DS1: Fibonacci - Aufgaben

Sonntag, 19. Februar 2023 04:53

Aufgabe 2) Fibonacci

a) Geben die das vollständige Rekursionsschema der Fibonacci-Zahlen an.

b) Von diesem Schema ausgehend beweisen Sie durch vollständige Induktion über $m \geq 1$ (mit Indunktionsanfang, Induktionsschritt usw.) die folgende Gleichung:

$$f_{n+m} = f_{m+1} \cdot f_n + f_m \cdot f_{n-1}$$

c) Benutzen Sie diese, um folgende Gleichung herzuleiten:

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$$

f(n)	0	1	2	3	4	5	6	7
n	0	1	1	2	3	5	8	13

0+1 1+1 1+2 2+3 . . .

2) a) $f_1 = 1$

$f_2 = 1$

$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad$, für $n \geq 1$

b) ggf: $f_{n+m} = f_{m+1} \cdot f_n + f_m \cdot f_{n-1} \quad$, mit $m \geq 1$

IA: $m = 1 \quad , \quad m \in \mathbb{N}$

$\rightsquigarrow f_{n+1} = f_{1+1} \cdot f_n + f_1 \cdot f_{n-1}$

$f_{n+1} = f_2 \cdot f_n + f_1 \cdot f_{n-1}$

$f_{n+1} = 1 \cdot f_n + 1 \cdot f_{n-1}$

$\underline{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}$ ∎

$m=2$

$\rightsquigarrow f_{n+2} = f_{2+1} \cdot f_n + f_2 \cdot f_{n-1}$

$= f_3 \cdot f_n + f_2 \cdot f_{n-1}$

$= 2 \cdot f_n + 1 \cdot f_{n-1}$

$= f_n + \underbrace{f_n} + f_{n-1}$ ‖ Notiz

$= f_n + (f_{n+1} - \cancel{f_{n-1}}) + \cancel{f_{n-1}}$

$\underline{f_{n+2} = f_{n+1} + f_n}$ ∎

$m=3$

$\rightsquigarrow f_{n+3} = f_{3+1} \cdot f_n + f_3 \cdot f_{n-1}$

$= f_4 \cdot f_n + f_3 \cdot f_{n-1}$

$= 3 \cdot f_n + 2 \cdot f_{n-1}$

$= f_n + f_n + f_n + f_{n-1} + f_{n-1}$ ‖ Notiz

$= f_n + \cancel{f_n} + (f_{n+1} - \cancel{f_{n-1}}) + (f_{n+1} - \cancel{f_n}) + \cancel{f_{n-1}}$

$= f_n + \underline{f_{n+1} + f_{n+1}}$

$f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1}$

IV: $m = k \quad \rightsquigarrow f_{n+k} = f_{k+1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1}$

$m = k-1 \quad \rightsquigarrow f_{n+k-1} = f_{k-1+1} \cdot f_n + f_{k-1} \cdot f_{n-1}$

$f_{n+k-1} = f_k \cdot f_n + f_{k-1} \cdot f_{n-1}$

IB: $m = k+1 \quad \rightsquigarrow f_{n+k+1} = f_{k+1+1} \cdot f_n + f_{k+1} \cdot f_{n-1}$

$\underline{f_{n+k+1}} = \underbrace{\underline{f_{k+2} \cdot f_n + f_{k+1} \cdot f_{n-1}}}_{\text{Ergebnis gesucht}}$

‖ $m = k \rightsquigarrow$ selbe wie in Vorraussetzung

Ind.beweis: $\underline{f_{n+k+1}} = f_{n+k} + f_{n+k-1}$

$\overset{(IV)}{=} (f_{k+1} \cdot f_n + f_k \cdot f_{n-1}) + (f_k \cdot f_n + f_{k-1} \cdot f_{n-1})$

$= f_n \cdot \underbrace{(f_{k+1} \cdot f_k)} + f_{n-1} \cdot (f_k + f_{k-1})$

$= f_n \cdot f_{k+2} + f_{n-1} \cdot f_{k+1}$

$\underline{f_{n+k+1} = f_{k+2} \cdot f_n + f_{k+1} \cdot f_{n-1}}$ ∎

c) $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$ herleiten

! Notiz: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad | - f_{n-1}^{①} \quad | - f_n^{②}$

① → $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$

② → $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$

→ $f_{2n} = f_{n+1} \cdot \underline{f_n} - \underline{f_n} \cdot f_{n-1}$

$= f_{n+1} \cdot (f_{n+1} - f_{n-1}) - (f_{n+1} - f_{n-1}) \cdot f_{n-1}$

$= f_{n+1}^2 - \cancel{f_{n+1}} \cdot \cancel{f_{n-1}} - f_{n-1}^2 + \cancel{f_{n-1}} \cdot \cancel{f_{n+1}}$

$\underline{\underline{f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2}}$ ∎

Fibonacci-Zahlen

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)* Beweisen Sie folgende Identität für die Fibonacci-Zahlen dadurch, dass Sie für die Werte $\mathbf{f_n}$ explizit die **Binet-Formel** einsetzen!

$$f_{2n} = f_n \cdot (f_{n+1} + f_{n-1}).$$

‖ $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} \quad \rightsquigarrow 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{2}} = 5^1$

‖ $x^n \cdot x^1 = x^{n+1} \quad , \quad x^n : x^2 = \frac{x^n}{x^2} = x^{n-2} \quad , \quad (x^a)^b = x^{a \cdot b} \rightarrow$ Bsp: $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$

Bsp: $\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2 \cdot 2 = 2^2 = 2^{5-3}$

s2) $f_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \quad$ mit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Beweis: $f_{2n} = f_n \cdot (f_{n+1} + f_{n-1}) \quad$ ‖ Binet einsetzen

$\rightsquigarrow \frac{\varphi^{2n} - \psi^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} \right)$

$= \frac{(\varphi^n - \psi^n) \cdot (\varphi^{n+1} - \psi^{n+1} + \varphi^{n-1} - \psi^{n-1})}{5}$

$= \frac{(\varphi^n \cdot \varphi^{n+1} - \varphi^n \cdot \psi^{n+1} + \varphi^n \cdot \varphi^{n-1} - \varphi^n \cdot \psi^{n-1}) - (\psi^n \cdot \varphi^{n+1} - \psi^n \cdot \psi^{n+1} + \psi^n \cdot \varphi^{n-1} - \psi^n \cdot \psi^{n-1})}{5}$

damit kein Bruchstrich mehr nötig

$= \frac{1}{5} \cdot (\varphi^{2n+1} - \varphi^n \cdot \psi^{n+1} + \varphi^{2n-1} - \varphi^n \cdot \psi^{n-1} - \psi^n \cdot \varphi^{n+1} + \psi^{2n+1} - \psi^n \cdot \varphi^{n-1} + \psi^{2n-1})$

$= \frac{1}{5} \cdot (\underbrace{\varphi^{2n+1} + \varphi^{2n-1}} + \underbrace{\psi^{2n+1} + \psi^{2n-1}} \underbrace{- \varphi^n \cdot \psi^{n+1} - \varphi^n \cdot \psi^{n-1} - \psi^n \cdot \varphi^{n+1} - \psi^n \cdot \varphi^{n-1}})$

$= \frac{1}{5} \cdot (\underbrace{\varphi^{2n} \cdot \varphi^1 + \varphi^{2n} \cdot \varphi^{-1}} \; \ldots\ldots$

$= \frac{1}{5} \cdot (\varphi^{2n} \cdot (\varphi^1 + \varphi^{-1}) + \psi^{2n} \cdot (\psi^1 + \psi^{-1}) - \varphi^n \cdot \psi^n \cdot (\psi^1 + \psi^{-1} + \varphi^1 + \varphi^{-1}))$ ‖ $\varphi^{-1} = -\psi \; , \; \psi^{-1} = -\varphi$

$= \frac{1}{5} \cdot (\varphi^{2n} \cdot (\varphi - \psi) + \psi^{2n} \cdot (\psi - \varphi) - \varphi^n \cdot \psi^n \cdot (\cancel{\psi} - \cancel{\varphi} + \cancel{\varphi} - \cancel{\psi}))$

$= \frac{1}{5} \cdot (\varphi^{2n} \cdot (\underline{\varphi - \psi}) + \psi^{2n} \cdot (\underline{\psi - \varphi}) - \varphi^n \cdot \psi^n \cdot 0)$

Einschub: $\varphi - \psi = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\cancel{1} + \sqrt{5} \cancel{-1} + \sqrt{5}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

$\psi - \varphi = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\cancel{1} - \sqrt{5} \cancel{-1} - \sqrt{5}}{2} = \frac{-2 \cdot \sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$

$= \frac{1}{5} \cdot (\varphi^{2n} \cdot \sqrt{5} + \psi^{2n} (-\sqrt{5}))$

$= \frac{\varphi^{2n} \cdot \sqrt{5} + \psi^{2n} \cdot (-\sqrt{5})}{5} \quad | \; 5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\varphi^{2n} \cdot \sqrt{5} + \psi^{2n} (-\sqrt{5}) \right)$$

$$= \frac{\varphi^{2n} \cdot \sqrt{5} + \psi^{2n} \cdot (-\sqrt{5})}{5} \qquad \Big|\ 5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$$

$$= \frac{\varphi^{2n} \cdot \cancel{\sqrt{5}} + \psi^{2n} \cdot (-\cancel{\sqrt{5}})}{\sqrt{5} \cdot \cancel{\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{\varphi^{2n} + \psi^{2n} \cdot (-1)}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\varphi^{2n} - \psi^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{2n} - \psi^{2n}}{\sqrt{5}} \qquad \blacksquare$$

„Gärtner Pötschke“

s1.) *Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe*
Gärtner Pötschke schneidet seine Bäume nach folgenden zwei Regeln:

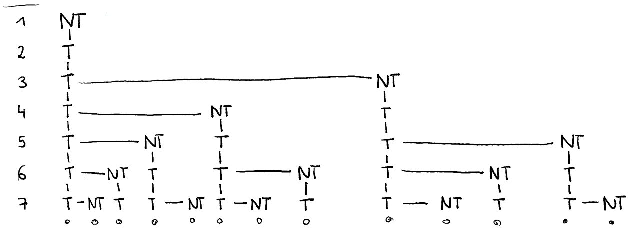
(G1) An allen neuen Trieben (NT) werden im ersten und zweiten Jahr alle Seitentriebe entfernt.

(G1) Vom dritten Jahr an wird jedem Trieb (T) in jedem Jahr genau ein neuer Trieb gelassen.

a) Illustrieren Sie die Situation für die Jahre $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ anhand einer graphischen Darstellung.

b) Finden Sie ein Rekursionsschema (**1**) und begründen Sie Ihre Aussage.

s.1) a)



$f_1 = 1$
$f_2 = 1$
$f_3 = 2$
$f_4 = 3$
$f_5 = 5$
$f_6 = 8$
$f_7 = 13$

↳

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

usw

b) (1): $f_1 = 1$

$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

↳ Begründung:
- $NT(n+2) = f(n)$ → alle, die vor 2 Jahren da waren, haben neue Triebe (die neuen des letzen Jahres noch nicht)
  → $f(n)$ = Anzahl der Triebe im n-ten Jahr
- $T(n+2) = f(n+1)$ → alle die das letzte Jahr da waren da waren, sind mind. 1 Jahr alt und damit T

↳ $f(n+2) = T(n+2) + NT(n+2)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(n+2) = f(n+1) + f(n)}}$$