

1. Es sei n eine natürliche Zahl. Der n -dimensionale Würfel ist derjenige Graph, dessen Knotenmenge die Menge aller 0-1-Folgen der Länge n ist, wobei zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie sich in genau einer Komponente unterscheiden.

- a) Beweisen Sie: Dieser Graph hat 2^n Knoten und $n \times 2^{n-1}$ Kanten.
- b) Beweisen Sie: Dieser Graph ist **bipartit**. (Erklären sie diesen Begriff!)
- c) Bestimmen Sie seinen **Durchmesser**. (Erklären sie auch diesen Begriff!)
- d) Bestimmen Sie seine **Tailenweite**. (Erklären sie auch diesen Begriff!)

2. G^c beschreibt den Komplementärgraphen des einfachen Graphen G .

- a) Beweisen sie: Wenn G nicht zusammenhängend ist, dann ist G^c zusammenhängend.
- b) Beweisen sie, dass für jeden (einfachen) Graphen G mit sechs Knoten gilt: G oder G^c enthält einen K_3 als vollständig induzierten Teilgraphen.
- c) Beweisen sie, dass jeder selbstkomplementäre Graph entweder $4n$ oder $4n+1$ Knoten hat. (Dabei ist n eine geeignete natürliche Zahl).

3. Beweisen sie die folgenden Beziehungen für den Binomialkoeffizienten:

- a) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$
- b) $\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$
- c) $\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = 2^m \cdot \binom{n}{m}$
- d) $\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$

4.

- a) Wie viele nichtnegative ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung:
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$?
Für wie viele dieser Lösungen gilt zusätzlich $x_i \leq 6$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$
- b) Wie viele Wurfbilder mit der Augenzahl 18 gibt es bei vier verschiedenfarbigen Würfeln?

5. Beweisen Sie:

Für einen einfachen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

- I.) (z) G ist zusammenhängend und
(kf) G ist kreisfrei
- II.) (z) G ist zusammenhängend und
(z min) jede Kante von G ist eine Brücke
- III.) (kf) G ist kreisfrei und
(kf max) mit jeder zusätzlichen Kante erhält G einen Kreis