1.Altklausur

Dienstag, 25. April 2023 00:59

1	Für welche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt $\left\|\frac{x-3}{2x+1}\right\| > 1$?	3
2	Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die $z^2 + 8z + 25 = 0$ gilt. Geben Sie jeweils den Betrag $\|z\|$ für diese Lösungen an. Skizzieren Sie die Lösungsmenge in der Gaußschen Zahlenebene.	4
3	Ist die Menge $M = \left\{(-1)^n \frac{n}{n+2} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ nach oben oder nach unten beschränkt? Falls ja, bestimmen Sie $\sup M$, $\inf M$, $\max M$ und $\min M$, sofern diese existieren.	3

② $z^2 + 8z + 25 = 0$ | p-q-Formel

$z_{1/2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 25}$

$= -4 \pm \sqrt{16 - 25}$

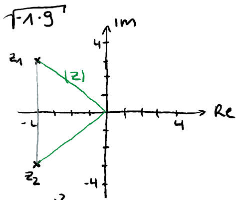
$= -4 \pm \sqrt{-9}$ | $\sqrt{-1 \cdot 9}$

$= -4 \pm \sqrt{i^2 \cdot 9}$

$= -4 \pm 3i$

$\Rightarrow z_1 = -4 + 3i$ (Re, Im)

$z_2 = -4 - 3i$



Pythagoras: $|z|^2 = 3^2 + (-4)^2$

$= 9 + 16$

$|z|^2 = 25$ | $\sqrt{\ }$

$|z|^2 = 5$

① $\left|\frac{x-3}{2x+1}\right| > 1$ ‖ $x \neq -\frac{1}{2}$

1.Fall: $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

1.1.: $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ ‖ + +

$\frac{x-3}{2x+1} > 1$ | $\cdot(2x+1)$

$x - 3 > 2x + 1$ | $-2x, +3$

$x - 2x > 4$

$-x > 4$ | $\cdot(-1)$

$x < -4$

$L_1 = (-\infty, -4) \cap (3, +\infty)$ (-4, $-\frac{1}{2}$, 3)

$= \emptyset$

1.2.: $x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ | + −

$\frac{-(x-3)}{2x+1} > 1$ | $\cdot(2x+1)$

$-x + 3 > 2x + 1$ | $-3; -2x$

$-2x - x > 1 - 3$

$-3x > -2$ | $:(-3)$

$x < \frac{2}{3}$

$L_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ ($-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 3)

2.Fall: $2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$

2.1.: $x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ ‖ − −

$\frac{-(x-3)}{-(2x+1)} > 1$ | $\cdot -(2x+1)$

$-x + 3 > -2x - 1$ | $-3, +2x$

$x > -4$

$L_3 = \left(-4, -\frac{1}{2}\right)$ (-4, $-\frac{1}{2}$, 3)

2.2.: $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ ‖ − +

$\frac{x-3}{-(2x+1)} > 1$ | $\cdot -(2x+1)$

$x - 3 > -2x - 1$ | $+3, +2x$

$3x > 2$ | $:3$

$x > \frac{2}{3}$

$L_4 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cap (3, +\infty)$ ($-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 3)

$= \emptyset$

$L_{ges} = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$

$= \emptyset \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(-4, -\frac{1}{2}\right) \cup \emptyset$

$= \left(-4, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

	Aufgaben	Punkte
1	Für welche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{\|x^2 - 4\|}{x^2 + 5x + 6} < -2$?	3
2	Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$ gilt. Skizzieren Sie die Lösungsmenge in der Gaußschen Zahlenebene.	4
3	Ist die Menge $M = \left\{(-1)^n \frac{n}{n+2} + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ nach oben oder nach unten beschränkt? Falls ja, bestimmen Sie $\sup M$, $\inf M$, $\max M$ und $\min M$, sofern diese existieren.	3
		Σ : 10

2) $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$ ‖ Substitution

$\Rightarrow$ Sei: $a = z^2$

$a^2 - 6a + 25 = 0$ ‖ p-q-F

1) $\frac{|x^2 - 4|}{x^2 + 5x + 6} < -2$

p-q-Formel

$x_{1/2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$

$= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}}$

$= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$

$= -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$

$x_1 = -\frac{4}{2} = -2$ $\Rightarrow x \neq -2$

$x_2 = -\frac{6}{2} = -3$ $\Rightarrow x \neq -3$

1.Fall: $x < -3$ ‖ Betrag neg → $x \in (-\infty, -3)$

$x^2 - 4 < 0$

$x^2 < 4$ | $\sqrt{\ }$

$x < 2$

$\frac{-(x^2-4)}{x^2+5x+6} < -2$ | $\cdot(x^2+5x+6)$

$-x^2 + 4 < -2 \cdot (x^2 + 5x + 6)$

$-x^2 + 4 < -2x^2 - 10x - 12$ | $+x^2 - 4$

$0 < -x^2 - 10x - 16$ | $:(-1)$

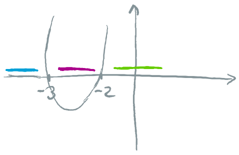
$0 > x^2 + 10x + 16$ | p-q-F

$x_{1/2} = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 16}$

$= -5 \pm \sqrt{25 - 16}$

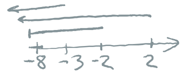
$= -5 \pm \sqrt{9}$

$x_2 = -\frac{\;}{2} = -3 \quad \downarrow \quad x \neq -3$



$x_{1/2} = -\frac{\;}{2} \pm \sqrt{(\frac{\;}{2})^2 - 16}$
$= -5 \pm \sqrt{25 - 16}$
$= -5 \pm \sqrt{9}$
$= -5 \pm 3$

$x_1 = -2$; $x_2 = -8$



$\rightarrow x \in [-8, -2)$

$L_1 = (-\infty, -3) \cap [-8, -2)$
$= [-8, -2)$

2.Fall: $-3 < x < -2 \iff x \in (-3, -2)$

$\Rightarrow$ Sei: $a = z^2$

$a^2 - 6a + 25 = 0 \quad \| \text{ p-q-F.}$

$\Rightarrow a_{1/2} = +\frac{6}{2} \pm \sqrt{(-\frac{6}{2})^2 - 25}$
$= 3 \pm \sqrt{9 - 25}$
$= 3 \pm \sqrt{-16}$
$= 3 \pm \sqrt{-1 \cdot 16} \quad | -1 = i^2$
$= 3 \pm \sqrt{i^2 \cdot 16}$
$= 3 \pm 4i$

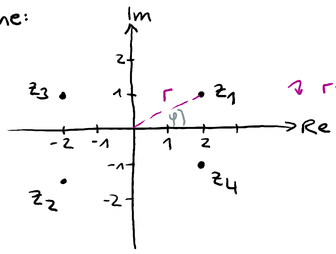
$a_1 = 3 + 4i$
$a_2 = 3 - 4i$ $\quad$ $/ a = z^2$, also $\sqrt{\;}$ wieder dazu
$z = \pm\sqrt{a}$

$z_{1/2} = \pm\sqrt{3 + 4i}$
$= \pm\sqrt{4 - 1 + 4i} \quad | -1 = i^2$
$= \pm\sqrt{4 + i^2 + 4i}$
$= \pm\sqrt{i^2 + 4i + 4} \quad$ | 1. Binomische Formel
$= \pm\sqrt{(i + 2)^2}$
$z_{1/2} = \pm(i + 2)$

$z_1 = +i + 2 = 2 + 1i$
$z_2 = -i - 2 = -2 - 1i$

$z_{3/4} = \pm\sqrt{3 - 4i}$
$= \pm\sqrt{4 - 1 - 4i} \quad | -1 = i^2$
$= \pm\sqrt{4 + i^2 - 4i}$
$= \pm\sqrt{i^2 - 4i + 4} \quad$ | 2. Binom. F.
$= \pm\sqrt{(i - 2)^2}$
$= \pm(i - 2)$
$z_3 = +i - 2 = -2 + 1i \quad \| z = a + bi$
$z_4 = -i + 2 = 2 - 1i$

Gaußsche Ebene:



$\Rightarrow r = |z| \quad$ // Pythagoras
$r^2 = |z|^2 = a^2 + b^2$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$|z| = \sqrt{2^2 + 1^2}$
$|z| = \sqrt{4 + 1}$
$|z| = \sqrt{5}$