FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Simon King

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra für IB, AIB, BIB

Modul–Nr.: FMI-MA0022

Wintersemester 2021/22 — Probe-Kurzklausur

Anmerkung: Zur Einschätzung des Zeitaufwandes bei Klausuren: Sie sollten für die Lösung dieser Aufgaben möglichst nicht länger als 20–25 Minuten brauchen.

In der „echten" Klausur wird es natürlich mehr Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade geben, meist mit mehreren voneinander unabhängig lösbaren Teilaufgaben.

Aufgabe 1: *Matrixinvertierung*
(3 P.) Sei $B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie B^{-1}.

Aufgabe 2: *Ein kleiner Beweis*
(3 P.) Seien $f\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ und $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ linear und $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$. Beweisen Sie $\mathbb{R}^7 = \ker(f) + \mathrm{Bild}(g)$.
Hinweise: Warum ist f surjektiv und g injektiv? Was folgt daraus mit der Rangformel für $\dim(\ker(f))$, $\dim(\mathrm{Bild}(g))$? Warum $\ker(f) \cap \mathrm{Bild}(g) = \{\vec{0}\}$? Dimensionsformel.

Aufgabe 3: *Ist schon Sylvester?*
(3 P.) Prüfen Sie jeweils, ob die gegebene Matrix positiv definit ist und ob sie die Darstellungsmatrix (bzgl. Standardbasis) eines Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$ ist:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & -2 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Erreichbare Punktzahl: 9

FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Simon King

Probeklausur zur Vorlesung Lineare Algebra für Informatik

Modul–Nr.: FMI-MA0022

Wintersemester 2018/19 — Probeklausur 1

In den folgenden Aufgaben sei $\mathbb{K}$ jeweils ein Körper. Wie üblich betrachten wir Elemente von $\mathbb{K}^n$ als Spaltenvektoren.

Aufgabe 1: *Lineare Gleichungssysteme*

a) (1 P.) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m \in V$. Unter welcher Bedingung nennt man $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m$ linear unabhängig? Unter welcher Bedingung nennt man es ein Erzeugendensystem von V?

b) (7 P.) Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\mathrm{LR}(A; \vec{b})$ sowie Basen von Spaltenraum(A) und Zeilenraum(A). **Zur Kontrolle:** Ihre Rechnung sollte ergeben, dass $\mathrm{Rang}(A) = 3$ und $\mathrm{LR}(A; \vec{b}) \neq \emptyset$.

c) **Zusatzaufgabe (3 Bonus-P.):** Sei $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$. Beweisen Sie: Wenn es <u>kein</u> $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ gibt mit $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, denn gibt es $\vec{y} \in \mathbb{K}^m$ mit $A^\top \cdot \vec{y} = \vec{0}$ und $\vec{b}^\top \cdot \vec{y} = 1$.
Hinweis: Ränge von $\begin{pmatrix} A^\top \\ \vec{b}^\top \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} A^\top & \vec{0} \\ \vec{b}^\top & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: Euklidische Räume

a) Prüfen Sie jeweils mit dem Hurwitz-Kriterium, ob es sich bei der gegebenen symmetrischen Matrix um die Matrix eines Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$ handelt:

i) (1 P.) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ii) (2 P.) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & -2 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) (4 P.) Sei $\vec{u}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine ONB von $U := \mathrm{Span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \leq \mathbb{R}^4$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

c) (2 P.) Sei $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Wir betrachten $\mathbb{R}^m$ als euklidischen Raum mit dem Standardskalarprodukt. Es sei $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ mit $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ und $\vec{y} \in \mathbb{K}^m$ mit $A^\top \cdot \vec{y} = \vec{0}$. Zeigen Sie $\vec{y} \perp \vec{b}$. **Hinweis:** Einsetzen von $\vec{b}$ in das Standardskalarprodukt.

Bitte wenden

Aufgabe 3: *Lineare Abbildungen*

a) (2 P.) Was sind Kern und Bild einer linearen Abbildung? Was besagt die Rangformel?

b) (1 P.) Zeigen Sie: Sind $f, g\colon V \to W$ lineare Abbildungen, so ist auch die Abbildung $h\colon V \to W$ gegeben durch $\forall \vec{v} \in V\colon\ h(\vec{v}) := 2f(\vec{v}) - 5g(\vec{v})$ eine lineare Abbildung.

c) (2 P.) Folgern Sie aus der Aussage der vorigen Teilaufgabe: Für alle linearen Abbildungen $\varphi, \psi\colon\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ gibt es ein $\vec{v} \in \mathbb{R}^5$, $\vec{v} \neq 0$, mit $5\varphi(\vec{v}) = 2\psi(\vec{v})$.

In den folgenden Teilaufgaben seien $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq \mu$, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_n(\mathbb{K})$ mit $(A - \mu \mathbb{1}_n) \cdot (A - \lambda \mathbb{1}_n) = \mathbb{0}$. Die linearen Abbildungen $\varphi, \psi\colon\ \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ seien gegeben durch $\forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n\colon\ \varphi(\vec{v}) := A \cdot \vec{v} - \lambda\vec{v}$ und $\psi(\vec{v}) := A \cdot \vec{v} - \mu\vec{v}$.

d) (2 P.) Zeigen Sie $n = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) + \dim(E_\lambda(A))$. **Hinweis:** Wie kann man $E_\lambda(A)$, $E_\mu(A)$ mittels φ, ψ ausdrücken?

e) (1 P.) Zeigen Sie $\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq E_\mu(A)$.

f) (2 P.) Folgern Sie aus den Aussagen der vorigen beiden Teilaufgaben, dass A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4: *Eigenwertprobleme*

a) (2 P.) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{C})$. **Hinweis:** Komplex, nicht reell.

b) (8 P.) Berechnen Sie eine diagonalisierende Matrix für $\left(\begin{smallmatrix} 5 & -2 & 7 & 5 \\ 4 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in M_4(\mathbb{R})$.

Erreichbare Punktzahl: 37

FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Simon King

Probeklausur zur Vorlesung Lineare Algebra für Informatik

Modul–Nr.: FMI-MA0022

Wintersemester 2018/19 — Probeklausur 2

Aufgabe 1: *Euklidische Räume*
Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ als euklidischen Raum mit dem Standardskalarprodukt.

a) (1 P.) Wie ist der Winkel $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})$ für $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ definiert?

b) (4 P.) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{LR}\left(\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \vec{0}\right)$.

Aufgabe 2: *Matrizen und Abbildungen*

a) (3 P.) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{-1}.

b) (1 P.) Wie ist der Begriff „lineare Abbildung“ definiert?

c) (3 P.) Wir betrachten die Basen $B\colon \binom{2}{1}, \binom{5}{2}$ und $C\colon \binom{1}{-1}, \binom{-1}{3}$ sowie die Standardbasis $E\colon \vec{e}_1, \vec{e}_2$ des $\mathbb{R}^2$. Die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch ${}^C_B f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie ${}^E_E f$.

Aufgabe 3: *Matrixarithmetik und orthogonale Matrizen*
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir $\mathbb{R}^n$ als euklidischen Raum mit dem Standardskalarprodukt und der Standardbasis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Für einen *normierten* Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (also $\|\vec{v}\| = 1$) sei $H_{\vec{v}} := \mathbb{1}_n - 2 \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}^\top$, wobei wir wie üblich mit Spaltenvektoren arbeiten. **Anmerkung:** $\vec{v} \cdot \vec{v}^\top \in M_n(\mathbb{R})$, denn es ist $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $\vec{v}^\top \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

a) (3 P.) Sei $\vec{y} := \binom{3}{4}$, $\vec{z} := \binom{-2}{2}$ und $A := (\vec{y}, \vec{z}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{v} := \dfrac{1}{\|\vec{y} - \|\vec{y}\| \cdot \vec{e}_1\|} \cdot (\vec{y} - \|\vec{y}\| \cdot \vec{e}_1)$, $H_{\vec{v}}$ und $H_{\vec{v}} \cdot A$.

b) (1 P.) Wie ist der Begriff „orthogonale Matrix“ definiert?

c) (2 P.) Verifizieren Sie: Für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ ist $H_{\vec{v}} \in O_n$.
Hinweis: Ausmultiplizieren; Darstellung von $\|\vec{v}\|$ als Matrixprodukt.

d) (3 P.) Es sei $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{e}\| = 1$, es sei $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha := \|\vec{y}\|$ mit $\vec{y} \neq \alpha \cdot \vec{e}$, und es sei $\vec{v} := \frac{1}{\|\vec{y} - \alpha \cdot \vec{e}\|} \cdot (\vec{y} - \alpha \cdot \vec{e})$. Verifizieren Sie $H_{\vec{v}} \cdot \vec{y} = \|\vec{y}\| \cdot \vec{e}$.
Hinweis: Drücken Sie in $H_{\vec{v}} \cdot \vec{y}$ sowohl $(\vec{y} - \alpha \cdot \vec{e})^\top \cdot \vec{y}$ als auch $\|\vec{y} - \alpha \cdot \vec{e}\|^2$ in möglichst einfacher Weise durch α und $\langle \vec{e} \mid \vec{y} \rangle$ aus.

e) **Zusatzaufgabe (3 Bonus-P.):** Folgern Sie aus den vorigen Teilaufgaben: Für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gibt es $T \in O_m$, so dass $T \cdot A$ Zeilenstufenform hat.

Bitte wenden

Aufgabe 4: *Diagonalisierbarkeit und Skalarprodukte*

a) (3 P.) Welche der folgenden Matrizen $A_1, ..., A_4 \in M_3(\mathbb{R})$ ist diagonalisierbar, welche nicht? Die Antworten sind zu begründen, aber eine diagonalisierende Matrix soll jeweils nicht berechnet werden.

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b) (2 P.) Was versteht man unter einer Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$? Unter welcher Bedingung nennt man eine Bilinearform *symmetrisch* bzw. *positiv definit*?

c) (4 P.) Berechnen Sie eine diagonalisierende Matrix für $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. **Hinweis:** Es gehört zur Aufgabe, die Eigenwerte von A zu berechnen. Zur Kontrolle dieses Zwischenergebnisses: Ihre Rechnung sollte die Eigenwerte 1 und 3 ergeben.

d) (1 P.) Untersuchen Sie mit dem Hurwitz-Kriterium, ob die Matrix A aus der vorigen Teilaufgabe die Matrix eines Skalarprodukts ist.

Aufgabe 5: *Eigenräume und Vertauschbarkeit*

a) Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften: A hat n *paarweise verschiedene* Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $A \cdot B = B \cdot A$.

   i) (1 P.) Warum hat $\mathbb{R}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A?

   ii) (1 P.) Zeigen sie: Ist $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist $B \cdot \vec{v} \in E_\lambda(A)$.

   iii) (1 P.) Folgern Sie aus der vorherigen Aussage, dass jeder Eigenvektor von A ein Eigenvektor von B ist. **Hinweis:** Was ist $\dim(E_\lambda(A))$?

   iv) (1 P.) Folgern Sie aus den vorherigen Aussagen: $\exists S \in GL_n(\mathbb{R})$, so dass S eine diagonalisierende Matrix sowohl von A als auch von B ist.

b) (1 P.) Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ und es gebe ein $S \in GL_n(\mathbb{R})$, das gleichzeitig eine diagonalisierende Matrix von A und von B ist. Zeigen Sie: $A \cdot B = B \cdot A$. **Hinweis:** Warum gilt $(S^{-1}AS) \cdot (S^{-1}BS) = (S^{-1}BS) \cdot (S^{-1}AS)$ und wie folgt daraus die zu zeigende Aussage?

c) (1 P.) Geben Sie ein Beispiel zweier Matrizen $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, so dass A diagonalisierbar ist und $A \cdot B = B \cdot A$, aber B *nicht* diagonalisierbar ist. Es ist zu begründen, dass Ihr Beispiel diese Eigenschaften tatsächlich besitzt.

Viel Erfolg!

Erreichbare Punktzahl: 37