$\Sigma: 16/27$

AlgoDat: 4.Hausaufgabe (10.05.23) - Cora Zeitler

Dienstag, 9. Mai 2023 00:08

Aufgabe 1:
Lösen Sie folgende Rekursionsgleichungen mit Hilfe des Mastertheorems oder begründen Sie gegebenenfalls, warum eine Lösung mittels Mastertheorem nicht möglich ist.

(a) $T(n) = 17T(\frac{n}{4}) + n \log n$ n^1
(b) $T(n) = 32T(\frac{n}{4}) + n^2\sqrt{n}$ $n^2 \cdot n^{1/2}$
(c) $T(n) = 3T(\frac{n}{8}) + \sqrt{n}$ $n^{1/2}$
(d) $T(n) = 24T(\frac{n}{3}) + n^3 \log n$ n^3
(e) $T(n) = 4T(\frac{n}{16}) + \sqrt{n} \log n$ $n^{1/2}$
(11 Punkte)

// $\log_b(a) \to b^x = a$

// $\log_b(a)$ > Exponent (1.Fall)
$\log_b(a)$ = Exponent (2.Fall)
$\log_b(a)$ < Exponent (3.Fall)

// 1. Fall $f \in O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ gilt   // $f(n) \leq g(n)$
$$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$
2. Fall $f \in \Theta(n^{\log_b(a)})$ gilt   // $f(n) = g(n)$
$$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)} \log(n)\right)$$
3. Fall $f \in \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ und $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$ für ein $c < 1$ und genügend große n gilt: // $f(n) \geq g(n)$
$$T(n) \in \Theta(f(n))$$

// Logarithmenbasiswechsel:
$$\log_b(a) = \frac{\log_x(a)}{\log_x(b)}$$

1a) $\underbrace{17}_{a} T\left(\underbrace{\frac{n}{4}}_{b=4}\right) + \underbrace{n^1 \log n}_{f(n)}$ // $n^1 \cdot \log^1 n \Rightarrow d = 1$

① $\log_b(a) \sim 1$
$\log_4(17) \to 4^x = 17$
$\to 4^1 = 4,\ 4^2 = 16,\ 4^3 = 64$
$\to x =$ zwischen 2 und 3
$\to x > 1 \Rightarrow$ 1.Fall ✓

② $f \in O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ $| \epsilon > 0$
$n \log n \in O(n^{\log_4(17)-\epsilon})$
$n \log n \leq n^{\log_4(17)-\epsilon}$ $| \epsilon = \log_4(17) - 2$ ✓
$n \log n \leq n^{\log_4(17) - (\log_4(17) - 2)}$
$n \log n \leq n^2$ $| n \log n \leq n^2$
$\Rightarrow n \log n \in O(n^2)$
dann gilt: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log(n))$
$\Rightarrow \underline{\underline{T(n) \in \Theta(n^{\log_4(17)} \cdot \log n)}}$ f

1.5/2

1b) $T(n) = \underbrace{32}_{a} T\left(\underbrace{\frac{n}{4}}_{b=4}\right) + \underbrace{n^2 \cdot \sqrt{n}}_{f(n)}$ $\Rightarrow n^{\frac{4}{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}} = n^{5/2}$ $\Rightarrow d = \frac{5}{2}$

① $\log_4(32) \sim \frac{5}{2}$
$4^x = 32$
$\to 4^1 = 4 \mid 4^2 = 16 \mid 4^3 = 64$
Log.bas.wech.: $\log_4(32) = \frac{\log_2(32)}{\log_2(4)} = \frac{5}{2}$ ✓
$\Rightarrow \frac{5}{2} \sim \frac{5}{2} \Rightarrow$ 2.Fall ✓

// Log.bas.w., weil d und x beide zw. 2 und 3 liegen, d.h. wir müssen x genauer berechnen, um zu sehen wie es in Relation zu d steht

② $f \in \Theta(n^{\log_b(a)})$
$n^2 \cdot \sqrt{n} \in \Theta(n^{\frac{5}{2}})$
$n^2 \cdot \sqrt{n} = n^{\frac{5}{2}}$
$n^{5/2} = n^{5/2}$
$\Rightarrow n^{5/2} \in O(n^{5/2})$?
dann gilt: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log(n))$
$\Rightarrow \underline{\underline{T(n) \in \Theta(n^{5/2} \cdot \log n)}}$ ✓

2/2

1c) $T(n) = \underbrace{3}_{a} T\left(\underbrace{\frac{n}{8}}_{b=8}\right) + \underbrace{\sqrt{n}}_{f(n)}$ $\Rightarrow n^{1/2} \Rightarrow d = \frac{1}{2}$

① $\log_8(3) \sim \frac{1}{2}$ // $\log_b(a) \Rightarrow$ $b > a$, dann $x < 1$; $b < a$, dann $x > 1$
$\to 8^x = 3$ // Inverse anschauen
$\to 3^x = 8 \to 3^1 = 3,\ 3^2 = 9$
$\to x$ zw. 1 und 2 $\to$ Inverse: x ist zwischen $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{2}$
$\to x > \frac{1}{2} \Rightarrow$ 1.Fall ✓

② $f \in O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ $| \epsilon > 0$

1.5/2

$\sqrt{n} \in O(n^{\log_8(3)-\epsilon})$

$n^{1/2} \leq n^{\log_8(3)-\epsilon}$ $\quad | \; \epsilon = \log_8(3) - \frac{1}{2}$ ✓

$n^{1/2} \leq n^{\log_8(3)-(\log_8(3)-\frac{1}{2})}$

$n^{1/2} \leq n^{\log_8(3)-\log_8(3)+\frac{1}{2}}$

$n^{1/2} \leq n^{1/2}$

$\Rightarrow n^{\frac{1}{2}} \in O(n^{7/3})$

dann gilt: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log(n))$

$\Rightarrow \underline{\underline{T(n) \in \Theta(n^{\log_8(3)} \cdot \log n)}}$ f

1d) $T(n) = \underbrace{24}_{a} T\left(\underbrace{\frac{n}{3}}_{b=3}\right) + \underbrace{n^3 \log n}_{f(n)}$ $\quad \rightarrow n^3 \cdot \log^1 n \quad \Rightarrow d = 3$

① $\log_3(24) \sim 3$

$\rightarrow 3^x = 24$

$\rightarrow 3^1 = 3,\; 3^2 = 9,\; 3^3 = 27$

$\rightarrow$ x liegt zwischen 2 und 3

$\rightarrow x < 3 \quad \Rightarrow$ 3. Fall ✓

② $f \in \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon}) \quad | \; \epsilon > 0$

$n^3 \log n \in \Omega(n^{\log_3(24)+\epsilon})$

$n^3 \log n \geq n^{\log_3(24)+\epsilon}$ $\quad | \; \epsilon = -\log_3(24) + 3$ ✓

$n^3 \log n \geq n^3$

$\Rightarrow n^3 \log n \in \Omega(n^3)$

und $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n) \quad | \; c < 1$

$24 \cdot f\left(\frac{n}{3}\right) \leq c \cdot n^3 \log n$

$24 \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^3 \cdot \log\left(\frac{n}{3}\right) \leq c \cdot n^3 \log n$

$\frac{24}{27} n^3 \cdot \log\left(\frac{n}{3}\right) \leq c \cdot n^3 \log n \quad | : n^3$

$\frac{24/27 \, \cancel{n^3} \cdot \log\left(\frac{n}{3}\right)}{\cancel{n^3}} \leq \frac{c \cdot \cancel{n^3} \cdot \log n}{\cancel{n^3}}$

$\frac{24}{27} \cdot \log\left(\frac{n}{3}\right) \leq c \cdot \log n \quad | \; c = \frac{24}{27}$

$\underline{\log\left(\frac{n}{3}\right) \leq \log n}$ ✓ ✓

$\Rightarrow$ beide Bedingungen sind erfüllt

dann gilt: $T(n) \in \Theta(f(n))$

$\Rightarrow \underline{\underline{T(n) \in \Theta(n^3 \log n)}}$ ✓

3/3

1e) $T(n) = \underbrace{4}_{a} T\left(\underbrace{\frac{n}{16}}_{b=16}\right) + \underbrace{\sqrt{n} \log n}_{f(n)}$ $\quad \rightarrow n^{1/2} \cdot \log^1 n \quad \Rightarrow d = \frac{1}{2}$

① $\log_{16}(4) \sim \frac{1}{2}$

$\rightarrow \underline{16^x = 4}$ | Inverse berechnen

$\rightarrow 4^x = 16$

$\rightarrow 4^1 = 4,\; 4^2 = 16$

$\rightarrow$ x ist 2, d.h. Inverse ist $\underline{x = \frac{1}{2}}$

$\rightarrow \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ 2. Fall

② $f \in \Theta(n^{\log_b(a)})$

$\sqrt{n} \cdot \log n \in \Theta(n^{\log_{16}(4)})$

$n^{1/2} \cdot \log n = n^{1/2}$

$\Rightarrow$ falsche Aussage (2. Fall ist somit ungültig)

③ Da 2. Fall ungültig, untersuchen wir jz 1. Fall

$f \in O(n^{\log_b(a) - \epsilon})$ $\quad | \epsilon > 0$

$\sqrt{n} \cdot \log n \in O(n^{\log_{16}(4) - \epsilon})$

$n^{1/2} \cdot \log n \leq n^{1/2 - \epsilon} \quad | : n^{1/2}$

$\log n \leq n^{-\epsilon}$

$\log n \leq \frac{1}{n^{\epsilon}} \quad | \epsilon > 0$

↳ falsche Aussage, weil Polynom wächst schneller als im Nenner das Gegenteil ?
(somit ist 1 Fall auch ungültig)

(4) 3. Fall untersuchen

$f \in \Omega(n^{\log_b(a) + \epsilon}) \quad | \epsilon > 0$ und $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n) \quad | c < 1$

$\sqrt{n} \cdot \log \in \Omega(n^{\log_{16}(4) + \epsilon})$ ↳ muss nicht mehr geprüft werden, da 1 Vorraussetzung bereits falsch

$n^{1/2} \cdot \log n \geq n^{1/2 + \epsilon} \quad | : n^{1/2}$

$\log n \geq n^{\epsilon}$

↳ falsche Aussage, weil Polynom schneller wächst als Logarithmus
(somit ist 3 Fall auch ungültig) ✓

$\Rightarrow$ alle 3 Fälle sind ungültig, d.h. Mastertheorem ist nicht anwendbar ✓

1/2

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie asymptotische Schranken (Θ) für $T(n)$ in den folgenden Rekursionsgleichungen.

(a) $T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{n}{4}) + n$

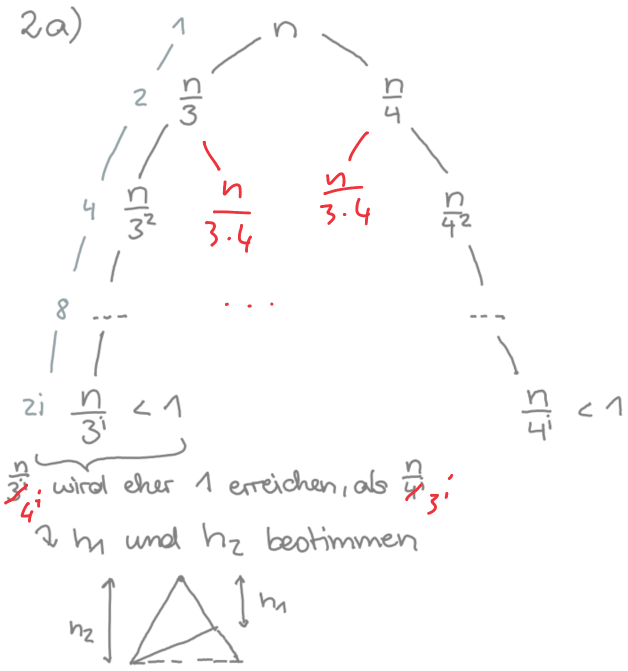
(b) $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$

(c) $T(n) = 2T(n^{\frac{1}{4}}) + 1$

(d) $T(n) = T(n-4) + \sqrt{n}$

(16 Punkte)

2a)



$\frac{n}{3^i}$ ($\frac{n}{4^i}$) wird eher 1 erreichen, als $\frac{n}{4^i}$ ($\frac{n}{3^i}$)

↳ h_1 und h_2 bestimmen

↳ $\frac{n}{4^i} \leq 1 \quad | \cdot 4^i$

$n \leq 4^i \quad | \log_4()$

$\underline{\log_4(n) \leq i}$

↳ Analog zu $\frac{n}{3^i} \rightarrow \underline{\log_3(n) \leq i}$

$f(n) < T(n) < g(n)$

↳ $\sum_{i=0}^{\log_3(n)} \frac{n}{3^i} \cdot \overset{\text{Anzahl d. Rekus.}}{2^i} = n \cdot \sum_{i=0}^{\log_3(n)} (\frac{1}{2})^i$

↳ $\underline{g(n) = n \cdot 2 \in \Theta(n)}$ f

↳ $\sum_{i=0}^{\log_4(n)} \frac{n}{4^i} \cdot 2^i = n \cdot \sum_{i=0}^{\log_4(n)} (\frac{2}{3})^i$

$f(n) = 1 \cdot n \qquad \underline{f(n) \in \Theta(n)}$ f

$f(n) < T(n) < g(n) \implies \underline{\underline{T(n) \in \Theta(n)}}$ (✓)

0/4

2c) $T(n) = 2T(n^{\frac{1}{4}}) + 1$

// $T(n) = 2 \cdot T(n^{\frac{1}{4}}) + 1$

$T(n^{\cancel{1}}) = 2 \cdot (2 \cdot T(n^{\frac{1}{4^2}}) + 1) + 1$

$= 4 \cdot T(n^{\frac{1}{4^2}}) + 2 + 1$

$T(n^{\cancel{1}}) = 2 \cdot (2 \cdot (2T(n^{\frac{1}{4^{2+1}}}) + 1) + 1) + 1$

$= 2 \cdot (4T(n^{\frac{1}{4^3}}) + 2) + 1) + 1$

$= 8T(n^{\frac{1}{4^3}}) + 4 + 2 + 1$

↳ $\underline{T(n^{\cancel{1}}) = 2^{k+1} \cdot T(n^{\frac{1}{4^k}}) + 2^{\cancel{k+1}} - 1}$

$2^{k+1} \cdot T(n^{\frac{1}{4^k}}) + 2^{k+1} - 1$

$T(2) = c$ // Abbruchbedingung

$\rightarrow$ ges: $n^{\frac{1}{4^k}} \leq 2$

$\log(n^{\frac{1}{4^k}}) \leq \log(2)$

$\frac{1}{4^k} \cdot \log_2(n) \leq 1 \quad | \cdot 4^k$

$\log_2(n) \leq 4^k$

$k = \lceil \frac{1}{2} \log \log n \rceil$ $\quad \frac{1}{2} \log_2(\log_2(n)) \leq k$ // einsetzen

↳ $\underbrace{2^{\log(\log n)}} \cdot c + 2^{\log(\log n) + 1} - 1$ // $b^{\log x} = x$

$\log n \cdot c + \log n \cdot 2^1 - 1$

$\log n \cdot \underbrace{(c+2) - 1}_{\text{konstanten}}$

↳ $\underline{\underline{T(n) \in \Theta(\log n)}}$ f

1/4

2d) $T(n) = T(n-4) + \sqrt{n}$

$T(0) = 0$

$$T(n) = T(n-4) + \sqrt{n}$$
$$= T(n-8) + \sqrt{n-4} + \sqrt{n}$$
$$= T(n-4i) + \sum_{k=0}^{i} (n-4k)$$
$$= T(n-n) + \sum_{k=0}^{n} \sqrt{n-k}$$

selbe, weil $T(0)=0$

$$= 0 + \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$$

nach oben: $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 = n \cdot \sqrt{n} = n^{3/2} \in O(n^{3/2})$

nach unten: $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{n \cdot \sqrt{n}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{n^{3/2}}{2 \cdot \sqrt{2}} \in \Omega(n^{3/2})$

$\Longrightarrow \underline{\underline{T(n) \in \Theta(n^{3/2})}}$ ✓

2/4

2b) $T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + n$
$$= n^{\frac{1}{2}} \cdot T(n^{\frac{1}{2}}) + n$$
$$T(n^{\frac{1}{2}}) = n^{\frac{1}{2}} \cdot (n^{1/4} \cdot T(n^{1/4}) + n^{1/2}) + n$$
$$= n^{3/4} \cdot (T(n^{1/4}) + n + n$$
$$= n^{3/4} \cdot T(n^{1/4}) + 2n$$
$$T(n^{\frac{1}{4}}) = n^{3/4} \cdot (\underline{\tfrac{1}{8}}^{?} T(n^{1/8}) + n^{1/4}) + 2n$$
$$= n^{7/8} \cdot T(n^{1/8}) + n + 2n$$
$$= n^{7/8} \cdot T(n^{1/8}) + 3n$$
$$T(n^{\frac{1}{2^k}}) = n^{\frac{2^k-1}{2^k}} \cdot T(\tfrac{1}{2^k}) + k \cdot n$$

→ Wann erreicht es die Abbruchbedingung?

↳ $n^{\frac{1}{2^k}} \leq 2 \quad | \log_2()$

$\log_2(n^{\frac{1}{2^k}} \leq \log(2)$

$\log_2(n^{\frac{1}{2^k}}) \leq 1$

$\frac{1}{2^k} \cdot \log_2(n) \leq 1 \quad | \cdot 2^k$

$\log_2(n) \leq 2^k \quad | \cdot \log_2()$

$\log_2(\log_2(n)) \leq k$

→ einsetzen ↳ $k = \lceil \log \log n \rceil$

$$= n^{\frac{2^k-1}{2^k}} \cdot T(\tfrac{1}{2^k}) + k \cdot n$$
$$= n^{\left(\frac{2^{\log(\log n)}-1}{2^{\log(\log n)}}\right)} \cdot c + \log(\log n) \cdot n$$
$$= n^{\left(\frac{\log(n)-1}{\log(n)}\right)} \cdot c + \log(\log n) \cdot n$$
$$= n^{\left(\frac{\log(n)}{\log(n)} - \frac{1}{\log(n)}\right)} \cdot c + \log(\log n) \cdot n$$
$$= n^{\left(1 - \frac{1}{\log(n)}\right)} \cdot c + \log(\log n) \cdot n$$
$$= n \cdot n^{\left(-\frac{1}{\log(n)}\right)} \cdot c + \log(\log n) \cdot n$$

?↳ $= \underbrace{\frac{n}{2} \cdot c}_{\text{Konstanten}} + \log(\log n) \cdot n$

nicht konst.

$\Longrightarrow \underline{\underline{T(n) \in \Theta\left(\frac{n}{2} \cdot \log(\log n)\right)}}$

3/4