AK-2021

Mittwoch, 20. Juli 2022 23:13

Merke!

$$\left| \begin{array}{l} n! = n \cdot (n-1)! \\ \downarrow r! = r \cdot (r-1)! \end{array} \right.$$

1. Aufgabe

Beweisen Sie die folgenden Beziehungen für **Binomialkoeffizienten**:

a) $\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$ $\qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

b) $\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = 2^m \cdot \binom{n}{m}$

c) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ (für $n > 0, r > 0$)

d) $\sum_{r=0}^{m} \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+m}{m}$ (für $n > 0$)

a) $\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$ $\quad / \quad \downarrow \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{(n-k)!}{((n-k)-(m-k))! \cdot (m-k)!}$

$$= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-m)! \cdot (m-k)!}$$

$$\downarrow \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot \cancel{m!}} \cdot \frac{\cancel{m!}}{(m-k)! \cdot k!}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)! \cdot (m-k)! \cdot k!} \quad / \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-m)! \cdot (m-k)!} \quad \blacksquare$$

b) $\sum_{k=0}^{m} \underbrace{\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}}_{} = 2^m \cdot \binom{n}{m}$ $\qquad$ Merke: $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m$

wie in Aufg. (a) $\downarrow$ einsetzen

verändert sich nicht

$$\downarrow \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\binom{n}{m}}_{\text{wie Konstante}} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \quad / \downarrow \text{Merke}$$

$$= 2^m \cdot \binom{n}{m} \quad \blacksquare$$

c) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ (für $n > 0, r > 0$) $\quad / \quad x! = x \cdot (x-1)!$

$$\downarrow \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(n-1-r+1)! \cdot (r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-r)! \cdot r!}$$

/ linke Seite erweitern mit $\cdot \frac{r}{r}$, rechte Seite erweitern mit $\frac{(n-r)}{(n-r)}$

$$= \frac{(n-1)! \cdot r}{(n-r)! \cdot (r-1)! \cdot r} + \frac{(n-1)! \cdot (n-r)}{(n-1-r)! \cdot r! \cdot (n-r)} \quad / \rightarrow (n-r) \cdot ((n-r)-1)! = (n-r)!$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot r}{(n-r)! \cdot r!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-r)}{(n-r)! \cdot r!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot r + (n-1)! \cdot (n-r)}{(n-r)! \cdot r!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (\cancel{r} + n - \cancel{r})}{(n-r)! \cdot r!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \binom{n}{r} \quad \blacksquare$$

d) $\sum_{r=0}^{m} \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+m}{m}$ (für $n > 0$)

Indanf: $m = 1$

$$\binom{n+m}{m} = \binom{n+1}{1} = n+1$$

$$\downarrow \sum_{r=0}^{m} \binom{n+r-1}{r} = \sum_{r=0}^{1} \binom{n+0-1}{0}$$

$$= \binom{n-1}{0} + \binom{n+1-1}{1}$$

$$= 1 + n$$

Indvor: $m = k$

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+k}{k}$$

Indbeh: $m = k+1$

$$\sum_{r=0}^{k+1} \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+k+1}{k+1}$$

Ind.beweis:

$$\sum_{r=0}^{k+1} \binom{n+r-1}{r} = \sum_{r=0}^{k} \binom{n+r-1}{r} + \binom{n+k+1-1}{k+1} \quad / \rightarrow \text{Ind.vor. einsetzen}$$

↗ Summenregel

$$= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k+1} \quad / \rightarrow \text{analog zu c)}$$

$$= \binom{n+k+1}{} \quad / \rightarrow \text{Ind.beh.}$$

$$= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k+1} \qquad \Big/ \rightarrow \text{analog zu c)}$$

$$= \binom{n+k+1}{k+1} \qquad \Big/ \rightarrow \text{Ind.beh.}$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1} \binom{n+r-1}{r}$$

2. Aufgabe

a) Wie viele Lösungen im Bereich der natürlichen Zahlen hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 23$?

b) Für wie viele dieser Lösungen gilt zusätzlich $x_i \leq 6$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

c) Wie viele Wurfbilder mit der Augenzahl 24 gibt es bei fünf verschiedenfarbigen Würfeln?

a) - es gibt 5 Bereiche, d.h. es gibt $5 - 1 = 4$ Trennstriche

$\downarrow$ n = Summe
k = Bereiche $\downarrow$ $k-1$ Trennstriche

- es sind natürliche Zahlen mit Null, d.h. Trennstriche können auch nebeneinander oder am Ende oder Anfang stehen
- es gibt $n+k-1$ Möglichkeiten Trennstriche zu setzen

$$\downarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{23+5-1}{5-1} = \underline{\underline{\binom{27}{4}}}$$

b) Lösen mit Inklusion-Exklusion-Prinzip!
$\rightarrow$ Fälle unterscheiden bei $x_i \leq 6$

0. Fall: für alle Möglichkeiten

1. Fall: für ein $x \geq 7$ $\downarrow$

$$x \geq 7 \quad /-7$$
$$x-7 \geq 7-7$$
$$x-7 \geq 0 \quad = y$$
$$\downarrow x_1 = y+7$$

$$\downarrow \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 23$$
$$y+7 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 23 \quad /-7$$
$$y + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16$$
$$\downarrow \binom{16+5-1}{5-1} = \binom{20}{4} \qquad \text{oder: } \binom{27-7}{4} = \binom{20}{4}$$

↳ weil ein für ein x eingesetzt wird: $\binom{5}{1}$

↳ $\binom{5}{1} \cdot \binom{20}{4}$

$\Rightarrow$ analog zu anderen Fällen

2. Fall: für zwei $x \geq 7$

$$\binom{20-7}{4} \cdot \binom{5}{2} = \binom{13}{4} \cdot \binom{5}{2}$$

3. Fall: für drei $x \geq 7$

$$\binom{13-7}{4} \cdot \binom{5}{3} = \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{3}$$

4. Fall und 5. Fall sind ungültig weil es nicht mehr $x \geq 7$ geben kann ohne über die Summe 23 zu kommen.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 23$$
$$\text{(4.Fall)} \; 7 + 7 + 7 + 7 = 28 \quad \downarrow \; 28 \neq 23$$
$$\text{(5.Fall)} \; 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35 \quad \downarrow \; 35 \neq 23$$

$$\Rightarrow \text{Ergebniss: } \underline{\binom{27}{4} - \binom{20}{4} \cdot \binom{5}{1} + \binom{13}{4} \cdot \binom{5}{2} - \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{3} + 0 - 0}$$

c) $n = 24$
würfel mit 6 Flächen: $x_i \leq 6$
5 vers. farbige Würfel: $i \in \{1, 2, 3, 4, 5)$

↳ analog wie bei b) $\rightarrow$ es gibt 5 Bereiche (k) und
$\rightarrow$ $k-1$ Trennstriche $(=4)$

0.F

$\rightarrow$ insgesamt: $\binom{24+4}{4} = \binom{28}{4} = \binom{28-5}{4} = \binom{23}{4}$ ← wegen keiner

↳ jz immer -6, weil es keine 0 gibt (anstatt $+7$, wie in b))

$$\downarrow \underline{\binom{23}{4} - \binom{17}{4} \cdot \binom{5}{1} + \binom{11}{4} \cdot \binom{5}{2} - \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{3} + 0 - 0}$$

1.) a) Wie viele positive ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$? → ohne 0

b) Für wie viele dieser Lösungen gilt zusätzlich $x_i \leq 6$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

c) Wie viele Wurfbilder mit der Augenzahl 18 gibt es bei vier verschiedenfarbigen Würfeln?

1)a) - allgemeine Herleitung + Variablen einsetzen:

→ $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n)$ → x = einzelne Bereiche
→ k = Anzahl der x (Trennlinien)
→ n = Ergebniss

→ je nach dem wie viel Bereiche x man hat, hat man k-1 Trennlinien und n-1 Lücken

↳ k Trennlinien auf n-1 Plätze : $\binom{n-1}{k-1}$

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{18-1}{4-1} = \binom{17}{3} = \frac{17!}{(17-3)! \cdot 3!}$$

$$= \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4080}{6}$$

= 680 Möglichkeiten

2.) a) Wie viele Lösungen im Bereich der positiven natürlichen Zahlen hat die Gleichung $a + b + c = 100$? → Natürliche Zahlen ohne Null

b) Wie viele Lösungen im Bereich der positiven natürlichen Zahlen hat die Gleichung $a_1 + a_2 \ldots + a_k = n$?

2)a) → wenn a fest ist (Bsp: a = 98)

→ 98 - 0 = 98 = a → es geht: b = 1, c = 1 → 1 Möglichkeit

→ 98 - 1 = 97 = a → es geht: b = 1, c = 2; b = 2, c = 1 → 2 Möglichkeiten

→ 98 - 2 = 96 = a → es geht: b = 1, c = 3; b = 2, c = 2; b = 3, c = 1 → 3 Möglichkeiten

bis: 98 - 97 = 1 = a → 98 Möglichkeiten

↳ es wird 98 mal aufsummiert von 1 bis 98

$$\sum_{i=1}^{98} (i) = 4851$$

a) andere Variante:

→ man hat 100 Zahlen, die man einzeln aufschreibt
→ man teilt es in 3 Bereiche auf → wegen a, b, c
→ daraus resultieren 2 Trennbereiche

↳ Bsp: $\underbrace{1\ 2\ 3}_{a} \mid \underbrace{4\ 5}_{b} \mid \underbrace{6\ 7\ 8\ 9}_{c}$

→ bei 100 Zahlen gibt es 99 Lücken (100-1)

↳ 2 Trennlinien bei 99 Zahlen (a | b | c) => $\binom{99}{2} = 4851$

b) von a) Allg: - n-1 Lücken
- k-1 Trennlinien

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n)$ → a = einzelne Bereiche
k = Trennlinien (wie viele Bereiche)

=> k Trennlinien auf n-1 Plätze = $\binom{n-1}{k-1}$