

Diskrete Strukturen I; WS 2022/2023

Jörg Vogel

Institut für Informatik der FSU

1. Aufgabenblatt

Das Josephus-Problem

- 1.)
 - a) Welche Plätze sollte man beim ursprünglichen Josephus-Problem anstreben? 41 Personen stellen sich durchnummeriert im Kreis auf. Bei 1 beginnend abzuzählen im Rhythmus (1, 2, 3) wird fortlaufend jede dritte herausgenommen, solange bis schließlich zwei Personen übrig bleiben.
An welche Positionen stellte Josephus seinen Freund und sich, um zu überleben? Begründen Sie Ihre Antwort!
 - b) Die ursprünglichen Josephus-Legende wird auch in folgender Variante erzählt; dabei wird der alte römische Brauch der *decimatio* (Aussonderung jedes Zehnten) zugrunde gelegt:
Beginnend mit 41 Personen wird fortlaufend jede zehnte herausgenommen bis schließlich zwei Personen übrig bleiben.
Welche Platznummern haben diese? Begründen Sie Ihre Antwort!
- 2.) Dieses Thema ist in vielen Variationen überliefert, etwa als Geschichte von Seefahrern in Seenot, die im Sturm die Mannschaft auf die Hälfte reduzieren müssen.
Eine überlieferte Version handelt von 15 Gläubigen und 15 Ungläubigen an Bord. Jeder zehnte wird vom Kapitän ausgezählt (*decimatio*). Die nicht ausgezählte Hälfte der 30 Passagiere darf an Bord bleiben.
Nicht schwer zu erraten ist die Frage: Welches sind die sicheren Positionen für die Gläubigen?
- 3.) Die drei folgenden Gleichungen beschreiben explizite Formeln zur Berechnung der Josephus-Nummern $J(n)$ für spezielle natürliche Zahlen der Form $n = 2^m$ bzw. $n = 2^m - 1$ bzw. $n = 5 \cdot 2^m$.
Benutzen Sie das in der Vorlesung formulierte Rekursionsschema (1) für die Josephus-Nummern, um jede dieser Gleichungen durch vollständige Induktion zu beweisen.
Dabei ist jeweils m die Induktionsvariable.
 - a) $J(2^m) = 1$ (für alle $m \geq 0$).
 - b) $J(2^m - 1) = 2^m - 1$ (für alle $m > 0$).
 - c) $J(5 \cdot 2^m) = 2^{m+1} + 1$ (für alle $m \geq 0$).