Klausur Diskrete Strukturen I
WS 2017/18

Die Aufgabe A konnte statt einer der vier Aufgaben bearbeitet werden.

1.
a) Wie lautet das Rekursionsschema für die Josephus-Nummer J(n)?
b) Für welche Zahlen n aus den natürlichen Zahlen gilt: J(n) = 1. (Mithilfe des Rekursionsschemas; Beweis durch vollständige Induktion)
c) Bestimmen Sie, für welche Zahlen n aus den natürlichen Zahlen gilt: J(n) = n. (Mithilfe des Rekursionsschemas; Beweis durch vollständige Induktion)

2.
a) Wie lautet das Rekursionsschema für die Fibonacci-Zahlen?
b) Bestimmen Sie ausgehend vom Rekursionsschema folgende Gleichung durch vollständige Induktion für n >= 1 (mit Angabe von Induktionsanfang, Induktionsschritt, usw.)
$f_{m+n} = f_{m+1} \times f_n + f_m \times f_{n-1}$
c) Benutzen Sie die bewiesene Gleichung, um folgende herzuleiten:
$f_{2n} = f^2_{n+1} - f^2_{n-1}$

3.
Es seinen alle vorkommenden Mengen A,B, C Teilmengen eines nicht leeren Grundbereichs M.
Beweisen Sie folgende Gleichungen.
a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$

4.Für M = {1, 2, 3, 4, 5} ist die Relation $R \subseteq M \, x \, M$ gegeben mit R = {(2,1), (2,2), (4,3), (4,4)}.
Geben Sie die Mengen $R1, R2, R3, R4, R5 \subseteq MxM$ so an, dass

1. $R \cup R1$ ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.
2. $R \cup R2$ Ist reflexiv, transitiv aber nicht symmetrisch.
3. $R \cup R3$ Ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.
4. $R \cup R4$ Ist transitiv und symmetrisch, aber nicht reflexiv.
5. $R \cup R5$ Weder transitiv noch symmetrisch noch reflexiv.

Begründen Sie kurz und knapp.

A. Es sei M beliebige Menge.

a) Definieren Sie die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation über M.
b) Definieren Sie die Eigenschaften einer Zerlegung einer Menge.
c) Definieren Sie die Kongruenz Modulo m über N. Für das Weitere nehmen wir an, dass Kongruenz Modulo m eine Äquivalenzrelation ist.
d) Definieren Sie die Äquivalenzklassen und die Faktormenge von Kongruenz Modulo m.