

Diskrete Strukturen 2 (Jörg Vogel) - SS 2017

- Bearbeitungszeit: 90 Minuten
- zugelassene Hilfsmittel: keine
- jeweils drei Aufgaben aus den beiden Teilgebieten Graphen und Kombinatorik, wovon jeweils zwei zu bearbeiten waren

Aufgabengebiet Graphen

G1) Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph.

- Beantworten Sie die folgende Frage: Wie kann man aus einer Kantenfolge zwischen zwei Knoten u und v von G einen Weg zwischen u und v erhalten? (Was heißt „Weg“ bzw. „Kantenfolge“?)
- Folgende zweistellige Relation \sim_G über der Menge V ist definiert durch:
 $u \sim_G v \leftrightarrow_{\text{df}} \text{es gibt in } G \text{ einen Weg zwischen } u \text{ und } v \text{ (einen } u - v \text{ - Weg).}$
Beweisen Sie \sim_G ist eine Äquivalenzrelation.
- Wie viele verschiedene Wege der Länge k gibt es zwischen zwei beliebigen Knoten des vollständigen Graphen K_n ?

G2) G^c bezeichnet den Komplementärgraphen eines einfachen Graphen G .

- Beweisen Sie: Wenn G nicht zusammenhängend ist, dann ist G^c zusammenhängend.
- Beweisen Sie, dass für jeden (einfachen) Graphen G mit sechs Knoten gilt: G oder G^c enthält einen K_3 als Untergraph.
- Beweisen Sie, dass jeder selbstkomplementäre Graph entweder $4n$ oder $4n + 1$ Knoten hat. (Dabei ist n eine geeignete natürliche Zahl.)

G3)

- Beweisen Sie: Jeder einfache Graph G mit $2n$ Knoten ($n \geq 1$) und dem minimalen Knotengrad $\delta(G) = n$ ist zusammenhängend.
- Beweisen Sie: Wenn G ein einfacher zusammenhängender Graph mit n Knoten und $n - 1$ Kanten ist, dann ist G ein Baum.

Aufgabengebiet Kombinatorik

K1) Es Sei $\mathcal{D} = \{A, B, C, \dots, X, Y, Z\}$ die Menge der 26 Buchstaben des Alphabets. Ein „Wort der Länge r “ ist eine geordnete Folge von r Buchstaben aus \mathcal{D} . So ist ABBAC ein Wort der Länge 5.

- a) Wie viele Wörter der Länge 5 beginnen und enden mit einem Vokal (A, E, I, O, U) ?
- b) Wie viele Wörter der Länge 5 haben lauter verschiedene Buchstaben und genau zwei Vokale?
- c) Wie viele Wörter der Länge 5 haben genau zwei Buchstaben - einen Vokal und einen Konsonanten?
- d) Wie viele Wörter der Länge 5 haben genau 5 verschiedene Buchstaben?
- e) Bei wie vielen Wörtern der Länge 5, die aus fünf verschiedenen Buchstaben bestehen, stehen die vorkommenden Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge?
- f) Bei wie vielen Wörtern der Länge 5 stehen die vorkommenden Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge?

K2) Beweisen Sie die folgenden Beziehungen für Binomialkoeffizienten.
(Hinweis: Gehen Sie sorgsam mit den Indizes um.)

- a) $\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = 2^m \cdot \binom{n}{m}$
- b) $\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$
- c) $\sum_{k=0}^n k^2 \cdot \binom{n}{k} = n \cdot (n+1) \cdot 2^{n-2}$

K3) Auf wie viele Weisen lassen sie die Zahlen 1 bis 9 hintereinander schreiben, ...

- a) ohne weitere Einschränkungen?
- b) so dass alle geraden Zahlen auf ihren „natürlichen“ Plätzen stehen?
- c) so dass keine gerade Zahl an ihrem „natürlichen“ Platz steht?
- d) so dass alle ungeraden Zahlen auf ihren „natürlichen“ Plätzen stehen?
- e) so dass keine ungerade Zahl auf ihrem „natürlichen“ Platz steht?