Erweiterte Korrekturhinweise für die Klausur zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 vom 21.03.2017

Dies ist *keine* Musterlösung. Beispielsweise fehlen an einigen Stellen Begründungen. Wie in den erweiterten Korrekturhinweisen zur Erstklausur ist unter dem Stichpunkt **Material** genannt, welche Haus- und Präsenzaufgaben (teilweise Altklausuren oder Beispiele/Beweise aus der Vorlesung) mit der Teilaufgabe zu tun haben.

Es hat mich sehr erstaunt, wie viele von Ihnen lineare Gleichungssysteme so wie in der Schule behandelten, also immer sämtliche Unbekannte explizit hinschrieben (was fehleranfällig und überflüssige Schreibarbeit ist) und Gleichungen ineinander einsetzten (was natürlich korrekt, aber für größere Systeme ziemlich umständlich ist). Die Algorithmen 10.3 und 10.10 sollten Sie jedenfalls schon längst verinnerlicht haben.

Aufgabe 1: *Basen*

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1P.)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1P.)}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1P.)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

also (1 P.) Basis $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ des Spaltenraums, durch $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ ergänzt zu Basis von $\mathbb{R}^4$.

Wird in zwei Schritten gerechnet, so gibt es (2,5 P.) für die Basis des Spaltenraums und (1,5 P.) für die Ergänzung.

Material: HA 5.2, 5.3 und 8.3, Bsp. 7.7, Beweis des Basisergänzungssatzes, Erstklausur A1.

Aufgabe 2: *Matrixinvertierung* (0,5 P.) für Ansatz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(0{,}5\text{ P.})}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1P.)}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1P.)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1{,}5\text{ P.})}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ also (0,5 P.) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Material: Algorithmus 10.18, HA 8.2

Anmerkung: Es ist natürlich im Prinzip möglich, A^{-1} zu berechnen, indem man ein System von 16 linearen Gleichungen mit 16 Unbekannten aufstellt. Dafür habe ich auch Punkte vergeben, obwohl die genannte Vorgehensweise grotesk kompliziert ist und wichtige Lerninhalte der Vorlesung unbeachtet lässt.

Aufgabe 3: *Untere Dreiecksmatrizen*
Anmerkung: Einige haben den in der Definition von $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ vorkommenden Relativsatz („Die Menge aller Matrizen**, die eine Zusatzeigenschaft erfüllen**“) ignoriert und somit die Aussagen für $M_n(\mathbb{R})$ statt für $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ bewiesen (was trivial ist) oder haben nur das von mir gegebene Beispiel aus $\mathcal{L}_4(\mathbb{R})$ betrachtet (was einen allgemeinen Beweis natürlich nicht ersetzt).

a) (0,5 P.) $(AB)_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}$.
(0,5 P.) Summanden können nur für $k \leq i$ und $j \leq k$ ungleich Null sein.
(1 P.) Dies ist für $i < j$ nie gegeben, in diesem Fall also $(AB)_{i,j} = 0$.
(1 P.) Für $i = j$ ist dies nur für $i = k = j$ gegeben,
daher $(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i} = 1$. Also $AB \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$.

Material: HA 6.4

Anmerkung: Nur wenige haben die Definition des Matrixproduktes korrekt hingeschrieben. Ich las Dinge wie $(AB)_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{i,j}B_{j,k}$ oder $(AB)_{i,j} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{i,j}B_{i,j}$ oder gar $(AB)_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n}(AB)_{i,j}$

b)
- (1 P.) Ist $A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ in ZSF, dann unterhalb der Hauptdiagonale Null wegen ZSF sowie auf Hauptdiagonale Eins und oberhalb Null wegen $A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$.
- (1 P.) Betrachte Addition eines Vielfachen von Zeile i_1 zu Zeile i_2 mit $i_2 > i_1$: Zeile i_1 ist Null mindestens ab Spalte i_2, also ändert sich Zeile i_2 ab Spalte i_2 nicht. Auf der Hauptdiagonale bleibt es demnach 1 und rechts davon 0.
- (1,5 P.) Da das jeweilige Pivot-Element (auf der Hauptdiagonale) 1 ist, wird A ohne optionale Gauß-Schritte und ohne Zeilenvertauschungen in eine ZSF in $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ umgeformt, also in $\mathbb{1}_n$. Dieselben Operationen führen $(A|\mathbb{1}_n)$ in $(\mathbb{1}_n|A^{-1})$ über.
- (0,5 P.) Anfangs ist die rechte Hälfte der erweiterten Matrix, also $\mathbb{1}_n$, in $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$. Da keine optionalen Schritte und Zeilenvertauschungen ausgeführt werden, ist am Ende die rechte Hälfte, also A^{-1}, immer noch in $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$.

Anmerkung: Einer von Ihnen hat in gut nachvollziehbarer Weise untersucht, wie sich $(A|\mathbb{1}_n)$ für $A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ bei Anwendung des Gaußalgorithmus verändert, was ich für schöner als meinen Beweis halte. Natürlich gab es dafür volle Punktzahl. Diese Teilaufgabe ging als einzige über das Anforderungsniveau „Transfer“ hinaus.

Aufgabe 4: *Lineare Abbildungen*

a)
- (0,5 P.) Dim.formel: Sei V $\mathbb{K}$-VR und $V_1, V_2 \leq V$ endlichdimensional. Dann $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$.
  (0,5 P.) Rangformel: Sei V endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-VR und $f\colon V \to W$ linear. Dann $\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\ker(f))$.
- (1 P.) Lineare Fortsetzung: Seien V, W $\mathbb{K}$-VRe, $\underline{b}_1, ..., \underline{b}_n$ Basis von V. Dann $\forall \underline{c}_1, ..., \underline{c}_n \in W\colon \exists! g\colon V \to W$ linear mit $\forall i = 1, ..., n\colon g(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$.

Anmerkung: Die Voraussetzungen eines Satzes gehören zu seiner Formulierung unbedingt dazu. Wenn die Voraussetzungen nicht genannt wurden, führte dies natürlich zu Punktabzügen.

b)
- (0,5 P.) g injektiv, da $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$ injektiv.
- (1 P.) Rangformel: $\dim(\ker(f)) = 7 - \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 7 - 4 = 3$, da f surjektiv. $\dim(\mathrm{Bild}(g)) = 4 - \dim(\ker(g)) = 4$, da g injektiv.
- (0,5 P.) Ist $\underline{w} \in \mathbb{R}^4$ mit $g(\underline{w}) \in \ker(f)$, dann $\underline{0} = f(g(\underline{w})) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}(\underline{w}) = \underline{w}$. Daher $\mathrm{Bild}(g) \cap \ker(f) = g(\{\underline{0}\}) = \{\underline{0}\}$.
- (1 P.) $\dim(\ker(f) + \mathrm{Bild}(g)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(g)) - \dim(\ker(f) \cap \mathrm{Bild}(g)) = 3 + 4 - 0 = \dim(\mathbb{R}^7)$, daher $\ker(f) + \mathrm{Bild}(g) = \mathbb{R}^7$.

Material: HA 2.4 und 6.1.b), Erstklausur A2, Beweis von Satz 9.17. Ferner Altklausur vom 24.02.2009 A4.b).

Anmerkung: Aufgrund der detaillierten Lösungshinweise geht die Aufgabe nicht über das Anforderungsniveau „Transfer“ hinaus.

c) Die **Zusatzaufgabe** möchte ich zu Beginn des zweiten Semesters als Präsenzaufgabe stellen.

Aufgabe 5: *Eigenwerte/Diagonalisierbarkeit*

a) (2 P.) (also 0,5 P. pro Charakterisierung) $\exists S \in GL_n(\mathbb{R})\colon SAS^{-1}$ diagonal. $\mathbb{R}^n$ hat Basis aus Eigenvektoren von A. $\mathbb{R}^n$ hat Basis B, so dass ${}_B^B L_A$ diagonal ist. Die Summe der Dimensionen der Eigenräume von A ist n.

Anmerkung: Weitere Möglichkeit: Das charakteristische Polynom von A zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert von A stimmen jeweils die geometrische und algebraische Vielfachheit überein.

b) (1 P.) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ hat Charakt. Polynom $X^2 - (2-2)X + (-4-(-3)) = X^2 - 1$, also EW $1, -1$.
(1 P.) Blockgestalt: EWe von A sind $2, 1, -1, 1, 3$.
(1 P.) Eigenräume der *einfachen* EW $2, -1, 3$ sind eindimensional.

(0,5 P.) A diagonalisierbar $\iff$ Eigenraum des doppelten EW 1 ist zweidimensional.
(1,5 P.) Berechne $\text{Rang}(X\mathbb{1}_n - A) = 4$, also $\dim E_1(A) = 1$, also A nicht diagonalisierbar.

Material: 5. Beispiel nach Def 13.20, HA 11.1.b), HA 12.1.c), Altklausur vom 14.07.2011 A6.

Anmerkung: Aus den Übungen ist bekannt, dass es keine gute Idee ist, das characteristische Polynom von A auszurechnen, voll auszumultiplizieren und dann nach den Nullstellen des entstehenden Polynoms vom Grad 5 zu suchen. Wenn man nicht darauf kam, dass man die Diagonalisierbarkeit an $\dim(E_1(A))$ erkennen kann, konnte man die Aufgabe natürlich immer noch lösen, indem man *alle* Eigenräume berechnet; das ist lediglich ein größerer Rechenaufwand.

Aufgabe 6: *Hauptachsentransformation*

a) (1 P.) $A \in M_n(\mathbb{R})$ speziell orthogonal $\iff$ $A^\top A = \mathbb{1}_n$ und $\det(A) = 1$.

b) (3 P.) Berechung von Eigenvektoren, z.B. $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu EW 0, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu EW -3.

(1 P.) Gram-Schmidt nur nötig für $\underline{v}_2, \underline{w}_3$: $\underline{v}_3 := \underline{w}_3 - \frac{1}{2}\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(1 P.) $\underline{v}_1 \bullet \underline{v}_1 = 3$, $\underline{v}_2 \bullet \underline{v}_2 = 2$, $\underline{v}_3 \bullet \underline{v}_3 = \frac{3}{2}$, also orthogonale diagonalisierende Matrix $S := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

(1 P.) $\det S = 1$ (z.B. mit Sarrus-Regel), also ist S die gesuchte Matrix.

Material: HA 13.3 für Berechnung einer Orthonormalbasis und HA 12.3 für Gram-Schmidt, ferner HA 12.1 und natürlich das Beispiel in Abschnitt 15.4.

Erreichbare Punktzahl: 35