Wiederholung

Dienstag, 21. Februar 2023 03:27

Aufgabe 1)

a) Geben Sie das Rekursionsschema der Josephus-Nummern J(n) an.

b) Ausgehend von diesem Schema formulieren Sie eine Hypothese für eine explizite (geschlossene Formel) der Josephus-Nummern J(n).

c) Beweisen Sie die Hypothese mittels vollständiger Induktion über eine geeignete Induktionsvariable.

1) a) $J(1) = 1$

$J(2n) = 2 \cdot J(n) - 1$ (A) gerade Z.

$J(2n+1) = 2 \cdot J(n) + 1$ (B) ungerade Z.

1) b) → geschl. F. soll Rekurs. S. zsmfassen

→ ausrechnen am Bsp:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
J(n)	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15

usw

→ für $n \in \mathbb{N}$: $n = 2^m + r$, $0 \le r < 2^m$,

→ geschl. F.: $\boxed{J(n) = J(2^m + r) = 2r + 1}$ (F)

→ d.h.: $2^m \le n < 2^{m+1}$

1) c) geg: $n = 2^m + r$, $n \ge 1$, $0 \le r < 2^m$

IA: $m = 0$ ↯ $n = 2^0 + r$ → $0 \le r < 2^0 = 1$ → $r = 0$

$n = 2^0 + 0$

$J(2^0 + 0) = 2 \cdot 0 + 1$

$\underline{J(1) = 1}$

IV: $m = k$ ↯ $n' = 2^k + r'$ ↯ $J(n') = 2^k + r' = 2r' + 1$

IB: $m = k+1$ ↯ $n'' = 2^{k+1} + r''$ ↯ $J(n'') = 2^k + r'' = 2r'' + 1$

Inbew.: nach Rekurs.s. 2. Fälle

1. Fall: n'' = gerade (A)

$n'' = 2^{k+1} + r''$ → r muss gerade sein, also $\frac{r''}{2} \in \mathbb{N}$

$n'' = 2^{k+1} + \frac{r''}{2} = 2\underline{n}$ (A)

↳ also: $n = 2^k + \frac{r''}{2}$

↯ $J(n'') = J(2n)$ | (A)

$= 2 \cdot J(n) - 1$ ‖ n einsetzen

$= 2 \cdot (2^k + \frac{r''}{2}) - 1$ ‖ IV

$\overset{IV}{=} 2 \cdot (2(\frac{r''}{2}) + 1) - 1$

$= 2 \cdot (r'' + 1) - 1$

$= 2r'' + 2 - 1$

$= \underline{2r'' + 1}$ ▨

2. Fall: n'' = ungerade Zahl (B)

$n'' = 2^{k+1} + r$ → r muss ungerade sein, also $\frac{r''-1}{2}$

$n'' = 2^{k+1} + (\frac{r''-1}{2}) = 2\underline{n} + 1$ (B)

↳ also $n = 2^k + (\frac{r''-1}{2})$

↯ $J(n'') = J(2n+1)$ | (B)

$\overset{(B)}{=} 2 \cdot J(n) + 1$ | n einsetzen

$= 2 \cdot J(2^k + (\frac{r''-1}{2})) + 1$ | IV

$\overset{(IV)}{=} 2 \cdot (2 \cdot (\frac{r''-1}{2}) + 1) + 1$

$= 2 \cdot (\frac{\cancel{2} \cdot r'' - 1}{\cancel{2}} + 1) + 1$

$= 2 \cdot (r'' \cancel{-1} \cancel{+1}) + 1$

$= \underline{2r'' + 1}$ ▨

1 Aufgabe

1. Rekursions-Schema für die Josephus Nummern
2. Alle natürlichen Zahlen n mit $J(n) = 1$ bestimmen und per Induktion beweisen
3. Alle natürlichen Zahlen n mit $J(n) = n$ bestimmen und per Induktion beweisen

1.) $J(1) = 1$

$J(2n) = 2 \cdot J(n) - 1$ (A) $\rightarrow$ gerade Z

$J(2n+1) = 2 \cdot J(n) + 1$ (B) $\rightarrow$ ungerade Z

2.) geg: $J(n) = 1$ $\rightarrow$ mit $J(2^m) = 1$, $m \geq 0$

IA: $m = 0$ $\Rightarrow$ $J(2^0) = 1$

$\underline{J(1) = 1}$ ✓

IV: $m = k$ $\Rightarrow$ $J(2^k) = 1$

IB: $m = k+1$ $\Rightarrow$ $J(2^{k+1}) = 1$

Ind. beweis: $n = 2^{k+1}$ $\rightarrow$ n ist gerade Zahl (A)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow J(2n) &= 2 \cdot J(n) - 1 \\
J(2 \cdot 2^{k+1}) &= 2 \cdot J(2^{k+1}) - 1 \quad \| \text{ "}\tfrac{n}{2}\text{"} \\
J(2^{k+1}) &= 2 \cdot J\left(\frac{2^{k+1}}{2}\right) - 1 \\
&= 2 \cdot J\left(\frac{2^k \cdot 2^1}{2}\right) - 1 \\
&= 2 \cdot J(2^k) - 1 \quad \| \text{ IV} \\
&\overset{(IV)}{=} 2 \cdot 1 - 1 \\
\underline{J(2^{k+1})} &\underline{= 1} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.) geg: $J(n) = n$, mit $J(2^m - 1) = 2^m - 1$, $m > 0$

IA: $m = 1$ $\Rightarrow$ $J(2^1 - 1) = 2^1 - 1$

$\underline{J(1) = 1}$

IV: $m = k$ $\Rightarrow$ $J(2^k - 1) = 2^k - 1$

IB: $m = k+1$ $\Rightarrow$ $J(2^{k+1} - 1) = 2^{k+1} - 1$

Ind. beweis: $n = 2^{k+1} - 1$ $\rightarrow$ von davor wissen wir 2^{k+1} ist gerade, dh. $2^{k+1} - 1$ muss ungerade sein (B)

$$\begin{aligned}
J(2n+1) &= 2 \cdot J(n) + 1 \quad \text{(B)} \\
J(2 \cdot (2^{k+1} - 1) + 1) &= 2 \cdot J(2^{k+1} - 1) + 1 \quad \| \text{ "}\tfrac{n}{2}\text{"} \\
J((2^{k+1} - 1) + 1) &= 2 \cdot J\left(\frac{2^{k+1} - 1}{2}\right) + 1 \quad \| \text{ "n"} - 1 \\
J(2^{k+1} - 1) &= 2 \cdot J\left(\frac{2^{k+1} - 1 - 1}{2}\right) + 1 \\
&= 2 \cdot J\left(\frac{2^k \cdot 2^1 - 2}{2}\right) + 1 \\
&= 2 \cdot J(2^k - 1) + 1 \quad \| \text{ IV} \\
&\overset{(IV)}{=} 2 \cdot (2^k - 1) + 1 \\
&= 2^{k+1} - 2 + 1 \\
\underline{J(2^{k+1} - 1)} &\underline{= 2^{k+1} - 1} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Aufgabe 2)

a) Geben die das vollständige Rekursionsschema der Fibonacci-Zahlen an.

b) Von diesem Schema ausgehend beweisen Sie durch vollständige Induktion über $m \geq 1$ (mit Indunktionsanfang, Induktionsschritt usw.) die folgende Gleichung:

$$f_{n+m} = f_{m+1} \cdot f_n + f_m \cdot f_{n-1}$$

c) Benutzen Sie diese, um folgende Gleichung herzuleiten:

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$$

n	1	2	3	4	5	6	7
f_n	1	1	2	3	5	8	13

2)a) $f_1 = 1$

$f_2 = 1$

$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, für $n \geq 1$

2)b) geg: $f_{n+m} = f_{m+1} \cdot f_n + f_m \cdot f_{n-1}$, mit $m \geq 1$

IA: $m=1$ $\Rightarrow$ $f_{n+1} = f_{1+1} \cdot f_n + f_1 \cdot f_{n-1}$

$= f_2 \cdot f_n + f_1 \cdot f_{n-1}$

$= 1 \cdot f_n + 1 \cdot f_{n-1}$

$\underline{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}$ ✓

IV: $m=k$ $\Rightarrow$ $f_{n+k} = f_{k+1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1}$

$m=k-1$ $\Rightarrow$ $f_{n+k-1} = f_{k-1+1} \cdot f_n + f_{k-1} \cdot f_{n-1}$

$= f_k \cdot f_n + f_{k-1} \cdot f_{n-1}$

IB: $m=k+1$ $\Rightarrow$ $f_{n+k+1} = f_{k+1+1} \cdot f_n + f_{k+1} \cdot f_{n-1}$

$= f_{k+2} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1}$

$m=k$ $\Rightarrow$ wie in IV

Ind.beweis: $f_{n+k+1} = \underline{f_{n+k}} + \underline{f_{n+k-1}}$ // IV

$\overset{(IV)}{=} (\underline{f_{k+1} \cdot f_n} + \underline{f_k \cdot f_{n-1}}) + (\underline{f_k \cdot f_n} + \underline{f_{k-1} \cdot f_{n-1}})$

$= f_n \cdot (f_{k+1} \cdot f_k) + f_{n-1} \cdot (f_k \cdot f_{k-1})$

$= f_n \cdot f_{k+2} + f_{n-1} \cdot f_k$

$\underline{f_{n+k+1} = f_{k+2} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1}}$ ■

3) ggg: $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$

→ benutze "Merke"

→ abgeleitet von (2.))

/ Merke: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

$f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$

$f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$

$\Rightarrow$ $f_{2n} = f_{n+1} \cdot \underline{f_n} - \underline{f_n} \cdot f_{n-1}$ // f_n aus Merke einsetzen

$= f_{n+1} \cdot (f_{n+1} - f_{n-1}) - f_{n-1} \cdot (f_{n+1} - f_{n-1})$

$= f_{n+1} \cdot f_{n+1} - \cancel{f_{n+1} \cdot f_{n-1}} - \cancel{f_{n-1} \cdot f_{n+1}} - f_{n-1} \cdot f_{n-1}$

$\underline{f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2}$ ■

Fibonacci-Zahlen

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*
Beweisen Sie folgende Identität für die Fibonacci-Zahlen dadurch, dass Sie für die Werte $\mathbf{f_n}$ explizit die **Binet-Formel** einsetzen!

$$f_{2n} = f_n \cdot (f_{n+1} + f_{n-1}).$$

s.2.) Binet: $f_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ mit: $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ $f_{2n} = f_n \cdot (f_{n+1} + f_{n-1})$

$\dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\dfrac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}\right) + \left(\dfrac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}}\right)\right)$ / $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$

$= \dfrac{\varphi^n - \psi^n \cdot (\varphi^{n+1} - \psi^{n+1} + \varphi^{n-1} - \psi^{n-1})}{5}$

$= \frac{1}{5} \cdot ((\varphi^n \cdot \varphi^{n+1} - \varphi^n \cdot \psi^{n+1} + \varphi^n \cdot \varphi^{n-1} - \varphi^n \cdot \psi^{n-1}) - (\psi^n \cdot \varphi^{n+1} - \psi^n \cdot \psi^{n+1} + \psi^n \cdot \varphi^{n-1} - \psi^n \cdot \psi^{n-1}))$

$= \frac{1}{5} \cdot (\underline{\varphi^{2n+1}} - \varphi^n \cdot \psi^{n+1} + \underline{\varphi^{2n-1}} - \varphi^n \cdot \psi^{n-1} - \psi^n \cdot \varphi^{n+1} + \underline{\psi^{2n+1}} - \psi^n \cdot \varphi^{n-1} + \underline{\psi^{2n-1}})$

$= \frac{1}{5} \cdot (\underline{\varphi^{2n+1} + \varphi^{2n-1}} + \underline{\psi^{2n+1} + \psi^{2n-1}} - \underline{\varphi^n} \cdot \psi^{n+1} - \underline{\varphi^n} \cdot \psi^{n-1} + \underline{\psi^n} \cdot \varphi^{n+1} - \underline{\psi^n} \cdot \varphi^{n-1})$

$= \frac{1}{5} \cdot (\varphi^{2n} \cdot \varphi^1 + \varphi^{2n} \cdot \varphi^{-1} + \psi^{2n} \cdot \psi^1 + \psi^{2n} \cdot \psi^{-1} - \underbrace{-\|-}\ )$

$= \frac{1}{5} \cdot (\varphi^{2n} \cdot (\varphi^1 + \varphi^{-1}) + \psi^{2n} \cdot (\psi^1 + \psi^{-1}) - \varphi^n \cdot \psi^n \cdot (\psi^1 + \psi^{-1} + \varphi^1 + \varphi^{-1})$ // $\varphi^{-1} = -\psi$, $\psi^{-1} = -\varphi$

$= \frac{1}{5} \cdot (\varphi^{2n} \cdot (\varphi - \psi) + \psi^{2n} \cdot (\psi - \varphi) - \underbrace{\varphi^n \cdot \psi^n \cdot (\underbrace{\cancel{\psi} - \cancel{\varphi} + \cancel{\varphi} - \cancel{\psi}}_{0})}_{0}$

$= \frac{1}{5} \cdot (\varphi^{2n} \cdot (\underline{\varphi - \psi}) + \psi^{2n} \cdot (\underline{\psi - \varphi}) -$

$\Rightarrow$ $\varphi - \psi = (1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5}) = \cancel{1} + \sqrt{5} - \cancel{1} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$$= \frac{1}{5}\cdot\left(\varphi^{2n}\cdot(\varphi-\psi) + \psi^{2n}\cdot(\psi-\varphi) - \overbrace{\qquad\qquad}^{0}\right) \quad 0$$

$$\hookrightarrow \varphi - \psi = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\cancel{1}+\sqrt{5}\cancel{-1}+\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{\cancel{2}} = \sqrt{5}$$

$$\psi - \varphi = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\cancel{1}-\sqrt{5}\cancel{-1}-\sqrt{5}}{2} = \frac{2\cdot(-\sqrt{5})}{2} = -\sqrt{5}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\varphi^{2n}\cdot\sqrt{5} + \psi^{2n}\cdot(-\sqrt{5})\right)$$

$$= \frac{\varphi^{2n}\cdot\sqrt{5} + \psi^{2n}\cdot(-\sqrt{5})}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\varphi^{2n} + \psi^{2n}\cdot(-1)}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\varphi^{2n}-\psi^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{2n}-\psi^{2n}}{\sqrt{5}} \quad \blacksquare$$

Aufgabe 4)

Beweisen Sie folgende Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.
Erklären Sie den Begriff Modell und definieren Sie die unterstrichenen Wörter.

a) $(F \vee G)$ ist erfüllbar gdw. F erfüllbar oder G erfüllbar ist.

b) $(F \wedge G)$ ist erfüllbar gdw. F erfüllbar und G erfüllbar ist.

c) $(F \vee G)$ ist Tautologie gdw. F Tautologie G Tautologie ist. f.A.

d) $(F \wedge G)$ ist Tautologie gdw. F Tautologie und G Tautologie ist. w.A.

4) a) $(F \vee G) \in SAT \iff F \in SAT$ oder $G \in SAT$

$\iff \exists\beta: I_\beta(F\vee G) = 1$

$\iff \exists\beta: \max\{I_\beta F, I_\beta G\} = 1$ // max: $1 \vee 0 = 1$, $0 \vee 1 = 1$

$\iff \exists\beta: \bigvee_\beta I_\beta(F) = 1$ oder $\bigvee_\beta I_\beta(G) = 1$

$\iff F \in SAT$ oder $G \in SAT$ $\blacksquare$ w.A

b) $(F \wedge G) \in SAT \iff F \in SAT$ und $G \in SAT$

$\iff \exists\beta: I_\beta(F\wedge G) = 1$

$\iff \exists\beta: \min\{I_\beta(F), I_\beta(G)\} = 1$

$\Rightarrow \exists\beta: I_\beta(F) = 1$ und $\exists\beta: I_\beta(G) = 1$

$\iff F \in SAT$ un $G \in SAT$

↳ beide sind erfüllbar und müssen 1 sein, aber können auch SAT und $\overline{SAT}$ sein und trz erfüllbar

„$\Leftarrow$" mit Bsp: $F = A$ → SAT
$G = A \wedge \neg A$ → SAT

↳ $F\wedge G = A \wedge \neg A \in \overline{SAT}$

$F \wedge G \in \overline{SAT}$ obwohl $G, F \in SAT$ sind ↳ falsche A.

c) $(F \vee G) \in TAUT \iff F \in TAUT$ oder $G \in TAUT$

$\iff \forall I_\beta(F) = 1$ oder $\forall I_\beta(G) = 1$

$\Rightarrow \forall \max\{I_\beta(F), I(G)\} = 1$

$\iff \forall I_\beta(F\vee G) = 1$

$\iff (F \vee G) \in TAUT$

$\Leftarrow$ mit Bsp: $F = A$ → SAT
$G = \neg A$ → SAT
↳ $F \vee G = A \vee \neg A \in TAUT$

$F \vee G \in TAUT$ und G, F sind $\notin TAUT$

d) $(F \wedge G) \in TAUT \iff F \in TAUT$ und $G \in TAUT$

$\iff \forall\beta: I_\beta(F \wedge G) = 1$

$\iff \forall\beta: \min\{I_\beta(F), I_\beta(G)\} = 1$

$\iff \forall\beta\ I_\beta(F) = 1$ und $\forall\beta: I_\beta(G) = 1$

$\iff F \in TAUT$ und $G \in TAUT$ $\blacksquare$ w. A.