AuB: 2.Übung (14.11.23)

Dienstag, 14. November 2023 10:26

Alphabete, Wörter, Sprachen

s1.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

a) Es seien $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ drei Sprachen über einem Alphabet Σ. Beweisen Sie: $L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) \subseteq L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3$

b) Es seien L_1, L_2, L_3 Sprachen über dem Alphabet $\{|\}$. Gilt $L_1(L_2 \cap L_3) = L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3$?

c) Es seien $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2, L_3 \subseteq \Sigma_2^*$ und $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Gilt $L_1(L_2 \cap L_3) = L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3$?

// $L_1 \circ (L_2 \cup L_3) = L_1 \circ L_2 \cup L_1 \circ L_3$

// $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\} = \{n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{N}_+ = \{1,2,\ldots\} = \{n \mid n > 0\}$

1a) $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ $\quad L_1 \circ (L_2 \cap L_3) \subseteq L_1 \circ L_2 \cap L_1 \circ L_3$

Beweis: $w \in L_1 \circ (L_2 \cap L_3)$

$\leftrightarrow \bigvee_{u \in \Sigma^*} \bigvee_{v \in \Sigma^*} (u \in L_1 \wedge v \in L_2 \cap L_3 \wedge w = uv)$

$\leftrightarrow \bigvee_{u \in \Sigma^*} \bigvee_{v \in \Sigma^*} (u \in L_1 \wedge (v \in L_2 \wedge (v \in L_2 \wedge v \in L_3) \wedge w = uv)$

$\leftrightarrow \bigvee_{u \in \Sigma^*} \bigvee_{v \in \Sigma^*} ((u \in L_1 \wedge v \in L_2 \wedge w = uv) \wedge (u \in L_1 \wedge v \in L_3 \wedge w = uv))$

$\rightarrow \bigvee_{u \in \Sigma^*} \bigvee_{v \in \Sigma^*} (u \in L_1 \wedge v \in L_2 \wedge w = uv) \wedge \bigvee_{u \in \Sigma^*} \bigvee_{v \in \Sigma^*} (u \in L_1 \wedge v \in L_3 \overset{?}{=} w = uv)$

$\leftrightarrow w \in L_1 \circ L_2 \wedge w \in L_1 \circ L_3$

$\rightarrow w \in L_1 \circ L_2 \cap L_1 \circ L_3$ $\blacksquare$

Frage: $L_1 \circ L_2 \cap L_1 \circ L_3 \subseteq L_1 \cap (L_2 \circ L_3)$?

Antwort: NEIN ! → mit Gegenbeispielen

1b) $\Sigma = \{|\} = \Sigma_{\text{unär}}$ / $un(5) = ||||| = |^5$, $un(2) = || = |^2$ / $(ab)^2 = abab$, $w^2 = ww$

Wie finde ich ein Gegenbsp? Idee: $L_2 \cap L_3 = \emptyset$ (sind disjunkt)

dann: $L_1 \circ (L_2 \cap L_3) = \emptyset$

1. Ansatz: $L_2 = \{|\}$, $L_3 = \{||\}$, $L_1\{\lambda, |\}$

$\Rightarrow L_1 \circ L_2 = \{|, ||\}$, $L_1 \circ L_3 = \{||, |||\}$ $\blacksquare$ → minimalistisches Gegenbeispiel

2. Ansatz: $L_2' = \{|^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $L_3' = \{|^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L_2' \cup L_3' = \{|\}^*$
$L_2' \cap L_3' = \emptyset$
| $L_1 = \{\lambda, |\}$ (wie oben)

$\rightarrow L_1 \circ L_2' = L_2' \cup (L_3' \setminus \{\lambda\}) = \{|\}^* \setminus \{\lambda\} = \{|\}^+$

$L_1 \circ L_3' = L_3' \cup L_2' = \{|\}^* \Rightarrow L_1' \circ L_2' \cap L_1' \circ L_3' = \{|\}^+$

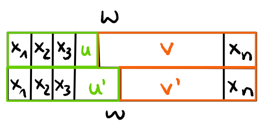
1c) $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$, $L_2, L_3 \subseteq \Sigma_2^*$ mit $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$

Gilt: $L_1 \circ L_2 \cap L_1 \circ L_3 \subseteq L_1 \circ (L_2 \cap L_3)$?

1a) ist bewiesen, deswegen nehmen wir $\subseteq$ als Ansatz

$w \in L_1 \circ L_2 \wedge L_1 \circ L_3 \leftrightarrow w \in L_1 \circ L_2 \wedge w \in L_1 \circ L_3$

$\leftrightarrow \bigvee_{u \in \Sigma_1^*} \bigvee_{v \in \Sigma_2^*} (u \in L_1 \wedge v \in L_2 \wedge w = uv) \wedge \bigvee_{u' \in \Sigma_1^*} \bigvee_{v' \in \Sigma_2^*} (u' \in L_1 \wedge v' \in L_3 \wedge w = u'v')$



Es gilt: u ist Präfix von w
u' ist Präfix von w
| Also ist u Präfix von u'
oder u' Präfix von u
Ziel: $|u| = |u'|$
| indirekt: Arg. $|u| < |u'|$
→ Der 1 Buchstabe nach u gehört einerseits zu v ("orange") und andererseits zu u' ("grün")

Wir wissen also: $|u| = |u'|$ $\Rightarrow u = u'$

Das bedeutet: $w = uv = u'v = uv'$ $\Rightarrow v = v'$

$\Rightarrow v \in L_3 \Rightarrow v \in L_2 \cap L_3$

$\Rightarrow w \in L_1 \circ (L_2 \cap L_3)$ $\blacksquare$

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

Für diese Aufgabe legen wir das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ zu Grunde.
Beweisen Sie induktiv:
Für jedes Wort $w \in \Sigma$ gilt: $aw \neq wb$.

2) $\Sigma = \{a, b\}$, $w = \{a, b\}$

per Wortinduktion $\boxed{aw \neq wb}$

IA: $w = \lambda$, $|w| = 0$

IS: IV: Für $w \in \{a,b\}^*$ mit $|w| = k$ gilt: $\boxed{aw \neq wb}$

IBeh: Für $x \in \{a, b\}$ gilt: $\boxed{a(wx) \neq (wx)b}$

Ind.beweis: Variante 1: direkter Beweis mit Fallunterscheidung

1.Fall: $x = a$, dann $a(wa) \neq (wa)b$ → weil letzen Buchst. sind verschieden

2.Fall: $x = b$, dann $a(wb) \neq (wb)b$

$\Rightarrow (aw)b \neq (wb)b$ → Ind.vorrausetzung

Variante 2: indirekter Beweis

Angen.: $a(wx) =$

D.h.: $awx = wxb$

$\Rightarrow x = b \Rightarrow awb = wbb$

$\Rightarrow aw = wb$ ↯ wiederspruch IV