Diskrete Strukturen I; WS 2022/2023

Jörg Vogel

Institut für Informatik der FSU

8. Aufgabenblatt

aussagenlogische Formeln

s1.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

Die logischen Operationen Disjunktion, Konjunktion, Implikation und Bijunktion definieren vier zweistellige Wahrheitswertfunktionen.

a) Geben Sie die übrigen zwölf derartigen zweistelligen Funktionen durch ihre Wahrheitswerttabellen an und

b) zu jeder dieser zwölf Wahrheitswertfunktionen eine *möglichst kurze* aussagenlogische Formel, die genau zu dieser Tabelle passt und

c) suchen Sie umgangssprachliche Formulierungen dafür!

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

a) Was ist der Unterschied zwischen
$A \to (B \to C)$, $(A \to B) \to C$, $(A \land B) \to C$, $A \to (B \land C)$ und
$(A \to B) \land (B \to C)$?
Warum dürfen Sie also nicht $A \to B \to C$ schreiben?

b) Geben Sie eine aussagenlogische Formel F mit den Aussagenvariablen A, B und C (und keinen weiteren) an, die die folgende Eigenschaft für alle Belegungen β erfüllt:
Ändert man genau einen der Werte $\beta(A)$ bzw. $\beta(B)$ bzw. $\beta(C)$,
dann ändert sich auch der Wert $I_\beta(F)$.

m3.) *(Diese Aufgabe ist eine mündliche Hausaufgabe, die nicht bewertet wird.)*

Sind die folgenden Schlussfolgerungen richtig oder falsch?
Formalisieren Sie und überprüfen Sie, ob die Gesamtheit der jeweiligen Annahmen die angegebne Konsequenz zur Folge hat.

a) Anton ist ein Lügner oder Bertram war in Berlin
oder Claudius ist kein Erpresser.
Wenn Bertram nicht in Berlin war, dann ist Anton kein Lügner oder Claudius ist ein Erpresser.
Folglich muss Bertram in Berlin gewesen sein.

b) Wenn der Staatshaushalt nicht gekürzt wird, dann bleiben die Preise stabil
dann und nur dann, wenn die Steuern erhöht werden.
Der Staatshaushalt wird nicht gekürzt, wenn die Steuern erhöht werden.
Wenn die Preise stabil bleiben, werden die Steuern nicht erhöht.
Folglich werden die Steuern nicht erhöht.

Abgabetermin: Montag, **12. Dezember 2022 bis 10 Uhr als pdf-Datei .**
Bitte schreiben Sie in den Titel dieser pdf-Datei Ihren <u>Namen</u>.

DS1: 8.Hausaufgabe (12.12.22) - Cora Zeitler

Donnerstag, 8. Dezember 2022 08:11

aussagenlogische Formeln

s1.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

Die logischen Operationen Disjunktion, Konjunktion, Implikation und Bijunktion definieren vier zweistellige Wahrheitswertfunktionen.

a) Geben Sie die übrigen zwölf derartigen zweistelligen Funktionen durch ihre Wahrheitswerttabellen an und

b) zu jeder dieser zwölf Wahrheitswertfunktionen eine *möglichst kurze* aussagenlogische Formel, die genau zu dieser Tabelle passt und

c) suchen Sie umgangssprachliche Formulierungen dafür!

1) a)

A	B	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

b) ↳

0	1	a	$\neg a$	b	$\neg b$	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$a \to b$	$\neg(a \to b)$	$b \to a$	$\neg(b \to a)$	$a \leftrightarrow b$	$\neg(a \leftrightarrow b)$
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

$\underbrace{0 \quad 1}_{B=\{0,1\}}$ F Negation $\neg F$ G Negation $\neg G$ Konjunktion $F \wedge G$ Disjunktion $F \vee G$ Implikation $F \to G$, $G \to F$ Bijunktion $F \leftrightarrow G$

c)
1. Kontradiktion
2. Konjunktion (AND-Verknüpfung)
3. Inhibition (AND-Verknüpfung mit Eingangsnegation)
4. Identität von a
5. Inhibition (AND-Verknüpfung mit Eingangsnegation)
6. Identität von b
7. Antivalenz (XOR-Verknüpfung)
8. Disjunktion (OR-Verknüpfung)
9. Peirce-Funktion (NOR-Verknüpfung)
10. Äquivalenz (NXOR-Verknüpfung)
11. Negation von b
12. Implikation aus b (OR-Verknüpfung mit Eingangsnegation)
13. Negation von a
14. Implikation aus a (OR-Verknüpfung mit Eingangsnegation)
15. Sheffer-Funktion (NAND-Verknüpfung)
16. Tautologie

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

a) Was ist der Unterschied zwischen $A \to (B \to C)$, $(A \to B) \to C$, $(A \wedge B) \to C$, $A \to (B \wedge C)$ und $(A \to B) \wedge (B \to C)$?
Warum dürfen Sie also nicht $A \to B \to C$ schreiben?

b) Geben Sie eine aussagenlogische Formel F mit den Aussagenvariablen A, B und C (und keinen weiteren) an, die die folgende Eigenschaft für alle Belegungen β erfüllt:
Ändert man genau einen der Werte $\beta(A)$ bzw. $\beta(B)$ bzw. $\beta(C)$, dann ändert sich auch der Wert $I_\beta(F)$.

2)a)

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$A \to (B \to C)$	$(A \to B) \to C$	$(A \wedge B) \to C$	$A \to (B \wedge C)$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1

--> Bsp: A → (B → C) und (A → B) → C sind nicht gleich. ->siehe obere Markierung in WW-Tabelle
--> Vergleich analog zu den anderen, d.h. der Unterschied liegt an den Werten in der WW-Tabelle

Warum dürfen Sie also nicht $A \to B \to C$ schreiben?

- A → (B → C) und (A → B) → C, sind unterschiedliche WW-Tabellen (siehe Tabelle)
  → B → C hat keine Klammern und daher ist es einem sozusagen freigestellt wo man anfängt den Term zu lesen, da nur Implikation

- A → B → C hat keine Klammern und daher ist es einem sozusagen freigestellt wo man anfängt den Term zu lesen, da nur Implikationszeichen verbaut wurden
-Das Problem ist wenn man selbst entscheiden kann wo man anfängt gibt es zwei Möglichkeiten :
 >Erste Möglichkeit : man fängt mit A->B and und macht dann weiter damit dass das Ergebnis C impliziert
 >Zweite Möglichkeit: Man fängt mit B->C an und macht dann weiter damit, dass A das Ergebnis aus B->C impliziert

=> Diese beiden Möglichkeiten beschreiben A->(B->C) und (A->B)->C, da diese aber unterschiedliche Wahrheitstabellen haben, darf man A->B->C also nicht schreiben.

b)

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	1
1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
$\beta(A)$	$\beta(B)$	$\beta(C)$	$I_\beta(F)$

	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$
B		1		1
B	1		1	
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

→ $\bar{A}\bar{B}C \vee ABC \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C}$

→ ist die minimalste Aussagenlogische Formel für die WW-Tabelle

→ immer wenn man einen Wert ändert, ändert sich die Zahl um +1 oder −1
 ↳ es ändert sich also von gerade auf ungerade oder umgekehrt

→ wenn man also alle ungeraden Anzahl an wahren Werten in der Formel hat, dann muss es sich immer ändern beim ändern einer Zahl

DS1: 8.Hausaufgabe (12.12.22) - Cora Zeitler

Donnerstag, 8. Dezember 2022 08:11

aussagenlogische Formeln

s1.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*
Die logischen Operationen Disjunktion, Konjunktion, Implikation und Bijunktion definieren vier zweistellige Wahrheitswertfunktionen.

a) Geben Sie die übrigen zwölf derartigen zweistelligen Funktionen durch ihre Wahrheitswerttabellen an und

b) zu jeder dieser zwölf Wahrheitswertfunktionen eine *möglichst kurze* aussagenlogische Formel, die genau zu dieser Tabelle passt und

c) suchen Sie umgangssprachliche Formulierungen dafür!

✓

1) a)

A	B	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

b) ↳ 3/3

0	1	a	¬a	b	¬b	a∧b	¬(a∧b)	a∨b	¬(a∨b)	a→b	¬(a→b)	b→a	¬(b→a)	a↔b	¬(a↔b)
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$B=\{0,1\}$		F	Negation ¬F	G	Negation ¬G	Konjunktion F∧G		Disjunktion F∨G		Implikation F→G, G→F				Bijunktion F↔G	

c)
1. Kontradiktion ✓
2. Konjunktion (AND-Verknüpfung) ✓
3. Inhibition (AND-Verknüpfung mit Eingangsnegation) ✓
4. Identität von a ✓
5. Inhibition (AND-Verknüpfung mit Eingangsnegation) ✓
6. Identität von b
7. Antivalenz (XOR-Verknüpfung) ✓
8. Disjunktion (OR-Verknüpfung) ✓
9. Peirce-Funktion (NOR-Verknüpfung) (✓)
10. Äquivalenz (NXOR-Verknüpfung) ✓
11. Negation von b ✓
12. Implikation aus b (OR-Verknüpfung mit Eingangsnegation) ✓
13. Negation von a ✓
14. Implikation aus a (OR-Verknüpfung mit Eingangsnegation) ✓
15. Sheffer-Funktion (NAND-Verknüpfung) ✓
16. Tautologie ✓

„umgangssprachlich" sind diese Beschreibungen zum Großteil eher nicht. Manche sind auch ungenau, z.B. 3., da nicht klar ist, was negiert wird.

11/12

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

a) Was ist der Unterschied zwischen
$A \to (B \to C)$, $(A \to B) \to C$, $(A \wedge B) \to C$, $A \to (B \wedge C)$ und
$(A \to B) \wedge (B \to C)$?
Warum dürfen Sie also nicht $A \to B \to C$ schreiben?

b) Geben Sie eine aussagenlogische Formel F mit den Aussagenvariablen A, B und C (und keinen weiteren) an, die die folgende Eigenschaft für alle Belegungen β erfüllt:
Ändert man genau einen der Werte $\beta(A)$ bzw. $\beta(B)$ bzw. $\beta(C)$, dann ändert sich auch der Wert $I_\beta(F)$.

2)a)

A	B	C	A→B	B→C	A∧B	B∧C	A→(B→C) f	(A→B)→C f	(A∧B)→C f	A→(B∧C) f	(A→B)∧(B→C) ✓
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1 0	1 0	1 0	1 0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0 1	0 1	1 0	0
0	1	1	1	1	0	1	0 1	1 1	0 1	0 1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0 1	1	1 0	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1 0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0 1	1	0 1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0 1	1 0	1	0 1	1

--> Bsp: A → (B → C) und (A → B) → C sind nicht gleich. ->siehe obere Markierung in WW-Tabelle (✓)
--> Vergleich analog zu den anderen, d.h. der Unterschied liegt an den Werten in der WW-Tabelle

Warum dürfen Sie also nicht $A \to B \to C$ schreiben? (✓)

- A → (B → C) und (A → B) → C, sind unterschiedliche WW-Tabellen (siehe Tabelle)
  → B → C hat keine Klammern und daher ist es einem sozusagen freigestellt wo man anfängt den Term zu lesen, da nur Implikation

- A → B → C hat keine Klammern und daher ist es einem sozusagen freigestellt wo man anfängt den Term zu lesen, da nur Implikationszeichen verbaut wurden
-Das Problem ist wenn man selbst entscheiden kann wo man anfängt gibt es zwei Möglichkeiten :
>Erste Möglichkeit : man fängt mit A->B and und macht dann weiter damit dass das Ergebnis C impliziert
>Zweite Möglichkeit: Man fängt mit B->C an und macht dann weiter damit, dass A das Ergebnis aus B->C impliziert

=> Diese beiden Möglichkeiten beschreiben A->(B->C) und (A->B)->C, da diese aber unterschiedliche Wahrheitstabellen haben, darf man A->B->C also nicht schreiben. ✓

2/6

b)

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	1
1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
$\beta(A)$	$\beta(B)$	$\beta(C)$	$I_\beta(F)$

✓

	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$
B		1		1
B	1		1	
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

→ $\bar{A}\bar{B}C \vee ABC \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C}$ ✓

→ ist die minimalste Aussagenlogische Formel für die WW-Tabelle f

→ immer wenn man einen Wert ändert, ändert sich die Zahl um +1 oder −1
↳ es ändert sich also von gerade auf ungerade oder umgekehrt

→ wenn man also alle ungeraden Anzahl an wahren Werten in der Formel hat, dann muss es sich immer ändern beim ändern einer Zahl ✓

es geht deutlich kürzer: $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$

5/6

$\sum$: 21/27 :)