AuB: 6.Übung (12.12.23)

Dienstag, 12. Dezember 2023 10:04

HA4

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

Beweisen Sie, dass die folgende Sprache nicht kontextfrei ist!

$$L = \{a^n b^{n^2} | n \in \mathbb{N}\}$$

s2.) $L = \{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \notin CFL$

indirekter Beweis: $L \in CFL$

→ dann "⇝" existiert Pumpingzahl: n_L, sodass für alle $z \in L$ ...

"⇜" Wir wählen: $z = a^{n_L} b^{n_L^2}$

"⇝" es existiert Zerlegung:

a^{n_L}		$b^{n_L^2}$	
u		vwx	y

(1) $|vwx| \leq n_L$

(2) $|vx| \geq 1$

(3) $z_i = uv^iwx^iy \overset{!}{\in} L$

"⇜" Wir wählen $z_2 = uvvwxxy$!

und untersuchen Wortlänge: $|z| = n_L^2 + n_L$

Es gilt: $|z_2| = |z| + |vx| \leq |z| + |vwx| \overset{(1)}{\leq} (n_L^2 + n_L) + n_L$

$< (n_L^2 + n_L) + (n_L + 1) < (n_L^2 + n_L) + 2 \cdot (n_L + 1)$

$= (n_L^2 + 2n_L + 1) + (n_L + 1) = (n_L + 1)^2 + (n_L + 1) = k$

k ist die nächst größere Wortlänge in L größer als $|z|$.

Also gilt einerseits: $n_L^2 + n_L = |z| \underset{(2)}{<} |z_2|$

und andererseits: $|z_2| < (n_L + 1)^2 + (n_L + 1)$

FAZIT: $|z_2|$ ist eine "Zwischenlänge" und deshalb $z_2 \notin L$ ↯ zu (3)

HA5

m2.) *(Diese Aufgabe ist eine mündliche Hausaufgabe, die nicht bewertet wird.)*

Wir betrachten die folgende Sprache:

$$L = \{a^{n^2} | n \in \mathbb{N}\}$$

a) Ist L regulär?

b) Ist L nicht regulär, aber kontextfrei?

c) Ist L nicht kontextfrei? // Sprache ist kontextfrei, wenn es kontextfreie Grammatik gibt.

m2)a) $L' = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \notin CFL$

indirekter Beweis: Angenom.: $L' \in CFL$

"⇝" wir bekommen eine Pumpingzahl: n_a, ...

"⇜" wir setzen: $z' = a^{n_a^2}$

"⇝" wir bekommen Zerlegung:

$a^{n_a^2}$		
u	vwx	y

(1) $|vwx| \leq n_a$

(2) $|vx| \geq 1$

(3) $z_i = uv^iwx^iy \overset{!}{\in} L$

(2) $|vx| \geq 1$

(3) $z_i = uv^iwx^iy \overset{!}{\in} L$

"⟵" Wir setzen $z_2 = uvvwxxy$

und untersuchen Wortlänge: $|z'| = n_a^2$

Es gilt: $|z_2| = |z'| + |vw| \leq |z'| + |vwx| \overset{(1)}{\leq} n_a^2 + n_a$

$< n_a^2 + n_a + 1 < n_a^2 + 2 \cdot n_a + 1 = (n_a+1)^2 = k$

k ist die nächst größere Wortlänge in L' größer als $|z'|$

Also gilt einerseits: $n_a^2 = |z'| \underset{(2)}{<} |z_2|$

und andererseits: $|z_2| < (n_a+1)^2$

Deshalb: $z_2 \notin L'$ ↯

Frage: $L'' = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \overset{?}{\in}$ CFL

indirekter Beweis: Ann: $L'' \in$ CFL

$z =_{df.} a^{n_L} b^{2n_L}$

Wortlänge: $|z| = 3 \cdot n_L$

$|z| \underset{(2)}{<} |z_2| = |z| + |vx| \leq |z| + |vwx| \overset{(1)}{\leq} 3 \cdot n_L + n_L = 4 \cdot n_L$

k ist die nächstgrößere Wortlänge in L größer als $|z|$

Es gilt: $k = 3 \cdot n_L + 3$ (für $z'' = a^{n_L+1} b^{2(n_L+1)}$)

⇒ PL liefert keinen ↯ (keinen Widerspruch) Ann. nicht erfüllt, indirekter Beweis hat nicht funktioniert

↳ anders Beweisen: $\lambda \in L''$ ⤵ $\{S \to \lambda,$

$S \to S',$

$S' \to abb,$

$S \to aS'bb\}$ ✓

$L''' = \{a^{k \cdot n} b^{l \cdot n} \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Klar ist: $L' = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \notin$ REG

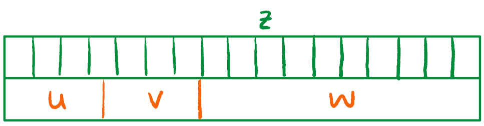
Selbsttest: Schreiben Sie einen Beweis mit Hilfe des PL für reguläre Sprachen

Wir wissen: Wenn $L \notin$ CFL, dann $L \notin$ REG !

UND: Wenn $L \subseteq \{a\}^*$ und $L \notin$ REG, dann $L \in$ CFL (kann) ! !

→ PL nochmal machen für CFL um zu prüfen

PL für REG:



← alles a's

(1) $|uv| \leq n_L$

(2) $|v| \geq 1$

(3) $z_i = uv^iw \in L$

→ Übersetzung von PL für CFL zu PL für REG:

REG		CFL
v	=	vx

→ Übersetzung von PL für CFL zu PL für REG :

REG		CFL
v	$=$	vx
uv	$=$	vwx
w	$=$	uy

$(u = w)$

$uvw = wvxuy$

(selbe wie $uvwxy$, wenn Sprache nur einen Buchstaben hat