Zusätzliches aus Übungen

Mittwoch, 21. Februar 2024 22:14

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

Wir betrachten erneut die drei Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

a) die Menge der Wörter, in denen die Anzahl der a's durch vier teilbar ist.

b) die Menge der Wörter, in denen die Zeichenkette *abba* vorkommt.

c) die Menge der Wörter, in denen kein Paar aufeinanderfolgender a's mehr vorkommt, sobald ein Paar aufeinanderfolgender b's vorgekommen ist.

Geben Sie für jede dieser Sprachen einen regulären Ausdruck an, der diese Sprache darstellt - und begründen Sie kurz dessen Korrektheit.

s1a) $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$

mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \square, 0, 1\}$,

$q_0 = q_0$, $F = \{q_0\}$

δ	a	b	$\square$
q_0	(q_1, a, R)	(q_0, b, R)	$(q_0, 1, N)$
q_1	(q_2, a, R)	(q_1, b, R)	$(q_0, 0, N)$
q_2	(q_3, a, R)	(q_2, b, R)	$(q_0, 0, N)$
q_3	(q_0, a, R)	(q_3, b, R)	$(q_0, 0, N)$

↳ q_0 sowohl Start als auch Finalzustand

- → a's werden durchgezahlt
- → es wird immer nur nach 4 a's geendet (0, 4, 8, 12, 16 ...) → über Zustände q_0 bis q_4
- → b's werden ignoriert, man bleibt immer in gleichen Zustand (b's werden nicht gezählt)
- → erst bei a wird Zustand gewechselt
- → jeder Zustand zählt ein a (bis 4, in 4er Schritten)

s1b) $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$

mit: $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \square, 0, 1\}$

$q_0 = q_0$, $F = \{q_4\}$

δ	a	b	$\square$
q_0	(q_1, a, R)	(q_0, b, R)	$(q_0, 0, N)$
q_1	(q_1, a, R)	(q_2, b, R)	$(q_0, 0, N)$
q_2	(q_1, a, R)	(q_3, b, R)	$(q_0, 0, N)$
q_3	(q_4, a, R)	(q_0, b, R)	$(q_0, 0, N)$
q_4	(q_4, a, R)	(q_4, b, R)	$(q_0, 1, N)$

↳ q_0 ist Startzustand

- → dh. bei q_0 wird auf a gewartet um Wort abba zu bekommen → b ist egal (bleibt in Zustand)
- → nach a wird in q_1 gegangen
- → man kommt immer in q_1 wenn a erkannt wird
  - → anfang des Wortes "a"bba
- → nach a müssen bb folgen, deswegen wird bei einem b in q_2 oder q_3 gesprungen
- → bei 3tem b fängt man wieder von vorne in q_0 an
- → wenn nach bb ein a kommt, geht man in q_4
- → abba wurde geschrieben und man kann beliebige Buchstaben danach schreiben und in q_4 enden
- → es gibt kein λ und vor abba können auch beliebige Buchstaben geschrieben werden

s1c) $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$

mit: $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \square, 0, 1\}$,

$q_0 = q_0$, $F = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

δ	a	b	$\square$
q_0	(q_0, a, R)	(q_1, b, R)	$(q_0, 1, N)$
q_1	(q_0, a, R)	(q_2, b, R)	$(q_0, 1, N)$
q_2	(q_3, a, R)	(q_2, b, R)	$(q_0, 1, N)$
q_3	(q_0, a, N)	(q_2, b, R)	$(q_0, 1, N)$

↳ q_0 ist Startzustand

- → am anfang in q_0 kann man so viele a's wie mgl. schreiben und man kann enden in q_0. (q_0 schreibt unendl. viele a's)
- → sobald b kommt springt man in q_1
- → nach einem b sind unendl. viele a's möglich → und man kann enden in q_1
- → bei 2tem b geht man in q_2 → man kann unendl. viele b's schreiben, aber nur noch 1 a → in q_3 bleibt man bei einem a und kann nur in q_0 → dort geht Regelung (Kreislauf) von vorne los
- → oder man endet bei q_3

s1.a)

δ	a	b	$\square$	0	1
q_0	$(q_1, \square, R)$	$(q_0, \square, R)$	$(q_F, 1, N)$		
q_1	$(q_2, \square, R)$	$(q_1, \square, R)$	$(q_F, 0, N)$	(*)	(**)
q_2	$(q_3, \square, R)$	$(q_2, \square, R)$	$(q_F, 0, N)$	$(q_2, 0, N)$	$(q_2, 1, N)$
q_3	$(q_0, \square, R)$	$(q_3, \square, R)$	$(q_F, 0, N)$		
q_F	(q_F, a, N)	(q_F, b, N)	$(q_F, \square, N)$	$(q_F, 0, N)$	$(q_F, 1, N)$

$(q_+, \square, N)$

$(q_-, \square, N)$

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

Beweisen Sie, dass die folgende Sprache nicht kontextfrei ist!

$$L = \{a^n b^{n^2} | n \in \mathbb{N}\}$$

s2.) $L = \{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \notin$ CFL

$$L = \{a^n b^{n^2} | n \in \mathbb{N}\}$$

S2.) $L = \{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \notin CFL$

indirekter Beweis: $L \in CFL$

→ dann "⇝" existiert Pumpingzahl: n_L, sodass für alle $z \in L$ ...

"⇜" Wir wählen: $z = a^{n_L} b^{n_L^2}$

"⇝" es existiert Zerlegung:

a^{n_L}	$b^{n_L^2}$	
u	vwx	y

(1) $|vwx| \leq n_L$

(2) $|vx| \geq 1$

(3) $z_i = uv^iwx^iy \overset{!}{\in} L$

"⇜" Wir wählen $z_2 = uvvwxxy$!

und untersuchen Wortlänge: $|z| = n_L^2 + n_L$

Es gilt: $|z_2| = |z| + |vx| \leq |z| + |vwx| \overset{(1)}{\leq} (n_L^2 + n_L) + n_L$

$< (n_L^2 + n_L) + (n_L + 1) < (n_L^2 + n_L) + 2 \cdot (n_L + 1)$

$= (n_L^2 + 2n_L + 1) + (n_L + 1) = (n_L + 1)^2 + (n_L + 1) = k$

k ist die nächst größere Wortlänge in L größer als $|z|$.

Also gilt einerseits: $n_L^2 + n_L = |z| \underset{(2)}{<} |z_2|$

und andererseits: $|z_2| < (n_L+1)^2 + (n_L + 1)$

FAZIT: $|z_2|$ ist eine "Zwischenlänge" und deshalb $z_2 \notin L$ ↯ zu (3)

Frage: $L'' = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \overset{?}{\in} CFL$

indirekter Beweis: Ann: $L'' \in CFL$

$z =_{df.} a^{n_L} b^{2n_L}$

Wortlänge: $|z| = 3 \cdot n_L$

$|z| \underset{(2)}{<} |z_2| = |z| + |vx| \leq |z| + |vwx| \overset{(1)}{\leq} 3 \cdot n_L + n_L = 4 \cdot n_L$

k ist die nächstgrößere Wortlänge in L größer als $|z|$

Es gilt: $k = 3 \cdot n_L + 3$ (für $z'' = a^{n_L+1} b^{2(n_L+1)}$)

⇒ PL liefert keinen ↯ (Wiederspruch) Ann. nicht erfüllt, indirekter Beweis hat nicht funktioniert

anders Beweisen: $\lambda \in L''$ ⤵ $\{ S \to \lambda,$

$S \to S',$

$S' \to abb,$

$S \to aS'bb \}$ ✓