei 0, $\quad T := n\pi$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x}_{I_2} + \cdots + \underbrace{\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x}_{I_n}$$
$$= I_1 - I_2 + \cdots \pm I_n$$

$$I_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x,\ k\in\mathbb{N} \curvearrowright 0 \le I_{k+1} < I_k, \quad \text{und} \quad I_k \le \frac{\pi}{(k-1)\pi} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\underset{\substack{\text{Satz 2.2.8}\\ \text{Leibniz-Krit.}}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_k = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{existiert} \quad (\textit{es gilt: } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2})$$

Lemma 5.4.2 *Seien f, g, und h mit $D(f) = D(g) = D(h) = [a,\infty)$ auf $[a,T]$ integrierbar für alle $T > a$, es gelte*

$$0 \le f(x) \le g(x), \quad x \in [a,\infty).$$

(i) *Ist* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent, so konvergiert auch* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$*; dabei ist* $0 \le \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x.$

(ii) *Ist* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *divergent, so auch* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x.$

(iii) *Falls* $\int_a^\infty |h(x)|\,\mathrm{d}x$ *existiert für alle $T > a$, so auch* $\int_a^\infty h(x)\,\mathrm{d}x$*, es gilt* $\left|\int_a^\infty h(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^\infty |h(x)|\,\mathrm{d}x.$

Bemerkung*: vgl. Satz 2.2.5 (Majorantenkriterium für Reihen)

Beispiele : **(a)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x : \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}, \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1 \curvearrowright \int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\mathrm{d}x$ konv. $\curvearrowright \displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konv.

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\, e^{-x}\,\mathrm{d}x : \quad \left|\sin x\, e^{-x}\right| \le e^{-x}, \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty}(1-e^{-T}) = 1$

$\curvearrowright \displaystyle\int_0^\infty \left|\sin x\, e^{-x}\right|\mathrm{d}x$ konv. $\curvearrowright \displaystyle\int_0^\infty \sin x\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ konv.

Satz 5.4.3 (Integralkriterium für Reihen)

Gegeben sei eine unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *mit* $a_n > 0$, *durch die mittels* $h(x) := a_n$, $x \in [n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$, *eine Funktion* h *auf* $[0,\infty)$ *definiert wird. Weiterhin seien* f *und* g *auf* $[0,\infty)$ *gegeben mit*

$$0 \le f(x) \le h(x) \le g(x), \quad x \in [0,\infty).$$

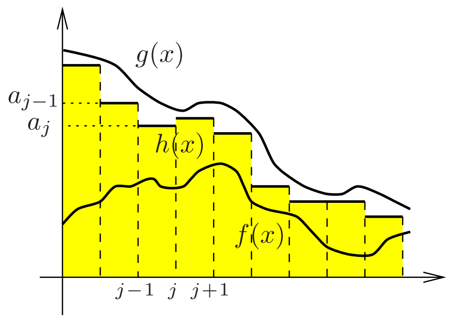
(i) *Ist* $\int\limits_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent, so konvergiert auch* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *es gilt* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \le \int\limits_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) *Ist* $\int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *divergent, so divergiert auch* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis : folgt sofort aus Lemma 5.4.2, da

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_0^\infty h(x)\,\mathrm{d}x$$

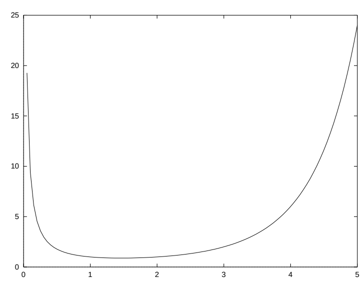
nach Konstruktion gilt □



Beispiel : $\Gamma-$ Funktion $\quad \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0$

Eigenschaften:

- konvergentes uneigentliches Integral, $\Gamma(x) > 0$
- $\Gamma(x)$ beliebig oft differenzierbar, konvex auf $(0,\infty)$
- $\lim\limits_{x\downarrow 0} \Gamma(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} \Gamma(x) = \infty$
- $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1),\ x > 0 \curvearrowright \Gamma(n) = (n-1)!$
- $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1 \xRightarrow[\text{Satz 4.3.4}]{} \exists\, x_0 \in (1,2) : \Gamma'(x_0) = 0$
  $(x_0 \approx 1{,}4616\ldots,\ \Gamma(x_0) \approx 0{,}8856\ldots)$
- $\Gamma(x)$ streng monoton $\begin{cases} \text{fallend}, & 0 < x < x_0 \\ \text{wachsend}, & x_0 < x < \infty \end{cases}$



$\Gamma(x), \quad 0 < x \le 5$

6 Potenzreihen

6.1 Konvergenz von Potenzreihen

Definition 6.1.1 *Für* $z,\ z_0 \in \mathbb{C}$ *heißt*

$$p(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n\,, \qquad a_n \in \mathbb{C},$$

Potenzreihe *mit dem Entwicklungspunkt* z_0.

Frage : Für welche $z \in \mathbb{C}$ *(in Abhängigkeit von* $z_0 \in \mathbb{C}$*) konvergiert die Reihe (absolut) ?*

Lemma 6.1.2 *Sei* $z_0 \in \mathbb{C}$.

(i) *Falls ein* $z_1 \neq z_0$ *existiert, so dass* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ *für* $z = z_1$ *konvergiert, so konvergiert die Reihe absolut für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z-z_0| < |z_1-z_0|$.

(ii) *Falls ein* $z_2 \neq z_0$ *existiert, so dass* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ *für* $z = z_2$ *divergiert, so divergiert die Reihe auch für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z-z_0| > |z_2-z_0|$.

Offenbar gibt es also drei Möglichkeiten der (absoluten) Konvergenz von $p(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$:

(i) $p(z)$ konvergiert nur für $z = z_0$

(ii) $p(z)$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$

(iii) es existiert ein $R > 0$, so dass
- $p(z)$ konvergiert absolut für alle z mit $|z-z_0| < R$
- $p(z)$ divergiert für alle z mit $|z-z_0| > R$

Diese Zahl $R > 0$ heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe $p(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$. Zusätzlich wird $R := 0$ in (i) und $R := \infty$ in (ii) gesetzt. Man nennt die (offene) Menge

$$K_R(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \;:\; |z-z_0| < R \;\}$$

Konvergenzkreis der Potenzreihe $p(z)$. In diesem Sinne ist also $R > 0$ der größtmögliche Radius eines Kreises um $z_0 \in \mathbb{C}$, innerhalb dessen die Reihe absolut konvergiert.

Satz 6.1.3 (Bestimmung des Konvergenzradius)
Sei die Potenzreihe $p(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ *gegeben.*

(i) *Falls* $a_n \neq 0,\ n \geq n_0$, *gilt, so erhält man*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

falls dieser Grenzwert (eigentlich oder uneigentlich) existiert.

(ii) *Es gilt*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

falls dieser Grenzwert existiert, wobei man $R := \begin{cases} 0, & \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \infty, & \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$ *setzt.*

Beweis : Quotienten- bzw. Wurzelkriterium (Sätze 2.2.5, 2.2.6) $\square$

Bemerkung*: *allgemein:* Satz von Cauchy-Hadamard[23], wobei in (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}$ durch $\limsup\limits_{n\to\infty}$ ersetzt wird (und dann immer existiert)

$\boxed{\textbf{Beispiele}}$: **(1)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n \curvearrowright \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \curvearrowright R = 0$, *d.h. Konvergenz* $\iff z = 0$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-n} z^n \curvearrowright \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \curvearrowright R = \infty$, *d.h. Konvergenz für alle* $z \in \mathbb{C}$

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \curvearrowright \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty \curvearrowright R = \infty$, *d.h. Konvergenz in* $\mathbb{C}$

Aussagen über den Rand des Konvergenzkreises, d.h. für $|z - z_0| = R$, sind i.a. nicht möglich :

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \curvearrowright R = 1 : \ |z| = 1 \curvearrowright \lim\limits_{n\to\infty} |z^n| = 1 \neq 0 \curvearrowright$ *keine* Konvergenz für $|z| = 1$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \curvearrowright R = 1 : \ |z| = 1 \curvearrowright$ *absolute* Konvergenz, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nach Satz 2.2.4 (ii) konvergent

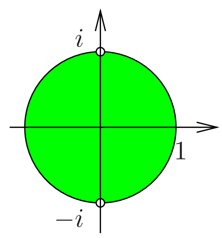
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n \curvearrowright R = 1 : \ |z| = 1$ $\begin{cases} z = 1 & \textit{Konvergenz} \quad \text{(Folg. 2.2.9)} \\ z = -1 & \textit{Divergenz} \quad \text{(Satz 2.2.4(i))} \end{cases}$

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

bisher (als geometrische Reihe) : absolute Konvergenz $\iff |x^2| < 1 \iff |x| < 1 = R$

Grund (geometrisch) : keine Konvergenz (in $\mathbb{C}$) von

$$p(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{in} \quad z = \pm i$$



$\curvearrowright$ größter Kreis um $z_0 = 0$, innerhalb dessen $p(z)$ absolut konvergiert (in jedem Punkt) hat Radius $R = 1$

Bemerkung*: Potenzreihen können (als absolut konvergente Reihen in ihrem Konvergenzbereich) addiert, skalar multipliziert und untereinander multipliziert, sowie verkettet werden

[23] Jacques Salomon Hadamard (* 8.12.1865 Versailles † 17.10.1963 Paris)

Folgerung 6.1.4 (Eigenschaften von Potenzreihen)

Sei $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* R.

(i) *Die Reihe ist absolut konvergent für* $|x-x_0| < R$ *und divergent für* $|x-x_0| > R$.

(ii) *Für beliebige Zahlen* $s \in (0, R)$ *ist die Funktion* $p(x)$ *stetig in* $[x_0 - s, x_0 + s]$.

(iii) p *ist integrierbar auf jedem Intervall* $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, *insbesondere gilt für* $|y - x_0| < R$,

$$\int_{x_0}^{y} p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{y} a_n(x-x_0)^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\,(y-x_0)^{n+1}, \qquad |y-x_0| < R.$$

Die Potenzreihe $q(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\,(y-x_0)^{n+1}$ *hat den Konvergenzradius* R.

(iv) p *ist auf* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *differenzierbar, es gilt*

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}, \quad |x-x_0| < R,$$

die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ *hat den Konvergenzradius* R.

Beispiele : **(a)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0, \quad |x| < 1$

$$\underset{\text{(iv)}}{\Longrightarrow} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\underset{\text{(iv)}}{\Longrightarrow} \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(k-1)!}{(1-x)^k}\right) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}, \qquad |x| < 1, \quad k \in \mathbb{N}_0}$$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1$

$$\underset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^y x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |y| < 1$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\arctan y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}, \quad |y| < 1}$$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \dfrac{1}{1-(-x)} = \dfrac{1}{1+x}, \quad |x| < 1$

$$\underset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^y x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}, \qquad |y| < 1$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\ln(1+y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}, \quad |y| < 1}$$

Identitätssatz für Polynome (Satz 3.1.3) $\curvearrowright$ Gilt analoge Aussage auch für Potenzreihen, d.h. sind zwei Potenzreihen notwendigerweise identisch, wenn sie (nur) an abzählbar unendlich vielen Stellen übereinstimmen?

Satz 6.1.5 (Identitätssatz für Potenzreihen)
Gegeben seien zwei Potenzreihen $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-x_0)^k$ *und* $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k (x-x_0)^k$ *mit gleichem Entwicklungspunkt* $x_0 \in \mathbb{R}$ *und positiven Konvergenzradien* $R_\alpha > 0$, $R_\beta > 0$. *Gilt*

$$p(x_n) = q(x_n) \qquad \text{für eine Folge} \quad (x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{und} \quad x_n \neq x_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

so sind die beiden Potenzreihen identisch, d.h. $\alpha_k = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung*: Es reicht nicht aus, wenn die Potenzreihen nur an (beliebigen) unendlich vielen Stellen übereinstimmen: $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ hat unendlich viele Nullstellen (in $k\pi$), ist aber nicht identisch 0

6.2 Taylorreihen

Problem : Sei $f(x)$ n-mal differenzierbar. Kann man $f(x)$ durch ein Polynom n-ten Grades $p_n(x)$ an einer Stelle x_0 so approximieren, dass gilt

$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)\ , \quad k = 0, \ldots, n \quad ?$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k \curvearrowright \left\{ \begin{array}{rcl} p_n(x_0) & = & a_0 = f(x_0) \\ p_n'(x_0) & = & a_1 = f'(x_0) \\ & \vdots & \\ p_n^{(k)}(x_0) & = & k!\ a_k = f^{(k)}(x_0) \end{array} \right\} \curvearrowright \begin{array}{c} a_k := \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ , \\ k = 0, \ldots, n \end{array}$$

Definition 6.2.1 *Sei* $f(x)$ *in einer Umgebung* $U(x_0)$ *von* x_0 n*-mal differenzierbar. Dann heißt*

$$t_n(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (x-x_0)^k$$

Taylor[24]-Polynom n-ten Grades *der Funktion* f *an der Stelle* x_0.

Problem : Wie groß ist der „Fehler“ $r_n(x) = f(x) - t_n(x)$, $x \in U(x_0)$?

Satz 6.2.2 (Satz von Taylor)
Sei $f(x)$ $(n+1)$*-mal stetig differenzierbar in* $U(x_0) \subset D(f)$, *d.h.* $f^{(n+1)}(x)$ *ist stetig in* $U(x_0)$. *Dann existiert für jedes* $x \in U(x_0)$ *ein* $\theta \in (0,1)$, *so dass gilt*

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (x-x_0)^k \ + \ \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \ .$$

Beweis*: Sei $q(x) := (n+1)!\ \dfrac{f(x) - t_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$, $x \neq x_0$ $\curvearrowright$ $f(x) - t_n(x) = \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\ q(x)$

zu zeigen : $q(x) = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$

[24] Brook Taylor (* 18.8.1685 Edmonton/England † 29.12.1731 London)

Sei $x \in U(x_0)$ fest, o.B.d.A. $x < x_0$. Setzen

$$h(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}\,(x-t)^k \;-\; \frac{q(x)}{(n+1)!}\,(x-t)^{n+1}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

$\curvearrowright$ $h(t)$ differenzierbar in $[x, x_0]$, $h(x) = h(x_0) = 0 \xRightarrow[\text{Satz 4.3.3}]{} \exists\, \tau \in (x, x_0) \;:\; h'(\tau) = 0$

$$\curvearrowright\; 0 \;=\; h'(\tau) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}\,(x-t)^k\right)\Bigg|_{t=\tau} - \frac{q(x)}{(n+1)!}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(x-t)^{n+1}\right]\Big|_{t=\tau}$$

$$= \underbrace{-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(\tau)}{k!}\,(x-\tau)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\tau)}{k!}\,k(x-\tau)^{k-1}}_{-\frac{f^{(n+1)}(\tau)}{n!}\,(x-\tau)^n} + \underbrace{\frac{q(x)}{(n+1)!}(n+1)(x-\tau)^n}_{\frac{q(x)}{n!}\,(x-\tau)^n}$$

$\curvearrowright$ $0 = h'(\tau) \iff f^{(n+1)}(\tau) = q(x) \iff q(x) = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$ □

Beispiel : $f(x) = e^x$, $D(f) = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$:

$f^{(k)}(x) = e^x \curvearrowright f^{(k)}(0) = 1,\ k \in \mathbb{N}_0 \curvearrowright t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

$f^{(n+1)}(x) = e^x$ stetig bei $x_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$\xRightarrow[\text{Satz 6.2.2}]{} e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \theta = \theta(x) < 1$$

Bemerkung*:

- $r_n(x) = f(x) - t_n(x)$ in Satz 6.2.2 heißt *Restglied von Lagrange*[25], weitere Darstellungen u.a.
  - *Cauchy-Restglied:* $r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n\,(x-x_0)^{n+1}$
  - *Integral-Restglied:* $r_n(x, x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$
- Sei $n = 0$, f stetig differenzierbar in $U(x_0)$ $\curvearrowright$ $t_0(x) \equiv f(x_0)$

  $\xRightarrow[\text{Satz 6.2.2}]{} f(x) = f(x_0) + f'\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)\,(x - x_0)$

  $\iff \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'\big(\overbrace{x_0 + \theta(x - x_0)}^{\xi}\big) \quad \sim$ Satz 4.3.4 (*Mittelwertsatz*)
- Sei $n = 1$, f zweimal stetig differenzierbar in $U(x_0)$

  $\curvearrowright f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)}_{t_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2}\,(x - x_0)^2}_{\text{siehe auch Lemma 4.1.2}}$

  sei $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0 \xRightarrow[f''\text{ stetig}]{} f''(x) > 0$ für $|x - x_0| < \delta$

  $\curvearrowright f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{0}(x-x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2}}_{>0 \text{ für } |x-x_0|<\delta}\underbrace{(x - x_0)^2}_{\geq 0} \geq f(x_0),\ |x-x_0| < \delta$

  $\curvearrowright$ f hat *lokales Minimum* in x_0

  analog: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ $\curvearrowright$ f hat *lokales Maximum* in x_0

[25] Joseph-Louis Lagrange (* 25.1.1736 Turin † 10.4.1813 Paris)

Problem : Kann f durch t_n beliebig gut approximiert werden, d.h. gilt für ein festes $x \in U(x_0)$ stets $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} t_n(x) \iff \lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$?

Satz 6.2.3 *Seien $f(x)$ eine in (a,b) beliebig oft differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(a,b)} \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| = 0$$

unabhängig von $\theta \in (0,1)$. Dann gilt $\quad f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad , \quad x \in (a,b).$

Beweis : folgt aus Satz 6.2.2 und Vorüberlegungen □

Beispiel : $f(x) = e^x,\ D(f) = \mathbb{R},\ x_0 = 0$

$$\curvearrowright\ e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{t_n(x)} + \underbrace{\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}}_{r_n(x)}, \qquad x \in \mathbb{R},\quad n \in \mathbb{N},\quad 0<\theta<1$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ fixiert $\curvearrowright\ 0 \le |r_n(x)| \le \dfrac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha^n}{n!} = 0,\ \alpha \ge 0\right)$

$$\curvearrowright\ \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \iff e^x = \lim_{n\to\infty} t_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

qualitative Abschätzung : sei $x \in [-5,5]\ \curvearrowright\ e^{|x|} \le e^5\ \curvearrowright\ |r_n(x)| \le \dfrac{e^5}{(n+1)!}5^{n+1}$

z.B. $|r_{20}(x)| \le \dfrac{e^5}{21!}5^{21} \approx 0.00138$

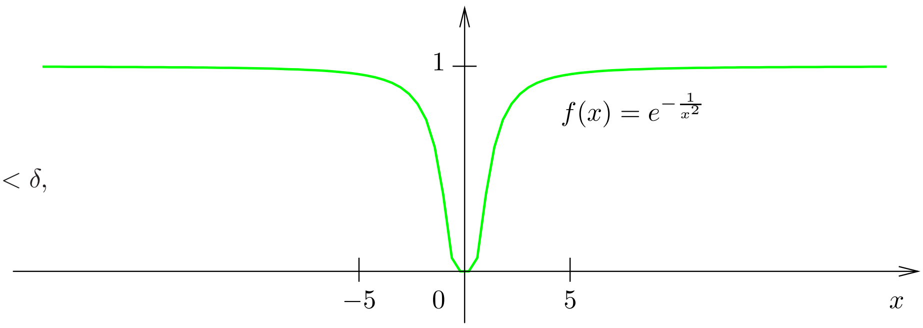
Lemma 6.2.4 (Gegenbeispiel)
Die Funktion $\quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

ist in $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, aber in $x_0 = 0$ nicht in eine Taylor-Reihe bei x_0 entwickelbar.

$f^{(k)}(0) = 0,\ k \in \mathbb{N}_0$

$\curvearrowright\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \equiv 0,\ |x| < \delta,$

aber $f(x) \not\equiv 0$ für $|x| < \delta$



Beispiel : *Binomialreihe* $\quad (1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{k} x^k, \quad |x|<1, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \dbinom{\alpha}{k} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

für spezielle Werte $\dashrightarrow$ weitere Reihenentwicklungen, z.B. für $\alpha = \pm\frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{128} \pm \cdots, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \pm \cdots, \quad |x| < 1$$

7 Partielle Ableitungen, Extremwerte

7.1 Stetige Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$

Definition 7.1.1 *Es sei* $\mathbb{X}$ *ein (reeller oder komplexer) Vektorraum und*

$$\|\cdot\| \;:\; x \in \mathbb{X} \quad \longmapsto \quad \|x\| \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

eine Abbildung von $\mathbb{X}$ *nach* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *mit folgenden Eigenschaften :*

(N1) $\|x\| \;\geq\; 0$ *für alle* $x \in \mathbb{X}$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (*Nullelement aus* $\mathbb{X}$)

(N2) $\|\lambda x\| \;=\; |\lambda|\,\|x\|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}$ *und alle* $x \in \mathbb{X}$

(N3) $\|x+y\| \;\leq\; \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in \mathbb{X}$

Dann heißen $[\mathbb{X}, \|\cdot\|]$ normierter Raum *und* $\|\cdot\|$ Norm.

Bemerkung*:

- Begriff der *Metrik* (Abstand) auf $M \neq \emptyset$: $\varrho : M \times M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$, mit $\varrho(x,y) \geq 0$, $\varrho(x,y) = 0 \iff x = y$, $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$, $\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$
- $[M, \varrho]$ *metrischer Raum*
- $[\mathbb{X}, \|\cdot\|]$ normiert $\curvearrowright$ $[\mathbb{X}, \varrho]$ metrischer Raum mit $\varrho(x,y) = \|x-y\|$

Beispiel : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ mit $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$, $\|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$

Bemerkung*:

- $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2, \infty$, sind *äquivalent*, d.h. $\exists\, c_{ij}, C_{ij}\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n : c_{ij}\|x\|_i \leq \|x\|_j \leq C_{ij}\|x\|_j$:
  Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\curvearrowright \; \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq n \max_{k=1,\dots,n} |x_k| = n\,\|x\|_\infty \leq n \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = n\,\|x\|_2$$

$$\leq n \sum_{k=1}^{n} |x_k| \;=\; n\,\|x\|_1$$

$$\iff \frac{1}{n}\,\|x\|_1 \;\leq\; \|x\|_\infty \;\leq\; \|x\|_2 \;\leq\; \|x\|_1$$

- Vorteil äquivalenter Normen: für Konvergenzaussagen (*z.B. bei Stetigkeit, Differenzierbarkeit* ...) kann man jeweils beliebige *'passende'* Norm auswählen
- Es gilt sogar: *In einem endlich-dimensionalen Vektorraum* $\mathbb{X}$ *sind alle Normen zueinander äquivalent.*

Definition 7.1.2 *Sei* $[\mathbb{X}, \|\cdot\|]$ *ein normierter Raum.*

(i) *Eine Folge* $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{X}$ *heißt* konvergent $\iff \exists\, x^0 \in \mathbb{X}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall\, n \geq n_\varepsilon : \|x_n - x^0\| < \varepsilon$.

(ii) *Eine Folge* $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{X}$ *heißt* Cauchy-Folge $\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall\, n, m \geq n_\varepsilon : \|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Satz 7.1.3 (Konvergenzkriterium von Cauchy)
Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ *aus* $\mathbb{R}^n$ *oder* $\mathbb{C}^n$ *ist konvergent genau dann, wenn* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *eine Cauchy-Folge ist.*

Bemerkung*: siehe Satz 2.1.12 für $n = 1$; i.a. nur $(x_n)_n$ konvergent $\curvearrowright$ $(x_n)_n$ Cauchy-Folge jetzt: *Funktionen* $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Beispiele :

- $A \ldots (m,n)-$Matrix,

$$y = Ax \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{array}{c} y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k, \\ j = 1, \ldots, m \end{array}$$

- $\mathfrak{M}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{\gamma\ m}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}\,(x_1,x_2,x_3), \quad D(\mathfrak{M}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

  Gravitationsfeld einer im Koordinatenursprung liegenden punktförmigen Masse m

- speziell $m = 1$, d.h. Funktionen $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

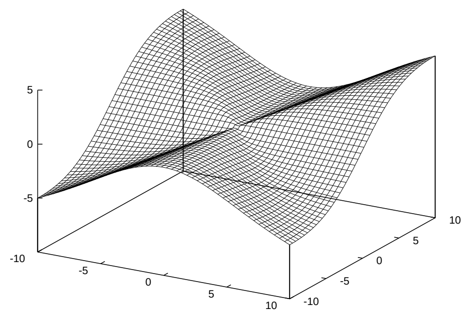
  – $V(R,h) = \pi R^2 h, \quad R > 0, \quad h > 0, \qquad V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

  Volumen eines Kreiszylinders mit Radius $R > 0$ *und Höhe* $h > 0$

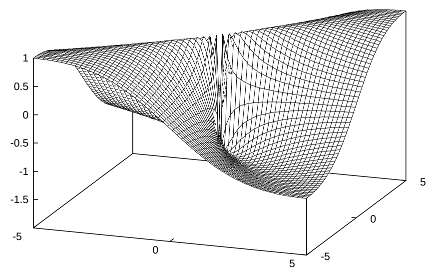
  – $\mathcal{K}(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,m_1,m_2) = \gamma\ \dfrac{m_1\ m_2}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$

  $\mathcal{K} : D(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \ldots$ *Anziehungskraft zwischen zwei Massen*

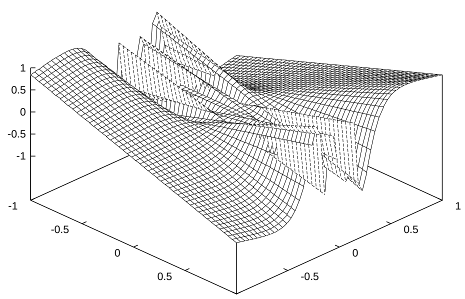
speziell : Funktionen von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$



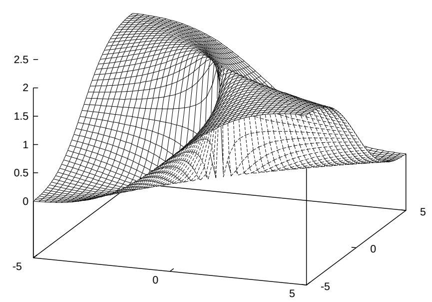
(a) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2\ x_2}{x_1^2+x_2^2}, & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$



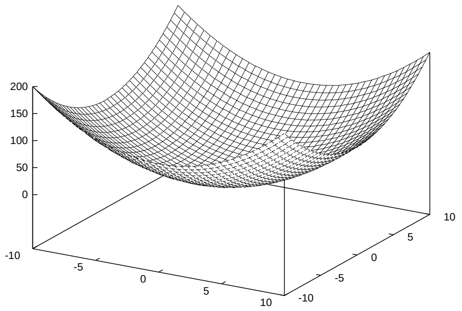
(b) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{2\ x_1\ x_2}{x_1^2+x_2^2}, & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$



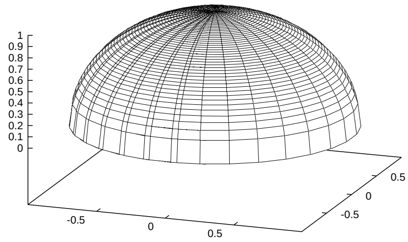
(c) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1\ \sin\left(\dfrac{1}{x_2}\right), & x_2 \neq 0 \\ 0, & x_2 = 0 \end{cases}$



(d) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_1^2+x_2^2}, & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$



(e) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$



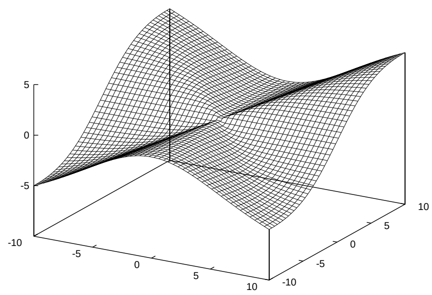
(f) $f(x_1,x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$

Definition 7.1.4 *Seien* $\left[\mathbb{X}_1, \|\cdot\|_1\right]$ *und* $\left[\mathbb{X}_2, \|\cdot\|_2\right]$ *normierte Räume, und* $F : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ *eine Abbildung.* F *heißt* stetig in $x^0 \in \mathbb{X}_1 \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon, x^0) \;\; \forall\, x \in \mathbb{X}_1 : \; \|x - x^0\|_1 < \delta \implies \|F(x) - F(x^0)\|_2 < \varepsilon.$

Beispiele :

- $\left[\mathbb{X}_1, \|\cdot\|_1\right] = \left[\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_i\right], \;\; \left[\mathbb{X}_2, \|\cdot\|_2\right] = \left[\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_j\right], \;\; i,j \in \{1,2,\infty\}$
  $y = Ax$, $A \ldots (m,n)-$Matrix (*lineare Abbildung*) stetig
- betrachten (a)-(f) jeweils in $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right) = (0,0)$, o.B.d.A. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$

(a) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$



$f(x_1,x_2)$ stetig in $(x_1^0, x_2^0) = (0,0)$:

$$|f(x_1,x_2) - f(0,0)| = \left|\frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right| \leq \frac{|x_1|}{2} < \varepsilon$$

für $\|(x_1,x_2) - (0,0)\|_1 = |x_1| + |x_2| < \delta \leq 2\varepsilon$

(b) $f(x_1,x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2\,x_1\,x_2}{x_1^2 + x_2^2} & , \;\; (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , \;\; (x_1,x_2) = (0,0) \end{array} \right\}$ unstetig in $(0,0)$:

sei $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, <u>g.z.z.</u> : $\forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, (x_1^\delta, x_2^\delta)$:

$$\left\|(x_1^\delta, x_2^\delta)\right\| = \left|x_1^\delta\right| + \left|x_2^\delta\right| < \delta, \quad \left|f(x_1^\delta, x_2^\delta) - f(0,0)\right| = \left|f(x_1^\delta, x_2^\delta)\right| \geq \frac{1}{2}$$

sei $\delta > 0$, wählen $x_1^\delta = x_2^\delta = \dfrac{\delta}{3} \curvearrowright \left|x_1^\delta\right| + \left|x_2^\delta\right| = \dfrac{2}{3}\delta < \delta$, $\left|f(x_1^\delta, x_2^\delta)\right| = 1 > \dfrac{1}{2}$

(c) $f(x_1,x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 \, \sin\left(\dfrac{1}{x_2}\right) & , \;\; x_2 \neq 0 \\ 0 & , \;\; x_2 = 0 \end{array} \right\}$ stetig in $(0,0)$:

$$|f(x_1,x_2) - f(0,0)| = \left|x_1 \sin\left(\frac{1}{x_2}\right)\right| \;\leq\; |x_1| \;\leq\; \|(x_1,x_2)\|_1 < \delta$$

Beispiele : **(d)** $f(x_1, x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{x_1^2 + x_2^2} \ , & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 \ , & (x_1, x_2) = (0,0) \end{array} \right\}$ unstetig in $(0,0)$:

sei $\varepsilon = 1$, g.z.z. : $\forall\ \delta > 0 \quad \exists\ (x_1^\delta, x_2^\delta)$:

$$\|(x_1^\delta, x_2^\delta)\| = |x_1^\delta| + |x_2^\delta| < \delta, \quad |f(x_1^\delta, x_2^\delta) - f(0,0)| = |f(x_1^\delta, x_2^\delta)| \geq 1$$

sei $\delta > 0$, wählen $x_1^\delta = -x_2^\delta = \frac{\delta}{3} \curvearrowright |x_1^\delta| + |x_2^\delta| = \frac{2}{3}\delta < \delta, \ |f(x_1^\delta, x_2^\delta)| = 2 > 1$

(e) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1, x_2)$ stetig in $(0,0)$

(f) $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \quad \Longrightarrow \quad f(x_1, x_2)$ stetig in $(0,0)$:

$$|f(x_1, x_2) - f(0,0)| = 1 - \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \leq x_1^2 + x_2^2 < \delta^2$$

Lemma 7.1.5 *Ist* $f(x_1, \ldots, x_n)$, $D(f) = M \subset \mathbb{R}^n$, *stetig in* $x^0 \in M$, *so sind die Funktionen* $\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, *gegeben durch*

$$\varphi_k(\xi) := f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, \overset{\overset{k}{\downarrow}}{\xi}, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

jeweils stetig in x_k^0, $k = 1, \ldots, n$.

Bemerkung*: Die Umkehrung ist nicht richtig !

Gegenbeispiel : sei $(x_1^0, x_2^0) = (0,0)$, $f(x_1, x_2)$ wie in **(b)** von oben,

$$f(x_1, x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2\ x_1\ x_2}{x_1^2 + x_2^2} \ , & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 \ , & (x_1, x_2) = (0,0) \end{array} \right\} \quad \text{unstetig in} \quad (0,0)$$

aber : $\varphi_1(\xi) = f(\xi, 0) \equiv 0$, $\varphi_2(\xi) = f(0, \xi) \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1(\xi), \ \varphi_2(\xi)$ stetig in $\xi = 0$

Satz 7.1.6 *Gegeben seien eine Funktion* $y = f(x)$ *mit* $D(f) = M \subset \mathbb{R}^n$, *und ein Häufungspunkt* x^0 *von* $D(f)$. *Dann ist* $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$ *genau dann, wenn* $f(x)$ *in* x^0 *stetig ist.*

Kann der Grenzwert einer Funktion $\lim\limits_{x \to x^0} f(x)$ *koordinatenweise gebildet werden ?* $\underset{\text{Satz 7.1.6}}{\Longleftrightarrow}$ Frage der Stetigkeit von $f(x)$ in x^0; d.h.

$$\lim_{(x_1,x_2) \to (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2)$$

ist i.a. nur für (in x^0) stetige $f(x)$ richtig (falls die Grenzwerte überhaupt existieren). Insbesondere folgt aus

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2) = A$$

i.a. <u>nicht</u> die Existenz von $\lim\limits_{x \to x^0} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = A$!

Beispiele :

- $f(x_1,x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2\,x_1\,x_2}{x_1^2+x_2^2} & , \quad (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x_1,x_2) = (0,0) \end{array} \right\}$ unstetig in $(0,0)$

$$\lim_{x_1\to 0}\ \lim_{x_2\to 0}\ f(x_1,x_2) \ = \lim_{x_1\to 0} \frac{0}{x_1^2} = 0, \quad \lim_{x_2\to 0}\ \lim_{x_1\to 0}\ f(x_1,x_2) \ = \ \lim_{x_2\to 0} \frac{0}{x_2^2} = 0$$

$$x^k \ = \ \left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right) \quad \curvearrowright \quad \lim_{k\to\infty} x^k \ = \ (0,0), \ \lim_{k\to\infty} f(x^k) \ = \ \lim_{k\to\infty} 1 \ = \ 1 \quad \curvearrowright$$
$$\nexists \quad \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \ f(x_1,x_2)$$

- $f(x_1,x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 \sin\left(\dfrac{1}{x_2}\right) & , \quad x_2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x_2 = 0 \end{array} \right\}$, $f(x_1,x_2)$ stetig in $(0,0)$

$$\curvearrowright \quad \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \ f(x_1,x_2) = f(0,0) = 0$$

$$\lim_{x_1\to 0}\ \lim_{x_2\to 0}\ f(x_1,x_2) \ = \lim_{x_1\to 0}\ x_1 \ \underbrace{\lim_{x_2\to 0} \sin\left(\frac{1}{x_2}\right)}_{\text{ex. nicht}} \quad \text{existiert nicht,}$$

$$\lim_{x_2\to 0}\ \lim_{x_1\to 0}\ f(x_1,x_2) \ = \ \lim_{x_2\to 0}\ 0 \ = 0$$

Lemma 7.1.7 *Eine Funktion* $F:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D(F) \subseteq \mathbb{R}^n$, $W(F) \subseteq \mathbb{R}^m$, *gegeben durch*

$$F(x_1,\ldots,x_n) = \big(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)\big) \ ,$$

ist stetig in $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *genau dann, wenn die Funktionen* $f_k(x)$, $D(f_k) = D(F)$, $k = 1,\ldots,m$, *in* x^0 *stetig sind.*

Bemerkung*:

- Lemma 7.1.7 $\Longrightarrow$ ausreichend, Funktionen $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zu betrachten anstelle von $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
- Lemma 7.1.5 $\Longleftrightarrow$ weitere Reduzierung nicht möglich; für wesentliche Effekte aber oft Situation $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ausreichend

Satz 7.1.8 *Linearkombinationen, Produkt und Quotient stetiger* $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *Funktionen sind wieder stetig, solange die Funktion im Nenner nicht verschwindet.*

'Verkettung' von Funktionen

Seien $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$, $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow W(f) \subseteq \mathbb{R}$, und $x_k = \varphi_k(t) = \varphi_k(t_1,\ldots,t_m)$, $\varphi_k:\ D(\varphi_k) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow W(\varphi_k) \subseteq \mathbb{R}$, $k = 1,\ldots,n$. Es gelte

$$\bigcap_{k=1}^{n} D(\varphi_k) \ \neq \ \emptyset \ , \qquad \text{und} \qquad \bigtimes_{k=1}^{n} W(\varphi_k) \ \subset \ D(f) \ .$$

Dann wird durch

$$(f\circ\phi)\,(t) := f\big(\varphi_1(t_1,\ldots,t_m),\ldots,\varphi_n(t_1,\ldots,t_m)\big)$$

die zusammengesetzte ('verkettete') Funktion $(f\circ\phi):\ D(\phi) = \bigcap_{k=1}^{n} D(\varphi_k) \ \subseteq \mathbb{R}^m \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ definiert.

Beispiel : $z \;=\; \mathcal{K}(x,y) = \gamma\, \dfrac{m_1\, m_2}{\|x-y\|_2}$, m_1, m_2 konstant

$x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big)$ ... *zeitabhängige Bahnkurve eines Massepunktes* *mit Masse* m_1
$y(t) = \big(y_1(t), y_2(t), y_3(t)\big)$ *mit Masse* m_2

$$\Longrightarrow \quad z(t) = \mathcal{K}(x(t), y(t)) \;=\; \gamma\, \frac{m_1\, m_2}{\|x(t)-y(t)\|_2} \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Anziehungskraft zwischen zwei Massen m_1 *und* m_2 *zum Zeitpunkt* t

Satz 7.1.9 *Sind* $f(x)$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, *und* $x = \phi(t)$, $D(\phi) \subseteq \mathbb{R}^m$, *wie oben gegeben und stetig, so ist auch* $(f \circ \phi)$ *auf* $D(\phi)$ *stetig.*

7.2 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit

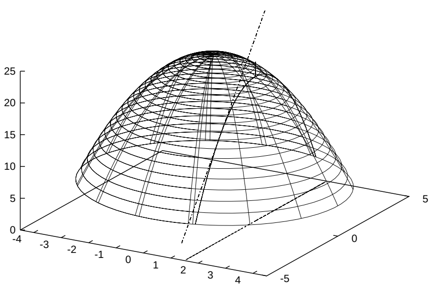
Definition 7.2.1 *Eine Funktion* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *mit* $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ *besitzt in* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D(f)$ *eine* partielle Ableitung nach x_k, $k = 1, \ldots, n$, *falls der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h}$$

existiert. Er wird dann mit $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ *bezeichnet.*

Bemerkung*: *frühere Bezeichnung* : $f(x_1, \ldots, x_n)$ hat partielle Ableitung nach x_k $\Longleftrightarrow$ $\varphi_k(\xi)$ ist in $\xi = x_k^0$ differenzierbar, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \;=\; \varphi_k'(x_k^0)$.

Tangente an $\left(x_1^0, x_2^0, f\left(x_1^0, x_2^0\right)\right)$ *mit Anstieg* $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)$



$$f(x_1, x_2) = 25 - \left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad (x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \;=\; -\,2\, x_2^0 \;=\; 5$$

$$\underline{\textit{Tangente}} : \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{33}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Beispiele :

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $D(f) = \mathbb{R}^2$ $\curvearrowright$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = 2\, x_1^0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) = 2\, x_2^0$

- $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, $D(f) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$

  $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = \dfrac{-\,x_1^0}{\sqrt{1 - (x_1^0)^2 - (x_2^0)^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) = \dfrac{-\,x_2^0}{\sqrt{1 - (x_1^0)^2 - (x_2^0)^2}}$

- $h(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k$, $D(h) = \mathbb{R}^n$ $\curvearrowright$ $\dfrac{\partial h}{\partial x_k}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \;=\; a_k$, $k = 1, \ldots, n$

Satz 7.2.2 *Besitzt eine Funktion $f(x)$ in einer Umgebung $U = U(x^0)$ eines Punktes $x^0 \in D(f)$ alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, $k = 1, \ldots, n$, $x \in U$, und sind diese beschränkt, d.h.*

$$\sup_{x \in U} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right| \leq M \;, \quad k = 1, \ldots, n,$$

so ist $f(x)$ in x^0 auch stetig.

Bemerkung*: Beschränktheit der partiellen Ableitungen ist wesentlich !

Beispiel : $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases} \curvearrowright \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) &= \frac{2\, x_2^0 \left[(x_2^0)^2 - (x_1^0)^2 \right]}{\left[(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 \right]^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) &= \frac{2\, x_1^0 \left[(x_1^0)^2 - (x_2^0)^2 \right]}{\left[(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 \right]^2} \end{aligned} \right\}$ nicht beschränkt bei $x^0 = 0$

<u>nächstes Ziel</u> : Approximation von $f(x)$ mittels $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ in einer Umgebung von x^0

Wiederholung Lemma 4.1.2 ($n = 1$) : $f(x)$ in x^0 differenzierbar $\Longleftrightarrow$

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \;:\; f(x) = f(x^0) + \alpha(x - x^0) + r(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \to x^0} \frac{r(x)}{x - x^0} = 0, \quad \text{dann :} \;\; \alpha = f'(x^0)$$

suchen Analogon für $n > 1$, zunächst $n = 2$:

Sei $f(x_1, x_2)$ definiert in einer Umgebung $U = U(x^0)$ von $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in D(f)$, besitze dort stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$, $x \in U$ $\curvearrowright$ $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2)$, $k = 1, 2$, beschränkt $\xRightarrow[\text{Satz 7.2.2}]{}$ $f(x_1, x_2)$ stetig in x^0

Seien $h_1^0,\ h_2^0 > 0$ so, dass $x^0 + h \in U$ für $|h_1| \leq h_1^0,\ |h_2| \leq h_2^0$

$$\begin{aligned} \curvearrowright\; f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) - f(x_1^0, x_2^0) &= \underbrace{f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) - f(x_1^0, x_2^0 + h_2)}_{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0 + h_2)\; h_1} + \underbrace{f(x_1^0, x_2^0 + h_2) - f(x_1^0, x_2^0)}_{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 h_2)\; h_2} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)\; h_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \right] h_1 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)\; h_2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \right] h_2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)\; h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)\; h_2 + r(h_1, h_2) \qquad \text{mit} \end{aligned}$$

$$\frac{r(h_1, h_2)}{\|h\|_1} = \frac{r(h_1, h_2)}{|h_1| + |h_2|} \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \right|$$

$$\xRightarrow[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\ \text{stetig}]{} \lim_{h \to 0} \frac{r(h_1, h_2)}{\|h\|_1} = 0$$

$$\curvearrowright\; f(x^0 + h) = f(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)\; h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)\; h_2 + r(h) \qquad \text{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|_1} = 0$$

Definition 7.2.3 *Eine Funktion* $f(x)$, $D(f) \subset \mathbb{R}^n$, *heißt* (total) differenzierbar in $x^0 \in D(f)$, *wenn Zahlen* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *existieren, für die gilt*

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x_k - x_k^0) + r(x - x^0) \qquad \textit{mit} \qquad \lim_{x \to x^0} \frac{|r(x-x^0)|}{\|x - x^0\|} = 0 \,.$$

Bemerkung*:

- $n = 1$: total differenzierbar = differenzierbar (Lemma 4.1.2)
- analog zum eindimensionalen Fall sind a_i eindeutig bestimmt (falls sie existieren)

Folgerung 7.2.4 *Sei* $f(x)$ *differenzierbar in* $x^0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$.

(i) f *besitzt in* x^0 *alle partiellen Ableitungen erster Ordnung, es gilt* $a_k = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$, $k = 1, \ldots, n$.

(ii) f *ist stetig in* x^0.

Beweis*: <u>zu (i)</u>: $f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x_k - x_k^0) + r(x - x^0)$ mit $\lim_{x \to x^0} \frac{|r(x-x^0)|}{\|x - x^0\|} = 0$

setzen $x := (x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$, $k = 1, \ldots, n$

$\curvearrowright$ $f(x_1^0, \ldots, x_k, \ldots, x_n^0) - f(x^0) = a_k(x_k - x_k^0) + r(0, \ldots, 0, x_k - x_k^0, 0 \ldots, 0)$

$$\curvearrowright \underbrace{\lim_{x_k \to x_k^0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_k, \ldots, x_n^0) - f(x^0)}{x_k - x_k^0}}_{\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)} = a_k + \underbrace{\lim_{x_k \to x_k^0} \frac{r(0, \ldots, 0, x_k - x_k^0, 0 \ldots, 0)}{x_k - x_k^0}}_{0} = a_k$$

<u>zu (ii)</u>: $f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x_k - x_k^0) + r(x - x^0)$ mit $\lim_{x \to x^0} \frac{|r(x-x^0)|}{\|x - x^0\|} = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{\lim_{x \to x^0}(x_k - x_k^0)}_{0} + \underbrace{\lim_{x \to x^0} \frac{r(x-x^0)}{x - x^0}}_{0} \underbrace{\lim_{x \to x^0} (x - x^0)}_{0} = f(x^0) \qquad \square$$

Bemerkung*:

- $g : D(g) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}$, $g_k : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, m$,

  heißt (*total*) *differenzierbar in* $x^0 \in D(g)$ $\Longleftrightarrow$ $\exists\ (m,n)-$ Matrix $\mathcal{J} = \mathcal{J}(g, x^0)$ mit

  $$g(x) = g(x^0) + \mathcal{J}(g, x^0)(x - x^0) + r(x - x^0) \qquad \text{mit} \qquad \lim_{x \to x^0} \frac{\|r(x-x^0)\|}{\|x - x^0\|} = 0$$

  Für diese Matrix gilt

  $$\mathcal{J}(g, x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^0) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x^0) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$

  Jacobi[26]- bzw. *Funktionalmatrix*

- Sind f, $g : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x^0 \in G$, so auch $(f+g) : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $(\alpha f) : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$, in x^0; Aussagen über Produkte und Quotienten nur für $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}-$ Funktionen möglich

[26] Carl Gustav Jacob Jacobi (* 10.12.1804 Potsdam † 18.2.1851 Berlin)

7.3 Kettenregel, Richtungsableitung, Tangentialebene

Satz 7.3.1 (Kettenregel) *Gegeben sei eine Funktion* $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit stetigen partiellen Ableitungen in* G*, und Funktionen* $\varphi_j(t) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$*, die stetig differenzierbar auf* I *sind und für die* $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in G$ *für* $t \in I$*. Dann ist die (verkettete) Funktion* $\psi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi(t) := (f \circ \varphi)(t)$ *stetig differenzierbar auf* I*, es gilt*

$$\psi'(t) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t)) \cdot \varphi_j'(t)\ .$$

Bemerkung*: Für Funktionen $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $\Phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gilt ein analoges Resultat zu Satz 7.3.1.

Definition 7.3.2 *Seien* $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|\nu\|_2 = 1$*, und* $f(x) : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*. Die Funktion* $f(x)$ *besitzt in* $x^0 \in G$ *eine* Richtungsableitung in Richtung ν*, falls*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^0 + h\nu) - f(x^0)}{h} \;=:\; \frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0)$$

existiert.

<u>Bezeichnung</u> : Sei $f(x)$ in $x^0 \in G$ differenzierbar. Dann heißt

$$(\nabla f)(x^0) = (\operatorname{grad} f)(x^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)$$

Gradient von $f(x)$ *in* x^0.

Satz 7.3.3 *Ist* f *in* $x^0 \in G$ *differenzierbar und* $\nu \in \mathbb{R}^n$ *ein beliebiger Vektor mit* $\|\nu\|_2 = 1$*, so gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \cdot \nu_k \;=\; \big\langle (\operatorname{grad} f)(x^0),\ \nu \big\rangle\,.$$

B e w e i s*: Lemma 7.2.4 mit $x = x^0 + h\nu$: $f(x^0 + h\nu) - f(x^0) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)(h\nu_k) + r(h\nu)$ mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{|r(h\nu)|}{\underbrace{\|h\nu\|_2}_{=|h|\|\nu\|_2 = |h|}} = 0 \curvearrowright \lim_{h \to 0} \frac{f(x^0 + h\nu) - f(x^0)}{h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\nu_k + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{r(h\nu)}{h}}_{0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\nu_k \qquad \square$$

Bemerkung*: $\nu_0 := \dfrac{\operatorname{grad} f(x^0)}{\|\operatorname{grad} f(x^0)\|_2}$ …'*Richtung des stärksten Wachstums von* $f(x)$ *im Punkt* x^0' ;
insbesondere zeigt $\operatorname{grad} f(x^0)$ in die Richtung des stärksten Wachstums der Funktion $f(x)$ in x^0, $-\operatorname{grad} f(x^0)$ in die Richtung des stärksten Abstiegs, d.h. so, dass $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}(x^0)$ maximal bzw. minimal wird:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0) = \big\langle (\operatorname{grad} f)(x^0),\ \nu \big\rangle = \big\|\operatorname{grad} f(x^0)\big\|_2 \, \|\nu\|_2 \, \underbrace{\cos\big(\operatorname{grad} f(x^0), \nu\big)}$$

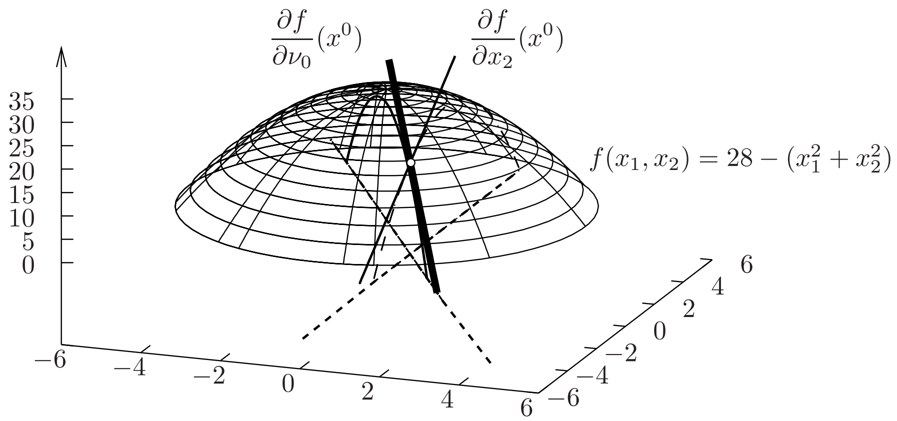
maximal $\iff \angle(\operatorname{grad} f(x^0), \nu) = 0 \iff \nu \upuparrows \operatorname{grad} f(x^0)$

minimal $\iff \angle(\operatorname{grad} f(x^0), \nu) = \pi \iff \nu \downarrow\uparrow \operatorname{grad} f(x^0)$

Beispiel : $f(x_1, x_2) = 28 - \left(x_1^2 + x_2^2\right)$, $\quad (x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

$$\curvearrowright \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = -2x_1^0 = -3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) = -2x_2^0 = 5 \curvearrowright \operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0) = (-3, 5)$$

$$\curvearrowright \nu_0 := \frac{\operatorname{grad} f(x^0)}{\|\operatorname{grad} f(x^0)\|_2} = \frac{1}{\sqrt{34}}(-3, 5)$$



<u>*Tangentialebene*</u>

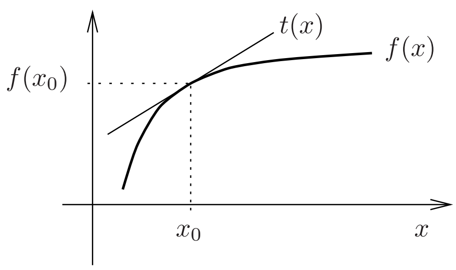
$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (n = 2)$

früher: $(n = 1)$: Tangente $t_{x_0}(x)$ an f in $x_0 \in D(f)$:

$$t_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ist einzige Gerade mit der Eigenschaft

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - t(x)}{x - x_0} = 0$$



suchen Äquivalent für $n = 2 \quad \Longrightarrow \quad$ *geometrisch* : Tangential*ebene*

Sei $z = f(x, y)$, $D(f) = G \subset \mathbb{R}^2$ stetig,

$$\Gamma_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in G, \ z = f(x, y)\right\} \subset \mathbb{R}^3 \quad \ldots \quad \text{Fläche im } \mathbb{R}^3$$

Ebene im $\mathbb{R}^3$: $\quad E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \alpha x + \beta y + \gamma\right\}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Ebene durch $\left(x^0, y^0, f(x^0, y^0)\right)$: $\quad z - \underbrace{z^0}_{= f(x^0, y^0)} = \alpha(x - x^0) + \beta(y - y^0)$

$$\Longleftrightarrow \quad g(x, y) := z = \alpha(x - x^0) + \beta(y - y^0) + f(x^0, y^0)$$

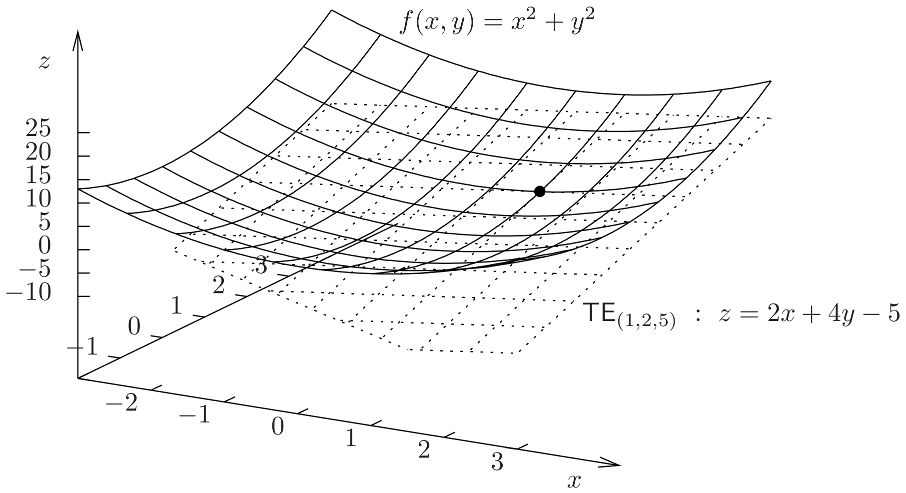
Eine solche Ebene heißt <u>*Tangentialebene*</u>, falls $\displaystyle \lim_{(x,y) \to (x^0, y^0)} \frac{f(x, y) - g(x, y)}{\|(x - x^0, y - y^0)\|} = 0$ gilt.

Beispiel : $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad (x^0, y^0) = (1,2) \quad \Longrightarrow \quad z^0 = f(x^0, y^0) = 5$

Behauptung : $\quad g(x,y) := 2x + 4y - 5$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)} \frac{f(x,y) - g(x,y)}{\|(x - x^0, y - y^0)\|_2} &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}{\|(x-1, y-2)\|_2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \|(x-1, y-2)\|_2 = 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad g(x,y) \quad$ ist Tangentialebene durch $\left(x^0, y^0, f(x^0, y^0)\right) = (1,2,5)$



Satz 7.3.4 *Ist* $f(x,y)$, $D(f) = G \subset \mathbb{R}^2$, *differenzierbar in* $(x^0, y^0) \in G$, *so ist*

$$z - z^0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0)\left(x - x^0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)\left(y - y^0\right)$$

die eindeutig bestimmte Tangentialebene an $f(x,y)$ *im Punkt* (x^0, y^0, z^0), $z^0 = f(x^0, y^0)$.

Die Tangenten aller Richtungsableitungen an $f(x,y)$ *im Punkt* (x^0, y^0, z^0) *liegen in dieser Ebene.*

B e w e i s*: $\;f$ differenzierbar

$$\curvearrowright \; f(x,y) = \underbrace{f(x^0, y^0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0)\left(x - x^0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)\left(y - y^0\right)}_{z =: g(x,y)} + r(x - x^0, y - y^0)$$

mit $\; 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(x^0,y^0)} \dfrac{r(x - x^0, y - y^0)}{\|(x - x^0, y - y^0)\|} = \lim\limits_{(x,y)\to(x^0,y^0)} \dfrac{f(x,y) - g(x,y)}{\|(x - x^0, y - y^0)\|}$, $\quad$ Darstellung ist eindeutig

Sei $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$ beliebig, $\nu_1^2 + \nu_2^2 = 1 \;\curvearrowright\; \dfrac{\partial f}{\partial \nu}(x^0, y^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0)\nu_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)\nu_2$

Tangentengleichung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \\ f(x^0, y^0) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0, y^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \\ f(x^0, y^0) \end{pmatrix} + \underbrace{t\nu_1}_{r} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) \end{pmatrix} + \underbrace{t\nu_2}_{s} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \end{pmatrix}$$

$\curvearrowright$ Tangente liegt in Tangentialebene $\square$

Bemerkung*: allgemeiner : $f(x)$, $D(f) \subset \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(x^0) + \Big\langle \operatorname{grad} f)(x^0), x - x^0 \Big\rangle + r(x - x^0)$
Tangentialebene :

$$f(x) - f(x^0) = \langle \operatorname{grad} f\,(x^0)\,, x - x^0 \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)(x_j - x_j^0)$$

$$\curvearrowright\ 0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)(x_j - x_j^0) + (-1)\left(f(x) - f(x^0)\right)$$

$$= \left\langle \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0), -1\right)}_{\text{Normalenvektor an } f \text{ in } x^0}, (x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0, f(x) - f\,(x^0)) \right\rangle$$

<u>*Bezeichnung*</u>: $\overline{\nu}_\pm^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0), \pm 1\right)$, $\nu_\pm^0 := \frac{\overline{\nu}_\pm^0}{\|\overline{\nu}_\pm^0\|}$ ... *Normalenvektoren* an f in x^0,

$\nu_0^\pm \perp$ Tangentialebene an $f(x,y)$ im Punkt $(x^0, y^0, f(x^0, y^0))$, $\|\nu_0^\pm\| = 1$

Beispiel : $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x^0, y^0) = (1,2)$ $\curvearrowright$ $z^0 = f(x^0, y^0) = 5$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) = 2x^0 = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) = 2y^0 = 4$ $\curvearrowright$ $z - \underbrace{5}_{z_0} = 2(x - \underbrace{1}_{x_0}) + 4(y - \underbrace{2}_{y_0}) \iff z = 2x + 4y - 5$ $\text{TE}_{(1,2,5)}$
$\curvearrowright$ $\overline{\nu}_\pm^0 = (2, 4, \pm 1)$ $\curvearrowright$ $\|\nu_0\| = \sqrt{21}$ $\curvearrowright$ $\nu_\pm^0 = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, 4, \pm 1)$ Normalenvektoren

7.4 Vertauschbarkeit partieller Ableitungen höherer Ordnung, Satz von Taylor

Definition 7.4.1 *Sei* $f(x)$ *in* $D(f) = U \subset \mathbb{R}^n$ *gegeben mit* $x^0 \in U$*. Dann besitzt* $f(x)$ *in* x^0 zweite partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x^0)\ , \quad j, k = 1, \ldots, n,$$

falls $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ *in einer Umgebung von* x^0 *und* $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x^0)$ *existieren.*

Bemerkung*: iterativ : $\displaystyle \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_m} \partial x_{k_{m-1}} \ldots \partial x_{k_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{k_m}}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{k_{m-1}} \ldots \partial x_{k_1}}\right)$, $m \in \mathbb{N}$

Beispiele :

- sei $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar in $D(f)$

$$(\Delta f)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x), \quad x \in D(f), \quad \text{heißt } \textit{Laplace}^{27}\text{-Operator von } f$$

- sei $F : D(F) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar in $D(F) \iff F = (F_1, \ldots, F_n)$ mit $F_j : D(F) \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in $D(F)$, $j = 1, \ldots, n$

$$(\operatorname{div} F)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x), \quad x \in D(F), \quad \text{heißt } \textit{Divergenz} \text{ von } F$$

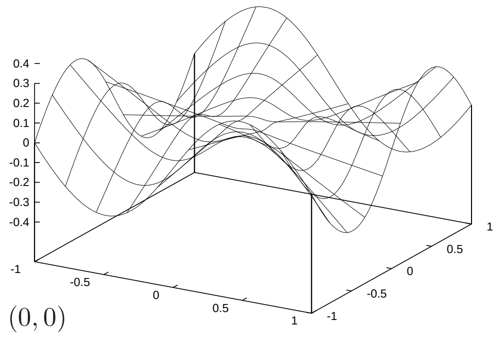
- $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar in $D(f)$ $\curvearrowright$ $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(x) \underset{F\,=\,\operatorname{grad} f}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}_{F_j}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) = (\Delta f)(x)$$

[26]Pierre Simon Laplace (* 23.1.1749 Beaumont-en-Auge, Normandie † 5.3.1827 Paris)

Problem : i.a. ist $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x^0) \neq \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x^0)$

Beispiel : $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right], \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y \quad \text{für alle } y \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right], \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x \quad \text{für alle } x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$$

$$(x,y) \neq (0,0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left[1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right],$$

besitzt aber für $(x,y) \to (0,0)$ keinen Grenzwert und ist demzufolge in $(0,0)$ unstetig

Satz 7.4.2 (Satz von Schwarz[28])

Ist $f(x)$ in einer Umgebung U von $x^0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$ stetig, existieren in U die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x)$, $j,k = 1,\ldots,n$, und sind $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x)$ in x^0 stetig, so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x^0), \quad j,k = 1,\ldots,n.$$

Bemerkung*: $f(x)$ habe in einer Umgebung U sämtliche partielle Ableitungen bis zur Ordnung m, die alle stetig seien. Dann folgt aus der iterativen Anwendung des Satzes

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_m} \,\ldots\, \partial x_{k_1}}(x) = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \,\ldots\, \partial x_n^{\alpha_n}}(x) =: (\mathrm{D}^\alpha f)(x),$$

mit $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$.

Bezeichnungen : $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ... 'Multi-index'

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$

$y = (y_1,\ldots,y_n) \quad \Longrightarrow \quad y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n}, \quad (\mathrm{D}^\alpha f)(y) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y_1^{\alpha_1} \,\ldots\, \partial y_n^{\alpha_n}}(y)$

[28] Hermann Amandus Schwarz (* 25.1.1843 Hermsdorf (Schlesien) † 30.11.1921 Berlin)

Satz 7.4.3 (Satz von Taylor im $\mathbb{R}^n$)
Sei $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *in einer Umgebung* U *von* $x^0 \in G$ $(k+1)-$ *mal stetig partiell differenzierbar, d.h.* $(\mathrm{D}^\alpha f)(x)$ *existiert in* U *und ist stetig für* $|\alpha| \le k+1$. *Dann gilt für* $x \in U$

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{1}{\alpha!} \left(\mathrm{D}^\alpha f\right)\left(x^0\right)\left(x - x^0\right)^\alpha + \sum_{|\beta| = k+1} \frac{1}{\beta!} \left(\mathrm{D}^\beta f\right)\left(x^0 + \theta(x - x^0)\right)\left(x - x^0\right)^\beta$$

für ein $\theta = \theta\left(x^0, x\right)$, $0 < \theta < 1$.

Beispiel : Taylorpolynome für $n = 2$, $k = 2$

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \underbrace{f(x^0,y^0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)(x-x^0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)(y-y^0)}_{t_1(x,y)} \\ &+ \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0,y^0)(x-x^0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^0,y^0)(x-x^0)(y-y^0) \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0,y^0)(x-x^0)(y-y^0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^0,y^0)(y-y^0)^2\Bigg) + r_3(x,y;x^0,y^0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1(x,y) =& f(x^0,y^0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)(x-x^0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)(y-y^0) \\ t_2(x,y) =& t_1(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0,y^0)(x-x^0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0,y^0)(x-x^0)(y-y^0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^0,y^0)(y-y^0)^2 \end{aligned}$$

Bemerkung*: Man kann in Analogie zum eindimensionalen Fall n-dimensionale Taylor-Reihen betrachten,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\left(\mathrm{D}^\alpha f\right)\left(x^0\right)}{\alpha!}\left(x - x^0\right)^\alpha \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f(x^0)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n} \end{aligned}$$

7.5 Auflösungssatz und Koordinatentransformationen

eindimensionaler Fall : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ $\Longrightarrow$ wann existiert Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$?

hinreichend : $f'(x^0) \neq 0 \Longrightarrow \exists\, \delta > 0 : f(x)$ ist umkehrbar auf $(x^0 - \delta, x^0 + \delta)$, $D(f^{-1}) = W(f)$,

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}(y) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)}\Bigg|_{x=f^{-1}(y)} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}(y)}\Bigg|_{y=f(x)}$$

Lemma 3.4.2, Satz 4.2.3

$n-$ dimensionaler Fall :

betrachten zunächst lineare Abbildungen $y = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $A \ldots (m,n)-$ Matrix

$$y = Ax \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k, \quad j = 1, \ldots, m$$

Wann ist das entsprechende Gleichungssystem eindeutig nach $x_1,\dots,x_n$ auflösbar für beliebig gegebene $y_1,\dots,y_m$? $\xRightarrow[\text{lineare Algebra}]{}$ $m=n,\quad \det A\neq 0$

<u>*Idee*</u>: $f:G\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ differenzierbar in x^0 $\xRightarrow[\text{Lemma 7.2.4}]{}$ $y=f(x)=f(x^0)+\mathcal{J}\left(f,x^0\right)(x-x^0)+r(x-x^0)$

mit $\displaystyle\lim_{x\to x^0}\frac{\left\|r(x-x^0)\right\|}{\|x-x^0\|}=0$ und $\mathcal{J}\left(f,x^0\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0)\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0)\end{pmatrix}$

$m=n$, $\det\mathcal{J}\left(f,x^0\right)\neq 0 \curvearrowright \mathcal{J}\left(f,x^0\right)$ invertierbar $\curvearrowright x=\mathcal{J}\left(f,x^0\right)^{-1}y$, $\quad a_{jk}^{-1}=\frac{\partial x_j}{\partial y_k}$ lassen sich (bei x^0) aus den $\frac{\partial f_i}{\partial x_m}(x^0)$ berechnen

Satz 7.5.1 *Die Funktion $f:G\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ besitze in G stetige erste partielle Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$, $j,k=1,\dots,n$, und für $x^0\in G$ gelte $\det\mathcal{J}\left(f,x^0\right)\neq 0$.*

Dann existiert eine Umgebung U von x^0, so dass $y=f(x)$ eine eineindeutige Abbildung von U auf eine Umgebung V von $y^0=f\left(x^0\right)$ beschreibt. Die Umkehrabbildung $x=g(y)$ besitzt stetige erste partielle Ableitungen $\frac{\partial g_k}{\partial y_j}$, $j,k=1,\dots,n$, und es gilt $\mathcal{J}\left(g,y^0\right)=\left[\mathcal{J}\left(f,g\left(y^0\right)\right)\right]^{-1}$.

Ist f in G $n-$mal stetig partiell differenzierbar, so ist auch die Umkehrfunktion $x=g(y)$ $n-$mal stetig partiell differenzierbar.

Anwendung: <u>Koordinaten-Transformationen</u>

- $n=2$: <u>*kartesische / Polarkoordinaten*</u>

  $(x,y)=g(r,\varphi),\ \ 0<r<\infty,\ \ 0\le\varphi<2\pi$

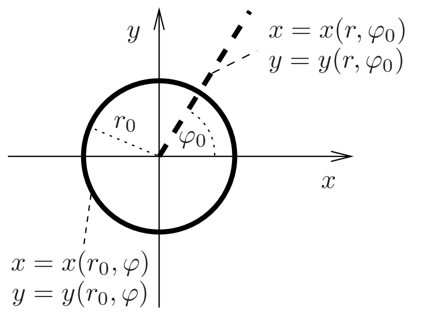
  $x=g_1(r,\varphi)=r\cos\varphi,\ \ y=g_2(r,\varphi)=r\sin\varphi$

  $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\mathcal{J}(r,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$$

  $\Longrightarrow\quad \det\mathcal{J}(r_0,\varphi_0)=r_0>0$

  d.h. überall auflösbar für $r_0>0$,

  $$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi=\begin{cases}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)(+\pi) & ,\ x\neq 0\\ \frac{\pi}{2}(+\pi) & ,\ x=0\end{cases}$$



transformierte Koordinatenlinien

- $n=3$: <u>*kartesische / Zylinderkoordinaten*</u>

  $(x,y,z)=g(r,\varphi,z),\ \ 0<r<\infty,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\ \ z\in\mathbb{R}$

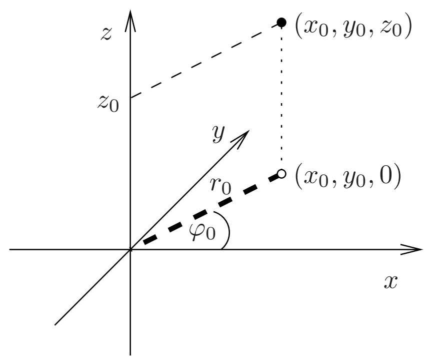
  $$\begin{aligned}x &= g_1(r,\varphi,z) = r\cos\varphi\\ y &= g_2(r,\varphi,z) = r\sin\varphi\\ z &= g_3(r,\varphi,z) = z\end{aligned}$$

  $$\mathcal{J}(r,\varphi,z)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

  $\Longrightarrow\quad \det\mathcal{J}(r_0,\varphi_0,z_0)=r_0>0$

  d.h. überall auflösbar für $r_0>0$

  (*Formeln wie Polarkoordinaten*)



transformierte Koordinaten

- $n = 3$: <u>*kartesische / Kugelkoordinaten*</u>

$(x, y, z) = g(r, \varphi, \vartheta), \ 0 < r < \infty, \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ 0 \le \vartheta \le \pi$

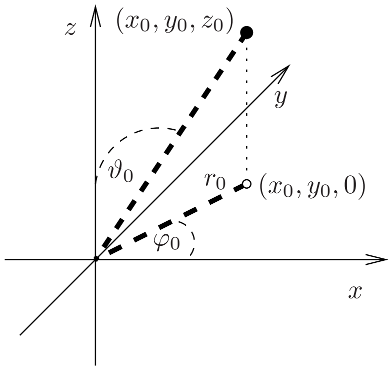
$$\begin{aligned} x &= g_1(r,\varphi,\vartheta) &= r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y &= g_2(r,\varphi,\vartheta) &= r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z &= g_3(r,\varphi,\vartheta) &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}(r,\varphi,\vartheta) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)}(r,\varphi,\vartheta)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \det\mathcal{J}(r_0,\varphi_0,\vartheta_0) = -r_0^2\sin\vartheta_0 < 0$$

d.h. überall auflösbar für $r_0 > 0, \ \ 0 < \vartheta_0 < \pi$



transformierte Koordinaten

Bemerkung*: Kugelkoordinaten : ϑ ... Winkel zwischen Vektor (x, y, z) und $z-$ Achse, $0 \le \vartheta \le \pi$

alternativ : $\widetilde{\vartheta}$ ... *Winkel zwischen Vektor* (x, y, z) *und* $(x, y)-$ *Ebene,* $-\frac{\pi}{2} \le \widetilde{\vartheta} \le \frac{\pi}{2}$

$$\widetilde{\vartheta} = \frac{\pi}{2} - \vartheta \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= g_1(r,\varphi,\widetilde{\vartheta}) &= r\cos\varphi\cos\widetilde{\vartheta} \\ y &= g_2(r,\varphi,\widetilde{\vartheta}) &= r\sin\varphi\cos\widetilde{\vartheta} \\ z &= g_3(r,\varphi,\widetilde{\vartheta}) &= r\sin\widetilde{\vartheta} \end{aligned}$$

$$\curvearrowright \ \det\mathcal{J}(r_0,\varphi_0,\widetilde{\vartheta}_0) = -r_0^2 \ \sin\underbrace{\left(\tfrac{\pi}{2} - \widetilde{\vartheta}_0\right)}_{\vartheta_0} = -r_0^2 \ \cos\widetilde{\vartheta}_0 < 0 \qquad \text{für} \qquad -\tfrac{\pi}{2} < \widetilde{\vartheta}_0 < \tfrac{\pi}{2}$$

7.6 Extremwerte von Funktionen

<u>*Der $n-$ dimensionale Fall*</u>

Definition 7.6.1 *Die Funktion* $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *besitzt in* $x^0 \in G$ *ein* lokales Maximum bzw. Minimum, *falls eine Umgebung* $U = \{x \in G : \|x - x^0\| < \delta\}$ *von* x^0 *existiert, so dass*

$$f(x) \ \le \ f\left(x^0\right) \quad \textit{bzw.} \quad f(x) \ \ge \ f\left(x^0\right)$$

für alle $x \in U$ *gilt.*

Bemerkung*: $n = 1 \quad \Longrightarrow \quad$ Definition 7.6.1 entspricht Definition 4.3.1

Definition 7.6.2 *Seien* $\{a_{jk}\}_{j,k=1}^n$ *reelle Zahlen. Die quadratische Form*

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \ \xi_j\xi_k \ , \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

heißt positiv definit *bzw.* negativ definit, *falls eine reelle Zahl* $c > 0$ *existiert, so dass*

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \ \xi_j\xi_k \ \ge \ c \ |\xi|^2 \qquad \textit{bzw.} \qquad \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \ \xi_j\xi_k \ \le \ - \ c \ |\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ *gilt.*

Bemerkung*:

- Definiert man für reelle Zahlen $\{a_{jk}\}_{j,k=1}^n$ die symmetrische Matrix A^* als

$$A^* = \left(\frac{a_{jk}+a_{kj}}{2}\right)_{j,k=1}^n \quad \curvearrowright \quad \xi^\top A\xi = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}\,\xi_j\xi_k = \xi^\top A^*\xi$$

$\curvearrowright$ ausreichend, symmetrische (reelle) Matrizen zu betrachten

- Sei für $\ell = 1,\ldots,n$

$$\Delta_\ell = \det A_\ell = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\ell} \\ a_{21} & \ldots & a_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\ell 1} & \ldots & a_{\ell\ell} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_\ell \end{array} \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ell} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\ell} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & & a_{\ell\ell} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Dann gilt :

A *positiv* definit $\iff \Delta_\ell > 0,$
$\ell = 1,\ldots,n$

A *negativ* definit $\iff \Delta_1 < 0,$
$\Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$
(*alternierende Vorzeichen*)

Spezialfall $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \curvearrowright A \begin{cases} \text{positiv definit} & \iff \det A > 0,\ a_{11} > 0 \\ \text{negativ definit} & \iff \det A > 0,\ a_{11} < 0 \\ \text{indefinit} & \iff \det A < 0 \end{cases}$

- Man bezeichnet

$$\mathcal{H}_f\left(x^0\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}\left(x^0\right)\right)_{j,k=1}^n$$

als *Hesse*[29]*-Matrix* der Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ in x^0.

Satz 7.6.3 *Die Funktion $f(x) : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ besitze in G stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung.*

(i) *Besitzt f in $x^0 \in G$ ein lokales Extremum, so gilt $(\operatorname{grad} f)(x^0) = (0,\ldots,0)$, d.h. $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = 0$, $k = 1,\ldots,n$.*

(ii) *Sei $(\operatorname{grad} f)(x^0) = (0,\ldots,0)$ für $x^0 \in G$. Falls $\mathcal{H}_f\left(x^0\right)$ positiv definit ist, so hat f in x^0 ein lokales (relatives) Minimum, falls $\mathcal{H}_f\left(x^0\right)$ negativ definit ist, so liegt in x^0 ein lokales (relatives) Maximum von f vor; ist $\mathcal{H}_f\left(x^0\right)$ indefinit, so liegt kein Extremum vor.*

Bemerkung*:

- Satz betrifft *innere* Punkte von G; lokales Extremum kann auch auf dem Rand vorliegen
- weitere Charakterisierung :
  - $\mathcal{H}_f\left(x^0\right)$ positiv / negativ definit, falls alle Eigenwerte positiv / negativ sind $\Longrightarrow$ lokales Extremum (*Minimum* / *Maximum*)
  - $\mathcal{H}_f\left(x^0\right)$ besitzt sowohl positive als auch negative Eigenwerte $\Longrightarrow$ kein Extremum
  - $\mathcal{H}_f\left(x^0\right)$ besitzt einen Eigenwert $\lambda = 0$ $\Longrightarrow$ keine Entscheidung möglich, weitere Untersuchungen notwendig (*höhere Ableitungen*)

[29]Ludwig Otto Hesse (* 22.4.1811 Königsberg † 4.8.1874 München)

Beispiele :

- $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y + 3 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y - 2 = 0 \curvearrowright x^0 = -\frac{4}{3}, \quad y^0 = \frac{1}{3}$$

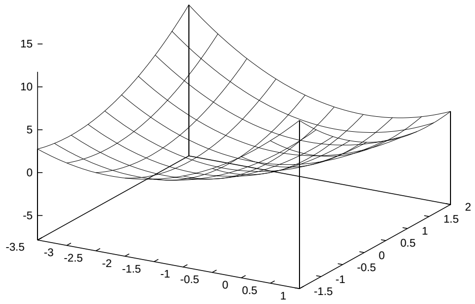
$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \mathcal{H}_f(x^0, y^0)$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{H}_f(x^0, y^0)$ positiv definit

$(\det \mathcal{H}_f(x^0, y^0) = 3 > 0, \ a_{11} = 2 > 0)$

$\Longrightarrow$ lokales Minimum in

$$P_{\min} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad f\left(P_{\min}\right) = -\frac{4}{3}$$



- $f(x,y) = \left(x^2 + 2y^2\right) \ e^{-(x^2+y^2)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\left(1 - x^2 - 2y^2\right) \ e^{-(x^2+y^2)} = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\left(2 - x^2 - 2y^2\right) \ e^{-(x^2+y^2)} = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$$

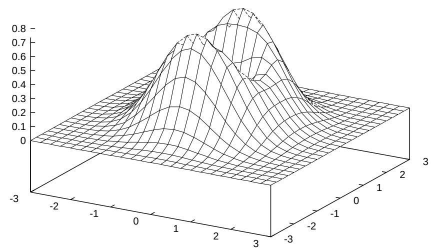
$$\curvearrowright \begin{array}{l} (x_1^0, y_1^0) = (0,0) \\ (x_2^0, y_2^0) = (0,1) \\ (x_3^0, y_3^0) = (0,-1) \\ (x_4^0, y_4^0) = (1,0) \\ (x_5^0, y_5^0) = (-1,0) \end{array}$$

$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \curvearrowright \det \mathcal{H}_f(0,0) > 0, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0 \curvearrowright$ lokales Minimum in $(0,0)$, $f(0,0) = 0$

$$\mathcal{H}_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}$$

$\curvearrowright \ \det \mathcal{H}_f(0,\pm 1) > 0, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pm 1) < 0$

$\curvearrowright$ lokale Maxima in $(0,\pm 1)$, $f(0,\pm 1) = \dfrac{2}{e}$



$\mathcal{H}_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix} \curvearrowright \det \mathcal{H}_f(\pm 1, 0) < 0$

$\Longrightarrow$ keine lokalen Extrema in $(\pm 1, 0)$

$P_{\min} = (0,0)$,	$f\left(P_{\min}\right) = 0$
$P_{\max}^{1,2} = (0,\pm 1)$,	$f\left(P_{\max}^{1,2}\right) = 2\,e^{-1}$

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Definition 7.6.4 *Seien* $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, *und*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ g(x) = 0\} \subset G \ .$$

Die Funktion f *besitzt in* $x^0 \in G$ *ein* lokales Maximum bzw. Minimum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, *falls* $x^0 \in M$ *ist und eine Umgebung* $U = \left\{x \in G : \left\|x - x^0\right\| < \delta\right\}$ *von* x^0 *existiert, so dass*

$$f(x) \ \leq \ f\left(x^0\right) \quad \textit{bzw.} \quad f(x) \ \geq \ f\left(x^0\right)$$

für alle $x \in U \cap M$ *gilt.*

Sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ gegeben mit den Nebenbedingungen $g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ m < n.$

Spezialfall : Nebenbedingungen lassen sich so auflösen, dass z.B.

$$x_1 = h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n),\ \ldots,\ \ x_m = h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

explizit darstellbar sind für geeignete Funktionen $h_i \implies$ Problem reduziert sich auf Suche lokaler Extremwerte (*ohne Nebenbedingungen*),

Beispiel : $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$

$D(f) = \overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+} \subset \mathbb{R}^2$

Nebenbedingung : $(n = 2, m = 1)$

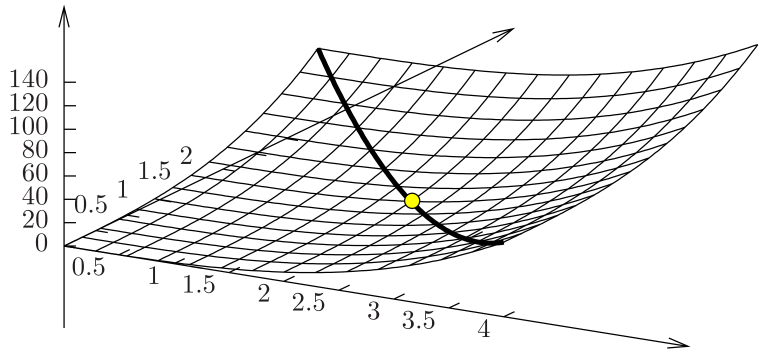
$x_1 + x_2 = 4 \iff$

$g(x_1, x_2) := x_1 + x_2 - 4 = 0$

$\implies x_2 = 4 - x_1$

$\implies \varphi(x_1) := x_1^3 + (4 - x_1)^3,$

$D(\varphi) = [0, 4]$



$\varphi'(\xi) = 0 \iff 3\xi^2 - 3(4 - \xi)^2 = 0 \iff \xi = 2,\ \varphi''(2) = 24 > 0 \implies$ lokales Minimum in $\xi = 2,\ \varphi(2) = 16 \implies f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$ hat unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2) := x_1 + x_2 - 4 = 0$ ein lokales Minimum in $\left(x_1^0, x_2^0\right) = (2, 2),\ f(2, 2) = 16$

Wie ist zu verfahren, wenn dieser Spezialfall nicht vorliegt (bzw. der Aufwand des Auflösens nach einzelnen Koordinaten 'sehr groß' wird) ?

z.B. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3,$ Nebenbedingungen :

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0 \\ g_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 8 = 0 \end{aligned}$$

Satz 7.6.5 *Seien $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, mit stetigen ersten partiellen Ableitungen. Die Funktion f besitze in $x^0 \in G$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$. Außerdem gebe es in $\mathcal{J}\left(g, x^0\right)$ eine $m-$ reihige Unterdeterminante, die nicht verschwindet. Dann existieren m reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, mit denen die Gleichungen*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x^0\right) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}\left(x^0\right) = 0\,, \quad j = 1, \ldots, n,$$

erfüllt werden.

Bemerkung*:

- Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ heißen *Lagrange-Multiplikatoren.*
- Gleichungssystem mit $n+m$ Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x^0\right) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}\left(x^0\right) = 0\,, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad g_k\left(x^0\right) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, m$$

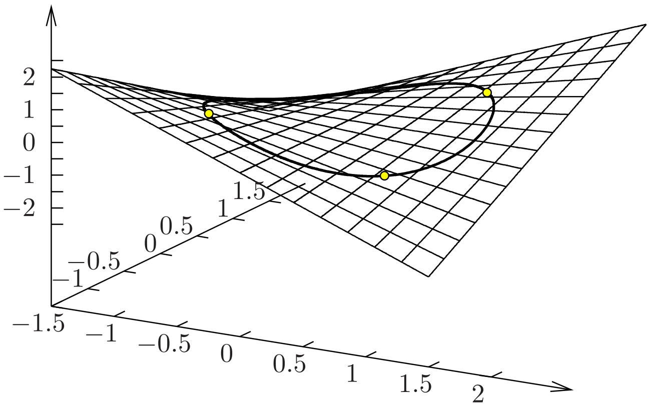
und $n+m$ Unbekannten : $x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$; es ergibt sich aus dem Ansatz

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) := f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n)$$

durch formales Differenzieren, $\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}(y) := 0, \;\; k = 1, \ldots, n+m$

- i.a. erhält man so nur Punkte x^0, die *'extremwertverdächtig'* sind

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: Sei $f(x,y) = xy$, Nebenbedingung : $x^2 + y^2 = 1 \iff g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$



$$\implies \mathcal{J}\left(g, \left(x^0, y^0\right)\right) = \left(2x^0, 2y^0\right)$$

verschwindet nur für

$$\left(x^0, y^0\right) = (0,0) \notin \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\right\}$$

$\implies$ Satz 7.6.5 anwendbar

$$\Phi(x,y,\lambda) := \underbrace{xy}_{f(x,y)} + \lambda \underbrace{\left(x^2 + y^2 - 1\right)}_{g(x,y)=0}$$

$$\left.\begin{array}{rcccl} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y,\lambda) & = & y + \lambda 2x & = & 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y,\lambda) & = & x + \lambda 2y & = & 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) & = & x^2 + y^2 - 1 & = & 0 \end{array}\right\} \implies y = -2\lambda x \implies \left\{\begin{array}{rcl} x(1-4\lambda^2) & = & 0 \\ x^2(1+4\lambda^2) & = & 1 \end{array}\right\}$$

$$\implies \lambda = \pm\frac{1}{2}, \;\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \;\; y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\implies$ *'extremwertverdächtige'* $\left(x^0, y^0\right)$:

$$\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \;\; \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),}_{f\left(x^0, y^0\right) = \frac{1}{2}} \;\; \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \;\; \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{f\left(x^0, y^0\right) = -\frac{1}{2}}$$

aus Skizze $\curvearrowright$ $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ... Maximum,

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ ... Minimum

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: Gegeben seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ und die Ebene

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; ax + by + cz = d\right\}.$$

Gesucht ist der Abstand eines Punktes $\left(x^0, y^0, z^0\right) \in \mathbb{R}^3$ von E, o.B.d.A. $\left(x^0, y^0, z^0\right) \notin E$.

$$f(x,y,z) \;=\; \left\|(x,y,z) - (x^0,y^0,z^0)\right\|_2 \;=\; \sqrt{(x-x^0)^2 + (y-y^0)^2 + (z-z^0)^2}$$

Nebenbedingung : $\quad g(x,y,z) = ax + by + cz - d = 0$

$\Longrightarrow \quad \mathcal{J}\left(g, \left(x^0, y^0, z^0\right)\right) = (a, b, c)$

verschwindet nur für $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, das ist aber wegen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ausgeschlossen
$\Longrightarrow$ Satz 7.6.5 anwendbar

$$\Phi(x,y,z,\lambda) := \underbrace{\sqrt{(x-x^0)^2 + (y-y^0)^2 + (z-z^0)^2}}_{f(x,y,z)} + \lambda \underbrace{(ax + by + cz - d)}_{g(x,y,z)=0}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^*, y^*, z^*, \lambda) = \frac{x^* - x^0}{\|(x^*, y^*, z^*) - (x^0, y^0, z^0)\|_2} + \lambda a = 0 \iff x^* = x^0 + \frac{\lambda a}{\|(x^*, y^*, z^*) - (x^0, y^0, z^0)\|_2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x^*, y^*, z^*, \lambda) = \frac{y^* - y^0}{\|(x^*, y^*, z^*) - (x^0, y^0, z^0)\|_2} + \lambda b = 0 \iff y^* = y^0 + \frac{\lambda b}{\|(x^*, y^*, z^*) - (x^0, y^0, z^0)\|_2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x^*, y^*, z^*, \lambda) = \frac{z^* - z^0}{\|(x^*, y^*, z^*) - (x^0, y^0, z^0)\|_2} + \lambda c = 0 \iff z^* = z^0 + \frac{\lambda c}{\|(x^*, y^*, z^*) - (x^0, y^0, z^0)\|_2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(x^*, y^*, z^*, \lambda) = ax^* + by^* + cz^* - d \qquad = 0$$

$$\begin{aligned}
\curvearrowright \; d &= ax^* + by^* + cz^* \\
&= a\left(x^0 - \lambda a \left\|(x^*, y^*, z^*) - (x^0, y^0, z^0)\right\|_2\right) + b\left(y^0 - \lambda b \left\|(x^*, y^*, z^*) - (x^0, y^0, z^0)\right\|_2\right) \\
&\qquad + c\left(z^0 - \lambda c \left\|(x^*, y^*, z^*) - (x^0, y^0, z^0)\right\|_2\right) \\
&= ax^0 + by^0 + cz^0 - \lambda \underbrace{(a^2 + b^2 + c^2)}_{=1} \left\|(x^*, y^*, z^*) - (x^0, y^0, z^0)\right\|_2
\end{aligned}$$

$$\curvearrowright \; \lambda = \frac{ax^0 + by^0 + cz^0 - d}{\|(x^*, y^*, z^*) - (x^0, y^0, z^0)\|_2}$$

$\Longrightarrow \quad$ *'extremwertverdächtig'* :

$$x^* = x^0 - a(ax^0 + by^0 + cz^0 - d), y^* = y^0 - b(ax^0 + by^0 + cz^0 - d), z^* = z^0 - c(ax^0 + by^0 + cz^0 - d)$$

$$\begin{aligned}
\curvearrowright \; f\left(x^*, y^*, z^*\right) &= \sqrt{(x^* - x^0)^2 + (y^* - y^0)^2 + (z^* - z^0)^2} \\
&= \underbrace{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}_{1} \left|ax^0 + by^0 + cz^0 - d\right| \\
&= \left|ax^0 + by^0 + cz^0 - d\right| \xRightarrow[\text{Aufgabenstellung}]{} \text{Minimum}
\end{aligned}$$

8 Beispiele gewöhnlicher DGL

8.1 Einführung, Existenz- und Unitätssätze

Beispiele : **(1)** Massepunkt m fällt unter dem Einfluss der Schwerkraft der Erde und einer Reibungskraft, die zur Geschwindigkeit proportional ist (*Stahlkugel in Wasser, Öl …*)

$x(t)$ … Ort des Massepunktes zur Zeit $t > 0$, $\underbrace{\dot{x}(t) := \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t),\ \ddot{x}(t) := \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)}_{\text{'Physiker'-Schreibweise}}$

Newton: $m\ddot{x} = F$, andererseits : $F = \overbrace{mg}^{\text{Schwerkraft}} - \overbrace{r\dot{x}}^{\text{Reibung}, \sim \dot{x}}, \quad r > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \curvearrowright\ m\ddot{x}(t) = mg - r\dot{x}(t) \iff \ddot{x}(t) + \frac{r}{m}\,\dot{x}(t) = g, \quad r, m > 0 \\ \text{Substitution}: \ v(t) = \dot{x}(t) \ \curvearrowright\ \dot{v}(t) + \frac{r}{m}\,v(t) = g \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{(gewöhnliche)}\\ \text{Differentialgleichung}\\ \text{erster/zweiter Ordnung}\end{array}$$

(2) *Modell zur Vermehrung einer Bakterienpopulation*

$P(t)$… Größe der Bakterienpopulation zur Zeit $t \geq 0$, 'Zuwachs' nach Zeitspanne Δt :

$$\Delta P := P(t + \Delta t) - P(t)$$

<u>*Modell-Annahme*</u> : bei günstigen Bedingungen (*Nährlösung*) vermehre sich die Population in kleinen Zeitabschnitten proportional zu Anfangsbestand und Zeitspanne, d.h.

$$\Delta P \approx \alpha\ P(t)\ \Delta t \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\Delta P}{\Delta t} \approx \alpha\ P(t)$$

für kleine $\Delta t > 0$, $\alpha > 0$ (*Proportionalitätsfaktor*), Grenzübergang $\Delta t \searrow 0$ 'liefert'

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}(t) = \alpha\ P(t)$$

(eine) Lösung dafür : $P(t) = c\ e^{\alpha t}$, $c \in \mathbb{R}$, bzw. (*falls Populationsgröße zur Zeit* $t_0 \geq 0$ *bekannt war*)

$$P(t) = P(t_0)\ e^{\alpha(t-t_0)}\ , \quad t \geq t_0 \quad \Longrightarrow \quad \text{'exponentielles Wachstum'}$$

(Anfangswertproblem), *später* : einzige Lösung

(3) *Modell zur logistischen Vermehrung einer Population*

möglicher Zugang : interpretieren α aus Beispiel (2) als $\alpha = \gamma - \tau$, γ … 'Geburtenrate', τ … 'Todesrate'

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}(t) = \gamma\ P(t) - \tau\ P(t)$$

Anpassung in großen Populationen : $\tau P(t) \mapsto \tau P(t)^2$ ersetzen, liefert dann '*logistische Differentialgleichung*':

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}(t) = \gamma\ P(t) - \tau\ P(t)^2\ , \quad \gamma,\ \tau > 0$$

alternativer Zugang : Population lebt mit beschränkten Ressourcen $\Longrightarrow$ maximale 'Trägerkapazität' des Lebensraumes sei K, Zuwachsrate wird dann als proportional zur Populationsgröße $P(t)$ und den noch freien Ressourcen $K - P(t)$ angenommen,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}(t) \;=\; \lambda P(t)\,(K - P(t)) \;, \qquad \lambda,\; K > 0$$

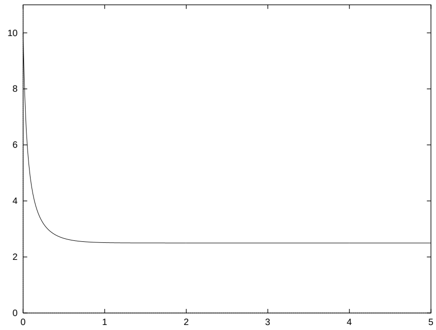
d.h. kein weiteres Wachstum ($\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}(t) = 0$) für $P(t) = 0$ (klar) bzw. $P(t) = K$ (Modellannahme)
Sei außerdem wieder $P(0)$ bekannt; Lösung ist dann z.B.

$$P(t) \;=\; \frac{\gamma}{\tau + \left(\frac{\gamma}{P(0)} - \tau\right) e^{-\gamma t}}$$

bzw.

$$P(t) \;=\; \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P(0)} - 1\right) e^{-\lambda K t}}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} P(t) \;=\; \frac{\gamma}{\tau} \;=\; K$$



$(\gamma = 5,\; \tau = 2,\; P(0) = 10)$

Bemerkung*: historisches Beispiel (Leibniz, 1693), 'silberne Taschenuhr':

„In der $x - y-$ Ebene ziehe man einen Punkt P an einer straff gespannten Schnur PZ der Länge a. Der 'Zugpunkt' Z soll auf der positiven $y-$ Achse fortrücken, und zu Beginn des Vorgangs befinde sich P in $(a, 0)$. Welche Kurve beschreibt P?“

$\Longrightarrow$ Zugschnur steht zur gesuchten Kurve

$$y = y(x) \;, \quad y(a) = 0,$$

tangential, d.h.

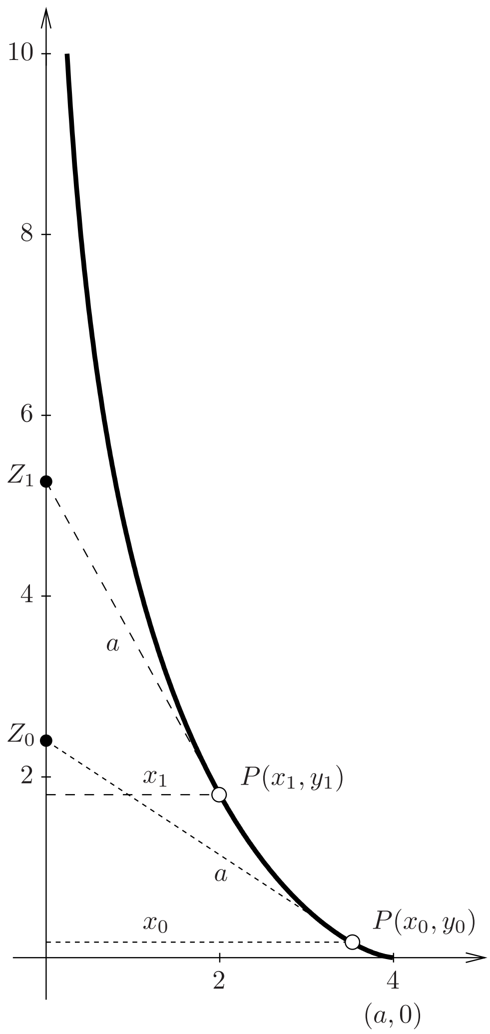
$$y'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \;, \quad y(a) = 0 \;, \qquad a > 0$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) \;=\; -\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \; a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$y(a) = 0 \;\Longrightarrow\; c = 0$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) \;=\; a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$



Definition 8.1.1 *Gegeben sei eine stetige Funktion* $k : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Unter einer* (expliziten, gewöhnlichen) Differentialgleichung $n-$ ter Ordnung *versteht man die Gleichung*

$$y^{(n)} \;=\; k\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \;. \qquad (*)$$

Eine reellwertige Funktion $y(x)$, $D(y) = I$, *wird* Lösung von $(*)$ *genannt, wenn* $y(x)$ *auf* I $n-$ *mal differenzierbar ist und*

$$y^{(n)}(x) = k\left(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right)$$

für alle $x \in I$ *gilt.*

Bezeichnungen

Die Menge aller Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung heißt allgemeine Lösung der DGL, jede einzelne Lösung wird auch als spezielle Lösung bezeichnet.

Unter einem Anfangswertproblem versteht man die Gleichung $(*)$ zusammen mit der Vorgabe der Werte der Lösungsfunktion $y(x)$ in einem Punkt x_0, d.h. wenn (zusätzlich) reelle Zahlen $y_0^0, \ldots, y_0^{n-1}$ gegeben sind und eine Lösung $y(x)$ auf I gesucht wird, die $(*)$ und

$$y(x_0) = y_0^0, \quad y'(x_0) = y_0^1, \quad \ldots \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$$

für (ein festes) $x_0 \in I$ erfüllt.

Modellfall : $\boxed{y' \;=\; k\,(x, y) \;, \qquad y(x_0) = y_0}$

Satz 8.1.2 *Seien* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $a, b > 0$, $Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b\right\}$, *sowie*

$$M \;=\; \max_{(x,y)\in Q} |k(x, y)| \;, \qquad \text{und} \qquad \alpha \;=\; \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Die Funktion $k(x, y)$ *sei stetig auf* Q.

(i) (Existenzsatz von Peano[30])
Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = k(x, y) \;, \qquad y(x_0) = y_0$$

mindestens eine auf $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ *definierte Lösung* $y(x)$.

(ii) (Satz von Picard[31]-Lindelöf[32])
Genügt $k(x, y)$ *auf* Q *zusätzlich einer Lipschitzbedingung bezüglich* y, *d.h. es existiert ein* $L > 0$, *so dass für alle* $(x, y) \in Q$, $(x, \overline{y}) \in Q$ *gilt*

$$|k\,(x, y) - k\,(x, \overline{y})| \leq \; L \; |y - \overline{y}| \,,$$

für die zusätzlich $\alpha L < 1$ *gelten soll, so besitzt das Anfangswertproblem*

$$y' = k(x, y) \;, \qquad y(x_0) = y_0$$

genau eine auf $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ *definierte Lösung* $y(x)$.

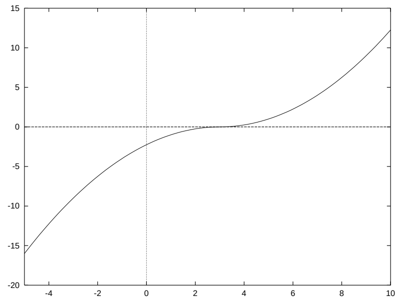
Bemerkung*: ohne Lipschitzbedingung $\Longrightarrow$ keine Eindeutigkeitsaussage mehr

[30] Giuseppe Peano (* 27.8.1858 Cuneo/Italien † 20.4.1932 Turin)
[31] Charles Emile Picard (* 24.7.1856 Paris † 11.12.1941 Paris)
[32] Ernst Leonard Lindelöf (* 7.3.1870 Helsinki † 4.6.1946 Helsinki)

Beispiel : betrachten $y' = \sqrt{|y|},\ \ y(x_0) = 0$

$\curvearrowright$ $k(x,y) = \sqrt{|y|}$ stetig, genügt aber in einer Umgebung von $y_0 = 0$ keiner Lipschitz-Bedingung,

$$\left|\sqrt{|y|} - \sqrt{|\widetilde{y}|}\right| = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{|y|} + \sqrt{|\widetilde{y}|}}}_{\text{unbeschränkt für } y \to 0} \left| |y| - |\widetilde{y}| \right|$$



$(x_0 = 3)$

1. Lösung : $y(x) \equiv 0$

2. Lösung : $y(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{4} & , \quad x \geq x_0 \\ -\dfrac{(x-x_0)^2}{4} & , \quad x < x_0 \end{cases}$

Verallgemeinerung

$k_j(x, x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ j = 1, \ldots, n$, seien stetig auf

$$Q = \left\{ (x, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ |x - x_0| \leq \ a \ , \quad |x_j - y_j^0| \leq \ b_j,\ j = 1, \ldots, n \right\} \ ,$$

und genügen auf Q einer Lipschitz-Bedingung bezüglich $x_1, \ldots, x_n$, d.h.

$\exists\ L > 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, n \quad \forall\ (x, x_1, \ldots, x_n), (x, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in Q \ :$

$$|k_j(x, x_1, \ldots, x_n) - k_j(x, \xi_1, \ldots, \xi_n)| \ \leq \ L\,(|x_1 - \xi_1| + \cdots + |x_n - \xi_n|)$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{ccl} y_1' & = & k_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n' & = & k_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array} \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{ccc} y_1(x_0) & = & y_1^0 \\ \vdots & & \vdots \\ y_n(x_0) & = & y_n^0 \end{array}$$

auf dem Intervall $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ eine eindeutig bestimmte Lösung $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, wobei $\alpha = \alpha\,(a, b_1, \ldots, b_n, L, M_1, \ldots, M_n)$ für $M_j = \sup\limits_Q |k_j(x, x_1, \ldots, x_n)|,\ \ j = 1, \ldots, n$, gilt.

Man nennt dies dann <u>gewöhnliches Differentialgleichungssystem 1. Ordnung</u> bzw. <u>System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung</u> (mit Anfangswerten).

Weitere Verallgemeinerung auf Differentialgleichungen höherer Ordnung

Sei nun $y^{(n)} = k\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ mit $y^{(k)}(x_0) = y_k^0,\ \ k = 0, \ldots, n-1$, gegeben. Durch den Ansatz

$$\begin{array}{rclcl} y_1(x) & := & y(x) & & \\ y_2(x) & := & y'(x) & = & y_1'(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_n(x) & := & y^{(n-1)}(x) & = & y_{n-1}'(x) \end{array}$$

kann diese Differentialgleichung $n-$ ter Ordnung in ein System aus n Differentialgleichungen 1. Ordnung überführt werden :

$$\begin{array}{lcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & \quad y_3 \\ \vdots & & \qquad \ddots \\ y_{n-1}' & = & \qquad\qquad y_n \\ y_n' & = & k(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array} \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{ccc} y_1(x_0) & = & y_0^0 \\ y_2(x_0) & = & y_1^0 \\ \vdots & & \vdots \\ & & \\ y_n(x_0) & = & y_{n-1}^0 \end{array}$$

Zurückführung auf vorigen Existenz- und Unitätssatz für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung $\Longrightarrow$ Existenz- und Unitätssatz für gewöhnliche Differentialgleichung $n-$ ter Ordnung, falls entsprechende Lipschitz-Bedingung auf Q erfüllt ist

8.2 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Definition 8.2.1 *Eine Differentialgleichung der Form*

$$y' \;=\; f(x)g(y)$$

heißt Differentialgleichung mit trennbaren Variablen.

Satz 8.2.2 *Es seien* $f(x)$, $D(f) = [a, b]$, *und* $g(y)$, $D(g) = [\alpha, \beta]$, *stetig und* $g(y) \neq 0$ *für* $y \in [\alpha, \beta]$. *Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$y' \;=\; f(x)g(y) \quad , \qquad y(x_0) = y_0,$$

für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (\alpha, \beta)$ *genau eine Lösung* $y = y(x)$ *in einer Umgebung des Punktes* x_0, $D(y) = U(x_0)$. *Diese Lösung wird gegeben durch*

$$F(x, y) \;=\; \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} \;-\; \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau)\ \mathrm{d}\tau \;=\; 0.$$

Bemerkung*:

- spezielle Gestalt der Differentialgleichung $\curvearrowright$ schwächere Voraussetzungen als im Satz 8.1.2 ausreichend
- Eine Differentialgleichung heißt *Euler-homogen*, wenn sie sich in der Form $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$ darstellen lässt. Euler-homogene Differentialgleichungen lassen sich durch den Ansatz

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}\ , \quad \text{d.h.} \quad y(x) = z(x)x$$

in Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen überführen :

$$y(x) = z(x)x \;\curvearrowright\; y'(x) = z'(x)x + z(x) =: h(z) \;\curvearrowright\; z'(x) = \frac{1}{x}\,(h(z) - z)$$

<u>'Lösungsschema' für trennbare Differentialgleichungen</u>

1. gewöhnliche Differentialgleichung auf Form $y' = f(x)g(y)$ bringen
2. Stetigkeitsintervalle feststellen, $g(y) \neq 0$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} \;=\; \int f(x)\ \mathrm{d}x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
4. integrieren
5. nach y auflösen (falls möglich)
6. c so bestimmen, dass Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt ist

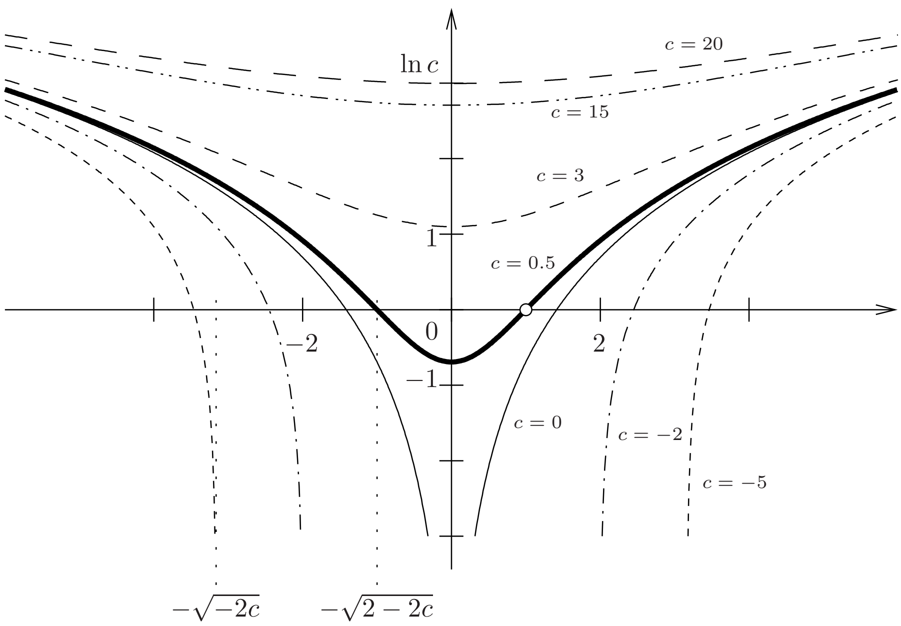
Beispiel : $e^y y' = x,\ \ y(1) = 0$

1. $y' = xe^{-y}$
2. $f(x) = x,\ \ D(f) = \mathbb{R},\ \ g(y) = e^{-y},\ \ D(g) = \mathbb{R}$, stetig auf $\mathbb{R},\ \ g(y) \neq 0$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{e^{-y}} = \int x\ \mathrm{d}x + c,\ \ c \in \mathbb{R}$
4. $e^y = \dfrac{x^2}{2} + c$
5. $y = \ln\left(\dfrac{x^2}{2} + c\right),\ \ D(y) = \begin{cases} \mathbb{R} & ,\ \ c > 0 \\ (-\infty, -\sqrt{-2c}) \cup (\sqrt{-2c}, \infty) & ,\ \ c \leq 0 \end{cases}$
6. $0 = y(1) = \ln\left(\frac{1}{2} + c\right) \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{1}{2}$

$$\boxed{y(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right)}$$

Veränderung der Anfangswerte führt zu anderer Lösung, z.B.

$y(2) := 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-2}{2}\right), \quad y(0) := \ln 5 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+10}{2}\right), \ldots$



Beispiel : $y' = -\,2xy^2,\ \ y(x_0) = y_0$

1. $y' = -\,2xy^2 \quad\Longrightarrow\quad y \equiv 0,\ \ D(y) = \mathbb{R}$, ist (eine) Lösung
2. $f(x) = -2x,\ \ D(f) = \mathbb{R}, \quad g(y) = y^2,\ \ D(g) = \mathbb{R}$, stetig auf $\mathbb{R}$, $g(y) \neq 0$ für $y \neq 0$
3. $y \neq 0, \quad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -2\int x\ \mathrm{d}x + c,\ \ c \in \mathbb{R}$
4. $-\dfrac{1}{y} = -\,x^2 + c$
5. $y = \dfrac{1}{x^2 - c}, \quad D(y) = \begin{cases} \mathbb{R} & ,\ c < 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{c}, -\sqrt{c}\} & ,\ c \geq 0 \end{cases}$, bzw. $\quad y \equiv 0,\ \ D(y) = \mathbb{R}$
6. $y_0 = 0 \quad\Longrightarrow\quad y(x) \equiv 0$

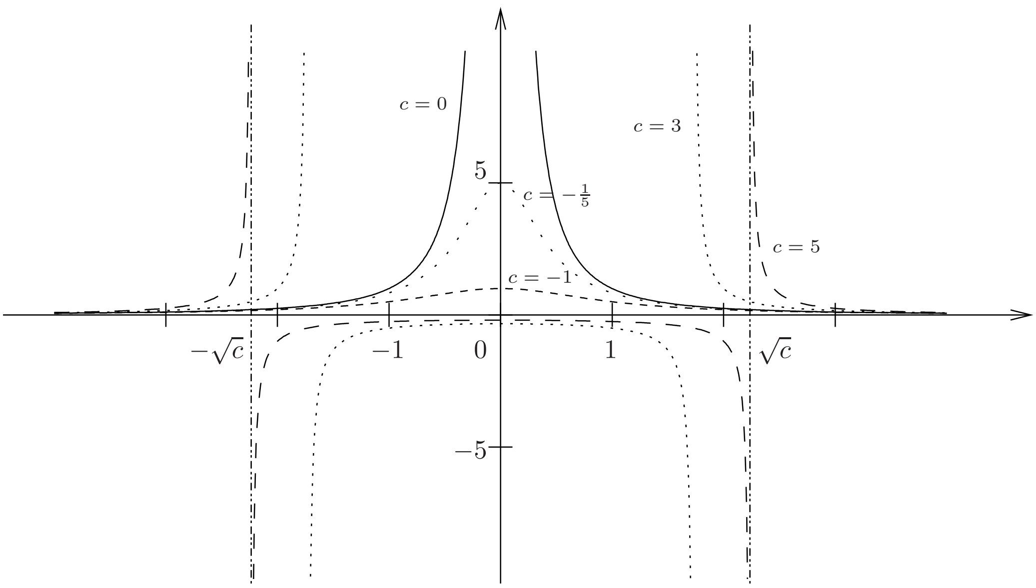
   $y_0 \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad y_0 = \dfrac{1}{x_0^2 - c} \quad\Longleftrightarrow\quad c = x_0^2 - \dfrac{1}{y_0} \quad\Longrightarrow\quad y(x) = \dfrac{1}{x^2 - x_0^2 + \frac{1}{y_0}}$

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - x_0^2 + \frac{1}{y_0}} & ,\ y_0 \neq 0 \\ 0 & ,\ y_0 = 0 \end{cases}}$$

mit

$$D(y) = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & , & \left(x_0^2 < \frac{1}{y_0}\right) \vee (y_0 = 0) \\ \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{x_0^2 - \frac{1}{y_0}}\right\} & , & x_0^2 \geq \frac{1}{y_0} \end{array} \right\}$$

(*durch jeden Punkt* (x_0, y_0) *genau eine Lösung*)



8.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition 8.3.1 *Eine Differentialgleichung der Form*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

heißt lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. *Ist* $q(x) \equiv 0$, *so heißt die lineare Differentialgleichung* homogen, *sonst* inhomogen.

Lemma 8.3.2 *Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen (partikulären) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.*

Beweis*: Seien $\psi(x)$ allgemeine Lösung der homogenen, $\varphi_s(x)$ spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\curvearrowright\ (\psi(x)+\varphi_s(x))' + p(x)\,(\psi(x)+\varphi_s(x)) = \underbrace{\psi'(x)+p(x)\psi(x)}_{=\,0,\ \psi \text{ löst homogene DGL}} + \underbrace{\varphi_s'(x)+p(x)\varphi_s(x)}_{=\,q(x),\ \varphi_s \text{ löst inhomogene DGL}} = q(x)$$

$\curvearrowright$ $\varphi(x) := \psi(x) + \varphi_s(x)$ Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Seien andererseits $\varphi(x)$ allgemeine Lösung und $\varphi_s(x)$ spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, z.z. : $\exists\ \psi(x)\ :\ \varphi(x) = \psi(x) + \varphi_s(x)$, $\psi'(x) + p(x)\psi(x) = 0$ (*Lösung der homogenen Differentialgleichung*); setzen $\psi(x) := \varphi(x) - \varphi_s(x)$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad \psi'(x)+p(x)\psi(x) &= (\varphi(x)-\varphi_s(x))' + p(x)\,(\varphi(x)-\varphi_s(x))\\ &= \underbrace{\varphi'(x)+p(x)\varphi(x)}_{q(x),\text{ da allg. Lösung}} - \big(\underbrace{\varphi_s'(x)+p(x)\varphi_s(x)}_{q(x),\text{ da spez. Lösung}}\big) = q(x)-q(x) = 0\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ $\psi(x)$ löst homogene Differentialgleichung □

Satz 8.3.3 *Seien* $p(x)$ *und* $q(x)$ *auf* $I \subset \mathbb{R}$ *stetige Funktionen.*

(i) *Dann hat die lineare Differentialgleichung*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

auf I *die allgemeine Lösung*

$$y(x) = \varphi_h(x) + \varphi_s(x)\ ,$$

wobei

$$\varphi_h(x) = c\ e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\ , \qquad c \in \mathbb{R},$$

die allgemeine Lösung der homogenen und φ_s *eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist, die man z.B. durch* 'Variation der Konstanten' *erhalten kann.*

(ii) *Die Anfangswertaufgabe*

$$y' + p(x)y = q(x)\ , \qquad y(x_0) = y_0$$

hat für $x_0 \in I$ *genau eine Lösung auf* I,

$$y(x) = y_0\ e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(u)\,\mathrm{d}u} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(u)\,\mathrm{d}u}\left(\int\limits_{x_0}^{x} q(\tau)\ e^{\int\limits_{x_0}^{\tau} p(u)\,\mathrm{d}u}\ \mathrm{d}\tau\right).$$

Beweis*: zu (i): homogene Differentialgleichung : $y' + p(x)y = 0$ $\curvearrowright$ Differentialgleichung mit trennbaren Variablen, $\overline{f(x)} = -p(x)$ stetig, $g(y) = y$ stetig, $g(y) \neq 0$ für $y \neq 0$

Sei $y \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int p(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow & \ln|y| &= -\int p(x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{c_1}_{\in\mathbb{R}} \\
&\Longrightarrow & |y| &= e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\underbrace{e^{c_1}}_{c_2>0} \\
&\Longrightarrow & y &= e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\underbrace{[\pm c_2]}_{c_3\in\mathbb{R},\ c_3\neq 0} \\
&\Longrightarrow & y(x) &= c_3\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \quad , \qquad c_3 \neq 0
\end{aligned}$$

Sei $y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) \equiv 0$ Lösung der homogenen Differentialgleichung

$\Longrightarrow$ allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $\quad \varphi_h(x) = c\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

'Variation der Konstanten': *<u>Ansatz</u>* : $\varphi_s(x) := c(x)\,\varphi_h(x) = c(x)\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$

<u>Ziel</u> : $c(x)$ so bestimmen, dass $\varphi_s(x)$ inhomogene Differentialgleichung löst

$$\varphi_s'(x) = c'(x)\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} + \underbrace{c(x)\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}}_{\varphi_s(x)}(-p(x)) = c'(x)\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} - p(x)\varphi_s(x)$$

$\curvearrowright \; q(x) = \varphi_s'(x) + p(x)\varphi_s(x) = c'(x)\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = q(x)\, e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$

$\curvearrowright \; \varphi_s(x) = c(x)\, e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} = \left(\displaystyle\int q(x)\, e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

<u>zu (ii)</u>: $\quad y(x_0) = y_0\, \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x_0} p(u)\,\mathrm{d}u}}_{=1} + \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x_0} p(u)\,\mathrm{d}u}}_{=1} \underbrace{\left(\displaystyle\int_{x_0}^{x_0} q(\tau)\, e^{\int_{x_0}^{\tau} p(u)\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}\tau\right)}_{=0} = y_0$

Eindeutigkeit : sei $\varphi(x) = \varphi_h(x) + \varphi_s(x) = c\,\underbrace{e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}}_{=:\varphi_0(x)} + \varphi_s(x) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x_0) = c\,\underbrace{\varphi_0(x_0)}_{\neq 0} + \varphi_s(x_0) \overset{!}{=} y_0$

$\Longrightarrow \quad c = \dfrac{y_0 - \varphi_s(x_0)}{\varphi_0(x_0)}$, d.h. c ist eindeutig bestimmt □

<u>'Lösungsschema' für lineare Differentialgleichungen</u>

1. gewöhnliche Differentialgleichung auf Form $y' + p(x)y = q(x)$ bringen
2. Stetigkeitsintervalle feststellen
3. allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung bestimmen
4. spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ermitteln (*z.B. durch Variation der Konstanten*)
5. allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung aufschreiben
6. c so bestimmen, dass Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt ist

Beispiel : (*Beispiel (1) aus Einführung*)

$x(t)$ ... Ort des Massepunktes zur Zeit $t > 0$, $\dot{x}(t) := \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$, $\ddot{x}(t) := \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)$

$\ddot{x}(t) + \dfrac{r}{m}\,\dot{x}(t) = g$, $r, m > 0$, Substitution : $v(t) = \dot{x}(t)$

1. $\dot{v}(t) + \dfrac{r}{m}\,v(t) = g$
2. $p(x) \equiv \dfrac{r}{m}$, $r, m > 0$, $q(x) \equiv g$ $\implies$ überall stetig (*Konstanten*)
3. homogene Differentialgleichung : $\dot{v}(t) + \dfrac{r}{m}\,v(t) = 0$

$$\implies \left\{ \begin{array}{lr} v(t) \equiv 0 & , \quad v = 0 \\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int \frac{r}{m}\,\mathrm{d}t + c \iff \ln|v| = -\frac{r}{m}\,t + c & , \quad v \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$\implies v_h(t) = C\,e^{-\frac{r}{m}t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

4. Variation der Konstanten, <u>*Ansatz*</u> : $v_s(t) = c(t)\,e^{-\frac{r}{m}t}$

$$\implies \dot{v_s}(t) = \dot{c}(t)\,e^{-\frac{r}{m}t} + \underbrace{c(t)\,e^{-\frac{r}{m}t}}_{v_s(t)}\left(-\frac{r}{m}\right) \implies \dot{v_s}(t) + \frac{r}{m}\,v_s(t) = \dot{c}(t)\,e^{-\frac{r}{m}t} \stackrel{!}{=} g$$

$$\implies \dot{c}(t) = g\,e^{\frac{r}{m}t} \implies c(t) = g\int e^{\frac{r}{m}t}\,\mathrm{d}t = g\,\frac{m}{r}\,e^{\frac{r}{m}t}$$

$$\implies v_s(t) = \underbrace{g\,\frac{m}{r}\,e^{\frac{r}{m}t}}_{c(t)}\,e^{-\frac{r}{m}t} = g\,\frac{m}{r}$$

5. $v(t) = v_h(t) + v_s(t) = C\,e^{-\frac{r}{m}t} + g\,\dfrac{m}{r}$
6. Sei z.B. $v(0) = 0$ (Anfangsgeschwindigkeit $= 0$) gegeben,

$$\implies 0 = v(0) = C + g\,\frac{m}{r} \iff C = -g\,\frac{m}{r}$$

$$\implies \boxed{v(t) = g\,\frac{m}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{m}t}\right)}, \qquad \lim_{t\to\infty} v(t) = g\,\frac{m}{r}$$

8.4 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Definition 8.4.1 *Seien* $p_k(x)$, $k = 0, \ldots, n-1$, $q(x)$, *Funktionen auf* $[a, b]$. *Eine Differentialgleichung der Form*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

heißt lineare Differentialgleichung $n-$ ter Ordnung.

Bemerkung*: analog zu Lemma 8.3.2 gilt: allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung $=$ allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung $+$ eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung

Satz 8.4.2 *Seien* $p_k(x)$, $k = 0, \dots, n-1$, $q(x)$, *stetig auf* $[a,b]$ *und* $x_0 \in (a,b)$. *Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + p_1(x) y' + p_0(x) y = q(x)$$

mit

$$y(x_0) = y_0^0, \quad y'(x_0) = y_0^1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$$

für $(y_0^0, \dots, y_0^{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ *stets genau eine Lösung.*

Darstellung der Lösung

- seien $u_j(x)$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$
  $\curvearrowright$ $u(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j\, u_j(x)$ wieder Lösung der homogenen Differentialgleichung, speziell für $m = n$
- setzen $y(x) := \sum\limits_{j=1}^{n} c_j u_j(x)$ $\curvearrowright$ $y(x)$ löst homogenen Differentialgleichung $\curvearrowright$ $y(x)$ löst Anfangswertproblem, falls

$$\begin{array}{lll} c_1\, u_1(x_0) & + \dots + c_n\, u_n(x_0) & = y_0^0 \\ c_1\, u_1'(x_0) & + \dots + c_n\, u_n'(x_0) & = y_0^1 \\ \quad\vdots & \qquad\vdots & \\ c_1\, u_1^{(n-1)}(x_0) & + \dots + c_n\, u_n^{(n-1)}(x_0) & = y_0^{n-1} \end{array} \iff \begin{pmatrix} u_1(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_1'(x_0) & \cdots & u_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0^0 \\ y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^{n-1} \end{pmatrix}$$

$\xRightarrow[\text{lineare Algebra}]{}$ das lineare Gleichungssystem hat für beliebige Anfangswerte y_0^k, $k = 0, \dots, n-1$, genau eine Lösung $c_1, \dots, c_n$, falls gilt

$$W(u_1, \dots, u_n)(x_0) = \begin{vmatrix} u_1(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_1'(x_0) & \cdots & u_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_1'(x_0) & \cdots & u_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Anderenfalls existieren Anfangswerte $y_0^0, \dots, y_0^{n-1}$, für die keine Lösung existiert, bzw. es gibt Anfangswerte $y_0^0, \dots, y_0^{n-1}$, so dass die Lösungen $c_1, \dots, c_n$ nicht eindeutig sind.

Definition 8.4.3 *Die Lösungen* $u_1(x), \dots, u_n(x)$ *der homogenen Differentialgleichung heißen* Fundamentalsystem (Integralbasis), *falls für alle* $x \in [a,b]$

$$W(u_1, \dots, u_n)(x) = \begin{vmatrix} u_1(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_1'(x_0) & \cdots & u_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

gilt. Dabei heißt $W(u_1, \dots, u_n)(x)$ Wronski[33]-Determinante.

Bemerkung*:
- $\exists\ \eta \in [a,b] \ :\ W(u_1, \dots, u_n)(\eta) \neq 0 \implies W(u_1, \dots, u_n)(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b] \implies u_1(x), \dots, u_n(x)$ bilden Fundamentalsystem
- $u_1(x), \dots, u_n(x)$ linear unabhängig $\iff W(u_1, \dots, u_n)(x) \neq 0, \ x \in [a,b]$

[33] Josef-Maria Hoëné de Wronski (* 23.8.1778 Wolsztyn/Polen † 8.8.1853 Neuilly-sur-Seine/Frankreich)

Satz 8.4.4 *Seien* $p_k(x)$, $k = 0, \dots, n-1$, *stetig auf* $[a, b]$.

(i) *Die homogene Differentialgleichung besitzt dann stets ein Fundamentalsystem.*

(ii) *Ist* $u_1(x)$, $\dots$, $u_n(x)$ *ein solches Fundamentalsystem, so lässt sich jede Lösung der homogenen Differentialgleichung für geeignete reelle Zahlen* $c_1, \dots, c_n$ *darstellen als*

$$y_h(x) = c_1\ u_1(x) + \cdots + c_n\ u_n(x).$$

Bemerkung*:

- Lösungsraum einer homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung ist n-dimensional
- *Problem* : Bestimmung des Fundamentalsystems
- Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $\dashrightarrow$ Variation der Konstanten: sei $u_1, \dots, u_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung, wollen spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bestimmen

  Ansatz : $u_s(x) = c_1(x)\ u_1(x)\ + \cdots +\ c_n(x)\ u_n(x)$

Beispiel : $y'' + y = \cos x$

allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + y = 0$:

$$y_h(x) = c_1\ \cos x + c_2\ \sin x$$

$u_1(x) = \cos x$, $u_2(x) = \sin x$ bilden ein Fundamentalsystem $(n = 2)$:

$$W(u_1, u_2)(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x \ = \ 1 \ \neq \ 0$$

Ansatz : $y_s(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} c_1'(x) \ \cos x & + & c_2'(x) \ \sin x & = & 0 \\ -c_1'(x) \ \sin x & + & c_2'(x) \ \cos x & = & \cos x \end{array}$$

Cramer[34]sche Regel $\curvearrowright$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{vmatrix}}{W(u_1, u_2)(x)} = -\sin x \cos x, \qquad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}{W(u_1, u_2)(x)} = \cos^2 x$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} c_1(x) &= -\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x &&= -\frac{1}{2} \int \sin(2x) \,\mathrm{d}x &&= \frac{1}{4} \cos(2x) \\ c_2(x) &= \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x &&= \frac{1}{2} \int (\cos(2x) + 1) \ \mathrm{d}x &&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2x) + x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \ y_s(x) &= \overbrace{\frac{1}{4} \cos(2x)}^{c_1(x)} \cos x + \overbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2x) + x \right)}^{c_2(x)} \sin x \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - 2 \sin^2 x \right) \cos x + \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x) \sin x \ = \ \frac{\cos x}{4} + \frac{x \sin x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \ y(x) &= y_h(x) + y_s(x) = c_1\ \cos x + c_2\ \sin x + \frac{\cos x}{4} + \frac{x \sin x}{2} \\ &= C_1\ \cos x + C_2\ \sin x + \frac{x \sin x}{2} \end{aligned}$$

[34] Gabriel Cramer (* 31.7.1704 Genf † 4.1.1752 Bagnols-sur-Cèze/Frankreich)

Homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Seien $p_k(x) \equiv p_k \in \mathbb{R}, \;\; k = 0, \ldots, n-1,$

$$\underbrace{y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y}_{=:\, L(y)} = 0$$

$\curvearrowright$ suchen 'Nullstellen' von $L\,(y(x))$ $\rightsquigarrow$ Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung $n-$ ter Ordnung

<u>*Ansatz*</u> : $y(x) = e^{\lambda x}, \;\; \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \; \ldots, \;\; y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \; L\left(e^{\lambda x}\right) &= \lambda^n e^{\lambda x} \; + \; p_{n-1}\, \lambda^{n-1}\, e^{\lambda x} \; + \cdots + \; p_1\, \lambda\, e^{\lambda x} + p_0\, e^{\lambda x} \\ &= \underbrace{\left(\lambda^n \; + \; p_{n-1}\, \lambda^{n-1} \; + \cdots + \; p_1\, \lambda + p_0\right)}_{=:\, P(\lambda)} \, e^{\lambda x} \end{aligned}$$

$$\curvearrowright \; L\left(e^{\lambda x}\right) = P(\lambda) \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0,\; x, \lambda \in \mathbb{R}} = 0 \iff P(\lambda) = 0 \iff \lambda \text{ Nullstelle von } \underbrace{P(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1 \lambda + p_0}_{\text{charakteristisches Polynom}}$$

Fundamentalsatz der Algebra (Satz 3.1.2) $\curvearrowright$

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k} \; \Big[\underbrace{(\lambda - \eta_1)\,(\lambda - \overline{\eta_1})}_{(\lambda^2 + d_1 \lambda + f_1)}\Big]^{\alpha_1} \cdots \; \Big[\underbrace{(\lambda - \eta_r)\,(\lambda - \overline{\eta_r})}_{(\lambda^2 + d_r \lambda + f_r)}\Big]^{\alpha_r} \; ,$$

wobei für die Vielfachheiten $\nu_1 + \cdots + \nu_k + 2\,(\alpha_1 + \cdots + \alpha_r) = n$, $\nu_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \ldots, k$, $\alpha_\ell \in \mathbb{N}_0$, $\ell = 1, \ldots, r$, und für die Nullstellen $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, $\eta_\ell \in \mathbb{C}$ mit $\Im\mathrm{m}\,(\eta_\ell) \neq 0$, $\ell = 1, \ldots, r$, gilt.

<u>*Spezialfall* $n = 2$</u>

Seien $p_0, \;\; p_1 \in \mathbb{R}$ und die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' \; + \; p_1\, y' \; + \; p_0 \; = \; 0$$

gegeben $\curvearrowright$ zugehöriges charakteristisches Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1, \; \lambda_2$:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p_1\, \lambda + p_0 = 0 = (\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2) \qquad \text{mit} \quad \lambda_{1,2} \; = \; -\,\frac{p_1}{2} \pm \sqrt{\frac{p_1^2}{4} - p_0} \; .$$

(i) $\boxed{\lambda_1, \; \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2}$ (für $\dfrac{p_1^2}{4} > p_0$)

$\Longrightarrow$ $u_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \;\; u_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sind Lösungen (*klar nach Ansatz und Konstruktion*) und bilden ein Fundamentalsystem :

$$W(u_1, u_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1\, e^{\lambda_1 x} & \lambda_2\, e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2} \underbrace{e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x}}_{\neq 0} \neq 0$$

(ii) $\boxed{\lambda_1, \; \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0}$ (für $\dfrac{p_1^2}{4} = p_0, \;\; \lambda_0 = -\dfrac{p_1}{2}$)

$\Longrightarrow$ $u_1(x) = e^{\lambda_0 x}, \;\; u_2(x) = x\; e^{\lambda_0 x}$ sind Lösungen:

$$u_1'(x) = \lambda_0 e^{\lambda_0 x}, \;\; u_1''(x) = \lambda_0^2 e^{\lambda_0 x} \;\; \curvearrowright \;\; u_1''(x) + p_1 u_1'(x) + p_0 u_1(x) = e^{\lambda_0 x} \underbrace{\left(\lambda_0^2 + p_1 \lambda_0 \; + p_0\right)}_{=0} = 0$$

$$u_2'(x) = e^{\lambda_0 x}(1+\lambda_0 x)\,, \quad u_2''(x) = e^{\lambda_0 x}(\lambda_0(1+\lambda_0 x)+\lambda_0) = e^{\lambda_0 x}\ \lambda_0\,(2+\lambda_0 x)$$

$$\Longrightarrow \quad u_2''(x)+p_1\ u_2'(x)+p_0\ u_2(x) \ = \ e^{\lambda_0 x}\ x\ \underbrace{\left(\lambda_0^2+p_1\lambda_0+p_0\right)}_{=0} + e^{\lambda_0 x}\underbrace{\left(2\lambda_0+p_1\right)}_{=0,\ \lambda_0=-\frac{p_1}{2}} \ = \ 0$$

$u_1(x),\ u_2(x)$ bilden ein Fundamentalsystem :

$$W(u_1,u_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & x\ e^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0\ e^{\lambda_0 x} & (1+\lambda_0 x)\,e^{\lambda_0 x} \end{vmatrix} = \underbrace{(1+\lambda_0 x-\lambda_0 x)}_{=\,1\,\neq\,0}\ \underbrace{e^{2\lambda_0 x}}_{\neq 0} \neq 0$$

(iii) $\boxed{\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = a+bi,\ b\neq 0}$ (für $\dfrac{p_1^2}{4} < p_0,\ a = -\dfrac{p_1}{2},\ a^2+b^2 = p_0$)

$w_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(a+bi)x},\ w_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{(a-bi)x} = \overline{w_1(x)}$ sind komplexwertige Lösungen,

setzen $u_1(x) := \Re\mathrm{e}\,(w_1(x)),\ u_2(x) = \Im\mathrm{m}\,(w_1(x))$:

$$u_1(x) = \frac{w_1(x)+w_2(x)}{2} = \frac{e^{ax}}{2}\Big(\underbrace{\cos(bx)+i\sin(bx)}_{e^{bix}} + \underbrace{\cos(bx)-i\sin(bx)}_{e^{-bix}}\Big) = e^{ax}\ \cos(bx)$$

$$u_2(x) = \frac{w_1(x)-w_2(x)}{2i} = \frac{e^{ax}}{2i}\Big(\underbrace{\cos(bx)+i\sin(bx)}_{e^{bix}} - \underbrace{\big[\cos(bx)-i\sin(bx)\big]}_{e^{-bix}}\Big) = e^{ax}\ \sin(bx)$$

$u_1(x),\ u_2(x)$ sind Lösungen :

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= e^{ax}\,(a\ \cos(bx) - b\ \sin(bx)) \\ u_1''(x) &= e^{ax}\left(a\,[a\ \cos(bx)-b\ \sin(bx)] - ab\ \sin(bx) - b^2\cos(bx)\right) \\ &= e^{ax}\left(\left[a^2-b^2\right]\cos(bx) - 2ab\sin(bx)\right) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad u_1''(x)+p_1\ u_1'(x)+p_0\ u_1(x) \ = \ e^{ax}\ \cos(bx)\big(\underbrace{a^2-b^2+p_1 a+p_0}_{2a^2+p_1 a=a(2a+p_1)=0}\big) - b\ e^{ax}\ \sin(bx)\big(\underbrace{2a+p_1}_{=0}\big) = 0$$

$$\begin{aligned} u_2'(x) &= e^{ax}\,(a\ \sin(bx) + b\ \cos(bx)) \\ u_2''(x) &= e^{ax}\left(a\,[a\ \sin(bx)+b\ \cos(bx)] + ab\ \cos(bx) - b^2\sin(bx)\right) \\ &= e^{ax}\left(\left[a^2-b^2\right]\sin(bx) + 2ab\cos(bx)\right) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad u_2''(x)+p_1\ u_2'(x)+p_0\ u_2(x) \ = \ e^{ax}\ \sin(bx)\big(\underbrace{a^2-b^2+p_1 a+p_0}_{2a^2+p_1 a=a(2a+p_1)=0}\big) + b\ e^{ax}\ \cos(bx)\big(\underbrace{2a+p_1}_{=0}\big) = 0$$

$u_1(x),\ u_2(x)$ bilden ein Fundamentalsystem :

$$\begin{aligned} W(u_1,u_2)(x) &= \begin{vmatrix} e^{ax}\ \cos(bx) & e^{ax}\ \sin(bx) \\ e^{ax}\,(a\ \cos(bx)-b\ \sin(bx)) & e^{ax}\,(a\ \sin(bx)+b\ \cos(bx)) \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{\left[a\ \sin(bx)\cos(bx) + b\ \cos^2(bx) - a\ \cos(bx)\sin(bx) + b\ \sin^2(bx)\right]}_{=\ b\left[\cos^2(bx)+\sin^2(bx)\right]\ =\ b\ \neq\ 0}\ \underbrace{e^{2ax}}_{\neq 0} \neq 0 \end{aligned}$$

Satz 8.4.5 $P(\lambda)$ *sei das charakteristische Polynom der homogenen linearen Differentialgleichung* $n-$ *ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0 \ . \qquad (*)$$

$P(\lambda)$ *habe die reellen Nullstellen* λ_i *mit den Vielfachheiten* $\nu_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \ldots, k$, *und die komplexen Nullstellen* $\eta_\ell = a_\ell \pm i b_\ell$ *mit* $b_\ell = \Im\mathrm{m}\,(\eta_\ell) \neq 0$ *und den Vielfachheiten* $\alpha_\ell \in \mathbb{N}_0$, $\ell = 1, \ldots, r$. *Dann sind*

$$\begin{array}{lllll}
e^{\lambda_1 x} & , \quad x\ e^{\lambda_1 x} & , \quad \ldots\ , & x^{\nu_1 - 1}\ e^{\lambda_1 x} & \\
\vdots & & & \vdots & \\
e^{\lambda_k x} & , \quad x\ e^{\lambda_k x} & , \quad \ldots\ , & x^{\nu_k - 1}\ e^{\lambda_k x} & \\
e^{a_1 x}\cos(b_1 x), & e^{a_1 x}\sin(b_1 x), & \ldots\ , & x^{\alpha_1 - 1}\ e^{a_1 x}\cos(b_1 x), & x^{\alpha_1 - 1}\ e^{a_1 x}\sin(b_1 x) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
e^{a_r x}\cos(b_r x), & e^{a_r x}\sin(b_r x), & \ldots\ , & x^{\alpha_r - 1}\ e^{a_r x}\cos(b_r x), & x^{\alpha_r - 1}\ e^{a_r x}\sin(b_r x)
\end{array}$$

Lösungen von $(*)$ *und bilden ein Fundamentalsystem.*

Bemerkung*: Anzahl der Lösungen : $\nu_1 + \cdots + \nu_k + 2\,(\alpha_1 + \cdots + \alpha_r) = n$

Ansatzverfahren zur Bestimmung von speziellen (partikulären) Lösungen

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = q(x)$$

lineare Differentialgleichung $n-$ ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; falls $q(x)$ spezielle Gestalt hat $\curvearrowright$ Ansätze können schneller eine (spezielle) Lösung $y_s(x)$ des inhomogenen Systems liefern (*als über Variation der Konstanten*)

$q(x)$	Ansatz für $y_s(x)$	
$b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$	$A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m$	falls $P(0) \neq 0$
	$x^k\,(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$	falls 0 $k-$ fache Nullstelle von $P(\lambda)$
$(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)\,e^{\alpha x}$	$(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)\,e^{\alpha x}$	falls $P(\alpha) \neq 0$
	$x^k\,(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)\,e^{\alpha x}$	falls α $k-$ fache Nullstelle von $P(\lambda)$
$(b_0 + \cdots + b_m x^m)\begin{cases}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{cases}$	$(A_0 + \cdots + A_m x^m)\cos(\beta x) + (B_0 + \cdots + B_m x^m)\sin(\beta x)$	falls $P(i\beta) \neq 0$
	$x^k\Big[(A_0 + \cdots + A_m x^m)\cos(\beta x) + (B_0 + \cdots + B_m x^m)\sin(\beta x)\Big]$	falls $i\beta$ $k-$ fache Nullstelle von $P(\lambda)$
$(b_0 + \cdots + b_m x^m)\,e^{\alpha x}\begin{cases}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{cases}$	$e^{\alpha x}\Big[(A_0 + \cdots + A_m x^m)\cos(\beta x) + (B_0 + \cdots + B_m x^m)\sin(\beta x)\Big]$	falls $P(\alpha + i\beta) \neq 0$
	$x^k\ e^{\alpha x}\Big[(A_0 + \cdots + A_m x^m)\cos(\beta x) + (B_0 + \cdots + B_m x^m)\sin(\beta x)\Big]$	falls $\alpha + i\beta$ $k-$fache Nullstelle von $P(\lambda)$

Beispiele : **(1)** $\boxed{y'' - y = xe^{2x}}$

homogene Lösung : charakteristisches Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

$\curvearrowright \quad u_1(x) = e^x,\ u_2(x) = e^{-x}$ Fundamentalsystem,

$$y_h(x) = c_1\ e^x + c_2\ e^{-x}$$

inhomogene Lösung : Variation der Konstanten / spezieller Ansatz, hier :

$$y_s(x) := (A_0 + A_1 x)\ e^{2x}$$

(*zweite Zeile mit* $\alpha = 2,\ P(2) \neq 0,\ m = 1,\ b_0 = 0,\ b_1 = 1$)

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ y_s'(x) &= (A_1 + 2(A_0 + A_1 x))\, e^{2x} = (A_1 + 2A_0 + 2A_1 x)\, e^{2x} \\ y_s''(x) &= (4A_0 + 4A_1 + 4A_1 x)\, e^{2x} \\ \Longrightarrow\ y_s''(x) - y_s(x) &= (3A_0 + 4A_1 + 3A_1 x)\, e^{2x} \stackrel{!}{=} xe^{2x} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcl} 3A_0 & + & 4A_1 & = & 0 \\ & & 3A_1 & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad A_1 = \frac{1}{3}, \quad A_0 = -\frac{4}{9}$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = \underbrace{c_1\ e^x + c_2\ e^{-x}}_{\text{homogene Lösung } y_h} + \underbrace{\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{9}\right) e^{2x}}_{\text{spezielle Lösung } y_s} \quad \ldots \text{ allgemeine Lösung}$$

(2) $\boxed{y''' - y' = x - 1}$

homogene Lösung : charakteristisches Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$$

$\curvearrowright \quad u_1(x) \equiv 1,\ u_2(x) = e^x,\ u_3(x) = e^{-x}$ Fundamentalsystem,

$$y_h(x) = c_1 + c_2\ e^x + c_3\ e^{-x}$$

inhomogene Lösung : Variation der Konstanten / spezieller Ansatz, hier :

$$y_s(x) := x(A_0 + A_1 x)$$

(*erste Zeile mit* $m = 1,\ 0$ *ist* $k = 1-$*fache Nullstelle von* $P(\lambda),\ b_0 = -1,\ b_1 = 1$)

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ y_s'(x) &= (A_0 + A_1 x + A_1 x) = A_0 + 2A_1 x \\ y_s''(x) &= 2A_1 \\ y_s'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ y_s'''(x) - y_s'(x) = -A_0 - 2A_1 x \stackrel{!}{=} x - 1$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} -A_0 & & & = & -1 \\ & & -2A_1 & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = \underbrace{c_1 + c_2\ e^x + c_3\ e^{-x}}_{\text{homogene Lösung } y_h} + \underbrace{x - \frac{x^2}{2}}_{\text{spezielle Lösung } y_s} \quad \ldots \text{ allgemeine Lösung}$$

Eulersche Differentialgleichung

Definition 8.4.6 *Eine lineare Differentialgleichung der Form*

$$x^n\ y^{(n)} + p_{n-1}\ x^{n-1}\ y^{(n-1)} + \cdots + p_1\ x\ y' + p_0 y = q(x)$$

heißt Eulersche Differentialgleichung.

Sei $x > 0 \implies$ Substitution : $u = \ln x \rightsquigarrow$ lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

alternativ : Ansatz $y(x) = x^\lambda \implies$ charakteristisches Polynom $Q(\lambda)$, Nullstellen $\curvearrowright$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung; (*Modifikationen bei komplexen und mehrfachen Nullstellen*) $\rightsquigarrow$ Fundamentalsystem

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: $x^3y''' - 3x^2y'' + 7xy' - 8y = x$

Ansatz $y(x) = x^\lambda$, *homogene Differentialgleichung:*

$$\begin{aligned} x^3y''' - 3x^2y'' + 7xy' - 8y &= x^3\underbrace{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}}_{y'''} - 3x^2\underbrace{\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}}_{y''} + 7x\underbrace{\lambda x^{\lambda-1}}_{y'} - 8\underbrace{x^\lambda}_{y} \\ &= x^\lambda\left[\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 3\lambda(\lambda-1) + 7\lambda - 8\right] \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\implies \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0 \iff (\lambda-2)^3 = 0$$

$\rightsquigarrow\ x^2,\ x^2\ln x,\ x^2(\ln x)^2$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung

spezielle Lösung: $y_s(x) = -x \quad \curvearrowright \quad y(x) = c_1\ x^2 + c_2\ x^2\ \ln x + c_3\ x^2(\ln x)^2 - x$

Potenzreihenansatz

o.B.d.A. $n = 2$, sei

$$p_2(x)x'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0\ , \qquad y(x_0) = y_0^0, \quad y'(x_0) = y_0^1$$

gegeben, und $p_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, seien bei x_0, d.h. in $(x_0 - r, x_0 + r)$, $r > 0$, in eine Potenzreihe entwickelbar $\implies$ gilt auch für Lösung des Anfangswertproblems

$\boxed{\textbf{Beispiel}}$: $xy'' + xy' + y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$

<u>*Ansatz*</u> : $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \curvearrowright y(0) = c_0 \stackrel{!}{=} 0, \quad y'(0) = c_1 \stackrel{!}{=} 1 \curvearrowright y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} &&\curvearrowright\ xy'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} &&\curvearrowright\ xy''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1)nx^n \end{aligned}$$

$$0 = xy'' + xy' + y = \sum_{n=1}^{\infty} x^n\left[(n+1)nc_{n+1} + nc_n + c_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} x^n(n+1)\underbrace{[nc_{n+1} + c_n]}_{0,\ n\geq 1}$$

$$\curvearrowright\ c_{n+1} = -\frac{c_n}{n} = \cdots = (-1)^n\frac{c_1}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!},\ n\in\mathbb{N} \quad \curvearrowright\ c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!},\ n \geq 2,\ c_1 = 1,\ c_0 = 0$$

$$\curvearrowright\ y(x) = x + x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!} = x + x\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}}_{e^{-x}-1} = x + x(e^{-x} - 1) = xe^{-x}$$

8.5 Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

$$y_j' = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}(x) y_k + q_j(x) , \quad j = 1, \ldots, n$$

heißt *lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung*; es ist *homogen*, wenn $q_j(x) \equiv 0, \ j = 1, \ldots, n$ ist, ansonsten *inhomogen*

Anfangsbedingungen : $y_j(x_0) = y_j^0, \ j = 1, \ldots, n$

Seien $f_{jk}(x), q_j(x)$ stetig in einer Umgebung von x_0, Abschnitt 8.1 $\curvearrowright$

$$y_j' = k_j(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}(x) y_k + q_j(x), \quad j = 1, \ldots, n$$

erfüllen Lipschitz-Bedingung bezüglich $y_1, \ldots, y_n$ $\curvearrowright$ eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

Bezeichnungen: $\vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad F(x) := \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{q}(x) := \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad \vec{y}\,' = F(x)\vec{y} + \vec{q}(x) , \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y^0}$$

Lemma 8.5.1 *Seien* $f_{jk}(x), \ q_j(x), \ j, k = 1, \ldots, n,$ *stetig auf* $[a, b]$, *so besitzt das Anfangswertproblem*

$$\vec{y}\,' = F(x)\vec{y} + \vec{q}(x) , \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y^0} ,$$

für jedes $x_0 \in (a, b)$ *stets genau eine Lösung.*

Bemerkung*:

- allgemeine Lösung = allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems + spezielle (partikuläre) Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems,
$$\vec{y}(x) = \vec{y_h}(x) + \vec{y_s}(x)$$
- $\vec{u}^{\,j}(x)$, $j = 1, \ldots, m, \ m \in \mathbb{N}$, Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems, $c_j \in \mathbb{R} \ \curvearrowright \ \vec{u}(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \ \vec{u}^{\,j}(x)$ löst homogene Differentialgleichung
- Die Lösungen $\vec{u}^{\,1}(x), \ldots, \ \vec{u}^{\,n}(x)$ des homogenen Differentialgleichungssystems bilden ein *Fundamentalsystem (Integralbasis)*, falls
$$W\left(\vec{u}^{\,1}, \ldots, \vec{u}^{\,n}\right)(x) = \begin{vmatrix} u_1^1(x) & \cdots & u_n^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^n(x) & \cdots & u_n^n(x) \end{vmatrix} \neq 0$$
für alle $x \in [a, b]$ gilt.
- wie früher: $W\left(\vec{u}^{\,1}, \ldots, \vec{u}^{\,n}\right)(x) \equiv 0$ in $[a, b]$ oder $W\left(\vec{u}^{\,1}, \ldots, \vec{u}^{\,n}\right)(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$
- $W\left(\vec{u}^{\,1}, \ldots, \vec{u}^{\,n}\right)(x) \neq 0 \iff \vec{u}^{\,1}(x), \ldots, \vec{u}^{\,n}(x)$ linear unabhängig

Satz 8.5.2 *Seien* $f_{jk}(x),\ \ j,k = 1,\dots,n,$ *stetig auf* $[a,b]$.

(i) *Das homogene Differentialgleichungssystem besitzt stets ein Fundamentalsystem.*

(ii) *Ist* $\vec{u}^{\,1}(x),\dots,\vec{u}^{\,n}(x)$ *ein solches Fundamentalsystem, so lässt sich jede Lösung* $\vec{u}(x)$ *des homogenen Differentialgleichungssystems als*

$$\vec{u}(x) = c_1\ \vec{u}^{\,1}(x) + \cdots + c_n\ \vec{u}^{\,n}(x)$$

mit geeigneten reellen Zahlen $c_1,\dots,c_n$ *darstellen.*

Bemerkung*: spezielle Lösung z.B. mit Variation der Konstanten

Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Seien $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{q}(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix}$

$$\vec{y}^{\,\prime} = A\vec{y} + \vec{q}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lcccccccc} y_1' & = & a_{11}y_1 & + & \cdots & + & a_{1n}y_n & + & q_1(x) \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 & + & \cdots & + & a_{nn}y_n & + & q_n(x) \end{array}$$

betrachten zunächst homogenes System $\vec{y}^{\,\prime} = A\vec{y}$

Ansatz : $\vec{y}(x) := e^{\lambda x}\cdot\vec{w} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\lambda\, e^{\lambda x}\ \vec{w}}_{\vec{y}^{\,\prime}} \ = \ Ae^{\lambda x}\ \vec{w} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \ = \ (A-\lambda I)\,\vec{w}$

$\Longrightarrow$ nicht-triviale Lösungen $\vec{w}$ existieren genau dann, wenn $\det(A-\lambda I) = 0$ --→ λ Eigenwert von A

sei $P(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ ... charakteristisches Polynom der Matrix A, Grad n $\curvearrowright$

$$P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\nu_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{\nu_k}\,[(\lambda-\mu_1)\,(\lambda-\overline{\mu_1})]^{\alpha_1}\cdots[(\lambda-\mu_r)\,(\lambda-\overline{\mu_r})]^{\alpha_r}$$

mit $\nu_1 + \cdots + \nu_k + 2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_r) = n$

Bemerkung*: *Methode zur Ermittlung eines Fundamentalsystems (Ansätze)*: in Analogie zu Satz 8.4.5

Beispiel : *Luftverschmutzung bei Inversionswetterlage*

Hintergrund: warme Luftmassen liegen auf kalten, vertikaler Luftaustausch ist behindert; geringe horizontale Windgeschwindigkeiten --→ Konzentration luftverschmutzender Komponenten, insbesondere H_2S, SO_2; außerdem Umwandlung H_2S zu SO_2 und weiter zu (nicht weiter beachtetem) Sulfat

Modell:	$m_1(t)$	:	Konzentration von H_2S zur Zeit $t \geq 0$
	$m_2(t)$	:	Konzentration von SO_2 zur Zeit $t \geq 0$
	$E_1,\ E_2$	:	Emissionsraten von H_2S bzw. SO_2 (positive Konstanten)
	$k_1,\ k_2$	:	Proportionalitätsfaktoren der Umwandlung von H_2S zu SO_2 und von SO_2 zu Sulfat, $k_1 \neq k_2$, $k_1,\ k_2 > 0$

Differentialgleichungssystem:
$$\begin{array}{lcrcrcl} \dot{m}_1 & = & -\,k_1\ m_1 & & & + & E_1\ , \quad m_1(t_0) = m_1^0 \\ \dot{m}_2 & = & k_1\ m_1 & - & k_2\ m_2 & + & E_2\ , \quad m_2(t_0) = m_2^0 \end{array}$$

homogenes System:
$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= -\,k_1\, m_1 \\ \dot{m}_2 &= k_1\, m_1 - k_2\, m_2 \end{aligned}$$

zugehörige Matrix: $A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = -\,k_1 < 0, \quad \lambda_2 = -\,k_2 < 0$

Eigenvektoren: $\lambda_1 = -\,k_1, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_1}{k_2 - k_1} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -\,k_2, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

allgemeine Lösung des homogenen Problems:
$$\begin{aligned} m_1(t) &= c_1\, e^{-k_1 t} \\ m_2(t) &= \frac{k_1}{k_2 - k_1}\, c_1\, e^{-k_1 t} + c_2\, e^{-k_2 t} \end{aligned}$$

spezielle Lösung des inhomogenen Systems: $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \implies$ Ansatz : $\vec{y_s}(t) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

Differentialgleichung $\curvearrowright \left\{ \begin{array}{rcl} 0 &=& -\,k_1\, A + E_1 \\ 0 &=& k_1\, A - k_2\, B + E_2 \end{array} \right\} \curvearrowright A = \frac{E_1}{k_1}, \; B = \frac{E_1 + E_2}{k_2}$

allgemeine Lösung des inhomogenen Problems:

$$\begin{aligned} m_1(t) &= c_1\, e^{-k_1 t} + \frac{E_1}{k_1} \\ m_2(t) &= \frac{k_1}{k_2 - k_1}\, c_1\, e^{-k_1 t} + c_2\, e^{-k_2 t} + \frac{E_1 + E_2}{k_2} \end{aligned}$$

($c_1, \; c_2$ können aus Anfangskonzentrationen $m_1^0, \; m_2^0$ berechnet werden)

Beobachtung: $\lim\limits_{t \to \infty} m_1(t) = \frac{E_1}{k_1}\,, \quad \lim\limits_{t \to \infty} m_2(t) = \frac{E_1 + E_2}{k_2}$

Interpretation: bei anhaltender Inversionswetterlage Verringerung der Emissionraten E_1, E_2 erforderlich!

Symbols

Index

Literatur

[Bor08] F. Bornemann. *Konkrete Analysis für Studierende der Informatik*. eXamen.press, Springer, Berlin, 2008.

[FLSW06] K. Graf Finck von Finckenstein, J. Lehn, H. Schellhaas, and H. Wegmann. *Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure. Band I: Analysis und lineare Algebra*. Teubner, Wiesbaden, 4th revised edition, 2006.

[Hac08] D. Hachenberger. *Mathematik für Informatiker*. Pearson Studium, München, 2nd revised edition, 2008.

[KP09] B. Kreußler and G. Pfister. *Mathematik für Informatiker. Algebra, Analysis, Diskrete Strukturen*. eXamen.press, Springer, Berlin, 2009.

[OO09] M. Oberguggenberger and A. Ostermann. *Analysis für Informatiker. Grundlagen, Methoden, Algorithmen.* eXamen.press, Springer, Berlin, 2nd revised edition, 2009.

[Pap07a] L. Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 1.* Viewegs Fachbücher der Technik. Vieweg, Wiesbaden, 11th edition, 2007.

[Pap07b] L. Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 2.* Viewegs Fachbücher der Technik. Vieweg, Wiesbaden, 11th edition, 2007.

[Sch95] G. Schmieder. *Analysis. Eine Einführung für Mathematiker und Informatiker*. Vieweg, Braunschweig, 1995.

[SV08] M. Scherfner and T. Volland. *Analysis I für das erste Semester*. Pearson Studium, München, 2008.

[TT07] G. Teschl and S. Teschl. *Mathematik für Informatiker. Band II: Analysis und Statistik.* eXamen.press, Springer, Berlin, 2nd edition, 2007.