3.Altkurzklausur-2017

Dienstag, 23. Mai 2023 16:35

1	Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen, sofern diese existieren. **(a)** $f(x) = 3^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)},\ x \neq 0$ **(b)** $g(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}},\ x \neq 0$	1 + 1

$\sin \to \cos \to -\sin \to -\cos \to \sin$

1a) $f(x) = 3^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$ // $f(x) = a^{n(x)} \to f'(x) = \ln(a) \cdot a^{n(x)} \cdot n'(x) \to$ Ableitung von e-Fkt !

$f'(x) = \ln(3) \cdot 3^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \underbrace{\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (-x^{-2})\right)}_{\text{Kettenregel}}$

$= \ln(3) \cdot 3^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^{-2}$

1b) $g(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ // Kettenregel: $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ // e-Fkt-Ableitung

$g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}} \cdot \left([\text{crossed out}] \cdot -e^{-x^2} \cdot -2x \right)$

$= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}} \cdot \left(\cancel{1} \cdot e^{-x^2} \cdot 2x \right)$

$= \frac{e^{-x^2} \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2} \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}} = \frac{e^{-x^2} \cdot x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}$

2	**(a)** Ermitteln Sie den Grenzwert $$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln^2(x)}.$$	2
	(b) Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ der Funktion $$f(x) = x + e^x$$ im Punkt $y_0 = 1$ (also $x_0 = 0$).	1

// L'Hospital: ① $\frac{0}{0}$ ② $\frac{\infty}{\infty}$ ③ $0 \cdot \infty$ ④ 0^0 ⑤ ∞^0 ⑥ 1^∞ ⑦ $\infty - \infty$

2a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln^2(x)}$ ↳ $\frac{\infty}{\infty}$ ↳ L'Hospital: $\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(x)}{h'(x)}$ // $\ln^2(x) = (\ln(x))^2 = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}$ // Kettenregel

Ableiten: $\frac{1}{2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{2\ln(x)}{x}}$

$= 1 \cdot \frac{x}{2\ln(x)}$

$= 1 \cdot \frac{\infty}{\infty}$ ↳ L'Hospital

Ableiten: $1 \cdot \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0} = \infty$

$= 1 \cdot \frac{x}{1} = 1 \cdot \infty$

$\lim_{x\to\infty} x = \infty$ ↳ der Grenzwert ist ∞

2b)

Satz 4.2.3 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)
Sei $f(x)$ auf $D(f) = (a,b)$ streng monoton, differenzierbar in (a,b), und es gelte $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$, $D(f^{-1}) = W(f)$, differenzierbar, und es gilt
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \text{bzw.} \quad f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}.$$

↳ $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ // Ableitung der Umkehrfkt
↳ man braucht: $f'(x)$ ①, $f^{-1}(y)$ ②

geg: $f(x) = x + e^x$ im Punkt $y_0 = 1$ / $x_0 = 0$
$y = x + e^x$

① $f'(x) = 1 + e^x$ // $x_0 = 0$
$f'(0) = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$

② $f^{-1}(y) = x$ // $y_0 = 1$
$f^{-1}(y) = f^{-1}(1)$
$= 0$ ↳ $x_0 = 0$

↳ einsetzen in Formel

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$

$$= \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+e^0}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

3	Gegeben sei die Funktion $$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{e^{-x}}, \quad x \in D(f) = [0, 5].$$ Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Polstellen, lokale und globale Extrema, Monotonie.	5

// Polstelle: Zähler $\neq 0$, Nenner $= 0$

// Lücke: Zähler $= 0$, Nenner $= 0$ // nicht definiert

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{e^{-x}}$ // Nullstellen hängen nur von Zähler ab, Nenner darf nicht 0 werden

↳ Nullstelle: Zähler $= 0$, Nenner $\neq 0$

→ Nullstellen: $0 = x^2 - \overset{p}{8}x + \overset{q}{16}$

$$x_{1/2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2 - 16}$$

$$= 4 \pm \sqrt{16 - 16}$$

$$\underline{\underline{x_{1/2} = 4 \pm 0}} \quad \Rightarrow \underline{P(4/0)}$$

→ Polstelle: - enstehen, wenn durch 0 geteilt wird

↳ d.h. e^{-x} muss 0 werden

⇒ $0 = e^{-x}$ → es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ wodurch $e^{-x} = 0$ werden kann

⇒ somit gibt es keine Polstellen

→ Lokale Extrema:

geg: $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{e^{-x}} = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{\frac{1}{e^x}}$

$f(x) = (\overset{g(x)}{x^2 - 8x + 16}) \cdot \overset{h(x)}{e^x}$ // Produktregel: $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

$$f'(x) = (2x - 8) \cdot e^x + (x^2 - 8x + 16) \cdot e^x$$
$$= e^x \cdot (2x - 8 + x^2 - 8x + 16)$$
$$= \underline{e^x \cdot (x^2 - 6x + 8)}$$

// Produktregel

$$f''(x) = e^x \cdot (x^2 - 6x + 8) + e^x \cdot (2x - 6)$$
$$= e^x \cdot (x^2 - 6x + 8 + 2x - 6)$$
$$= \underline{e^x \cdot (x^2 - 4x + 2)}$$

⇒ erste Ableitung gleich 0 setz. um Punkte für Extrema rauszufinden

$f'(x) = 0$

$$0 = \underbrace{(x^2 - 6x + 8)}_{} \cdot \underbrace{e^x}_{\to \text{ wird nie } 0}$$

$0 = x^2 - \overset{p}{6}x + \overset{q}{8}$ // p-q-F.

$$x_{1/2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{6}{2}\right)^2 - 8}$$

$$= 3 \pm \sqrt{9 - 8}$$

$$= 3 \pm 1$$

⇒ $\underline{x_1 = 4}$ $\underline{x_2 = 2}$ // Punkte in 2. Ableitung einsetzen für lokale Extrema

⇒ $f''(4) = (4^2 - 4 \cdot 4 + 2) \cdot e^4$
$= (16 - 16 + 2) \cdot e^4$
$= 2 \cdot e^4$
↳ $2 \cdot e^4 > 0 \implies$ TP

→ $f(\underline{4}) = (4^2 - 8 \cdot 4 + 16) \cdot e^4$
$= (16 - 32 + 16) \cdot e^4$
$= 0 \cdot e^4$
$! = \underline{\underline{0}}\ !$ $\implies$ TP(4/0) $\implies$ lokales Minimum

$f''(2) = (2^2 - 4 \cdot 2 + 2) \cdot e^2$
$= (4 - 8 + 2) \cdot e^2$
$= -2 \cdot e^2$
↳ $-2 \cdot e^2 < 0 \implies$ HP

→ $f(\underline{2}) = (2^2 - 8 \cdot 2 + 16) \cdot e^2$
$= (4 - 16 + 16) \cdot e^2$
$! = \underline{\underline{4 \cdot e^2}}\ !$ $\implies$ HP$(2 / 4e^2)$ $\implies$ lokales Maximum

→ globale Extrema: mit $D(f) = [0, 5]$

⇒ $f(\underline{0}) = (0^2 - 8 \cdot 0 + 16) \cdot e^0$
$= 16 \cdot 1$
$! = 16\ !$ $\implies$ P(0/16) → $16 > 0$ d.h. kein globales Minimum

→ globale Extrema: mit $D(f) = [0, 5]$

$\rightarrow f(0) = (0^2 - 8 \cdot 0 + 16) \cdot e^0$
$= 16 \cdot 1$
$! = \underline{\underline{16}}\ !$ $\Rightarrow P_1(0 \mid 16)$ → $16 > 0$, d.h. kein globales Minimum

$16 < e^2$

$f(5) = (5^2 - 8 \cdot 5 + 16) \cdot e^5$
$= (25 - 40 + 16)$
$= 1 \cdot e^5$
$! = \underline{\underline{e^5}}\ !$ $\Rightarrow P_2(5 / e^5)$ → $e^5 > 4 \cdot e^2$, d.h. es gibt ein globales Maximum an der Stelle $(5 / e^5)$

→ Monotonie: ?

1	Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen, sofern diese existieren. (a) $f(x) = 3^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$, $x \neq 0$ (b) $g(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$, $x \neq 0$	1 + 1

$a^{n(x)}$

1a) $f(x) = 3^{\cos(1/x)}$

// $f'(x) = \ln(n) \cdot a^{n(x)} \cdot n'(x)$ // Kettenregel: $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$f'(x) = \ln(3) \cdot 3^{\cos(1/x)} \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (-x^{-2})\right)$

$= \underline{\underline{\ln(3) \cdot 3^{\cos(1/x)} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^{-2}}}$

1b) $g(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ // Kettenregel

$g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}} \cdot \left(-e^{-x^2} \cdot (-2x)\right)$

$= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}} \cdot e^{-x^2} \cdot 2x$

$= \frac{e^{-x^2} \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2} \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}}$

$= \underline{\underline{\frac{e^{-x} \cdot x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}}}$

2	(a)	Ermitteln Sie den Grenzwert $$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln^2(x)}.$$	2
	(b)	Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ der Funktion $$f(x) = x + e^x$$ im Punkt $y_0 = 1$ (also $x_0 = 0$).	1

2a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln^2(x)}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{\infty}{\ln^2(\infty)} = \frac{\infty}{\infty}$ → L'Hospital

→ $\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(x)}{h'(x)}$ // $(\ln(x))^2 = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$

→ $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{2\ln(x)}{x}}$

$= \lim_{x \to \infty} 1 \cdot \frac{x}{2\ln x}$

$= \lim_{x \to \infty} 1 \cdot \frac{\infty}{2\ln(\infty)} = \frac{\infty}{\infty}$ → L'H

→ $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{2}{x}}$

$= \lim_{x \to \infty} 1 \cdot \frac{x}{1}$

$= \lim_{x \to \infty} x$

$= \lim_{x \to \infty} \infty$

2b) $f(x) = x + e^x$ mit $y_0 = 1$ bzw $x_0 = 0$

$\| \; (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$\Rightarrow f'(x)$ und $f^{-1}(y)$

$f'(x) = 1 + e^x \quad | \; x_0 = 0$

$f'(0) = 1 + e^0$
$= 1 + 1$
$= 2$

$x = f^{-1}(y) = f^{-1}(1) \quad \| \; y_0 = 1$
$= 0$
$\Rightarrow x_0 = 0$

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \| \; y_0 = 1$

$= \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))}$

$= \dfrac{1}{f'(0)}$

$= \dfrac{1}{1 + e^0}$

$= \dfrac{1}{2}$

3	Gegeben sei die Funktion $$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{e^{-x}}, \quad x \in D(f) = [0, 5].$$ Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Polstellen, lokale und globale Extrema, Monotonie.	**5**

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{e^{-x}}$

Nullstellen: e^{-x} kann nicht 0 werden, d.h wir beachten nur Zähler

$\Rightarrow 0 = x^2 - 8x + 16 \quad | \; p\text{-}q\text{-}F$

3

$x_{1/2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2 - 16}$

$= 4 \pm \sqrt{0}$

$\Rightarrow x = 4$

Polstelle: Polstellen entstehen wenn man durch 0 teilt

↳ d.h. e^{-x} müsste 0 werden

$\Rightarrow e^{-x} \neq 0$, kann nicht 0 werden, d.h es gibt keine Polstellen

lokale Extrema: geg: $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{e^{-x}} = (x^2 - 8x + 16) \cdot \dfrac{e^x}{1}$

$f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x)$
$= (x^2 - 8x + 16) \cdot e^x + (2x - 8) \cdot e^x$
$= e^x \cdot (x^2 - 8x + 16 + 2x - 8)$
$= e^x \cdot (x^2 - 6x + 8)$

$f''(x) = g'(x) \cdot h(x) + h'(x) + g(x)$
$= e^x \cdot (x^2 - 6x + 8) + (2x - 6) \cdot e^x$

$= e^x \cdot (x^2 - 6x + 8 + 2x - 6)$

$= e^x \cdot (x^2 - 4x + 2)$

$f'(x) = 0$

$0 = (x^2 - 6x + 8) \cdot \underbrace{e^x}_{\neq 0}$

$0 = x^2 - 6x + 8$

$x_{1/2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{6}{2}\right)^2 - 8}$

$= 3 \pm \sqrt{9 - 8}$

$= 3 \pm 1$

$x_1 = 4 \ , \ x_2 = 2$

$\Rightarrow f''(x) = (x^2 - 4x + 2) \cdot e^x$

$f''(4) = (4^2 - 4 \cdot 4 + 2) \cdot {}^4$

$= (16 - 16 + 2) \cdot e$

$= 2e^4 > 0 \implies$ TP $\rightarrow$ lokales Minimum an dem Punkt $(4/0)$

$f''(2) = (2^2 - 4 \cdot 2 + 2) \cdot e^2$

$= (4 - 8 + 2) \cdot$

$= -2e^2 < 0 \implies$ HP $\rightarrow$ lokales Maximum an dem Punkt $(2/4e^2)$

$\rightarrow$ jz noch Punkte ausrechnen: $f(x) = (x^2 - 8x + 16) \cdot e^x$

$\Rightarrow f(4) = (4^2 - 8 \cdot 4 + 16) \cdot e^4$

$= 16 - 32 + 16$

$= 0$ $\Rightarrow$ TP$(4/0)$

$\Rightarrow f(2) = (2^2 - 8 \cdot 2 + 16) \cdot e^2$

$= (4 - 16 + 16) \cdot e^2$

$= 4e^2$ $\Rightarrow$ T$(2/4e^2)$

globale Extrema: mit $D(f) = [0, 5]$

$\Rightarrow f(0) = (0^2 - 8 \cdot 0 + 16) \cdot e^0$

$= 0 - 0 + 16 \cdot 1$

$= 16$ $\Rightarrow P_1 (0/16)$ $\Rightarrow$ es gibt kein globales Minimum

$\Rightarrow f(5) = (5^2 - 8 \cdot 5 + 16) \cdot e^5$

$= 25 - 40 + 16 \cdot 1$

$= e^5$ $\Rightarrow P_2 (5/e^5)$ $\Rightarrow$ $e^5 > 4e^2$, d.h. es gibt ein globales Maximum an dem Punkt $(5/e^5)$

Monotonie: $f(x) = \begin{cases} [0, 2) \cup (4, 5] & \rightarrow \text{streng monoton wachsend} \\ [2, 4] & \rightarrow \text{streng monoton fallend} \end{cases}$