AuB: 3.Hausaufgabe(15.11.23) - Cora Zeitler

Freitag, 10. November 2023 17:02

Formale Grammatiken

s1.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

Wir betrachten die in der Vorlesung definierte Typ-1-Grammatik $G_2 = (N,\ T,\ S,\ P)$ mit

- $N = \{S, S', A, B\}$
- $T = \{a, b, c\}$

$P = \{S \xrightarrow{1} \lambda,\ S \xrightarrow{2} S',\ S' \xrightarrow{3} abc,\ S' \xrightarrow{4} aAbc,$
$Ab \xrightarrow{5} bA,\ Ac \xrightarrow{6} Bbcc,$
$bB \xrightarrow{7} Bb,\ aB \xrightarrow{8} aa,\ aB \xrightarrow{9} aaA\}.$

Beweisen Sie formal durch vollständige Induktion:
Die von G_2 erzeugte Sprache ist

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \in I\!N\}.$$

1) Indanfang: $n = 0$: $a^0 b^0 c^0$

→ das dadurch erzeugte Wort ist λ ✓

→ ist durch Regel $S \to \lambda$ erfüllt ✓ ✓

$n = 1$: $a^1 b^1 c^1 = abc$

→ ist durch Regel $S \to S'$, $S' \to abc$ erfüllt ✓ ✓

Induktionsvorraussetzung

$n = k$, G_2 erzeugt ein Wort für ein beliebiges aber festes k

→ $w = a^k b^k c^k \in L(G)$ ✓

Induktionsbehauptung:

$n = k+1$, $w = a^{k+1} b^{k+1} c^{k+1} \in L(G)$ ✓

→ muss auch von G_2 erzeugt werden können

Induktionsbeweis:

zu zeigen: $a^{k+1} b^{k+1} c^{k+1} \in L(G)$

→ Ableiten in mehreren Schritten

$S \overset{2}{\Rightarrow} S' \overset{3}{\Rightarrow} abc$

$S \overset{2}{\Rightarrow} S' \overset{4}{\Rightarrow} aAbc$ ⤵ wir wissen $aAbc$ erzeugt Wörter der Form $a^k b^k c^k$ (IV)

⤵ Damit ist auch $\{a^k A b^k c^k\} \in L(G)$ ✓

$a^k \underline{Ab^k} c^k \overset{5^k}{\Longrightarrow} a^k b^k \underline{A\, c}^k$ (v) (k mal)

$\overset{6}{\Rightarrow} a^k b^k B b c^k c$ ✓

keine Ableitung $\Rightarrow a^k \underline{b^k B} b c^{k+1}$

$\overset{7^k}{\Longrightarrow} a^k B b^k b\, c^{k+1}$ ✓

$\Rightarrow \underline{a^k B}\, b^{k+1} c^{k+1}$ (∗)

$\overset{8}{\Rightarrow} a^k a\, b^{k+1}\, c^{k+1}$ ✓

$\Rightarrow a^{k+1} b^{k+1} c^{k+1}$ // Ind.behauptung fertig :)

■

→ weiterführen (∗)

$\ldots, \Rightarrow a^k B b^{k+1} c^{k+1}$

9

$\ldots \Rightarrow a^k B b^{k+1} c^{k+1}$

$\overset{9}{\Rightarrow} a^k a A b^{k+1} c^{k+1}$

$\Rightarrow a^{k+1} A b b^k c^{k+1}$

$\overset{5}{\Rightarrow} a^{k+1} b^k \underline{A b}^k c^{k+1}$

$\overset{5}{\Rightarrow} a^{k+1} b^k b A c^{k+1}$

$\Rightarrow a^{k+1} b^k b \underline{A c} c^k$

$\overset{6}{\Rightarrow} a^{k+1} b^k \underline{b B} b^k c c^{k+1}$

$\overset{7}{\Rightarrow} a^{k+1} b B b b^k c c^{k+1}$

$\Rightarrow a^{k+1} \underline{b B} b^{k+1} c c^{k+1}$

$\overset{7}{\Rightarrow} a^{k+1} B b b^{k+1} c c^{k+1}$

$\Rightarrow a^k \underline{a B} b b^{k+1} c c^{k+1}$ oder $\overset{9}{\Rightarrow} a^k a a A b^{k+2} c^{k+2} \Rightarrow$ analog

$\overset{8}{\Rightarrow} a^k a a b b^{k+1} c c^{k+1}$

$\Rightarrow a^{k+2} b^{k+2} c^{k+2}$ (✓)

→ durch Regel 9 wird kommen solange a, b und c hinzu, bis man mit Regel 8 beendet

→ d.h. man kann n male erweitern, also $a^{k+n} b^{k+n} c^{k+n} \mid n \in \mathbb{N}$

→ somit kann man auch sagen $a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}$ ■ ✓

12/12 :)