Lineare Algebra - Külshammer - 2008WS

Datum: ..

Dauer: 0 Minuten

Note: 0.0

Bemerkung

1. und 2. Versuch

Prüfungstext

siehe Anhang

Külshammer - Lineare Algebra WS 08/09
1 oder 2. Versuch

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen? Geben Sie im Fall der Lösbarkeit die Lösungen an.

$$\begin{aligned} x + 2y \quad & -3z = 4 \\ 3x - y \quad & +5z = 2 \\ 4x + y \quad & +(a^2 - 14)z = a + 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

(i) Es sei U der Untervektorraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$, der aus allen Matrizen besteht, deren Zeilensummen, Spaltensummen und Diagonalsummen sämtlich gleich Null sind. Bestimmen Sie eine Basis von U.

(ii) Gegeben seien 4-dimensionale Untervektorräume U_1, U_2 von $\mathbb{R}^6$. Was lässt sich über $\dim U_1 \cap U_2$ sagen?

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

(i) Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und B die Adjunkte von A. Zeigen Sie:

$$\det B = (\det A)^{n-1}.$$

(ii) Berechnen Sie die Determinante einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)

(i) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Warum ist A diagonalisierbar?

(iii) Konstruieren Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei definiert durch

$$a_0 := a_1 := 1, \quad a_{n+1} := 2a_n + 3a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Finden Sie eine geschlossene Form.

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für Vektorräume U, V, W endlicher Dimension und lineare Abbildungen $f : U \to V$, $g : V \to W$ stets gilt:

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(f) \quad \text{und} \quad \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(g).$$

Aufgabe 7 (2+2 Punkte)

(i) Von einer Matrix $A \in \mathrm{O}(n)$ seien die ersten $n-1$ Zeilen gegeben. Inwieweit ist die n-te Zeile dadurch bestimmt?

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^\top = -A$ und $1_n + A, 1_n - A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
Zeigen Sie: $(1_n + A)^{-1}(1_n - A) \in \mathrm{O}(n)$.

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Der Untervektorraum U von $\mathbb{R}^4$ werde von den folgenden Vektoren aufgespannt:

$$a_1 = (1, 1, 0, 1), \qquad a_2 = (1, -2, 0, 0), \qquad a_3 = (1, 0, -1, 2).$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Finden Sie zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $S \in \mathrm{O}(4)$ mit der Eigenschaft, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 10 (2+2 Punkte)

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ werde definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (4x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4,\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4,\ 6x_1 - 9x_3 + 9x_4).$$

Bestimmen Sie Basen von $\operatorname{Ker}(f)$ und $\operatorname{Bld}(f)$.

Külshammer - Lineare Algebra WS 08/09
1. oder 2. Versuch

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(i) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die folgende Matrix den Rang 2:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \; ?$$

(ii) Invertieren Sie die folgende Matrix:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Ergänzen Sie die Vektoren $(i, i, 1), (1+i, 1, 1-i)$ zu einer Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Die Untervektorräume $U_1 := \mathrm{Span}(y_1, y_2, y_3)$ und $U_2 := \mathrm{Span}(z_1, z_2)$ von $\mathbb{R}^4$ seien gegeben durch die Vektoren

$$\begin{aligned} y_1 &:= (1,1,0,0), \quad & y_2 &:= (1,0,1,0), \quad & y_3 &:= (0,1,1,0), \\ z_1 &:= (2,-1,0,0), \quad & z_2 &:= (0,0,-1,2). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie Basen von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 & (n-1)^2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = n! \; .$$

Achten Sie dabei auch auf einen korrekten Induktionsanfang.

Aufgabe 5 (2+2+2+2 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3)$.

(i) Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Bld}(f)$ und $\mathrm{Ker}(f)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $b_1 := (1,1,0), b_2 := (2,0,1), b_3 := (0,1,0)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(iii) Geben Sie die Matrix von f bzgl. der Basis in (ii) an.

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Konstruieren Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Seien x, y Vektoren in einem euklidischen Vektorraum V mit $||x|| = ||y||$. Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $||x - ay|| = ||ax - y||$.

Aufgabe 8 (2+2 Punkte)

(i) Konstruieren Sie eine ONB für den Untervektorraum U von $\mathbb{R}^4$, der von den folgenden Vektoren aufgespannt wird:

$$a_1 = (1,2,0,2), \ a_2 = (0,5,-2,4), \ a_3 = (-1,-1,-4,6) .$$

(ii) Welcher Vektor in U hat von $x := (-2,0,2,1)$ den kleinsten Abstand?

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Finden Sie zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $S \in \mathrm{O}(3)$ mit der Eigenschaft, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.