Diskrete Strukturen I; WS 2022/2023

Jörg Vogel
Institut für Informatik der FSU

5. Aufgabenblatt

Fibonacci-Zahlen

s1.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*
Beweisen Sie durch vollständige Induktion über m, dass das sogenannte „Additionstheorem“ für Fibonacci-Zahlen für alle $n \geq 1$ und $\mathbf{m} \geq 2$ gilt:

$$f_{n+\mathbf{m}} = \mathbf{f_{m+1}} \cdot f_n + \mathbf{f_m} \cdot f_{n-1} .$$

Fibonacci-Zahlen

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*
Nun betrachten wir folgende Gleichung für die Fibonacci-Zahlen:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}.$$

a) Beweisen Sie diese Gleichung durch vollständige Induktion über n.

b) Versuchen Sie einen alternativen Beweis, der ohne Induktion auskommt, indem bekannte Gleichungen für Fibonacci-Zahlen verwendet werden.

Der Turm von Hanoi

m3.) *(Diese Aufgabe ist eine mündliche Hausaufgabe, die nicht bewertet wird.)*

a) Finden Sie eine kürzeste Folge von Zügen, um einen Turm, bestehend aus n Scheiben, von einem linken Stab L auf einen rechten Stab R umzustapeln, wobei neben den üblichen Regeln (H1) und (H2) (siehe 3. Aufgabenblatt) zusätzlich gilt:

(H3) Direkte Züge von L nach R bzw. von R nach L sind nicht erlaubt, d.h. jeder Zug führt zum mittleren Stab M oder geht von M aus.

b) Zeigen Sie, dass in dem unter a) beschriebenen Spiel unter Einhaltung der Regeln (H1), (H2) und (H3) jede mögliche erlaubte Konfiguration von n Scheiben auf drei Stäben auftritt.

Abgabetermin: Montag, **21. November 2022 bis 10 Uhr als pdf-Datei .**
Bitte schreiben Sie in den Titel dieser pdf-Datei Ihren Namen.

DS1: 5.Hausaufgabe (21.11.22) - Cora Zeitler

Mittwoch, 16. November 2022 12:02

Fibonacci-Zahlen

s1.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*
Beweisen Sie durch vollständige Induktion über m, dass das sogenannte „Additionstheorem" für Fibonacci-Zahlen für alle $n \geq 1$ und $\mathbf{m} \geq 2$ gilt:

$$f_{n+\mathbf{m}} = \mathbf{f_{m+1}} \cdot f_n + \mathbf{f_m} \cdot f_{n-1}.$$

// $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$
$\rightarrow f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$
$\rightarrow f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$

1) IA: ① $m=2$ ↓

$$\begin{aligned} f_{n+2} &= f_{2+1} \cdot f_n + f_2 \cdot f_{n-1} \\ &= f_3 \cdot f_n + f_2 \cdot f_{n-1} \\ &= 2 \cdot f_n + 1 \cdot f_{n-1} \\ &= 2 \cdot f_n + f_{n-1} \\ &= f_n + f_n + f_{n-1} \\ &= f_n + f_{n+1} - \cancel{f_{n-1}} + \cancel{f_{n-1}} \\ \underline{f_{n+2}} &\underline{= f_{n+1} + f_n} \end{aligned}$$

② $m=3$ ↓

$$\begin{aligned} f_{n+3} &= f_{3+1} \cdot f_n + f_3 \cdot f_{n-1} \\ &= f_4 \cdot f_n + f_3 \cdot f_{n-1} \\ &= 3 \cdot f_n + 2 \cdot f_{n-1} \\ &= f_n + f_n + f_n + f_{n-1} + f_{n-1} \\ &= f_{n+1} - f_{n-1} + f_{n+1} - f_{n-1} + f_n + f_{n-1} + f_{n-1} \\ &= f_{n+1} + f_{n+1} + f_n \\ \underline{f_{n+3}} &\underline{= f_{n+2} + f_{n+1}} \end{aligned}$$

IV: ① $m=k-1$ ↓ $f_{n+k-1} = f_{k-1+1} \cdot f_n + f_{k-1} + f_{n-1}$
$= f_k \cdot f_n + f_{k-1} + f_{n-1}$

② $m=k$ ↓ $f_{n+k} = f_{k+1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1}$

IB: $m=k+1$ ↓ $f_{n+(k+1)} = f_{(k+1)+1} \cdot f_n + f_{k+1} \cdot f_{n-1}$
$f_{k+2} \cdot f_n + f_{k+1} \cdot f_{n-1}$

// $m=k$ ↓ $f_{n+k} = f_{k+1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1}$
↳ selbe wie Vorrauss. ② ↓ fällt weg

Ind.beweis: $f_{n+k+1} = f_{n+k} + f_{n+k-1}$ // Fibonacci: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

$$\begin{aligned} &\overset{IV}{=} (f_{k+1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1}) + (f_k \cdot f_n + f_{k-1} \cdot f_{n-1}) \\ &= f_n \cdot (\underbrace{f_{k+1} + f_k}) + f_{n-1} \cdot (\underbrace{f_k + f_{k-1}}) \\ &= f_n \cdot f_{k+2} + f_{n-1} \cdot f_{k+1} \\ \underline{\underline{f_{n+k+1}}} &\underline{\underline{= f_{k+2} \cdot f_n + f_{k+1} \cdot f_{n-1}}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Fibonacci-Zahlen

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*
Nun betrachten wir folgende Gleichung für die Fibonacci-Zahlen:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}.$$

a) Beweisen Sie diese Gleichung durch vollständige Induktion über n.

b) Versuchen Sie einen alternativen Beweis, der ohne Induktion auskommt, indem bekannte Gleichungen für Fibonacci-Zahlen verwendet werden.

2) a) IA: $n=1$ ↓ $\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = f_n \cdot f_{n+1}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{1} (f_i)^2 &= f_1 \cdot f_2 \\ (f_1)^2 &= 1 \cdot 1 \\ \underline{1} &\underline{= 1} \end{aligned}$$

IV: $n=k$ ↓ $\sum_{i=1}^{k} (f_i)^2 = f_k \cdot f_{(k+1)}$

IB: $n=k+1$ ↓ $\sum_{i=1}^{k+1} (f_i)^2 = f_{k+1} \cdot f_{(k+1)+1}$
$= f_{k+1} \cdot f_{k+2}$

Ind.bew: $\sum_{i=1}^{k+1} (f_i)^2 = f_{k+1} \cdot f_{k+2}$

↓ $\sum_{i=1}^{k+1} (f_i)^2 = (f_{k+1})^2 + \sum_{i=1}^{k} (f_i)^2$ | Ind.vor.

$= (f_{k+1})^2 + (f_k \cdot f_{k+1})$

$$\rightsquigarrow \sum_{i=1}^{k+1} (f_i)^2 = (f_{k+1})^2 + \sum_{i=1}^{k} (f_i)^2 \qquad | \text{ Ind.vor.}$$

$$= (f_{k+1})^2 + (f_k \cdot f_{k+1})$$

$$= f_{k+1} \cdot f_{k+1} + f_k \cdot f_{k+1}$$

$$= f_{k+1} \cdot (f_{k+1} + f_k)$$

$$= f_{k+1} \cdot (f_{k+2})$$

$$\rightsquigarrow \underline{\underline{f_{k+1} \cdot f_{k+2} = f_{k+1} \cdot f_{k+2}}}$$

b) $f_n \cdot f_{n+1} = f_n \cdot (f_n + f_{n-1})$

$$= f_n^2 + f_n \cdot f_{n-1}$$

$$= f_n^2 + (f_{n-1} + f_{n-2}) \cdot f_{n-1}$$

$$= f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-1} \cdot f_{n-2} \qquad | \to \text{ geht bis } f_2^2 + f_1 \cdot f_0$$

$$= f_n^2 + f_{n-1}^2 + \ldots + f_2^2 + f_1^2 + f_1 \cdot f_0 \qquad \| \ f_0 = 0$$

$$= f_n^2 + f_{n-1}^2 + \ldots + f_2^2 + f_1^2$$

$$= \underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2}} \quad \blacksquare$$

DS1: 5.Hausaufgabe (21.11.22) - Cora Zeitler

Mittwoch, 16. November 2022 12:02

Fibonacci-Zahlen

s1.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*
Beweisen Sie durch vollständige Induktion über m, dass das sogenannte „Additionstheorem" für Fibonacci-Zahlen für alle $n \geq 1$ und $\mathbf{m} \geq 2$ gilt:

$$f_{n+\mathbf{m}} = \mathbf{f_{m+1}} \cdot f_n + \mathbf{f_m} \cdot f_{n-1}.$$

// $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$
$\rightarrow f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$
$\rightarrow f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$

1) IA: ① $m = 2$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} f_{n+2} &= f_{2+1} \cdot f_n + f_2 \cdot f_{n-1} \\ &= f_3 \cdot f_n + f_2 \cdot f_{n-1} \\ &= 2 \cdot f_n + 1 \cdot f_{n-1} \\ &= 2 \cdot f_n + f_{n-1} \\ &= f_n + f_n + f_{n-1} \\ &= f_n + f_{n+1} - \cancel{f_{n-1}} + \cancel{f_{n-1}} \\ \underline{f_{n+2}} &\underline{= f_{n+1} + f_n} \end{aligned}$$

② $m = 3$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} f_{n+3} &= f_{3+1} \cdot f_n + f_3 \cdot f_{n-1} \\ &= f_4 \cdot f_n + f_3 \cdot f_{n-1} \\ &= 3 \cdot f_n + 2 \cdot f_{n-1} \\ &= f_n + f_n + f_n + f_{n-1} + f_{n-1} \\ &= f_{n+1} - f_{n-1} + f_{n+1} - f_{n-1} + f_n + f_{n-1} + f_{n-1} \\ &= f_{n+1} + f_{n+1} + f_n \\ \underline{f_{n+3}} &\underline{= f_{n+2} + f_{n+1}} \end{aligned}$$

IV: ① $m = k-1$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} f_{n+k-1} &= f_{k-1+1} \cdot f_n + f_{k-1} + f_{n-1} \\ &= f_k \cdot f_n + f_{k-1} + f_{n-1} \end{aligned}$$

② $m = k$ $\rightsquigarrow$ $f_{n+k} = f_{k+1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1}$

IB: $m = k+1$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} f_{n+(k+1)} &= f_{(k+1)+1} \cdot f_n + f_{k+1} \cdot f_{n-1} \\ & f_{k+2} \cdot f_n + f_{k+1} \cdot f_{n-1} \end{aligned}$$

|| $m = k$ $\rightsquigarrow$ $f_{n+k} = f_{k+1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1}$
↳ selbe wie Vorrauss. ② $\rightsquigarrow$ fällt weg

Ind.beweis:

// Fibonacci: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

$$\begin{aligned} f_{n+k+1} &= f_{n+k} + f_{n+k-1} \\ &\overset{IV}{=} (f_{k+1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1}) + (f_k \cdot f_n + f_{k-1} \cdot f_{n-1}) \\ &= f_n \cdot (\underbrace{f_{k+1} + f_k}) + f_{n-1} \cdot (\underbrace{f_k + f_{k-1}}) \\ &= f_n \cdot f_{k+2} + f_{n-1} \cdot f_{k+1} \\ \underline{\underline{f_{n+k+1}}} &\underline{\underline{= f_{k+2} \cdot f_n + f_{k+1} \cdot f_{n-1}}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

9/9

Sauber!

Fibonacci-Zahlen

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*
Nun betrachten wir folgende Gleichung für die Fibonacci-Zahlen:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}.$$

a) Beweisen Sie diese Gleichung durch vollständige Induktion über n.

b) Versuchen Sie einen alternativen Beweis, der ohne Induktion auskommt, indem bekannte Gleichungen für Fibonacci-Zahlen verwendet werden.

2) a) IA: $n = 1$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 &= f_n \cdot f_{n+1} \\ \sum_{i=1}^{1} (f_i)^2 &= f_1 \cdot f_2 \\ (f_1)^2 &= 1 \cdot 1 \\ \underline{1} &\underline{= 1} \end{aligned}$$

IV: $n = k$ $\rightsquigarrow$ $\sum_{i=1}^{k} (f_i)^2 = f_k \cdot f_{(k+1)}$

IB: $n = k+1$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (f_i)^2 &= f_{k+1} \cdot f_{(k+1)+1} \\ &= f_{k+1} \cdot f_{k+2} \end{aligned}$$

Ind.bew:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (f_i)^2 = f_{k+1} \cdot f_{k+2}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{i=1}^{k+1} (f_i)^2 = (f_{k+1})^2 + \sum_{i=1}^{k} (f_i)^2 \quad | \text{ Ind.vor.}$$

$$= (f_{k+1})^2 + (f_k \cdot f_{k+1})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} (f_i)^2 = (f_{k+1})^2 + \sum_{i=1}^{k} (f_i)^2 \qquad | \text{ Ind.vor.}$$
$$= (f_{k+1})^2 + (f_k \cdot f_{k+1})$$
$$= f_{k+1} \cdot f_{k+1} + f_k \cdot f_{k+1}$$
$$= f_{k+1} \cdot (f_{k+1} + f_k)$$
$$= f_{k+1} \cdot (f_{k+2})$$

6/6 :)

$$\Rightarrow \underline{\underline{f_{k+1} \cdot f_{k+2} = f_{k+1} \cdot f_{k+2}}}$$

b) $f_n \cdot f_{n+1} = f_n \cdot (f_n + f_{n-1})$
$$= f_n^2 + f_n \cdot f_{n-1}$$
$$= f_n^2 + (f_{n-1} + f_{n-2}) \cdot f_{n-1}$$
$$= f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-1} \cdot f_{n-2} \qquad | \rightarrow \text{ geht bis } f_2^2 + f_1 \cdot f_0$$
$$= f_n^2 + f_{n-1}^2 + \dots + f_2^2 + f_1^2 + f_1 \cdot f_0 \qquad \| \; f_0 = 0$$
$$= f_n^2 + f_{n-1}^2 + \dots + f_2^2 + f_1^2$$
$$= \underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2}} \qquad \blacksquare$$

6/6 :)

ganz gut würde ich sagen. 21/21