Erweiterte Korrekturhinweise für die Klausur zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 vom 13.02.2017

Dies ist *keine* Musterlösung. Sie können hier jedoch sehen, wie viele Teilpunkte es für die einzelnen Lösungsschritte gab.

Die fett gedruckten Teilpunkte sind von allen zu erwarten, die regelmäßig die Vorlesung besuchten, Hausaufgaben selbständig bearbeiteten und die Begriffe und Hauptergebnisse der Vorlesung kennen. Es ist zu betonen, dass man von Studierenden darüber hinaus selbständiges Denken, inhaltliche Fragen in der Vorlesung und eine gewisse Hartnäckigkeit beim Problemlösen erwarten kann.

Bei Rechenaufgaben sind natürlich Rechenfehler mit einzukalkulieren, daher habe ich in jeder Teilaufgabe angegeben, welche Minimalpunktzahl ich unter Berücksichtigung von Rechenfehlern von Ihnen erwartete; diese Punktzahl ist also teilweise geringer als die Summe der fett gedruckten Teilpunktzahlen.

Unter dem Stichwort „Material" ist außer bei Begriffsabfragen angegeben, welche Haus- und Präsenzaufgaben (teilweise Altklausuren oder Beispiele/Beweise aus der Vorlesung) mit der Teilaufgabe zu tun haben.

Unter „Anmerkung" sage ich, was mir bei den bisher bewerteten Klausuren in der jeweiligen Teilaufgabe auffiel.

Aufgabe 1: *Anwendungen des Gaußschen Eliminationsverfahrens*

(1,5 P.) $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1 P.) Basislösungen: $\ker(L_A) = \mathrm{LR}(A; \underline{0}) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

(1 P.) Laut Hausaufgabe bilden die den Pivotspalten der ZSF entsprechenden Spalten von A eine Basis des Spaltenraums, also $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

(0,5 P) Zeilen der ZSF bilden Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ des Zeilenraums von A.

Mindestpunktzahl 3 (ein bis zwei Rechenfehler)

Material: HA7.4, HA8.3, HA9.4, Aufgaben in allen Altklausuren, Lemmas 10.2, 10.5 und 10.11, Bsp. 10.21.

Anmerkung: Ich erwarte, dass bei einer solchen Aufgabe die meisten von Ihnen volle Punktzahl haben. Stattdessen gab es nur einmal (bei 75 TeilnehmerInnen!) volle Punktzahl und die meisten von Ihnen begingen neben Rechenfehlern noch theoretische Fehler. Das hat mich schockiert.

Aufgabe 2: (1 P.) Basisergänzungssatz: Kann Basis $\underline{b}_1, ..., \underline{b}_r$ von Bild(f) zu Basis $\underline{b}_1, ..., \underline{b}_n$ von V fortsetzen.
(0,5 P.) Formulierung der Rangformel. (0,5 P.) Anwendung $\dim(\ker(f)) = n - \dim(\text{Bild}(f)) = n - r$; sei $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_{n-r}$ eine Basis von $\ker(f)$.
(0,5 P.) Formulierung des Satzes über lineare Fortsetzung. (0,5 P.) Anwendung: g sei definiert durch $g(\underline{b}_i) := \begin{cases} 0 & \text{für } i = 1, ..., r \\ \underline{v}_{i-r} & \text{für } i = r+1, ..., n \end{cases}$.
(1 P.) $\text{Bild}(g) = \ker(f)$ und $\underline{v} := \sum_{i=1}^{n} \mu_i \underline{b}_i \in \ker(g) \iff \sum_{i=r+1}^{n} \mu_i \underline{v}_{i-r} = \underline{0} \overset{\text{Basis}}{\iff} \mu_{r+1} = ... = \mu_n = 0 \iff \underline{v} \in \text{Bild}(f)$.
Mindestpunktzahl 1
Material: Altklausur 24.02.2009. HA 6.1, HA 10.1. Beweis der Rangformel.
Anmerkungen:
Viele haben den Sinn der Aufgabenstellung nicht erfasst: g ist *nicht* vorgegeben! Die Aufgabe ist, zu erklären, wie man zu vorgegebenem f die Abbildung g konstruiert.
Viele dachten, Endomorphismen seien bijektiv.
Manche setzten voraus, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $n = 8$ gilt (wie in der Altklausur), aber haben auch die so konkretisierte Version der Aufgabe nicht gelöst. Das zeigt: Irrelevante Zusatzvoraussetzungen helfen bei Beweisaufgaben nicht.

Aufgabe 3: *Matrix einer linearen Abbildung*

a) **(1 P.)** ${}^{C}\underline{w} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ mit $\underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{c}_i$. ${}^{C}f(\underline{b}_j)$ ist j-te Spalte von ${}^{C}_{B}f$.

   Mindestpunktzahl 1

   Anmerkung: Viele verwendeten die Koordinatenabbildungen κ_B, κ_C, ohne zu sagen, was das ist; das ist zwar nicht die von mir erhoffte Antwort, wurde aber voll bewertet.

b) (1 P.) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, also ${}^{B}_{B}f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   Mindestpunktzahl 0,5 für Auswertung von f auf beiden Basisvektoren.

   Material: HA 10.4, auch HA 7.3 und 9.3, Beispiel nach Beobachtung 11.3 im Skript.

c) **(1 P.)** Multiplikation der Darstellungsmatrizen entspricht Verknüpfung der Abbildungen, also ${}^{C}_{C}f = {}^{C}_{B}\text{Id}\ {}^{B}_{B}f\ {}^{B}_{C}\text{Id}$ und $\mathbb{1} = {}^{C}_{B}\text{Id}\ {}^{B}_{C}\text{Id}$.
   (1 P.) Rechenregeln für Determinante $\rightsquigarrow \det\left({}^{C}_{C}f\right) =$
   $= \det\left({}^{C}_{B}\text{Id}\right) \det\left({}^{B}_{B}f\right) \det\left({}^{B}_{C}\text{Id}\right) = \det\left({}^{C}_{B}\text{Id}\right) \det\left({}^{B}_{B}f\right) \det\left({}^{C}_{B}\text{Id}\right)^{-1} = \det\left({}^{B}_{B}f\right)$

Mindestpunktzahl 1 — es handelt sich um die *Reproduktion* eines kurzen Beweises aus der Vorlesung (Lemma 12.9) bei gegebenen Lösungshinweisen, insofern sollte jede/r von Ihnen hier eine teilweise Antwort geben können.

d) i) **(0,5 P.)** Bzgl. Standardbasis E: ${}^{E}_{E}f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1 P.) $\det\left({}^{E}_{E}f\right) = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ (Entwicklung nach dritter Spalte). (0,5 P.) Beim Verknüpfen von Abbildungen werden die zugehörigen Matrizen multipliziert, und (0,5 P.) auch die Determinante ist multiplikativ. (0,5 P.) Also $\det\left({}^{E}_{E}(f^n)\right) = 2^n \neq \det \mathbb{1}_3 = 1$.

Mindestpunktzahl 1 (bei höchstens einem Rechenfehler) — aufgrund des Lösungshinweises konnte man erwarten, dass Sie die Determinante von ${}^{E}_{E}f$ ausrechnen.

Material: Präsenzaufgabe 12.1

ii) **Zusatzaufgabe** (2 Bonus-P.) $\dim(\text{Bild}(f)) = \text{Rang}\left({}^{C}_{B}f\right) = 3 \neq \text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2$ (auszurechnen mit Gauß).

Anmerkung: Mit dem Lösungshinweis hoffte ich, Sie auf den Begriff „Rang“ zu bringen. „Invertierbarkeit“ geht natürlich auch.

Aufgabe 4: *Orthonormalbasen*

a) **(0,5 P.)** Die Matrix ist symmetrisch.
(0,5 P.) $\det(1) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$,
(0,5 P.) $\det(Q) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$,
(0,5 P.) also positiv definit nach dem Hurwitz-Kriterium.

Mindestpunktzahl 1,5 (höchstens ein Rechenfehler).

Material: HA 13.1, 13.2 und 13.4.a, Beispiele nach Satz 14.10.

Anmerkung: Es versteht sich von selbst, dass bei der Anwendung eines Satzes (hier: Hurwitz–Kriterium) auch dessen Voraussetzungen verifiziert werden müssen (hier: Symmetrie der Matrix).

b) **(0,5 P.)** Begriffskenntnis „selbstadjungiert“, **(0,5 P.)** Anwendung auf die Aufgabe: Es ist zu verifizieren, dass $A^\top Q = QA$.
(1 P.) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Alternativ: $\underline{u}^\top QA\underline{v} = \underline{u}^\top A^\top Q\underline{v}$ direkt nachweisen, für beliebige $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$.

Mindestpunktzahl 1

Material: HA 13.4.c

c) **(1 P.)** $P_A(X) = (X-1) \cdot (X^2 - X - 2) = (X-1) \cdot (X+1) \cdot (X-2)$, also EW 1, 2, -1.
(3 P.) für die Berechnung der Eigenvektoren: $\underline{v}_1 := (2,1,1)^\top$ zum EW 2, $\underline{v}_2 := (0,0,1)^\top$ zum EW 1, $\underline{v}_3 := (2,-2,1)^\top$ zum EW -1.
(1 P.) Da sie zu paarweise verschiedenen EW einer selbstadjungierten Abbildung gehören, sind die EV paarweise orthogonal.
(2 P.) für die Normierung: $\underline{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{v}_1$, $\underline{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{v}_2$, $\underline{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{v}_3$.

Punktabzug von (1 P.) bei Verwendung des Standardskalarprodukts und sonst korrekter Rechnung.

Mindestpunktzahl 4 (Im Vergleich zu den fett gedruckten Teilpunkten (1 P.) weniger wegen ein bis zwei Rechenfehlern und (1 P.) mehr dafür, das Problem der Orthogonalität und Normierung zu erörtern).

Material: HA 13.3, für Berechnung von Eigenvektoren ferner HA 11.1, 11.2, 12.1.

d) **(1 P.)** $\underline{v}_1^\top Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}_1^\perp = \mathrm{Span}(\underline{w}_2, \underline{w}_3)$ mit $\underline{w}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{w}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
(1 P.) $\underline{w}_2^\top Q w_3 = 1$. Ersetze $\underline{w}_3$ durch $\underline{w}_3' := \underline{w}_3 - 1 \cdot \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
(1 P.) Normierung: $\underline{w}_2^\top Q \underline{w}_2 = 1$, $\underline{w}_3'^\top Q \underline{w}_3' = 2$, daher ONB $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Mindestpunktzahl 1 — selbst wenn bei der Berechnung einer nicht-orthonormalen Basis von $\underline{v}_1^\perp$ etwas schief geht, ist doch noch ein Punkt für die Kenntnis des Gram-Schmidt-Verfahrens erwartbar.

Material: HA 12.3

Aufgabe 5: *Euklidische Räume und Hauptachsentransformation*

a) Sei $M \in GL_n(\mathbb{R})$ und $A := M^\top M$.
(0,5 P.) Zu zeigen $A^\top = A$. (0,5 P.) $A^\top = \left(M^\top M\right)^\top = M^\top \left(M^\top\right)^\top = M^\top M = A$.
Sei $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$.
(1 P.) Wegen $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ist $\mathrm{LR}(A; \underline{0}) = \{\underline{0}\}$ und somit $A\underline{v} \neq \underline{0}$.
(1 P.) Weiter ist $\underline{v}^\top A \underline{v} = \left(\underline{v}^\top M^\top\right)(M\underline{v}) = M\underline{v} \bullet M\underline{v} > 0$, da das Standardskalarprodukt positiv definit ist.

Mindestpunktzahl 1, nämlich je (0,5 P.) für den Begriff der Symmetrie und dafür, den Lösungshinweis zu beachten, also $\underline{v}^\top M^\top M \underline{v}$ mit dem Standardskalarprodukt in Bezug zu setzen.

b) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch.
(0,5 P.) Formulierung des Satzes über Hauptachsentransformation in der

Art „Es gibt eine diagonalisierende Matrix“, und weitere (0,5 P.), wenn es konkreter hieß $\exists S \in SO(n)$ mit $D = S^\top AS$ diagonal.
(0,5 P.) Orthogonal heißt $S^{-1} = S^\top$, (0,5 P.) somit $A = SDS^\top$.
(1 P.) Es sei $\hat{D} \in M_n(\mathbb{C})$ eine Diagonalmatrix, so dass $D_{i,i} = (\hat{D}_{i,i})^2$ für alle $i = 1, ..., n$; eine solche Matrix gibt es in $M_n(\mathbb{C})$, aber nicht notwendig in $M_n(\mathbb{R})$, und es gilt $D = \hat{D}^2$ sowie $\hat{D}^\top = \hat{D}$.
(1 P.) Sei $C = \hat{D}S^\top$. Dann ist $A = S\hat{D}\hat{D}S^\top = \left(\hat{D}S^\top\right)^\top \left(\hat{D}S^\top\right) = C^\top C$.

Mindestpunktzahl 1

Zusammenfassung der Mindestpunktzahlen

A1	3 von 4
A2	1 von 4
A3	$3.5 = 1 + 0.5 + 1 + 1$ von 7
A4	$7.5 = 1.5 + 1 + 4 + 1$ von 14
A5	$2 = 1 + 1$ von 7
Gesamt	$17 = 3 + 1 + 3.5 + 7.5 + 2$ von 36