4.Altkurzklausur - 2017

Mittwoch, 14. Juni 2023 13:16

1	Ermitteln Sie je eine Stammfunktion zu den Funktionen **(a)** $f(x) = \frac{4x-1}{x(2x+1)}$ **(b)** $g(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ // Subst. *Hinweis: Partialbruchzerlegung bzw. Substitution*	**2+2**

1b) $g(x) = \frac{\sin(x)}{1+(\cos(x))^2}$ // $u = \cos(x)$

$\frac{du}{dx} = u' = -\sin(x)$

$dx = \frac{du}{-\sin(x)}$

$\rightarrow \int \frac{\sin(x)}{1+u^2} \cdot dx$

$= \int \frac{\sin(x)}{1+u^2} \cdot \frac{du}{-\sin(x)}$

$= \int \frac{\cancel{\sin(x)}}{1+u^2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{\sin(x)}}\right) du$

$= \int -\frac{1}{1+u^2}$

$= -\int \frac{1}{1+u^2}$ | $\frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)$

$= -\arctan(u)$ // Rücksubst.

$= \underline{\underline{-\arctan(\cos(x))}}$

1a) $f(x) = \frac{4x-1}{x\cdot(2x+1)}$ // Nullstellen Nenner → gibt 2 NS → A, B

$\rightarrow \frac{4x-1}{x\cdot(2x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x+1}$ | $\cdot x \cdot (2x+1)$

$4x-1 = A\cdot(2x+1) + B\cdot x$

$= A\cdot 2x + A + Bx$

$4x-1 = x\cdot(2A+B) + A$ // Koeffizientenvergl.

→ Gleichungssystem: I $2A+B = 4$

II $\underline{\underline{A = -1}}$

II → I: $2\cdot(-1) + B = 4$

$-2 + B = 4$ | +2

$\underline{\underline{B = 6}}$

→ einsetzen: $\frac{A}{x} + \frac{B}{2x+1}$

$\frac{-1}{x} + \frac{6}{2x+1}$

↳ $\int -\frac{1}{x} + \frac{6}{2x+1} \, dx$

$= \int -\frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{2x+1} \, dx$

$= -\ln(x) + 6 \cdot \ln(2x+1) + c$

$= -\ln(|x|) + 6 \cdot \ln(|2x+1|) + c$

3	Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung für die Funktion $$f(x) = 2x^3 - 3x + 5$$ an der Stelle $x_0 = 2$.	2

3) ↳ $f(x) = 2x^3 - 3x + 5$

$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 3$ $\qquad f'(2) = 6 \cdot 2$

$f''(x) = 6 \cdot 2x - 0 = 12x$ $\qquad f''(2) =$

↳ mit $x_0 = 2$: $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 + 5 = 16 - 6 + 5 = 15$

$f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 3 = 24 - 3 = 21$

$f''(2) = 12 \cdot 2 = 24$

↳ einsetzen: $T_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2$

$= 15 + \frac{21}{1} \cdot (x-2)^1 + \frac{24}{2} \cdot (x-2)^2$

$= 15 + 21 \cdot (x-2) + 12 \cdot (x-2)^2$ } im OnlineRechner als Ergebnis

$= 15 + 21x - 42 + 12x^2 - 48$

$= 12x^2 + 21x - 90 + 15$

$= 12x^2 + 21x - 75$

2	(a)	Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_0^1 (x^3+5)e^x \, dx$.	3
	(b)	Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} x^n$.	1

2a) $\int_0^1 \underbrace{(x^3+5)}_{u}\underbrace{e^x}_{v'} \, dx$ // $u = x^3 + 5$ $\quad u' = 3x^2$; $v = e^x$ $\quad v' = e^x$

$$= u \cdot v - \int u' \cdot v$$

$$= (x^3+5) \cdot e^x - \int \underbrace{3x^2}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} \qquad // \quad u = 3x^2 \quad u' = 6x \quad v = e^x \quad v = e^x$$

$$= (x^3+5) \cdot e^x - \left(3x^2 \cdot e^x - \int \underbrace{6x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'}\right) \qquad // \quad u = 6x \quad u' = 6 \quad v' = e^x \quad v = e^x$$

$$= (x^3+5) \cdot e^x - (3x^2 \cdot e^x - (6x \cdot e^x - \int 6 \cdot e^x))$$

$$= (x^3+5) \cdot e^x - (3x^2 \cdot e^x - (6x \cdot e^x - (6 \cdot e^x)))$$

$$= \qquad - (\qquad - (\qquad - \qquad))$$

$$= \qquad - (\qquad - \qquad + \qquad)$$

$$= \left[(x^3+5) \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6 \cdot e^x\right]_0^1$$

$$= ((1^3+5) \cdot e^1 - 3 \cdot 1^2 \cdot e^1 + 6 \cdot 1 \cdot e^1 - 6 \cdot e^1) - ((0^3+5) \cdot e^0 - \cancel{3 \cdot 0 \cdot e^0} + \cancel{6 \cdot 0 \cdot e^0} - 6 \cdot e^0)$$

$$= 6e - 3e + \cancel{6e} - \cancel{6e} - (5 - 6)$$

$$= 3e - 5 + 6$$

$$= 3e + 1$$

2b) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2}{3^n}}_{a_n} \cdot \underbrace{x^n}_{x_0}$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{n^2}{3^n}}{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}$$

$$= \frac{n^2}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^2 \cdot \cancel{3^n} \cdot 3}{\cancel{3^n} \cdot (n+1)^2}$$

$$= 3 \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{n \cdot 1/n}{(n+1) \cdot \frac{1}{n}}\right)^2$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}\right)^2$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2$$

$$= 3$$