DS1: Geraden in einer Ebene

Sonntag, 19. Februar 2023 06:13

Geraden in der Ebene

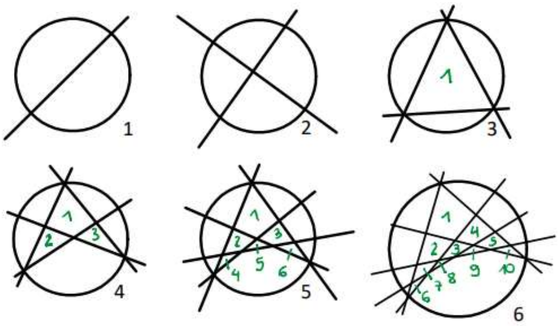
s2.) *Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe*
Manche Gebiete der Ebene, die durch n Geraden definiert werden, sind beschränkt (d.h. sie sind endlich), andere sind unbeschränkt (d.h. sie sind unendlich).
Bestimmen Sie die maximale Anzahl von beschränkten Gebieten **B(n)**, die durch **n** Geraden definiert werden, auf die folgende Weise:

a) Bestimmen Sie für kleine Beispiele für n entsprechende Werte $B(n)$.

b) Finden Sie ein Rekursionsschema (**1**). Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Ausgehend von Ihrem Rekursionsschema (**1**) finden Sie eine geschlossene Formel (**2**) für $B(n)$ und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

2) a) kleine Bsp:



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(n)	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36

+0 +1 +2 +3

b) $B(0) = 0$
$B(1) = 0$

$\boxed{B(n) = B(n-1) + n - 2}$ (1)

Bsp: $B(4) = B(4-1) + 4 - 2$
$= B(3) + 2$
$3 = 1 + 2$
$3 = 3$

→ erst nach 3 geschnittenen Geraden entsteht ein Gebiet

→ somit sind es immer 2 Felder weniger, weil Gebiete außerhalb zählen nicht (= unbeschränkte Gebiete)

→ bei jeder neuen n-ten Gerade entsteht n-2 neue beschränkte Gebiete

→ jede neue n-te Gerade wird in n-Teile durch die vorherige Gerade geteilt

↳ Das gilt, wenn sich in einem Punkt höchstens 2 Geraden schneiden und wenn es keine Parallelen gibt

c) 1 2 3 4 5 6
0 0 1 3 6 10
+1

→ erster Übergang bei 2 (i=2)

$$\sum_{i=2}^{n} (i-2) + 0$$

$$B(n) = \sum_{i=2}^{n} (i-2)$$

→ Gausche Summenformel fängt bei 0 an
→ auf 0 bringen

$$= \sum_{i=2-2}^{n-2} (i-2-2) = \sum_{i=0}^{n-2} (i)$$

→ Gausche Summenform: $\sum_{i=0}^{k} (i) = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$

$$= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \text{(Allgemeine Formel)}$$

$$= \frac{(n-2) \cdot ((n-2)+1)}{2}$$

$$= \frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n - 2n + 2}{2}$$

$$\boxed{B(n) = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}} \quad (2)$$

Bsp: $B(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0 + 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$B(1) = \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 2}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$B(2) = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 2}{2} = \frac{0}{2} = 0$

⋮

Beweis durch vollständige Induktion:

Indanf: $n = 1$ $\Rightarrow B(1) = \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 2}{2}$

$$\underline{0 = 0}$$

Indvor: $n = k$ für $k > 0$

$$\Rightarrow \underline{B(k)} = \frac{k^2 - 3k + 2}{2}$$

Indbeh: $n = k+1$ $\Rightarrow B(k+1) = \frac{(k+1)^2 - 3(k+1) + 2}{2}$

Ind.beweis: $B(n) = B(n-1) + n - 2$

$$\begin{aligned}
B(k+1) &= B((k+1)-1) + (k+1) - 2 \\
&= \underline{B(k)} + (k-1) \\
&\overset{IV}{=} \frac{k^2 - 3k + 2}{2} + (k-1) \\
&= \frac{k^2 - 3k + 2}{2} + \frac{2k - 2}{2} \\
&= \frac{k^2 + 2k + 1 + 1 - 3k - 2}{2} \\
&= \frac{(k+1)^2 - 3k - 1 + 0}{2} \\
&= \frac{(k+1)^2 - 3k - 1 + 2 - 2}{2} \\
&= \frac{(k+1)^2 - 3k - 3 + 2}{2}
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{B(k+1) = \frac{(k+1)^2 - 3(k+1) + 2}{2}}} \qquad \blacksquare$$