Sto: 12.Hausaufgabe (24.01.24) - Till Billerbeck (G3), Cora Zeitler (G1)

Donnerstag, 18. Januar 2024   14:19

Aufgabe 4 (1+1,5+1,5 Punkte)

Es seien X, Y, Z Zufallsvariablen, X und Y unabhängig, sowie $Z = -X$. Wir definieren $\mu_X := E[X], \mu_Y := E[Y], v_X := \mathrm{Var}(X), v_Y := \mathrm{Var}(Y)$ und nehmen an $\mu_X, \mu_Y, v_X, v_Y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

a) $E[XY]$, b) $E[XZ]$, c) $\mathrm{Var}(Y+Z)$.

4a) $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$ // weil X und Y unabhängig

$= \mu_x \cdot \mu_y = \mu_x \mu_Y$

4b) $E[XZ] = E[X \cdot (-X)]$ // $Z = -X$ // X und X NICHT unabhängig

$= E[X \cdot (-1) \cdot X]$

$= -1 \cdot E[X^2]$ // Satz 10.3.a): $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X)^2) \quad | +(E(X))^2$

$= -1 \cdot (\mathrm{Var}(X) + (E(X))^2)$ $\quad E(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (E(X))^2$

$= -\mathrm{Var}(X) - (E(X))^2$

$= -v_x - (\mu_x)^2$

4c) $\mathrm{Var}(Y+Z) = \mathrm{Var}(Y - X)$ / $Z = -X$

$= \mathrm{Var}(Y) - \mathrm{Var}(X)$ // weil X und Y unabhängig

$= v_Y - v_x$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

// $\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]$

// oder: $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Sei X eine $\mathcal{U}([0,b])$-verteilte Zufallsvariable, wobei $b > 0$. Bestimmen Sie die Varianz von X.

3) $\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]$

$= E[(X - \frac{b}{2})^2]$ // Satz 9.7.:

Satz 9.7. *$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Dichte f. Dann gilt*

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

$= \int_0^b (x - \frac{b}{2})^2 \cdot \frac{1}{b}\, dx$

$= \int_0^b (x^2 - \cancel{2} \cdot \frac{b}{\cancel{2}} \cdot x + \frac{b^2}{4}) \cdot \frac{1}{b}\, dx = \int_0^b x^2 \cdot \frac{1}{b} - \underbrace{bx \cdot \frac{1}{b}}_{\frac{bx}{b}} + \frac{b^2}{4} \cdot \frac{1}{b}\, dx$

$= \int_0^b \frac{1}{b} x^2 - x + \frac{b}{4}\, dx$

$= \left[\frac{1}{3b} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{b}{4} x\right]_0^b$

$= \frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{4} + \frac{b^2}{4}$

$= \frac{b^2}{3} - \frac{b^2}{4} = \frac{4b^2}{12} - \frac{3b^2}{12} = \frac{b^2}{12}$

3) Andere Variante:

Aufgabe 3 $\quad X \sim \mathcal{U}[0,b]$, $b > 0$. Bestimmen: $\mathrm{Var}(X)$.

$\mathrm{Var}(X) \overset{10.3a}{=} E[X^2] - E[X]^2$

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{b} \cdot 1_{[0,b]}\, dx = \int_0^b x \cdot \frac{1}{b}\, dx = \frac{1}{b} \int_0^b x\, dx = \frac{1}{b} \cdot (\frac{1}{2} x^2 |_0^b) = \frac{1}{b} \cdot \frac{b^2}{2} = \frac{b}{2}$

$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{b} \cdot 1_{[0,b]}\, dx = \int_0^b x^2 \cdot \frac{1}{b}\, dx = \frac{1}{b} \int_0^b x^2 = \frac{1}{b} \cdot (\frac{1}{3} x^3 |_0^b) = \frac{1}{b} \cdot \frac{b^3}{3} = \frac{b^2}{3}$

$\Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \frac{b^2}{3} - (\frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{3} - \frac{b^2}{4} = \frac{4b^2}{12} - \frac{3b^2}{12} = \frac{b^2}{12}$