Sto: 10.Hausaufgabe (10.01.24) - Till Billerbeck (G3), Cora Zeitler (G1)

Mittwoch, 20. Dezember 2023 20:46

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen. Des Weiteren sei X Poi(λ)- und Y Poi(μ)-verteilt, wobei $\lambda, \mu \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass auch $X + Y$ Poisson-verteilt ist.
Hinweis: Verwenden Sie an geeigneter Stelle den binomischen Lehrsatz

$$\mathrm{I}\quad (x+y)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j}, \quad x, y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0.$$

// Poisson-verteilt: $P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

III Binomialkoeffizient: $\binom{k}{j} = \frac{k!}{(k-j)! \cdot j!}$

3) $X \sim Poi(\lambda)$ und $Y \sim Poi(\mu)$, $\lambda, \mu \in (0, \infty)$ $\rightarrow$ zu zeigen: $X + Y \sim Poi(\lambda, \mu)$

$$\mathrm{II} \begin{cases} \rightarrow P(X=j) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} \\ \rightarrow P(Y=k-j) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} \end{cases}$$

// X und Y sind unabhängig

$$P(X+Y=k) = \sum_{j=0}^{k} \left(P(X+Y = j + (k-j)) \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left(P(X=j) \cdot P(Y=k-j) \right) \quad \text{// II einsetzen (X und Y sind unabhängig)}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{\lambda^j}{j!} \cdot \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{-\mu} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{\lambda^j \cdot \mu^{k-j}}{(k-j)! \cdot j!} \cdot e^{-(\lambda+\mu)} \right)$$

// wir haben ~, es fehlt noch $k!$
$\rightarrow$ wir erweitern mit $1 = \frac{k!}{k!}$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{k!}{k!} \cdot \frac{\lambda^j \cdot \mu^{k-j}}{(k-j)! \cdot j!} \cdot e^{-(\lambda+\mu)} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{k!}{(k-j)! \cdot j!}}_{\mathrm{III}} \cdot \lambda^j \cdot \mu^{k-j} \cdot e^{-(\lambda+\mu)} \right)$$

$$\overset{\mathrm{I}}{=} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{k} \left(\underbrace{\binom{k}{j} \cdot \lambda^j \cdot \mu^{k-j}}_{\text{binomischer Lehrsatz}} \cdot e^{-(\lambda+\mu)} \right)$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot (\lambda+\mu)^j \cdot e^{-(\lambda+\mu)} = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^j}{k!}$$

$$\Longrightarrow X + Y \sim Poi(\lambda + \mu) \quad \blacksquare$$

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Seien X und Y unabhängig und jeweils $\mathcal{U}[0,1]$-verteilt. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und Dichte von $Z := \min(X, Y)$.
Hinweis: Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignis' von $\{\min(X,Y) \le z\}$, für alle $z \in \mathbb{R}$.

// Note: Bsp. 8.2

4) X, Y unabhängig. $X \sim \mathcal{U}[0,1]$, $Y \sim \mathcal{U}[0,1]$

Bestimmen: Verteilungsfunktion $F_Z(x)$ und Dichte $f_Z(x)$ von $Z = \min(X, Y)$

gegeben: $f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Für $a \in [0,1]$: $F_Z(a) = P(\min(X,Y) \le a)$

$$= 1 - P(\min(X,Y) > a) \quad \text{// Gegenereignis}$$

$$= 1 - P(X > a, Y > a) \quad \text{// } \min(X,Y) > x \Rightarrow X > x \wedge Y > x$$

$$= 1 - P(X > a) \cdot P(Y > a) \quad \text{// } X, Y \rightarrow \text{unabhängig}$$

$$= 1 - \int_a^1 1\, dx \cdot \int_a^1 1\, dx$$

$$= 1 - \left(x \Big|_a^1 \right)^2$$

$$= 1 - (1-a)^2$$

$$= 1 - \left(x \Big|_a^1 \right)^2$$
$$= 1 - (1-a)^2$$

$$\Rightarrow F_Z(a) = \begin{cases} 0 & , a < 0 \\ 1-(1-a)^2 & , a \in [0,1] \\ 1 & , a > 1 \end{cases}$$ // Verteilungsfunktion

↳ $F_Z'(a) = 2(1-a) = 2-2a = f_Z(a)$ für $a \in [0,1]$ (Bsp. 8.2., Hauptsatz der Integralrechnung)

→ Außerhalb von $(0,1)$ ist $F_Z(a)$ konstant, also ist dort $F_Z'(a) = 0$

$$\Rightarrow f_Z(a) = \begin{cases} 2-2a, & a \in [0,1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = (2-2a) \cdot 1_{[0,1]}$$ // Dichte

Plausicheck: ✓