Altkurzklausur - 2021

Montag, 26. Juni 2023 00:52

1	Ermitteln Sie je eine Stammfunktion zu den Funktionen **(a)** $f(x) = \frac{3x-1}{x(x+1)}$ **(b)** $g(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$ *Hinweis: Partialbruchzerlegung bzw. Substitution*	2 + 2

1a) $f(x) = \frac{3x-1}{x\cdot(x+1)}$

$\rightsquigarrow \frac{3x-1}{x\cdot(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \quad | \cdot x\cdot(x+1)$

$3x-1 = A\cdot(x+1) + B\cdot x$

$= A\cdot x + A + Bx$

$3x-1 = x\cdot(A+B) + A$

$\rightsquigarrow$ I $A+B=3$

II $A=-1$

II → I $-1+B=3 \quad |+1$

$B=4$

↝ einsetzen: $\frac{-1}{x} + \frac{4}{x+1}$

$\int -\frac{1}{x} + \frac{4}{x+1}\, dx$

$= -\int \frac{1}{x} + 4\cdot\frac{1}{x+1}\, dx$

$= -\ln(x) + 4\cdot\ln(x+1) + C$

$= -\ln(|x|) + 4\cdot\ln(|x+1|) + C$

1b) $g(x) = \frac{\cos(x)}{1\cdot(\sin(x))^2}$ // $u = \sin(x)$

$dx = \frac{du}{\cos(x)}$

$\rightsquigarrow \int \frac{\cos(x)}{1+u^2} \cdot \frac{du}{\cos(x)}$ // $u' = \cos(x)$

$= \int \frac{1}{1+u^2}\cdot du$ // $\frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)$

$= \arctan(u)$

$= \arctan(\sin(x))$

2	**(a)** Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_0^1 (x^2+7)e^x\,\mathrm{d}x$.	3
	(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}x^n$.	1

→ $8e-9$

2a) $\int_0^1 \underbrace{(x^2+7)}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v'}\cdot dx$ // $u = x^2+7$ $u' = 2x$; $v = e^x$ $v' = e^x$

$= u\cdot v - \int u'\cdot v$

$= (x^2+7)\cdot e^x - \int \underbrace{2x}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v'}$ // $u=2x$ $u'=2$; $v=e^x$ $v'=e^x$

$= (x^2+7)\cdot e^x - (2x\cdot e^x - \int 2\cdot e^x)$

$= \left[(x^2+7)\cdot e^x - 2x\cdot e^x + 2\cdot e^x\right]_0^1$

$= ((1^2+7)\cdot e^1 - 2\cdot 1\cdot e^1 + 2\cdot e^1) - ((0^2+7)\cdot e^0 - \cancel{2\cdot 0\cdot e^0} + 2\cdot e^0)$

$= e + 7e - 2e + 2e - 7 - 2$

$= 8e - 9$

2b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}\cdot x^n$

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n^3/5^n}{(n+1)^3/5^{n+1}}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{n^3}{5^n}}{\frac{(n+1)^3}{5^{n+1}}}$$

$$= \frac{n^3}{5^n} \cdot \frac{5^{n+1}}{(n+1)^3}$$

$$= \frac{n^3 \cdot \cancel{5^n} \cdot 5}{\cancel{5^n} \cdot (n+1)^3}$$

$$= \frac{n^3 \cdot 5}{(n+1)^3}$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^3$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{n \cdot 1/n}{(n+1) \cdot 1/n}\right)^3$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{1}{1+\underbrace{1/n}_{0}}\right)^3$$

$$R = 5 \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^3 = 5$$

3	Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung für die Funktion $f(x) = x^3 - 4x + 11$ an der Stelle $x_0 = 1$.	2

3) $f(x) = x^3 - 4x + 11$ mit $x_0 = 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$f''(x) = 3 \cdot 2x^1 - 0 = 6x$$

$$f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 + 11 = 1 - 4 + 11 = 8$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 = -1$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6$$

$$T_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2$$

$$= 8 + \frac{-1}{1} \cdot (x-1)^1 + \frac{6}{2 \cdot 1} \cdot (x-1)^2$$

$$= 8 + (-1) \cdot (x-1) + 3 \cdot (x-1)^2$$

$$= 8 - 1 \cdot (x-1) + (3x-3)^2$$

$$= 8 - x + 1 + 9x - 9$$

$$= -x + 9x$$