DS Erste Klausur WS 2014/15 – aus 7 Aufgaben waren 6 zu bearbeiten

1) a) Ausgehend vom Rekursionsschema für die Fibonacci-Zahlen f_m beweisen Sie durch vollständige Induktion über n >= 1 (mit Angabe von Induktionsanfang, Induktionsschritt, usw) die folgende Gleichung:
$f_{m+n} = f_{n+1} x f_m + f_n x f_{m-1}$
b) Benutzen Sie diese bewiesene Gleichung, um folgende herzuleiten:
f2m = $f^2_{n+1} - f^2_{n-1}$

2) Bweisen Sie, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind.
Definieren Sie zunächst die unterstrichenen Begriffe.
   a. G ist eine Folgerung aus (F_1 ^ F_2 ^ …^ F_k)
   b. ((F1 ^ F2 ^ …^ Fk)-> G) ist eine Tautologie
   c. ((F1 ^ F2 ^ …^ Fk) ^ -G) ist nicht erfüllbar

3) Im folgenden wird vorausgesetzt, dass alle vorkommenden Mengen A, B, C usw, Teilmengen eines nichtleeren Grundbereich M sind.
Prüfen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.
Begründen Sie ihre Antworten.
   a. (AuB) n (BuC) n (CuA) = (AnB) u (BnC) u (CnA)
   b. Aus Aub <= AnB folgt A = B
   c. Aus AnB = AnC und Aub = AuC folgt B = C

4) Es sei M eine Menge und es es seinen R und S zwei binäre Relationen über M.
   a. Definieren Sie die zu R inverse Relation R^{-1}
   b. Definieren Sie die Hintereinanderausführung RoS
   c. Definieren Sie die identische Relation Δ_M über M
   d. Beweisen Sie: R ist eine Äquivalentrelation über M genau dann, wenn gilt:
   ΔM <= R und R o R^{-1} <= R

5) Es sei M Eine beliebige Menge
   a. Welche Eigenschaften charakterisieren eine Halbordnungsrelation über M? Definieren Sie diese Eigenschaften.
   b. Zeigen Sie, dass die Teilerrelation \ eine Halbordnungsrelation über der Menge N der natürlichen Zahlen ist. Dabei gilt a\b <-> V(cEN) (a x c = b)
   c. Zeigen Sie, dass die halbgeordnete Menge [N, \] ein Minimum und ein Maximum besitzt

6) Es sei M eine Menge mit m Elementen.
   a. Wie viele binäre Relationen über M gibt es?
   b. Wie viele sind reflexiv, wie viele sind irreflexiv?
   c. Wie viele sind symmetrisch, wie viele sind asymmetrisch?
   d. Wie viele sind antisymmetrisch?
   e. Wie viele sind reflexiv und symmetrisch
   f. Wie viele sind symmetrisch und antisymmetrisch?