DS1: Relationen - Aufgaben

Sonntag, 19. Februar 2023 06:02

Aufgabe 5)

Geben Sie die exakte Definition an für:

a1) die Kongruenz modulo m über $\mathbb{N}$

b1) die Teilerrelation über $\mathbb{N}$

Beweisen Sie anschließend, dass

a2) die Kongruenz modulo m eine Äquivalenzrelation über $\mathbb{N}$ ist.

b2) die Teilerrelation eine Halbordungsrelation über $\mathbb{N}$ ist.

5 Aufgabe

1. Definition von der Kongruenz bezüglich m über $\mathbb{N}$ und zeigen das es sich um eine Äquivalenzrelation handelt
2. Definition der Teilerrelation über $\mathbb{N}$ und zeigen das es sich um eine Halbordnung handelt

a.1) die Kongruenz modulo m ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.
→ Äquivalenzrelation

b.1) die Teilrelation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. → Halbordnungsrelation

a.2) Bsp: Kongruenz modulo 2: $\equiv_2$
→ $7 : 2 = 3$ R.1 , $11 : 2 = 5$ R.1
→ 7 ist Kongruenz mod. 2 zu 11, weil beide den selben Rest haben

① reflexiv: z.z: $a \equiv_m a$ mit $r, m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq x$

$a = x \cdot m + r$

weil: $7 = 3 \cdot 2 + 1$
$11 = 5 \cdot 2 + 1$

→ a einsetzen: $x \cdot m + r \equiv_m x \cdot m + r$

$x \cdot m \equiv_m 0 \qquad / \; m \mid 0$

$0 + r \equiv_m 0 + r$

$r \equiv_m r$

② transitiv: z.z: $a \equiv_m b \; \wedge \; b \equiv_m c \; \rightarrow \; a \equiv_m c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

→ $m \mid (a-b) \; \wedge \; m \mid (b-c)$

→ $m \mid (a-b) + (b-c)$

→ $a \cancel{-b} + \cancel{b} - c$

→ $a - c$

→ $m \mid (a-c) \quad ↯ \quad a \equiv_m c$

③ symmetrisch: z.z: $a \equiv_m b \iff b \equiv_m a$

?

b.2.) ① reflexiv: $\forall a, b: \; a \mid b \iff \exists n \in \mathbb{N}: \; a \cdot n = b$

z.z: $a \mid a \iff a \cdot n = a \qquad \mid :a$

$n = \frac{a}{a} \qquad \mid a \neq 0$, wegen Division

↳ wenn $a = 0$ ↯ $a \cdot n = a$
$0 \cdot n = 0$
$0 = 0$

$1 = \frac{a}{a}$

$n = 1 \in \mathbb{N}$

② transitiv: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

z.z: $a \mid b \wedge b \mid c \rightarrow a \mid c$

→ $a \cdot n_1 = b \; \wedge \; b \cdot n_2 = c$

$a \cdot n_1 \cdot n_2 = c \qquad // \; n_3 = n_1 \cdot n_2$

$a \cdot n_3 = c \qquad ↯ \; n_3 \in \mathbb{N}$

→ $a \mid c$

③ antisymmetr.: z.z: wenn $a \mid b$ und $b \mid a$, dann $a = b$

③ antisymmetr.: z.z: wenn $a|b$ und $b|a$, dann $a=b$

$\rightarrow a\cdot n = b$ und $b\cdot m = a$

$\rightarrow b\cdot m\cdot n = b \quad |:b$

$\rightarrow m\cdot n = \frac{b}{b} \quad | \; b\neq 0$, wegen Division → wenn $b=0$

$\rightarrow a\cdot n = 0 \rightarrow a=0 \vee n=0$

$\rightarrow 0\cdot m = a \rightarrow a = 0$

$\rightarrow \underline{b = a = 0}$

$\rightarrow m\cdot n = 1$

$\rightarrow m = \frac{1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n=1$

$\rightarrow \underline{b\cdot 1 = a \Leftrightarrow a=b}$

6 Sonderaufgabe

1. Definition von Id_M, R^{-1} und $R\circ S$
2. Beweisen: R transitiv $\Leftrightarrow R\circ R \subseteq R$
3. Beweisen: $Id_M \subseteq R \wedge R\circ R^{-1} \subseteq R \Leftrightarrow R$ ist Äquivalenzrelation

Aufgabe A)

Es sei M eine Menge und es seien R und S zwei binäre Relationen über M.

a) Definieren Sie die identische Relation Id_M über M, die zu R inverse Relation R^{-1}, sowie das Produkt $R\circ S$.

b) Beweisen Sie: R ist transitiv gdw. gilt: $R\circ R \subseteq R$

c) Beweisen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation über M gdw. gilt: $Id_M \subseteq R$ und $R\circ R^{-1} \subseteq R$

A) a) Def.: $Id_M =_{df} \Delta_M = \{(x,x) \mid x\in M\} = "=_M" \subseteq M\times M$ (identische Relation)

Def.: $R^{-1} =_{df} \{(b,a) \mid (a,b)\in R\} \subseteq B\times A$

Def.: $R\circ S =_{df} \{(a,c) \mid \bigvee_{b\in B} : (a,b)\in R \wedge (b,c)\in S\}$

b) zu zeigen: R ist transitiv $\Leftrightarrow R\circ R \subseteq R$

„⇐": Sei $(a,b)\in R$ und $(b,c)\in R$, da $R\circ R$ gilt muss $(a,c)\in R$

$\rightarrow \underbrace{aRb \wedge bRc}_{\text{Def. von Transitivität}} \rightarrow aRc$

$\rightarrow aRc$

„⇒": $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$

$\rightarrow \bigvee_{b\in B} : (a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \rightarrow (a,c)\in R$

→ R ist transitiv: $((x,y)\in R\circ R \Rightarrow (x,y)\in R)$

→ Sei $(a,c)\in R\circ R$, dann $(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R$

$\xRightarrow{\text{transit.}} aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$, also $(a,c)\in R$ ■

c) Beweisen: R ist Äquivalenzrel. über M $\Leftrightarrow Id_M \subseteq R$ und $R\circ R^{-1} \subseteq R$

„⇒" - zu zeigen: $Id_M \subseteq R \leftrightarrow xRx$ ✓ (reflexiv) $\Rightarrow Id_M := \{(x,x) \mid x\in M\}$

- zu zeigen: $R\circ R^{-1} \subseteq R$

$\rightarrow a(R\circ R^{-1})b \leftrightarrow aRc \wedge cR^{-1}b$

$\leftrightarrow aRc \wedge \underline{bRc}$ || weil Äquiv.R. kann bRc getauscht werd (symmetrisch)

$\rightarrow aR\underline{c} \wedge \underline{cRb}$ → symmetrie

$\rightarrow \underline{\underline{aRb}}$ ✓ (transitiv)

„⇐": zu zeigen: R ist Äquiv.relation (3 Eigenschaften)

- reflexiv: z.z.: aRa

$\rightarrow Id_M \subseteq \leftrightarrow aRa$ ✓ (nach Eigens. von Id_M)

- symmetrisch: z.z.: $aRb \rightarrow bRa$ || müssen Ann. $R\circ R^{-1} \subseteq R$ einbeziehen

$\rightarrow aRb \leftrightarrow bR^{-1}a$

$\rightarrow bRb \wedge bR^{-1}a$

$\rightarrow bRc \wedge cR^{-1}a \quad (c=b)$

$\leftrightarrow b(R \circ R^{-1})a$ // Annahme

$\underline{\rightarrow bRa}$ ✓

• transitiv: z.z.: $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$

$\rightarrow aRb \wedge bRc$ (haben schon symmetrie gezeigt)

$\rightarrow aRb \wedge cRb$ // 2. Ann: Inverse anwenden

$\rightarrow aRb \wedge bR^{-1}c$

$\rightarrow a(R \circ R^{-1})c$

$\underline{\rightarrow aRc}$ ✓