Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Ostryanin, Quander, Seppelt, Vasen

Lineare Algebra für IB, AIB, BIB

Wintersemester 2022/23 Übungsblatt 9

Weihnachtsaufgabe — Die Rettung der Weihnacht

Dieses Jahr machte Knecht Ruprecht ernst: Er kidnappte das Christkind, die Drei Weisen aus dem Morgenland, den Nikolaus, den Weihnachtsmann samt seiner 9 Rentiere und dazu 9 Weihnachtswichtel.

Höhnisch grinsend trat Ruprecht vor die 24 Weihnachtswesen: „Jahrhundertelang haben fast alle Kinder nicht brav ihre Mathematikhausaufgaben gemacht. Jetzt reicht es mir. Weihnachten soll dieses Jahr fast sicher ausfallen." Der Weihnachtsmann schmunzelte, da Ruprecht den Begriff „fast sicher" fast sicher nicht im Sinne der Definition verwendete. Doch der Nikolaus wusste: Ruprecht verstand in Sachen Mathematikhausaufgaben keinen Spaß.

Ruprecht fuhr fort: „Für alle $k \in \{1, ..., 24\}$ soll das k-te Weihnachtswesen am k-ten Dezember das k-te Türchen des Adventskalenders öffnen. Nur wenn das jedem von Euch gelingt, wird Weihnachten stattfinden!" Die Wichtel freuten sich — das hörte sich ja leicht an. „Freut Euch nicht zu früh! Ich habe die Zahlen zufällig vertauscht. Die zu findende Zahl steht nicht außen am Türchen, sondern ist erst nach dem Öffnen sichtbar. Wenn auch nur eines von Euch nicht das richtige Türchen öffnet, fällt Weihnachten aus!" Das Christkind fing an zu weinen.

„Aber ich bin ja kein Unmensch. Jeder von Euch darf bis zu 12 Türchen öffnen. Die Spielregeln sind also: Ihr kommt in Einzelzellen, damit Ihr Euch nicht absprechen könnt. Am k-ten Dezember werden alle 24 Türchen verschlossen. Der k-te von Euch hat dann 12 Versuche, um das Türchen zu finden, hinter dem die Zahl k steht. Wenn dies allen gelingt, findet Weihnachten statt, sonst nicht. Die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt an jedem Tag $\frac{1}{2}$, Weihnachten wird also nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\left(\frac{1}{2}\right)^{24} \approx 5.96 \times 10^{-8}$ stattfinden, muahahahaha!"

Die Rentiere scharrten ob des diabolischen Lachens unruhig mit den Hufen. Doch die Drei Weisen blieben gelassen; lag das am inhalierten Weihrauch? Nicht nur! Bevor alle in Einzelzellen kamen, empfahl der erste Weise: „Folgt nicht dem Stern, sondern den Zahlen!" Der zweite sang: „I find it hard to tell you, I find it hard to take. When people run in circles it's a very very mad world, mad world."[1] Der dritte sprach: „Die Harmonie kennt keine Grenzen. Außer wenn man sie teilt."

Die Drei Weisen sprachen wie üblich in Rätseln, doch sogar die Rentiere verstanden, was zu tun war. Rentier Rudolph rechnete und rief: „Dann können wir ja Weihnachten mit 32%-iger Wahrscheinlichkeit retten!" Wie ist den Weihnachtswesen dies gelungen?

[1] Die hier geschilderten Ereignisse waren sicherlich der Grund, warum „Mad World" 1983 zum Weihnachts-Nummer-eins-Hit in Großbritannien wurde.

Hausaufgaben (Abgabe bis 03.01.2023, 12:00 Uhr in Moodle)

Hausaufgabe 9.1: *Abbildungsmatrizen I*
Die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f(\vec{e}_1) := \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ und $f(\vec{e}_2) := 6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$. Es seien $\vec{b}_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{b}_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $B := [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. (3 P.) Berechnen Sie $\kappa_B(\vec{e}_1)$, $\kappa_B(\vec{e}_2)$ und ${}_BM_B(f)$.

Hausaufgabe 9.2: *Abbildungsmatrizen II*
Es sei $\vec{v}_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{v}_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $V := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \leq \mathbb{R}^3$. $B := [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ ist eine Basis von V. Die beiden folgenden Teilaufgaben lassen sich zusammen lösen, daher gibt es pauschal (3 P.).

- Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in V$, denn $\left(\begin{smallmatrix} z \\ -x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in V$.
  Hinweis: Warum genügt es, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \vec{v}_1$ und $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \vec{v}_2$ zu betrachten?

- Nach dem vorigen Punkt definiert $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} z \\ -x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ eine lineare Abbildung $f : V \to V$. Berechnen Sie ${}_BM_B(f) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. **Hinweis:** $\mathbb{R}^{2\times 2}$, nicht $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Aufgabe, die sich z.T. auf den Stoff von 16.12.2022 bezieht:

Hausaufgabe 9.3: *Basisauswahl und -konstruktion*

a) (3 P.) Es sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und es sei jeweils $\underline{v}_i := A_{i,*}$ die i-te Zeile von A. Sei $V := \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m)$. Aus A entstehe durch den Gauß-Algorithmus die ZSF $A' \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit genau r von Null verschiedenen Zeilen. Zeigen Sie: $[A'_{1,*}, ..., A'_{r,*}]$ ist eine Basis von V.
Anmerkung: Wir betrachten hier Zeilen- statt Spaltenvektoren. Dieses Verfahren ist <u>keine</u> Lösung von Problem 4.30, denn es wird keine Basis aus dem vorgegebenen Erzeugendensystem ausgewählt, sondern es werden neue Vektoren konstruiert.

In den folgenden beiden Teilaufgaben seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Elemente von $\mathbb{R}^4$ und $V := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5) \leq \mathbb{R}^4$.

b) (2 P.) Wählen Sie mit Problem 4.30 aus $[\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5]$ eine Basis von V aus.

c) (2 P.) Wenden Sie das Verfahren aus a) an, um eine Basis von V zu konstruieren. **Anmerkung:** Sie sollen hier also $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5$ als <u>Zeilen</u>vektoren interpretieren.

Erreichbare Punktzahl: 13

LA: 9.Hausaufgabe (03.01.23)

Montag, 2. Januar 2023 18:36

Hausaufgabe 9.1: *Abbildungsmatrizen I*
Die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f(\vec{e}_1) := \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ und $f(\vec{e}_2) := 6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$. Es seien $\vec{b}_1 := \binom{1}{-1}$ und $\vec{b}_2 := \binom{1}{1/2}$. Dann ist $B := [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. (3 P.) Berechnen Sie $\kappa_B(\vec{e}_1)$, $\kappa_B(\vec{e}_2)$ und ${}_BM_B(f)$.

1) $\kappa_B(\vec{e}_1)$: $\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 = \binom{3}{0} = 3\vec{e}_1 \quad | :3$

$\frac{1}{3}\vec{b}_1 + \frac{2}{3}\vec{b}_2 = \vec{e}_1$

$\Rightarrow \kappa_B(\vec{e}_1) = \binom{1/3}{2/3}$

$\kappa_B(\vec{e}_2)$: $-\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \binom{0}{3/2} = \frac{3}{2}\vec{e}_2 \quad | \cdot \frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}\vec{b}_1 + \frac{2}{3}\vec{b}_2 = \vec{e}_2$

$\Rightarrow \kappa_B(\vec{e}_2) = \binom{-2/3}{2/3}$

$$\begin{aligned}
f(\vec{b}_1) &= f(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)\\
&= f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2)\\
&= \vec{e}_1 + 3\cdot\vec{e}_2 - (6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)\\
&= -5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2\\
&= -1\cdot(5\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2)\\
&= -5(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)\\
&= \underline{-5\cdot\vec{b}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\vec{b}_2) &= f(\vec{e}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{e}_2)\\
&= f(\vec{e}_1) + f(\tfrac{1}{2}\vec{e}_2)\\
&= f(\vec{e}_1) + \tfrac{1}{2}\cdot f(\vec{e}_2)\\
&= \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2\\
&= 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2\\
&= 4(\vec{e}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{e}_2)\\
&= \underline{4\cdot\vec{b}_2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow {}_BM_B(f) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}}$$

Hausaufgabe 9.2: *Abbildungsmatrizen II*
Es sei $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 := \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ und $V := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \leq \mathbb{R}^3$. $B := [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ ist eine Basis von V. Die beiden folgenden Teilaufgaben lassen sich zusammen lösen, daher gibt es pauschal (3 P.).

- Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in V$, denn $\begin{pmatrix}z\\-x\\y\end{pmatrix} \in V$.
  Hinweis: Warum genügt es, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{v}_1$ und $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{v}_2$ zu betrachten?
- Nach dem vorigen Punkt definiert $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}z\\-x\\y\end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung $f : V \to V$. Berechnen Sie ${}_BM_B(f) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. **Hinweis:** $\mathbb{R}^{2\times 2}$, nicht $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Aufgabe, die sich z.T. auf den Stoff von 16.12.2022 bezieht:

2) $f(\vec{v}_1) = f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ → zu zeigen, dass $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ in V // mit Gauß-Jordan $\left(\left(V \; \begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{III} - \text{I} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{II} : (-2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \text{I} - \text{II} \rightsquigarrow \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow x_1 \cdot \vec{v}_1 + y_1 \cdot \vec{v}_2 = f(\vec{v}_1)$

$f(\vec{v}_2) = f\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{III} - \text{I} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{II} : (-2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \text{I} - \text{II} \rightsquigarrow \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow x_2 \cdot \vec{v}_1 + y_2 \cdot \vec{v}_2 = f(\vec{v}_2)$

$$\Longrightarrow {}^B_Bf = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}}$$

Erklärung: $f(x\cdot\vec{v}_1 + y_2\cdot\vec{v}_2) = f(x\cdot\vec{v}_1) + f(y\cdot\vec{v}_2)$
$= x\cdot f(\vec{v}_1) + y\cdot f(\vec{v}_2)$

$\Rightarrow$ wenn $f(\vec{v}_1)$ und $f(\vec{v}_2) \in V$, dann $f(x\cdot\vec{v}_1 + y\cdot\vec{v}_2) \in V$

$\Rightarrow$ weil Addition und Multiplikation endomorph sind, bleiben sie im gleichen Raum

Hausaufgabe 9.3: *Basisauswahl und -konstruktion*

a) (3 P.) Es sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und es sei jeweils $\underline{v}_i := A_{i,*}$ die i-te Zeile von A. Sei $V := \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m)$. Aus A entstehe durch den Gauß-Algorithmus die ZSF$A' \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit genau r von Null verschiedenen Zeilen. Zeigen Sie: $[A'_{1,*}, ..., A'_{r,*}]$ ist eine Basis von V.
Anmerkung: Wir betrachten hier Zeilen- statt Spaltenvektoren. Dieses Verfahren ist keine Lösung von Problem 4.30, denn es wird keine Basis aus dem vorgegebenen Erzeugendensystem ausgewählt, sondern es werden neue Vektoren konstruiert.

In den folgenden beiden Teilaufgaben seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\7\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix}-4\\2\\1\\3\end{pmatrix}$ Elemente von $\mathbb{R}^4$ und $V := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5) \leq \mathbb{R}^4$.

b) (2 P.) Wählen Sie mit Problem 4.30 aus $[\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5]$ eine Basis von V aus.

c) (2 P.) Wenden Sie das Verfahren aus a) an, um eine Basis von V zu konstruieren. **Anmerkung:** Sie sollen hier also $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5$ als Zeilenvektoren interpretieren.

3) a) - Vektoren spannen den Raum auf (m Zeilenvektoren)
- werden durch Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform gebracht

↳ Gauß Algorithmus kann: - Strecken } Multiplikation
- Stauchen
- Addieren } Addition, Subtration

→ bei Durchführung des Gauß-Algorithmus bleibt der Raum gleich
→ Vektoren sind dann linear unabhängig (durch ZSF)
→ dennoch bleibt Erzeugendensystem gleich (weil Raum gleich bleibt bzw.,
weil Zeilenoperationen umkehrbar sind

b) → als Spalte

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&-4\\-3&2&0&2&2\\2&1&7&1&1\\2&0&4&-1&3\end{pmatrix} \quad \Big|\ \mathrm{II} - \mathrm{I}\cdot(-3)$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&-4\\0&-1&-3&2&-10\\2&1&7&1&1\\2&0&4&-1&3\end{pmatrix} \quad \Big|\ \mathrm{III} - \mathrm{I}\cdot 2$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&-4\\0&-1&-3&2&-10\\0&3&9&1&9\\2&0&4&-1&3\end{pmatrix} \quad \Big|\ \mathrm{IV} - \mathrm{I}\cdot 2$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&-4\\0&-1&-3&2&-10\\0&3&9&1&9\\0&2&6&-1&11\end{pmatrix} \quad \Big|\ \mathrm{III} - \mathrm{II}\cdot(-3)$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&-4\\0&-1&-3&2&-10\\0&0&0&7&-21\\0&2&6&-1&11\end{pmatrix} \quad \Big|\ \mathrm{IV} - \mathrm{II}\cdot(-2)$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&-4\\0&-1&-3&2&-10\\0&0&0&7&-21\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix} \quad \Big|\ \mathrm{III} : 7$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&-4\\0&-1&-3&2&-10\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix} \quad \Big|\ \mathrm{IV} - \mathrm{III}\cdot 3$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&-4\\0&-1&-3&2&-10\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\vec{v}_1&\vec{v}_2&&\vec{v}_4&\end{matrix}\end{array}$$

$$\Rightarrow [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4] = \left[\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}\right] \quad \Rightarrow \text{ist eine Basis von } V$$

c) → als Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad II - I \cdot (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad III - I \cdot (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad V - I \cdot (-4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 9 & 11 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad III - II \cdot 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 9 & 11 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad IV - II \cdot (-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & -10 & 9 & 11 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad V - II \cdot 10$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -21 & -9 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad V - IV \cdot (-3)$$

$$\underline{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\rightsquigarrow \underline{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}} \to \underline{\underline{\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right]}}$$

⤵ ist eine Basis von V

LA: 9.Hausaufgabe (03.01.23)

Montag, 2. Januar 2023 18:36

Hausaufgabe 9.1: *Abbildungsmatrizen I*
Die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f(\vec{e}_1) := \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ und $f(\vec{e}_2) := 6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$. Es seien $\vec{b}_1 := \binom{1}{-1}$ und $\vec{b}_2 := \binom{1}{1/2}$. Dann ist $B := [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. (3 P.) Berechnen Sie $\kappa_B(\vec{e}_1)$, $\kappa_B(\vec{e}_2)$ und ${}_BM_B(f)$.

1) $\kappa_B(\vec{e}_1)$: $\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 = \binom{3}{0} = 3\vec{e}_1 \quad | :3$

$\frac{1}{3}\vec{b}_1 + \frac{2}{3}\vec{b}_2 = \vec{e}_1$

$\rightarrow \kappa_B(\vec{e}_1) = \binom{1/3}{2/3}$ ✓

$\kappa_B(\vec{e}_2)$: $-\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \binom{0}{3/2} = \frac{3}{2}\vec{e}_2 \quad | \cdot \frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}\vec{b}_1 + \frac{2}{3}\vec{b}_2 = \vec{e}_2$

$\rightarrow \kappa_B(\vec{e}_2) = \binom{-2/3}{2/3}$ ✓

$$\begin{aligned} f(\vec{b}_1) &= f(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ &= f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) \\ &= \vec{e}_1 + 3\cdot\vec{e}_2 - (6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) \\ &= -5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 \\ &= -1\cdot(5\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2) \\ &= -5(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ &= \underline{-5\cdot\vec{b}_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\vec{b}_2) &= f(\vec{e}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{e}_2) \\ &= f(\vec{e}_1) + f(\tfrac{1}{2}\vec{e}_2) \\ &= f(\vec{e}_1) + \tfrac{1}{2}\cdot f(\vec{e}_2) \\ &= \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ &= 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ &= 4(\vec{e}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{e}_2) \\ &= \underline{4\cdot\vec{b}_2} \end{aligned}$$

$\rightarrow {}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ✓

3 | 3

Hausaufgabe 9.2: *Abbildungsmatrizen II*
Es sei $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $V := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \leq \mathbb{R}^3$. $B := [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ ist eine Basis von V. Die beiden folgenden Teilaufgaben lassen sich zusammen lösen, daher gibt es pauschal (3 P.).

- Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$, denn $\begin{pmatrix} z \\ -x \\ y \end{pmatrix} \in V$.
  Hinweis: Warum genügt es, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{v}_1$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{v}_2$ zu betrachten?
- Nach dem vorigen Punkt definiert $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung $f: V \to V$. Berechnen Sie ${}_BM_B(f) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. **Hinweis:** $\mathbb{R}^{2\times 2}$, nicht $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Aufgabe, die sich z.T. auf den Stoff von 16.12.2022 bezieht:

2) $f(\vec{v}_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ zu zeigen, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in V // mit Gauß-Jordan $\left((V \begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}) \right)$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{III} - \text{I} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{II} : (-2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \text{I} - \text{II} \rightsquigarrow \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}}$

$\rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, \; y_1 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow x_1 \cdot \vec{v}_1 + y_1 \cdot \vec{v}_2 = f(\vec{v}_1)$

$f(\vec{v}_2) = f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{III} - \text{I} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{II} : (-2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \text{I} - \text{II} \rightsquigarrow \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}}$

$\rightarrow x_2 = -\frac{3}{2}, \; y_2 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow x_2 \cdot \vec{v}_1 + y_2 \cdot \vec{v}_2 = f(\vec{v}_2)$

$\Rightarrow {}^B_B f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$ ✓

↳ Schreibweise dieses Jahr anders!

3 | 3

Erklärung: $f(x\cdot\vec{v}_1 + y_2\cdot\vec{v}_2) = f(x\cdot\vec{v}_1) + f(y\cdot\vec{v}_2)$

$= x\cdot f(\vec{v}_1) + y\cdot f(\vec{v}_2)$

$\rightarrow$ wenn $f(\vec{v}_1)$ und $f(\vec{v}_2) \in V$, dann $f(x\cdot\vec{v}_1 + y\cdot\vec{v}_2) \in V$ ✓

$\rightarrow$ weil Addition und Multiplikation endomorph sind, bleiben sie im gleichen Raum ✓

Hausaufgabe 9.3: *Basisauswahl und -konstruktion*

a) (3 P.) Es sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und es sei jeweils $\underline{v}_i := A_{i,*}$ die i-te Zeile von A. Sei $V := \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m)$. Aus A entstehe durch den Gauß-Algorithmus die ZSF $A' \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit genau r von Null verschiedenen Zeilen. Zeigen Sie: $[A'_{1,*}, ..., A'_{r,*}]$ ist eine Basis von V.
Anmerkung: Wir betrachten hier Zeilen- statt Spaltenvektoren. Dieses Verfahren ist keine Lösung von Problem 4.30, denn es wird keine Basis aus dem vorgegebenen Erzeugendensystem ausgewählt, sondern es werden neue Vektoren konstruiert.

In den folgenden beiden Teilaufgaben seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Elemente von $\mathbb{R}^4$ und $V := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5) \leq \mathbb{R}^4$.

b) (2 P.) Wählen Sie mit Problem 4.30 aus $[\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5]$ eine Basis von V aus.

c) (2 P.) Wenden Sie das Verfahren aus a) an, um eine Basis von V zu konstruieren. **Anmerkung:** Sie sollen hier also $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5$ als Zeilenvektoren interpretieren.

3) a) - Vektoren spannen den Raum auf (m Zeilenvektoren)
- werden durch Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform gebracht

↳ Gauß Algorithmus kann: - Strecken } Multiplikation
- Stauchen
- Addieren } Addition, Subtration

→ bei Durchführung des Gauß-Algorithmus bleibt der Raum gleich
→ Vektoren sind dann linear unabhängig (durch ZSF) genauer
→ dennoch bleibt Erzeugendensystem gleich (weil Raum gleich bleibt bzw., weil Zeilenoperationen umkehrbar sind

✓

2|3

b) → als Spalte

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad II - I\cdot(-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -10 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad III - I\cdot 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & 9 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad IV - I\cdot 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & 9 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 11 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad III - II\cdot(-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -21 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 11 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad IV - II\cdot(-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad III : 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad IV - III\cdot 3$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v}_1 \; \vec{v}_2 \quad\; \vec{v}_4 \end{array}$$

$\Rightarrow [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$ ⤷ ist eine Basis von V

✓

2|2

c) → als Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} II - I \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad III - I \cdot (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad V - I \cdot (-4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 9 & 11 \end{pmatrix} \quad III - II \cdot 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 9 & 11 \end{pmatrix} \quad IV - II \cdot (-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & -10 & 9 & 11 \end{pmatrix} \quad V - II \cdot 10$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -21 & -9 \end{pmatrix} \quad V - IV \cdot (-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

↳ ist eine Basis von V

✓

2/2

12/13

Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Ostryanin, Quander, Seppelt, Vasen

Lineare Algebra für IB, AIB, BIB
FMI-MA0022

Weihnachtsaufgabe — Die Rettung der Weihnacht

Knecht Ruprecht vertauschte die Zahlen „zufällig“, damit meint er als Nichtmathematiker „gleichverteilt“. Er wählt $\sigma \in S_{24}$, so dass hinter dem j-ten Türchen die Zahl $\sigma(j)$ zu finden ist. Für $k \in \{1, ..., 24\}$ soll das k-te Weihnachtswesen das Türchen mit der Nummer $\sigma^{-1}(k)$ finden — allerdings ohne σ zu kennen.

Gemäß des Hinweises des ersten Weisen beginnt das k-te Weihnachtswesen mit Türchen Nummer k und *folgt* der hinter der Tür stehenden *Zahl* $\sigma(k)$, geht also zu Türchen Nummer $\sigma(k)$, von dort aus zu $\sigma(\sigma(k))$, etc. Eine solche Abfolge von Zahlen nennt man einen ***Zyklus*** von σ. Da es nur endlich viele Türchen gibt, wird dabei irgendwann dasselbe Türchen zum zweiten Mal geöffnet. Da σ injektiv ist, kann dies nur das zuerst geöffnete Türchen sein, d.h. $\exists \ell \in \mathbb{N}^*\colon\ \sigma^\ell(k) = k$, und wenn ℓ mit dieser Eigenschaft minimal ist, heißt es die ***Länge*** des Zyklus.

Wegen $\sigma^\ell(k) = k$ steht hinter dem Türchen $\sigma^{\ell-1}(k)$ die gesuchte Zahl k. So ist der Hinweis des zweiten Weisen zu verstehen. Mit dieser Strategie hat das k-te Weihnachtswesen genau dann Erfolg, wenn die Länge des mit k beginnende Zyklus höchstens 12 ist. Diese Überlegung gilt für jedes der 24 Wesen. Weihnachten wird also genau dann gerettet, wenn *jeder* Zyklus von σ höchstens die Länge 12 hat.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gleichverteilt aus S_n gewählte Permutation σ keinen Zyklus der Länge $\ell > \frac{n}{2}$ hat (einen solchen Zyklus nennen wir <u>lang</u>)? Die Summe aller Zyklenlängen ist n. Wenn also σ einen langen Zyklus hat, sind alle anderen Zyklen von σ nicht lang.

Sei $\ell > \frac{n}{2}$. Schulwissen (Kombinatorik): Es gibt mit Beachtung der Reihenfolge $\frac{n!}{(n-\ell)!} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-\ell+1)$ Möglichkeiten, aus $\{1, ..., n\}$ ℓ verschiedene Zahlen zu wählen. Allerdings entsteht derselbe Zyklus, wenn man bei einer anderen Zahl beginnt (d.h. $(1, 3, 7, 4) = (3, 7, 4, 1)$), also gibt es in S_n genau $\frac{n!}{\ell\cdot(n-\ell)!}$ verschiedene Zyklen der Länge ℓ. Enthält σ einen solchen Zyklus, so gibt es immer noch $(n-\ell)!$ Möglichkeiten, wie σ die übrigen $n - \ell$ Elemente abbildet. Damit ist gezeigt: Ist $\ell > \frac{n}{2}$, so hat S_n genau $\frac{n!\cdot(n-\ell)!}{\ell\cdot(n-\ell)!} = \frac{n!}{\ell}$ Elemente mit einem ℓ-Zyklus.

Wegen $|S_{24}| = 24!$ ist die Misserfolgswahrscheinlichkeit bei gleichverteilter Wahl von $\sigma \in S_{24}$ $\dfrac{\sum_{\ell=13}^{24} \frac{24!}{\ell}}{24!} = \sum_{\ell=13}^{24} \dfrac{1}{\ell}$. Übrigens heißt $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell}$ ***harmonische Reihe***.

Hinweis des dritten Weisen: $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} = \infty$, aber $\lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=n+1}^{2n} \frac{1}{\ell} = \ln(2) \approx 0.6931$. Hier geht es aber nicht um den Reihengrenzwert, sondern um eine endliche Summe, die man leicht mit einem CAS ausrechnet: $\sum_{\ell=13}^{24} \frac{1}{\ell} = \frac{3602044091}{5354228880} \approx 0.673$ ist die Misserfolgswahrscheinlichkeit. Rentier Rudolph rechnete richtig: Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $1 - 0.673 = 32.7\%$ ist Weihnachten gerettet.

Hausaufgabe 9.1: *Abbildungsmatrizen I*
(1 P.) $3\vec{e}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2$ und $\frac{3}{2}\vec{e}_2 = -\vec{b}_1 + \vec{b}_2$, also $\kappa_B(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $\kappa_B(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.
(2 P.) $f(\vec{b}_1) = f(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = (-5)\cdot(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = -5\vec{b}_1$, ferner $f(\vec{b}_2) = f(\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2) = f(\vec{e}_1) + \frac{1}{2}f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = 4\cdot(\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2) = 4\vec{b}_2$, also ${}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 9.2: *Abbildungsmatrizen II*
(1 P.) $f(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/2\vec{v}_1 + 1/2\vec{v}_2$ und $f(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -3/2\vec{v}_1 + 1/2\vec{v}_2$.
(1 P.) Jedes Element von V ist Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und wird auf die entsprechende Linearkombination von $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2)$ abgebildet, was sich wie eben gezeigt als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ausdrücken lässt, also in V liegt.
(1 P.) $\rightsquigarrow {}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 9.3: *Basisauswahl und -konstruktion*

a) Wir notieren Spaltenvektoren mit Unterstrich.
(2 P.) Sei $G \in GL_m(\mathbb{K})$ mit $A' = GA$. Dann $V = \{\underline{c}A \mid \underline{c} \in \mathbb{K}^m\} = \{\underline{c}G^{-1}A' \mid \underline{c} \in \mathbb{K}^m\} = \{\underline{c}'A' \mid \underline{c}' \in \mathbb{K}^m\}$, denn $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ mit $\underline{c} \mapsto \underline{c}' = \underline{c}G^{-1}$ ist wegen $G \in GL_m(\mathbb{K})$ ein Isomorphismus.
(1 P.) Die von Null verschiedenen Zeilen von A' erzeugen V und sind zudem linear unabhängig, denn wenn in $\underline{c}'A'$ die Einträge $j_1, ..., j_r$ null sind, folgt nacheinander $c_1 = c_2 = ... = c_r = 0$.

b) (2 P.) $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_5) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & 9 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist ZSF. Also ist $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4]$ eine Basis von V.

c) (2 P.) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 9 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -21 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Also ist $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$ eine Basis von V.

Erreichbare Punktzahl: 13