AlgoDat: 2.Hausaufgabe

Samstag, 22. April 2023 13:53

Aufgabe 3:
Beweisen Sie die Transitivität der O-Notation:

$$f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \in O(h(n))$$

.

(5 Punkte)

3) $f \in O(g(n)) \leftrightarrow \exists c, n_0, \forall n > n_0 : 0 < f(n) \leq c \cdot g(n)$

$g \in O(h(n)) \leftrightarrow \exists d, m_0, \forall n > m_0 : 0 < g(n) \leq d \cdot h(n)$

$\hookrightarrow 0 < f(n) \leq c \cdot g(n) \leq c \cdot d \cdot h(n)$, für $n \overset{n_0' =}{>} \max\{n_0, m_0\}$

d.h. $\exists cd, n_0' : \forall n > n_0', \quad 0 < f(n) \leq c \cdot d \cdot h(n)$

$\leftrightarrow f(n) \in O(h(n))$ $\blacksquare$

5/5

Aufgabe 1:
Vergleichen Sie in jedem der fünf Fälle das asymptotische Wachstum der Funktionen f und g. Beweisen Sie, ob $f \in O(g)$, $f \in \Omega(g)$, $f \in \Theta(g)$, gilt.

(a) $f(n) = \frac{1}{4}n$; $g(n) = \sqrt{n \log n}$

(b) $f(n) = 6 \cdot 3^{\frac{n}{2}+1}$; $g(n) = 2^n$

(c) $f(n) = \log_a n$; $g(n) = \log_b n$, a, b Konstanten mit $a > 0, b > 0$

(d) $f(n) = 6\sqrt{n}\log^2 n$; $g(n) = 5n\sqrt{\log n^5}$

(e) $f(n) = n^{2(-1)^n}$; $g(n) = n$

(12 Punkte)

7/12

(a) $f(n) = \frac{1}{4}n$; $g(n) = \sqrt{n \log n}$

1a) 1.Variante: Beh.: $g(n) \in O(f(n))$, $\sqrt{n \cdot \log n} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\log n} = n^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\log n}$

$$\sqrt{n \cdot \log n} = n^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\log n} \geq n^{\frac{1}{2}} \leq n$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{4} n \overset{?}{\leq} c \cdot \frac{1}{4} n$$

$\downarrow$ d.h.: $c = 4$, $n_0 = 1$

Du hast nur gezeigt, dass $\sqrt{n \log n}$ und n beide größer als $n^{\frac{1}{2}}$ sind.

2.Variante: Beh: $f(n) \in \Omega(g(n))$

$$\frac{1}{4}n \geq c \cdot \sqrt{n \cdot \log n}$$

$$\frac{1}{4}n \geq c \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\log n} \quad \Big| : n^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4} n^{\frac{1}{2}} \geq c \cdot \sqrt{\log n} \quad \Big| \cdot 4, \quad c = 4$$

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{\log n} \cdot 4 \cdot 4$$

$\downarrow$ w.A. für $c = 4$ und $n_0 = 1$

Bsp: $\sqrt{1} \geq \sqrt{\log_1} = \sqrt{0} = 0$

insgesamt kommt bei dir also $f \in \Theta(g)$ raus?

(b) $f(n) = 6 \cdot 3^{\frac{n}{2}+1}$; $g(n) = 2^n$

1b) 1.V.: Beh: $f(n) \in O(g(n))$

$$6 \cdot 3^{\frac{n}{2}+1} = 6 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{n}{2}} = 18 \cdot 3^{\frac{n}{2}} \leq 18 \cdot 2^n = c \cdot 2^n$$

z.V.: Beh: $f(n) \in O(g(n))$

Du musst die Aussage nur einmal beweisen.

$$6 \cdot 3^{\frac{n}{2}+1} \leq c \cdot 2^n$$
$$6 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{n}{2}} \leq c \cdot 2^n$$
$$18 \cdot 3^{\frac{n}{2}} \leq c \cdot 2^n \quad \mid \boxed{c = 18}, \; :18$$
$$3^{\frac{n}{2}} \leq 2^n$$

↳ für $n > 1$ gilt: $\underline{n_0 = 1}$ und $\underline{c = 18}$

?

(c) $f(n) = \log_a n$; $g(n) = \log_b n$, a, b Konstanten mit $a > 0, b > 0$ ↳ 3 Fälle

1c) Fall 1: $a = b$, dann gilt $f(n) = g(n) = \log_a(n) = \log_b(n)$ ↳ kein n_0 und c, weil Fkt gleich ?

Dann gilt $n_0 = 0$ und $c_1 = 1$ $c_2 = 1$ => $f \in \Theta(g)$

Fall 2: $a > b$

kleines o?

Beh: $f(n) \in o(g(n))$

$$\log_a n < c \cdot \log_b n \quad \mid c = 1$$
$$\log_a n < \log_b n$$

, da $a > b$ und wir wissen, um so größer die Basis wird, desto kleiner wird die Zahl

↳ wahre Aussage

Bsp: $\log_4 n < \log_2 n$ $\Rightarrow n_0 = 1$

→ egal was wir für n einsetzen gilt die Gleichung

Fall 3: $a < b$

Beh: $f(n) \in \omega(g(n))$

$$\log_a n > \log_b n \cdot c \quad \mid \text{sei } \boxed{c = 1}$$
$$\log_a n > \log_b n$$

↳ d.h. wenn $a < b$ gilt und $b > 0$ und $a > 0$ gilt, dann gilt die Gleichung.

$\Rightarrow n_0 = 1$

und insgesamt?

(d) $f(n) = 6\sqrt{n}\log^2 n$; $g(n) = 5n\sqrt{\log n^5}$

1d) ↓ $6 \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot \log^2 n$, ↓ $5n \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{\log n}$

↳ Beh: $f(n) \in O(g(n))$

$$6 \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot \log^2 n \leq 5n \cdot \sqrt{5} \cdot c \cdot \sqrt{\log n} \quad \mid ^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 36 \cdot n \cdot \log^4 n \leq 25 n^2 \cdot 5 \cdot c^2 \cdot \log n$$
$$\Leftrightarrow \quad 36 \cdot n \cdot \log^4 n \leq 125 \cdot n^2 \cdot c^2 \cdot \log n \quad \mid :n, \; :\log n \;\rightarrow n > 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 36 \cdot \log^3 n \leq 125 \cdot c^2 \cdot n \quad \mid \text{sei } \boxed{c^2 = \frac{36}{125}}$$
$$\Leftrightarrow \quad 36 \cdot \log^3 n \leq 125 \cdot \frac{36}{125} \cdot n \quad \mid :36$$
$$\Leftrightarrow \quad \log^3 n \leq n \quad \blacksquare$$

↳ aus Vorlesung bekannt

↳ $n_0 = 1$ ↯ $\log^3 4 = 2^3 = 8 > 4$

$c = \sqrt{\frac{36}{125}}$

(e) $f(n) = n^{2(-1)^n}$; $g(n) = n$

kleines O ?

1e) $n^{2(-1)^n} \notin \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) \notin \Omega(g(n))$

① z.z. $f(n) \notin o(g(n))$

$\forall c > 0,\ \forall n_0 > 0,\ \exists n \geq n_0$

$n^{2(-1)^n} > c \cdot n$

Wähle n gerade und $n > \max\{c, n_0\}$ oder $n = 2\lceil \max\{c, n_0\} \rceil$ ✓

② z.z.: $f(n) \notin O(g(n))$

$\forall c > 0,\ \forall n_0 > 0\ \exists n \geq n_0$

$n^{2(-1)^n} < c \cdot n$

nicht unbedingt nat. Zahl -> oberes ganzes

Wähle n ungerade Zahl und $\lceil \max\{n_0, \sqrt[3]{\tfrac{1}{c}}\} \rceil$

$\frac{1}{n^2} < c \cdot n \ \Rightarrow\ \frac{1}{c} < n^3$

sehr schön!

Aufgabe 2:
Bringen Sie die folgenden Funktionen in eine Reihenfolge $g_1, g_2, \ldots, g_8$ so dass gilt $g_1 \in O(g_2)$, $g_2 \in O(g_3)$, $\ldots$, $g_7 \in O(g_8)$.

$$\log \sqrt[3]{n},\ 2^{\sqrt{n}},\ n^{\frac{1}{10}},\ n!,\ (\log n)^{\log n},\ (\log n)^{40},\ \sqrt{4^{\log n}},\ \log(n!)$$

Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(10 Punkte)

2) Reihenfolge von schnellster zur langsamsten Fkt:

→ $n!,\ (\log(n))^{\log(n)},\ 2^{\sqrt{n}},\ \log(n!),\ \sqrt{4^{\log n}},\ n^{\frac{1}{10}},\ (\log n)^{40},\ \log \sqrt[3]{n}$

?

2/10