DS1: Josephus - Aufgaben

Sonntag, 19. Februar 2023 04:51

Aufgabe 1) Josephus

a) Geben Sie das Rekursionsschema der Josephus-Nummern J(n) an.

b) Ausgehend von diesem Schema formulieren Sie eine Hypothese für eine explizite (geschlossene Formel) der Josephus-Nummern J(n).

c) Beweisen Sie die Hypothese mittels vollständiger Induktion über eine geeignete Induktionsvariable.

1)a) $J(1) = 1$

$J(2n) = 2 \cdot J(n) - 1$ → für gerade Zahlen (a)

$J(2n+1) = 2 \cdot J(n) + 1$ → für ungerade Zahlen (b)

b) mit Hilfe von Rekursionschema geschlossene Formel finden
→ an Bsp ausrechnen

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
J(n)	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15

→ für $n \in \mathbb{N}$: $n = 2^m + r$, $0 \leq r < 2^m$

→ dann gilt: $\boxed{J(n) = J(2^m + r) = 2r + 1}$ (A)

→ d.h. für n mit $2^m \leq n < 2^{m+1}$ ↳ beide Gleichungen sind gleich

c) vollständige Induktion zu (A)

geg: $n \geq 1$, $n = 2^m + r$, $0 \leq r < 2^m$

IA: $m = 0$ ⤷ $n = 2^0 + r$
$\underline{n = 1}$ ⤷ d.h. r muss 0 sein
→ $0 \leq r < 2^0$ ⤷ $r = 0$

⤷ einsetzen in: $J(2^m + r) = 2r + 1$

$J(2^0 + 0) = 2 \cdot 0 + 1$

$\underline{J(1) = 1}$

IV: $m = k$ ⤷ $n' = 2^k + r'$, also: $J(n') = 2r' + 1$ (IV: 2^k + irgendwas)

IB: $m = k+1$ ⤷ $n'' = 2^{k+1} + r''$, also: $J(n'') = \underline{2r'' + 1}$ (Ergebniss von Beweis)

Ind.beweis: müssen beide Fälle aus Rekursionsschema beweisen
→ damit geschlossene Formel stimmt (beide Fälle enthält)

→ 1.Fall (a): (gerade) $n'' = 2^{k+1} + r''$, $0 \leq r'' < 2^{k+1}$ (n'' ist gerade Zahl)

→ es gibt $n \in \mathbb{N}$: $n'' = 2 \cdot n = 2^{k+1} + r''$

→ d.h. r'' muss gerade sein, dann: $\frac{r''}{2} \in \mathbb{N}$ ($r'' = \frac{r''}{2}$)

→ also: $n = 2^k + \frac{r''}{2}$

→ $J(n'') = J(2n)$ // wegen Schema: $J(2n) = 2 \cdot J(n) - 1$

$\stackrel{(a)}{=} 2 \cdot J(n) - 1$ // n einsetzen

$= 2 \cdot J(2^k + \frac{r''}{2}) - 1$ // IV: $n' = 2^k + r'$ ⤷ $J(n') = 2r' + 1$

$\stackrel{(IV)}{=} 2 \cdot [2 \cdot (\underbrace{\frac{r''}{2}}_{\text{wie } r}) + 1] - 1$

$= 2 \cdot [r'' + 1] - 1$

$= 2 \cdot r'' + 2 \cdot 1 - 1$

$\underline{J(n'') = 2r'' + 1}$ $\blacksquare$

→ 2.Fall (b): (ungerade) $n'' = 2^{k+1} + r''$, $0 \leq 1 \leq 2^{k+1}$

→ es gibt $n \in \mathbb{N}$: $n'' = 2n - 1 = 2^{k+1} + r''$

→ d.h. r'' muss ungerade sein, dann $\frac{r''-1}{2}$ ($r'' = \frac{r''-1}{2}$)

$2^k \; (\frac{r''-1}{\ldots})$

→ es gibt $n \in \mathbb{N}$: $n'' = 2n - 1 = 2^{k+1} + r''$

→ d.h. r'' muss ungerade sein, dann $\frac{r''-1}{2}$ $\quad \left(r' = \frac{r''-1}{2} \right)$

→ also: $\underline{n} = 2^k + \left(\frac{r''-1}{2} \right)$

$$\begin{aligned}
\to J(n'') &= J(2n+1) \\
&\overset{(b)}{=} 2 \cdot J(\underline{n}) + 1 \\
&\overset{(IV)}{=} 2 \cdot J\left(2^k + \left(\frac{r''-1}{2}\right)\right) + 1 \\
&= 2 \cdot \left[\cancel{2} \cdot \left(\frac{r''-1}{\cancel{2}}\right) + 1 \right] + 1 \\
&= 2 \cdot \left[r'' \cancel{-1} \cancel{+1} \right] + 1 \\
\underline{\underline{J(n'')}} &\underline{\underline{= 2r'' + 1}}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

$$\begin{aligned}
2n + 1 &= n \\
2n + 1 &= 2^{k+1} + r'' \quad | -1 \\
2n &= 2^{k+1} + r'' - 1 \quad | :2 \\
n &= 2^k + \frac{r''-1}{2}
\end{aligned}$$

1 Aufgabe

1. Rekursions-Schema für die Josephus Nummern
2. Alle natürlichen Zahlen n mit $J(n) = 1$ bestimmen und per Induktion beweisen
3. Alle natürlichen Zahlen n mit $J(n) = n$ bestimmen und per Induktion beweisen

Verweis:

a) $J(2^m) = 1$ (für alle $m \geq 0$).

b) $J(2^m - 1) = 2^m - 1$ (für alle $m > 0$).

1) 1. $J(1) = 1$

$J(2n) = 2 \cdot J(n) - 1$ → gerade Zahlen (a)

$J(2n+1) = 2 \cdot J(n) + 1$ → ungerade Zahlen (b)

2. geg: $J(n) = 1$ für alle $n = 2^m$ mit $m \geq 0$

→ $J(2^m) = 1$

IA: $m = 0$ ⤵ $J(2^0) = 1$

$\underline{J(1) = 1}$ $\blacksquare$

IV: $m = k$ ⤵ $J(2^k) = 1$

IB: $m = k+1$ ⤵ $J(2^{k+1}) = 1$

Ind.beweis: $n = 2^{k+1}$ → n ist gerade Zahl (a)

$$\begin{aligned}
&⤵ J(2n) = 2 \cdot J(n) - 1 \\
J(2 \cdot 2^{k+1}) &= 2 \cdot J(2^{k+1}) - 1 \quad \| \text{"}\tfrac{n}{2}\text{"} \\
J(2^{k+1}) &= 2 \cdot J\left(\frac{2^{k+1}}{2}\right) - 1 \\
&= 2 \cdot J\left(\frac{2^k \cdot 2^1}{2}\right) - 1 \\
&= 2 \cdot J(2^k) - 1 \\
&\overset{(IV)}{=} 2 \cdot 1 - 1 \\
\underline{\underline{J(2^{k+1})}} &\underline{\underline{= 1}}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

3. geg: $J(n) = n$ für alle $n = 2^m - 2$ mit $m > 0$

→ $J(2^m - 1) = 2^m - 1$

IA: $m = 1$ ⤵ $J(2^1 - 1) = 2^1 - 1$

$\underline{J(1) = 1}$

IV: $m = k$ ⤵ $J(2^k - 1) = 2^k - 1$

IB: $m = k+1$ ⤵ $J(2^{k+1} - 1) = 2^{k+1} - 1$

Indbeweis: $n = 2^{k+1} - 1$ → wir wissen aus (2) das 2^{k+1} gerade, also ist $2^{k+1} - 1$ ungerade

$$\begin{aligned}
&⤵ J(2n+1) = 2 \cdot J(n) + 1 \quad (b) \\
J(2 \cdot (2^{k+1} - 1) + 1) &= 2 \cdot J(2^{k+1} - 1) + 1 \quad \| \text{"}\tfrac{n}{2}\text{"} \\
J((2^{k+1} - 1) + 1) &= 2 \cdot J\left(\frac{2^{k+1} - 1}{2}\right) + 1 \quad \| \text{"}n\text{"} - 1
\end{aligned}$$

} Äquivalenzumformung in $J(\ )$

$$
\begin{aligned}
J(2\cdot(2^{k+1}-1)+1) &= 2\cdot J(2^{k+1}-1)+1 && \Big\|\ \frac{\text{"}n\text{"}}{2} \\
J((2^{k+1}-1)+1) &= 2\cdot J\left(\frac{2^{k+1}-1}{2}\right)+1 && \Big\|\ \text{"}n\text{"}-1 \quad \Big\}\ \text{Äquivalenzumformung in } J(\ ) \\
J(2^{k+1}-1) &= 2\cdot J\left(\frac{2^{k+1}-1-1}{2}\right)+1 \\
&= 2\cdot J\left(\frac{2^k\cdot \cancel{2^1}-2}{\cancel{2}}\right)+1 \\
&= 2\cdot J(2^k-1)+1 \\
&\overset{(IV)}{=} 2\cdot(2^k-1)+1 \\
&= 2^{k+1}-2+1 \\
\underline{\underline{J(2^{k+1}-1)}} &\underline{\underline{= 2^{k+1}-1}} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$