Sto: 11.Hausaufgabe (17.01.24) - Till Billerbeck (G3) , Cora Zeitler (G1)

Sonntag, 14. Januar 2024 20:32

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.
Hinweis: Vergleichen Sie die Aufgabe mit Beispiel 9.8.

// Wahrscheinlichkeitsfkt: $P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

3) geg: $X \sim Poi(\lambda)$ mit $\lambda > 0$, ges: $E[X]$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X=k)$$

// Poisson-Wahrs.k.fkt einsetzen

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \frac{\lambda^k \cdot k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} \cdot k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{e^{\lambda}}$$

// Exponentielle Reihe

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda}$$
$$= e^{\lambda-\lambda} \cdot \lambda = e^0 \cdot \lambda = 1 \cdot \lambda = \underline{\underline{\lambda}}$$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

Es sei jetzt 17:15 Uhr. Die Zufallsvariable X bezeichne die Wartezeit (in Minuten) bis zur nächsten WhatsApp-Nachricht. Wir nehmen an, dass X Exp(α)-verteilt ist für ein $\alpha > 0$.

a) Die letzten 10 Nachrichten kamen zu folgenden Uhrzeiten an:

6:10, 7:50, 9:10, 11:00, 12:15, 12:20, 13:10, 14:30, 16:00, 17:15 (jetzt).

Schätzen Sie $E(X)$ in dem Sie den (empirischen) Mittelwert der Wartezeiten berechnen. Was ist demnach eine geeignete Schätzung für α?
Hinweis: Aufgabe 1b).

b) Berechnen Sie $E[X^2]$.

4a) $(X \sim Exp(\alpha))$

$E(X)$ für exponentl. verteilte Zufallsvariable X ist: $E(X) = \frac{1}{\alpha}$

ges: $E(X)$ ↝ empirischen Mittelwert der beob. Wartezeit berechnen

→ Wartezeit W: $W = \{(6{:}10 - 7{:}50), (7{:}50 - 9{:}10), (9{:}10 - 11{:}00), (11{:}00 - 12{:}15), (12{:}15 - 12{:}20), (12{:}20 - 13{:}10), (13{:}30 - 14{:}30), (14{:}30 - 16{:}00), (16{:}00 - 17{:}15)\}$

→ in Minuten: $W = \{100, 80, 110, 75, 5, 50, 80, 90, 75)$

→ Mittelwert α $= \frac{1}{9} \cdot (100 + 80 + 110 + 75 + 5 + 50 + 80 + 90 + 75)$

$$= \frac{665}{9} \approx \underline{\underline{73{,}89}}$$

$$\rightarrow E(X) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\frac{665}{9}} = \underline{\underline{0{,}0135}}$$

4b) Berechne $[X^2]$. Nach Satz 9.7.: Sei $g(X) = X^2$, dann $E[g(X)] = E[X^2]$

$$\hookrightarrow E[X^2] \overset{9.7.}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{\alpha e^{-\alpha x}}_{g'} dx$$

/ $\int \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} = -e^{-\alpha x}$

Partielle Integr. $= -x^2 \cdot e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x \cdot (-e^{-\alpha x})\, dx$ / $e^{-\infty} = 0$

$$= \int_0 \underbrace{x}_{f} \; \underbrace{\alpha e}_{g'} \; dx \qquad / \int \alpha e \; dx = \alpha \frac{}{-\alpha} e \qquad = -e$$

Partielle Integr. $$= -x^2 \cdot e^{-\alpha x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2x \cdot (-e^{-\alpha x}) \, dx \qquad / \; e^{-\infty} = 0$$

$$= 0 - \int_0^\infty \underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{(-e^{-\alpha x})}_{g'} \, dx \qquad / \int -e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha x}$$

Partielle Integr. $$= -(2x \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha x} \, dx \qquad / \; e^{-\infty} = 0$$

$$= 0 + \int_0^\infty \frac{2}{\alpha} \cdot e^{-\alpha x} \, dx$$

$$= \frac{2}{\alpha} \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, dx$$

$$= \frac{2}{\alpha} \cdot \left(-\frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha x} \Big|_0^\infty \right)$$

$$= \frac{2}{\alpha} \cdot \left(0 - \left(-\frac{1}{\alpha} \cdot 1 \right) \right)$$

$$= \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = \underline{\underline{\frac{2}{\alpha^2}}}$$