AuB: 4.Übung (28.11.23)

Dienstag, 28. November 2023 10:24

n ist durch k teilbar (k ist ein Teiler von n)

$k \setminus n \leftrightarrow_{df} \bigvee_{l \in \mathbb{N}} (k \cdot l = n)$ / 0 · Maximum

$k \leq n \leftrightarrow_{df} \bigvee_{l \in \mathbb{N}} (k + l = n)$ / $n = 0$, $k = 4$: für $l = 0$; $4 \cdot 0 = 0$

1) $k \setminus 0$, denn $k \cdot 0 = 0$

2) $1 \setminus n$, denn $1 \cdot n = n$

Grammatiken der Chomsky-Hierarchie

s1.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

Wir betrachten die folgenden drei Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

a) die Menge der Wörter, in denen die Anzahl der a's durch vier teilbar ist.

b) die Menge der Wörter, in denen die Zeichenkette *abba* vorkommt.

c) die Menge der Wörter, in denen kein Paar aufeinanderfolgender a's mehr vorkommt, sobald ein Paar aufeinanderfolgender b's vorgekommen ist.

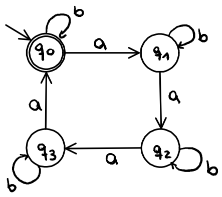
Geben Sie für jede dieser Sprachen jeweils eine rechtslineare und eine linkslineare Grammatik, die diese Sprachen erzeugen.

1a) $L_a = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \equiv 0 \pmod 4 \}$ (modulo 4) // $|w|_a$ = Anzahl der a's im Wort

Grammatik (RL)

$P = \{ S \to \lambda,$ $A_2 \to bA_2,$
$S \to A_0,$ $A_2 \to aA_3,$
$A_0 \to bA_0,$ $A_3 \to bA_3,$
$A_0 \to aA_1,$ $A_3 \to aA_0,$
$A_1 \to b,$ $A_3 \to a,$
$A_1 \to aA_2,$ $A_0 \to b \}$

Automat



// Überführungsfunktion über Graphen

// rechtslineare-Grammatik : 1. Für alle nicht-λ-Regeln gilt:
→ Sie sind von der Form: •) $X \to wY$ oder •) $X \to u$

2. Für alle λ-Regeln gilt:
→ höchstens: $S \to \lambda$ mit Zusatz (*) → S auf keiner rechten Seite

Linkslinear: "Spiegelgrammatik" - "Spiegelregeln"

$P = \{ S \to \lambda,$ $A_1 \to A_2 a,$
$S \to A_0,$ $A_2 \to A_2 b,$
$A_0 \to A_0 b,$ $A_2 \to A_3 a,$
$A_0 \to A_1 a,$ $A_3 \to \ldots \}$
$A_1 \to A_1 b,$

→ $Sp(RL-G) = LL-G \mid L(Sp(RL-G)) = Sp(L(RL-G))$

→ Spiegelsprache von LA ist LA

→ $Sp(La) = La$

1b) $L_b = \{ w \in \{a,b\}^* \mid abba \subseteq w \}$
$= \Sigma^* \circ \{abba\} \circ \Sigma^*$

RL-Grammatik: $G_{RL} = \{N, T, S, P\}$, $T = \{a, b\}$, $N = \{S,$
$P = \{ S \xrightarrow{1} aS,$ $A \xrightarrow{5} aA,$
$S \xrightarrow{2} bS,$ $A \xrightarrow{6} bA,$
$S \xrightarrow{3} abba,$ $A \xrightarrow{7} a,$
$S \xrightarrow{4} abbaA,$ $A \xrightarrow{8} b \}$

LL-Grammatik: $G_{LL} = \{N, T, S, P\}$, $T = \{a, b\}$, $N = \{S,$
$P' = \{ S \xrightarrow{1} Sa,$ $A \xrightarrow{5} Aa,$
$S \xrightarrow{2} Sb,$ $A \xrightarrow{6} Ab,$
$S \xrightarrow{3} abba,$ $A \xrightarrow{7} a,$
$S \xrightarrow{4} Aabba,$ $A \xrightarrow{8} b \}$

Bsp: $w = abbbabba$
$w' = abbabba$

RL: $S \to aS \to abbbS \to abbbabba$

LL: $S \Rightarrow Aabba \Rightarrow Abbbabba \Rightarrow abbbabba$

1c) $\overline{L_c} = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \bigvee_x \bigvee_y \bigvee_z (w = xbbyaaz) \}$

$\lambda \in L_c$: (Rechtslinear) $P = \{ S \to \lambda,$ $B_1 \to bB_2,$ $B_2 \to aA_1,$
$S \to B_0,$ $B_1 \to b,$ $B_2 \to a,$

1c) $L_c = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \bigvee_x \bigvee_y \bigvee_z \; (w = xbbyaaz) \}$

$\lambda \in L_c$: (Rechtslinear)

$P = \{ S \to \lambda,$	$B_1 \to bB_2,$	$B_2 \to aA_1,$
$S \to B_0,$	$B_1 \to b,$	$B_2 \to a,$
$B_0 \to aB_0,$	$B_1 \to aB_0,$	$A_1 \to bB_2,$
$B_0 \to a,$	$B_1 \to a,$	$A_1 \to b \}$
$B_0 \to bB_1,$	$B_2 \to bB_2,$	
$B_0 \to b,$	$B_2 \to b,$	

Linkslinear: $\overline{Sp(L_c)} = \{ w \mid w = z'aay'bbx' \}$

$= \{ w \mid w = x\underline{aa}y\,\underline{bb}z$

→ tauschen die Rollen von "a" und "b"

$P = \{ S_1 \to \lambda,$	$B_1 \to B_2 a,$	$B_2 \to A_1 b,$
$S \to B_0,$	$B_1 \to a,$	$B_2 \to b,$
$B_0 \to B_0 b,$	$B_1 \to B_0 b,$	$A_1 \to B_2 a,$
$B_0 \to b,$	$B_1 \to b,$	$A_2 \to a \}$
$B_0 \to B_1 a,$	$B_2 \to B_2 a,$	
$B_0 \to a,$	$B_2 \to a,$	

s2.) *(Diese Aufgabe ist eine schriftliche Hausaufgabe, die bewertet wird.)*

Beweisen Sie, dass die folgende Sprache nicht kontextfrei ist!

$$L = \{a^n b^{n^2} | n \in \mathbb{N}\}$$

s2) $L = \{ a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \}$

$= \{ \lambda, ab, aabbbb, a^3b^9, a^4b^{16}, a^5b^{25}, \dots \}$

0, 2, 6, 12, 20, 30, ...

indirekter Beweis: ⟨wir nehmen das Gegenteil an und erzeugen einen Wiederspruch⟩

Gegenteil: L ist kontextfrei ! ↯ Also gilt Pumping-Lemma : d.h.:

⇝ es gibt eine Pumping Zahl n_L, sodass $z \in L$ mit $|z| \geq n_L$

⇜ $z =_{df} a^{n_L} b^{n_L^2}$ $\left(|z| = n_L^2 + n_L \geq n_L \right)$

⇝ es gibt eine Zerlegung: $z = uvwxy$

mit ① $|vwx| \leq n_L$ $\wedge$ ② $|vx| \geq 1$ $\wedge$ ③ $z_i = uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$

⇜ wir betrachten $z_2 = uvvwxxy \underset{③}{\in} L$ ↯ $z_2 \notin L$

→ das nächstlängste Wort z' nach z in L hat die Länge $(n_L + 1) + (n_L + 1)^2$

→ wir betrachten $|z'| - |z| = (n_L^2 + 2n_L + 1) + (n_L + 1) - n_L^2 - n_L = 2 \cdot (n_L + 1)$

ABER: $|z_2| = |z| + |vx| \leq |z| + |vwx| \underset{①}{\leq} |z| + n_L < |z| + 2 \cdot (n_L + 1) = |z'|$