1 Kombinatorik

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgenden Beziehungen für den Binomialkoeffizienten:

(a) $$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$ 🐰

(b) $$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$$ 🐰

(c) $$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = 2^m \cdot \binom{n}{m}$$ 🐰

(d) $$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$ 🐰

(e) $$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = 2^m \cdot \binom{n}{m}$$ 🐰

(f) $$\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} = n \cdot (n+1) \cdot 2^{n-2}$$ 🐰

(g) $$\sum_{k=r}^{m} \binom{k}{r} = \binom{m+1}{r+1}$$

(h) $$\binom{n}{r} = \frac{n}{r} \cdot \binom{n-1}{r-1}$$

(i) $$(n-r) \cdot \binom{n}{r} = n \cdot \binom{n-1}{r}$$

(j) (vollst. Induktion über n)
$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot x^{n-r} y^r$$

(k) (für $n = 1, 2, \ldots$)
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

(l) (Wert bestimmen + m. vollst. Induktion beweisen)
$$\sum_{r=0}^{n} 2^r \cdot \binom{n}{r} =?$$

(m) (Wert bestimmen)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 =?$$

(n) (Wert bestimmen)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{m} =?$$

Aufgabe 2. 🐰

(a) Wie viele nichtnegative ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \ \ ?$$

Für wie viele dieser Lösungen gilt zusätzlich $x_i \leq 6$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$?

(b) Wie viele Wurfbilder mit der Augenzahl 18 gibt es bei vier verschiedenfarbigen Würfeln?

Aufgabe 3. 🐰

(a) Wie viele nichtnegative ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24 \ \ ?$$

Für wie viele dieser Lösungen gilt zusätzlich $x_i \leq 6$ für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

(b) Wie viele Wurfbilder mit der Augenzahl 24 gibt es bei fünf verschiedenfarbigen Würfeln?

Aufgabe 4. 🐰 Es sei $D = \{A, B, C, \ldots, X, Y, Z\}$ die Menge der 26 Buchstaben des Alphabets. Ein „Wort der Länge r“ ist eine geordnete Folge von r Buchstaben aus D. So ist $ABBAC$ ein Wort der Länge 5.

(a) Wie viele Wörter der Länge 5 beginnen und enden mit einem Vokal (A, E, I, O, U)?

(b) Wie viele Wörter der Länge 5 haben lauter verschiedene Buchstaben und genau zwei Vokale?

(c) Wie viele Wörter der Länge 5 haben genau zwei Buchstaben - einen Vokal und einen Konsonanten?

(d) Wie viele Wörter der Länge 5 haben genau 5 verschiedene Buchstaben?

(e) Bei wie vielen Wörtern der Länge 5, die aus 5 verschiedenen Buchstaben bestehen, stehen die vorkommenden Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge?

(f) Bei wie vielen Wörtern der Länge 5 stehen die vorkommenden Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge?

Aufgabe 5. 🐰 Auf wie viele Weisen lassen sich die Zahlen 1 bis 9 hintereinander schreiben, ...

(a) ... ohne weitere Einschränkungen?

(b) so dass alle geraden Zahlen auf ihren „natürlichen“ Plätzen stehen?

(c) so dass keine gerade Zahl auf ihrem „natürlichen“ Plätzen steht?

(d) so dass alle ungeraden Zahlen auf ihren „natürlichen“ Plätzen stehen?

(e) so dass keine ungerade Zahl auf ihrem „natürlichen“ Plätzen steht?

Aufgabe 6. 🐰 Wie viele Möglichkeiten gibt es, die (mono- und heteronormativen) Ehepaare Bader, Frei, Huber und Müller auf 8 Stühle eines runden Tisches zu platzieren, wenn ...

(a) Die 4 Frauen und 4 Männer je nebeneinander sitzen möchten?

(b) Frauen und Männer in einer alternierenden Folge (abwechselnd) sitzen möchten?

(c) Frau und Herr von einerseits Ehepaar Frei und andererseits Ehepaar Müller nebeneinander sitzen möchten?

(d) Frau Bader und Frau Huber nebeneinander sitzen möchten?

(e) Herr Huber und Herr Müller sich gegenüber sitzen möchten?

(f) Die Ehepaare jeweils nebeneinander sitzen möchten?

(g) Die Ehepaare sich jeweils gegenüber sitzen möchten?

2 Graphentheorie

Aufgabe 7. 🐰 Es sei n eine natürliche Zahl. Der *n-dimensionale Würfel* ist derjenige Graph, dessen Knotenmenge die Folge aller $0-1$-Folgen der Länge n ist, wobei zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie sich in genau einer Komponente unterscheiden.

(a) Beweisen Sie: Dieser Graph hat 2^n Knoten und $n \cdot 2^{n-1}$ Kanten.

(b) Beweisen Sie: Dieser Graph ist *bipartit*. (Erklären Sie diesen Begriff!)

(c) Bestimmen Sie seinen *Durchmesser*. (Erklären Sie auch diesen Begriff!)

(d) Bestimmen Sie seine *Taillenweite*. (Erklären Sie auch diesen Begriff!)

Aufgabe 8. 🐰 G^c beschreibt den Komplementärgraphen des einfachen Graphen G.

(a) Beweisen Sie: Wenn G nicht zusammenhängend ist, dann ist G^c zusammenhängend.

(b) Beweisen Sie, dass für jeden (einfachen) Graphen G mit sechs Knoten gilt:
G oder G^c enthält einen K_3 als vollständig induzierten Teilgraphen.

(c) Beweisen Sie, dass jeder selbstkomplementäre Graph entweder $4n$ oder $4n+1$ Knoten hat. (Dabei ist n eine geeignete natürliche Zahl.)

Aufgabe 9. 🐰 Definieren Sie die Begriffe *zusammenhängend, kreisfrei* und *Brücke*, dann beweisen Sie: Für einen einfachen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent $((a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (a))$:

(a)

(z) G ist zusammenhängend

(kf) G ist kreisfrei

(b)

(z) G ist zusammenhängend

(z min) jede Kante von G ist eine Brücke

(c)

(kf) G ist kreisfrei

(kf max) mit jeder zusätzlichen Kante erhält G einen Kreis

Aufgabe 10. 🐰 Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph.

(a) Beantworten Sie die folgende Frage: Wie kann man aus einer Kantenfolge zwischen zwei Knoten u und v von G einen Weg zwischen u und v erhalten? (Was heißt „Weg“ bzw. „Kantenfolge“?)

(b) Folgende zweistellige Relation $\sim_G$ über der Menge V ist definiert durch: $u \sim_G v \Leftrightarrow_{df}$ es gibt einen Weg in G zwischen u und v (einen $u - v$-Weg). Beweisen Sie: $\sim_G$ ist eine Äquivalenzrelation.

(c) Wie viele verschiedene Wege der Länge k gibt es zwischen zwei beliebigen Knoten des vollständigen Graphen K_n?

Aufgabe 11. 🐰 Es treffen sich 9 Personen auf einem Empfang. Beweisen Sie:
Es kennen sich immer entweder 4 Personen allesamt untereinander oder aber 3 Personen untereinander gar nicht.
(Anders gesagt: Beweisen Sie, dass bei einem mit zwei Farben eingefärbten K_9 immer entweder ein einfarbiger K_4 oder ein einfarbiger K_3 auftritt.)

Aufgabe 12. 🐰 Beweisen Sie:

(a) Jeder einfache Graph G mit $2n$ Knoten ($n \geq 1$) und dem minimalen Knotengrad $\delta(G) = n$ ist zusammenhängend.

(b) Wenn G ein einfacher zusammenhängender Graph mit n Knoten und $n - 1$ Kanten ist, dann ist G ein Baum.