Sto: 5.Hausaufgabe (29.11.23) - Till Billerbeck(G3), Cora Zeitler(G1)

Montag, 27. November 2023 12:05

Aufgabe 3 **(1,5 + 1,5 + 1 Punkte)**

Egal ob es regnet oder jemand Kaffee verschüttet, der Boden wird in jedem Fall nass. Wenn ich aber weiß, dass der Boden nass ist und es geregnet hat, dann erscheint es weniger wahrscheinlich, dass jemand auch noch Kaffee verschüttet hat - und zwar insbesondere dann, wenn Regen und das Kaffee verschütten unabhängige Ereignisse sind. Obwohl die Ereignisse unabhängig voneinander sind, sind sie nicht unabhängig *bedingt* auf die Information, dass der Boden nass ist. Wir untersuchen diesen Sachverhalt jetzt mathematisch.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B, C ("Regen, Kaffee, nass") Ereignisse mit $0 < P(C) < 1$ und

$$P(C|A) = P(C|B) = P(C|A \cap B) = 1.$$

Weiterhin seien A und B unabhängig.

Zeigen Sie:

// Bayes : $P(A|B) = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

a) $P(A \cap B|C) = \frac{P(A)P(B)}{P(C)}$,

b) $P(A|C)P(B|C) = \frac{P(A)P(B)}{P(C)^2}$,

c) $P(A \cap B|C) < P(A|C)P(B|C)$.

Bemerkung: Gilt bei c) stattdessen Gleichheit, dann heißen A und B *bedingt unabhängig gegeben* C. Aus Unabhängigkeit folgt also nicht bedingte Unabhängigkeit.

3a) geg: $P(A \cap B \mid C) = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(C)}$

→ mit Bayes

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A \cap B \mid C) &= \frac{P(C \mid A \cap B) \cdot P(A \cap B)}{P(C)} && // \ P(C \mid A \cap B) = 1 \\ &= \frac{1 \cdot P(A \cap B)}{P(C)} && // \text{ Unabhängigkeit von A und B} \\ &= \underline{\underline{\frac{P(A) \cdot P(B)}{P(C)}}} \end{aligned}$$

3b) geg: $P(A|C) \cdot P(B|C) = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(C)^2}$ // Bayes

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A|C) \cdot P(B|C) &= \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)} \cdot \frac{P(C|B) \cdot P(B)}{P(C)} && // \ P(C|A) = P(C|B) = 1 \\ &= \frac{1 \cdot P(A) \cdot 1 \cdot P(B)}{P(C) \cdot P(C)} \\ &= \underline{\underline{\frac{P(A) \cdot P(B)}{P(C)^2}}} \end{aligned}$$

3c) geg: $P(A \cap B \mid C) < P(A|C) \cdot P(B|C)$

$\Rightarrow$ nach a) und b): $\dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(C)} < \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(C)^2}$

→ Es gilt: $\forall x \in \mathbb{R}: \ 0 < x < 1: \ x^2 < x$

→ Außerdem gilt: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x < y \Rightarrow \frac{a}{x} > \frac{a}{y}$ mit $a \in \mathbb{R}$

→ Also gilt: $\forall x \in \mathbb{R}, \ 0 < x < 1: \ \frac{a}{x^2} > \frac{a}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$

→ Daraus folgt offensichtlich, das die Gleichung gilt für $a = P(A) \cdot P(B)$ und $x = P(C)$ ■

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Richtig oder falsch? *Korrekte Antworten geben einen Punkt, inkorrekte einen Minuspunkt. Die minimale Punktzahl ist trotzdem 0.*

a) Es seien A und B disjunkte Ereignisse. Dann sind A und B unabhängig.

b) Es sei $A_1, \ldots, A_n$ eine Familie von Ereignissen, sodass alle, bis auf eines, die Wahrscheinlichkeit 0 haben. Dann ist die Familie $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig.

c) Es seien A, B, C Ereignisse mit $P(C) > 0$, sodass $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$. Dann sind A und B unabhängig.

d) Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P_1)$ und $(\Omega, \mathcal{A}, P_2)$ zwei Wahrscheinlichkeitsräume mit der gleichen Ergebnismenge und der gleichen Ereignismenge. Sind $A, B \in \mathcal{A}$ bezüglich P_1 unabhängig, dann sind sie auch bezüglich P_2 unabhängig.

MERKE:

Wenn A und B **disjunkte Ereignisse** sind, bedeutet das, dass sie keine gemeinsamen Elemente haben, also nicht gleichzeitig auftreten können. In diesem Fall sind sie sogar abhängig voneinander, da das Eintreten von A das Eintreten von B ausschließt und umgekehrt.

Unabhängige Ereignisse sind solche, bei denen das Eintreten oder Nicht-Eintreten des einen Ereignisses keinen Einfluss auf das Eintreten oder Nicht-Eintreten des anderen Ereignisses hat.

4a) ⇒ Falsche Aussage !

→ $P(A \cap B) = 0$, aber evtl. $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$

→ Gegenbsp: Würfelwurf: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ mit $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$

→ $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{36}$

4b) ⇒ wahre Aussage !

$\to P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{\ }{36}$

4b) $\Rightarrow$ wahre Aussage !

$\to$ die einzelnen Wahrscheinlichkeiten $P(A_i) \cdot P(A_{...}) \cdot P(A_{...})$ sind immer 0

$\to$ Wahrs.keit des Schnittes ist auch immer 0

$\to$ Bsp: $P(A_1) = 0$ und $P(A_2) = a > 0$, dann bleiben beim Schnitt die Elemente "übrig"

↳ wobei: $P(A_1 \cap A_2) = 0$

$\to$ anderes Bsp: wenn $P(A_i) = 0$, dann $P(A_i \cap A_j) = 0$ für jedes andere Ereignis A_j

↳ da Schnitt leer ist

4c) $\Rightarrow$ Falsche Aussage !

Gegenbeispiel: Zweifache Münzwurf, mit $A = \{KK\}$, $B = \{KK, ZZ\}$, $C = \{KK, ZK\}$ und $P(KK) = \frac{1}{3}$, $P(ZK) = 0$, $P(ZZ) = \frac{1}{3}$ (zweiter Wurf gezinkt)

also $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(C) = \frac{1}{3}$

$$P(A \cap B | C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\{KK\})}{P(\{KK, ZK\})} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

$$P(A|C) \cdot P(B|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \cdot \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\{KK\})}{P(\{KK, ZK\})} \cdot \frac{P(\{KK\})}{P(\{KK, ZK\})} = 1 \cdot 1 = 1 \ \checkmark$$

$\Rightarrow P(A \cap B) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(B)$

$\Leftrightarrow P(\{KK\}) = 1/3 \cdot 2/3$

$\Leftrightarrow 1/3 \neq 1/3 \cdot 2/3 = 2/9$ $\Longrightarrow$ Obwohl die vorausgesetzte Gleichung gilt, sind A und B abhängig voneinander!

Anderes Gegenbeispiel:

Falsch, denn die Formel besagt, dass A und B „bedingt unabhängig gegeben C" (Ag. 3) ist, also nur unabhängig, wenn C gegeben ist.

Gegenbeispiel: 2x Münzwurf. Vor dem Werfen wählt man eine „normale" oder gezinkte Münze ($P(\text{Kopf}) = 0{,}75$)

A = „erster Wurf Kopf"; B = „zweiter Wurf Kopf"; C = „reguläre Münze ausgewählt"

Somit $P(A|C) = P(B|C) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A|C^c) = P(B|C^c) = 0{,}75$

Offensichtlich sind A und B unabhängig, wenn C

$\Leftrightarrow P(A \cap B | C) = P(\{KK\} | C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(A|C) \cdot P(B|C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ✓

Allerdings sind A und B nicht unabhängig, wenn C nicht gegeben ist:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) \underset{\text{Totale W'keit}}{=} P(A \cap B | C) \cdot P(C) + P(A \cap B | C^c) \cdot P(C^c)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{9}{32} = \frac{13}{32}$$

$$P(A) \underset{\text{totale W'keit}}{=} P(A|C) \cdot P(C) + P(A|C^c) \cdot P(C^c)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(B) = P(B|C) \cdot P(C) + P(B|C^c) \cdot P(C^c)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{8}$$

$\Leftrightarrow \frac{13}{32} \neq \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$ $\Rightarrow$ A und B nicht unabhängig

4d) $\Rightarrow$ Falsche Aussage !

- Gegenbsp: 2 × Münzwurf: $A = \{ZZ, ZK\}$, $B = \{ZZ, KK\}$ mit $P_1(\{\omega\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

d.h.: $P_1(A) = P_1(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\rceil$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Leftrightarrow P(\{ZZ\}) = P(A) \cdot P(B)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ A, B bzgl. P_1 unabhängig

Sei $P_2(\{ZZ\}) = P_2(\{ZZ\} = P_2(\{KK\}) = \frac{1}{8}$ und $P_2(\{ZK\}) = \frac{1}{2}$, also $P_2(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ und $P_2(B) = \frac{2}{8}$

$\to P(\{ZZ\}) = \frac{1}{8} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$ $\Rightarrow$ A, B bzgl. P_2 nicht unabhängig