Sto: 4.Hausaufgabe(15.11.23)-Till Billerbeck(G3), Cora Zeitler(G1)

Mittwoch, 8. November 2023 11:01

Aufgabe 5 **(2 Punkte)**

Richtig oder falsch? *Korrekte Antworten geben einen Punkt, inkorrekte einen Minuspunkt. Die minimale Punktzahl ist trotzdem 0.*

a) Sei $\mathcal{A}$ eine Ereignismenge über $\Omega \neq \varnothing$ und Ω unendlich. Dann ist auch $\mathcal{A}$ unendlich.

b) Es sei $\mathcal{A}$ eine Ereignismenge über $\Omega \neq \varnothing$, Ω abzählbar und P_1, P_2 zwei Wahrscheinlichkeitsmaße mit $P_1(\{\omega\}) = P_2(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann ist $P_1 = P_2$.

5a) $\Rightarrow$ falsche Aussage

5b) $\Rightarrow$ wahre Aussage (Bsp. 3.3. im Skript)

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer Ereignismenge $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: für alle $A, B, C \in \mathcal{A}$ gilt

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Satz 3.2 (Eigenschaften von WM). *Sei $\mathcal{A}$ eine EM über $\Omega \neq \emptyset$ und $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (W1) und (W2). Dann gilt:*

(1) $P(\emptyset) = 0$,

(2) Sind A und B disjunkte Ereignisse in $\mathcal{A}$, dann gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad \text{(endliche Additivität)}$$

(3) Monotonie:

$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B),$$

(4) $P(A^c) = 1 - P(A)$,

(5) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$,

(6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(7) Sub-Additivität: Sind A und B beliebige Ereignisse, so gilt

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B),$$

und für beliebige Folgen von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

4) Wir benutzen Satz 3.2. aus der Vorlesung / Skript

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup (B \cup C)) \\
&= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) && \text{// (6)} \\
&= P(A) + P(B \cup C) - P((A \cap B) \cup P(A \cap C)) && \text{// Distributivität} \\
&= P(A) + P(B \cup C) - \big(P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C))\big) && \text{// (6)} \\
&= P(A) + P(B \cup C) - \big(P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)\big) && \text{// durch Assoziativität: } (A \cap B \cap C) = ((A \cap B) \cap (A \cap C)) \\
&= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) && \text{// Vorzeichen umgekehrt durch Klammer auflösen} \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) && \text{// (6)} \\
&= \underline{\underline{P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}} && \text{// Kommutativität}
\end{aligned}$$