Altkurzklausur-2021

Dienstag, 6. Juni 2023 20:45

1	Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen, falls diese existieren. **(a)** $f(x) = 5^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)},\ x \neq 0$ **(b)** $g(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}},\ x \neq 0$	1 + 1

1a) $f(x) = 5^{\sin(\frac{1}{x})}$ // e-Fkt-Ableit: $f'(x) = \ln(x) \cdot a^{n(x)} \cdot n'(x)$ // Kettenregel

$f'(x) = \ln(5) \cdot 5^{\sin(1/x)} \cdot \left(\cos(\frac{1}{x}) \cdot -x^{-2}\right)$ // $-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

1b) $g(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ // Kettenregel: $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-e^{-x^2}}} \cdot \left(\ln(1) \cdot (-e^{-x^2}) \cdot (-2x)\right)$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-e^{-x^2}}} \cdot 1 \cdot e^{-x^2} \cdot 2x$$

$$= \frac{e^{-x^2} \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2} \cdot \sqrt{1-e^{-x^2}}}$$

$$= \frac{e^{-x^2} \cdot x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$$

2	**(a)** Ermitteln Sie den Grenzwert $$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(\sin(5x))}{\ln(\sin(3x))}.$$ // $= \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{15}{15} = 1$	2
	(b) Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ der Funktion $$f(x) = x + e^x$$ im Punkt $y_0 = 1$ (also $x_0 = 0$). $f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$	1

2a) $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{\ln(\sin(5x))}{\ln(\sin(3x))}$

$= \lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{\ln(\sin(5 \cdot 0))}{\ln(\sin(3 \cdot 0))} =$

$= \lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{\ln(0)}{\ln(0)} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ L'Hospital: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\rightarrow \frac{\ln(\sin(5x))}{\ln(\sin(3x))} = \frac{1/\sin(5x) \cdot (\cos(5x) \cdot 5)}{1/\sin(3x) \cdot (\cos(3x) \cdot 3)}$

$= \frac{\cos(5x) \cdot 5}{\sin(5x)} \cdot \frac{\sin(3x)}{\cos(3x) \cdot 3} = \frac{5 \cdot 0}{3 \cdot 0} = \frac{0}{0} \rightarrow$ L'Hospital

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{5\cos(5x)}{\sin(5x)}}{\frac{3\cos(3x)}{\sin(3x)}} = \frac{5\cos(5x) \cdot \sin(3x)}{\sin 5x \cdot 3\cos(3x)} = \frac{5 \cdot 0}{3 \cdot 0} = \frac{0}{0}$ L'Hospital

Produktregel

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{5\cos(5x) \cdot \sin(3x)}{\sin 5x \cdot 3\cos(3x)}$ $\frac{5\left(\cancel{-\sin(5x) \cdot 5 \cdot \sin(3x)} + \cos(5x) \cdot \cos(3x) \cdot 3\right)}{3\left(\cos(5x)\, 5 \cdot \cos(3x) + \cancel{\sin(5x) \cdot -\sin(3x) \cdot 3}\right)}$

Null einsetzen $\frac{5(\cos(5x) \cdot \cos(3x) \cdot 3)}{3(\cos(5x) \cdot 5 \cdot \cos(3x))} = \frac{5(1 \cdot 1 \cdot 3)}{3(5 \cdot 1)} = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{15}{15} = 1$

2b) $f(x) = x + e^x$ mit $y_0 = 1$ bzw. $x_0 = 0$

// $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$\rightarrow f'(x) = 1 + e^x$ // $x_0 = 0$

$f'(0) = 1 + e^0$

$= 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$

$f^{-1}(y) = x$ // $y_0 = 1$

$f^{-1}(y) = f^{-1}(1)$

$= 0 \rightarrow \underline{x_0 = 0}$

↳ einsetzen: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ // $y_0 = 1$

$= \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$

$= \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+e^0}$

$\underline{\underline{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2}}}$

3	Gegeben sei die Funktion $$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{e^{-x}}, \quad x \in D(f) = [0, 5].$$ Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Polstellen, lokale und globale Extrema, Monotonie.	5

3) ↘ Siehe AKK-2017 Nr. 3