DS1: Mengenbeweise - Aufgaben

Sonntag, 19. Februar 2023 04:55

3 Aufgabe

Beweisen der folgenden Aussagen:

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
3. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$

Regeln für das Rechnen mit Mengen $(A, B, C \in \mathcal{P}(M))$

1) Kommutativität: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
2) Assoziativität: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3) Idenpotenz: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
4) Distributivität: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, ———
5) Verschmelzung: $A \cup (A \cap B) = A$, ———
6) Doppelkomplement: $\bar{\bar{A}} = A$,
7) de Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, ———
8) Neutralität: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap M = A$
9) Extremalität: $A \cup M = M$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
10) Dualität: $\bar{\emptyset} = M$, $\bar{M} = \emptyset$
11) Komplementarität: $A \cup \bar{A} = M$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$

|| $\wedge$ ist wie Multiplik.
$\vee$ " wie Addition

3) 1.) geg: $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

zu zeigen: $\forall x:\ x \in [A \cap (B \setminus C)] \Leftrightarrow x \in [(A \cap B) \setminus (B \cap C)]$

$\curvearrowright x \in ((A \cap B) \setminus (B \cap C)) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin (B \cap C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in C)$ || de Morgan

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in C))$ || Distributivität

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge \neg(x \in A)) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge \neg(x \in C))$ || Komplementarität

$\Leftrightarrow (\emptyset \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge \neg(x \in C))$ || Extremalität

$\Leftrightarrow \emptyset \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge \neg(x \in C))$ || Assoziativität

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge \neg(x \in C))$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \setminus C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap (B \setminus C))$ ■

2.) geg: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

zu zeigen: $\forall x:\ x \in (A \setminus (B \cap C)) \Leftrightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (A \setminus C))$

$\curvearrowright x \in (A \setminus (B \cap C)) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)$ || de Morgan

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C))$ || Distributivität

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in A \wedge \neg(x \in C))$

$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \vee x \in (A \setminus C)$

$\Leftrightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (A \setminus C))$ ■

3) geg: $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$

zu zeigen: $\forall x:\ x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)) \Leftrightarrow x \in ((A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C))$

$\curvearrowright x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup x \in (B \setminus C) \cup x \in (C \setminus A)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in B \wedge \neg(x \in C)) \vee (x \in C \wedge \neg(x \in A))$ || Distributivität

$\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee \neg(x \in C)) \wedge \underbrace{(\neg(x \in B) \vee x \in B)}) \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C))) \vee (x \in C \wedge \neg(x \in A))$ || Extremalität

$\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee \neg(x \in C)) \wedge x \in M \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C))) \vee (x \in C \wedge \neg(x \in A))$ || Distributivität

$\Leftrightarrow (((x \in A \vee x \in B) \vee x \in C) \wedge ((x \in A \vee \neg(x \in C) \vee x \in C) \wedge ((\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \vee (x \in C)))$
$\wedge (((x \in A \vee x \in B) \vee \neg(x \in A)) \wedge ((x \in A \vee x \in C) \vee \neg(x \in A)) \wedge ((\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \vee \neg(x \in A)))$ || Extremalität

$\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge (x \in A \vee \overset{x \in}{M}) \wedge (\neg(x \in B) \vee \overset{x \in}{M})) \wedge ((x \in B \vee \overset{x \in}{M}) \wedge (x \in C \vee \overset{x \in}{M}) \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C) \vee \neg(x \in A)))$

$\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge M \wedge M \wedge M \wedge M \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C) \vee \neg(x \in A))$

$\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C) \vee \neg(x \in A)))$ || de Morgan

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C \wedge x \in A)$ || Kommut.

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B \cup C) \wedge x \notin (A \cap B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in ((A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C))$ ■

Aufgabe 3)

|| $(A \triangle B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$
|| $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Aus $A \cap B = A \cap C$ und $A \cup B = A \cup C$ folgt $B = C$

b) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \triangle B)$

3)b) $x \in [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus x \notin (A \cap B)$ || logische Ausdrücke

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)$ || de Morgan

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \overset{\text{und}}{\wedge} (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B))$ || Distributivität

$\Leftrightarrow \underbrace{(x \in A \overset{\text{und}}{\wedge} \neg(x \in A))}_{\text{false}} \overset{\text{or}}{\vee} (x \in A \wedge \neg(x \in B)) \overset{\text{or}}{\vee} (x \in B \wedge \neg(x \in A)) \overset{\text{or}}{\vee} \underbrace{(x \in B \overset{\text{und}}{\wedge} \neg(x \in B))}_{\text{false}}$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in B \wedge \neg(x \in A))$

$\Leftrightarrow (x \in A \triangle x \in B)$

$\Leftrightarrow (A \triangle B)$ ■

a) geg: aus $A \cap B = A \cap C$ und $A \cup B = A \cup C \Rightarrow$ folgt $B = C$

zu zeigen: $B \subseteq C$ und $B \supseteq C$

„$\subseteq$": Sei $x \in B$, dann $x \in (A \cup B)$, also $x \in (A \cup C)$, d.h. $x \in A \vee x \in C$

→ Fall 1: $x \in C$, dann stimmt es

→ Fall 2: $x \in A$, dann $x \in (A \cap B)$ und $x \in (A \cap C)$, also ist $x \in C$

„$\supseteq$": Sei $x \in C$, dann $x \in (A \cup C)$, also $x \in (A \cup B)$, d.h. $x \in A \vee x \in B$

→ Fall 1: $x \in B$, dann stimmt es

→ Fall 2: $x \in A$, dann $x \in (A \cap C)$, also auch $x \in (A \cap B)$, also: $x \in B$

→ Es gilt $B = C$ $\blacksquare$