Sto: 8.Hausaufgabe (13.12.23) - Till Billerbeck (G3), Cora Zeitler (G1)

Dienstag, 12. Dezember 2023 10:02

Aufgabe 3 (1+1+2 Punkte)

Ein Mikrogramm Uranium-238 ($^{238}_{92}$U) besteht aus circa $n = 2,53 \cdot 10^{15}$ Atomen. Pro Stunde hat jedes ^{238}U-Atom eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{45}{n}$ ein α-Partikel ($^4_2$He^{2+}) zu emittieren und zu Thorium-234 zu zerfallen. Die Zerfälle sind unabhängig voneinander. Es sei X die Anzahl der emittierten α-Partikel in einer Stunde.

a) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable X?

b) Finden Sie eine geeignete Verteilung mit *einem* Parameter, welche die Verteilung von X gut approximiert. Begründen Sie Ihre Wahl mit einer Aussage aus der Vorlesung.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden weniger als drei α-Partikel in einer Stunde emittiert? Sie können dabei die Approximation aus b) verwenden.

3a) ges: Verteilung der ZV X

geg: $n = 2,53 \cdot 10^{15}$

$p = \frac{45}{n}$

Lsg: es ist eine Binomialverteilung

→ X ist binomial-verteilt $(B(n, \frac{45}{n}))$

3b) X kann mithilfe der Poisson-Verteilung

→ $P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ mit $p = \frac{\lambda}{n}$

aus Vorlesung:

→ Siehe Satz 6.8.: $\lambda \in (0, \infty)$ und $p(n) = \frac{\lambda}{n}$, $\forall n \geq 1$

→ dann: $\lim_{n \to \infty} B(n, p(n); k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

→ dabei ist $\lambda = 45$ und $p(n) = \frac{45}{n}$

→ Somit ist X Poi(45) - verteilt

↳ die Binomialverteilung $B(n,p)$ lässt sich gut approximieren mit der Poissonverteilung falls n größer ist und p kleiner

3c) A = weniger als 3 Partikel in einer Stunde emittieren

$P(X<3) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)$

→ $p(n) = \frac{\lambda}{n}$ → $\frac{45}{n} = \frac{\lambda}{n}$ → $\lambda = 45$

$$P(X<3) = e^{-45} \cdot \frac{45^2}{2!} + e^{-45} \cdot \frac{45^1}{1!} + e^{-45} \cdot \frac{45^0}{0!}$$
$$= e^{-45} \cdot \frac{45^2}{2} + e^{-45} \cdot 45 + e^{-45}$$
$$= e^{-45} \cdot \left(\frac{45^2}{2} + 45 + 1\right)$$
$$= e^{-45} \cdot \left(\frac{45^2}{2} + 46\right)$$
$$= e^{-45} \cdot \frac{2117}{2} \approx 3,03 \cdot 10^{-17}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei $\mathcal{U}[0,1]$-verteilt und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $X + c$ ist $\mathcal{U}[c, c+1]$-verteilt.
Hinweis: Wir definieren $X + c$ durch $(X + c)(\omega) = X(\omega) + c, \omega \in \Omega$.

4) geg: X ist $\mathcal{U}[0,1]$ - verteilt und $c \in \mathbb{R}$

zu zeigen: $X + c$ ist $\mathcal{U}[c, c+1]$

↳ $P(X + c \in [a,b]) = P(X \in [a-c, b-c]$

$$= \int_{b-c}^{a-c} 1_{[0,1]} \cdot x \, dx$$

↳ Sei: $u(x) = y = x + c$, $x = y - c$

$\frac{du}{dx} = u'(x) = 1 \Leftrightarrow du = dx$

$u \cdot (b - c) = b - c + c = b$

$u \cdot (a - c) = a - c + c = a$

$x = y - c$

$1 = y - c$ im Bereich $[0,1]$

↳ $y = 1$ im Bereich $[c, c+1]$

$y - c = 0 \Leftrightarrow y = c$

$y - c = 1 \Leftrightarrow y = c + 1$

$$= \int_b^a 1_{[0,1]} \cdot (y - c) \cdot dy$$

$$= \int_b^a 1_{[0+c,\, c+1]} (y) \cdot dy$$

$$= \int_b^a 1_{[c,\, c+1]} (y) \cdot dy$$

$\Rightarrow g(a) = 1_{[c, c+1]}(y)$ ist Dichtefunktion von $\mathcal{U}[c, c+1]$