Sto: 5.Hausaufgabe (22.11.23) - Till Billerbeck(G3), Cora Zeitler(G1)

Donnerstag, 16. November 2023 14:53

Aufgabe 3 🏠 **(4 Punkte)**

An einem bestimmten Punkt einer Ermittlung ist eine Kommissarin sich zu 60% sicher, dass der Verdächtigte schuldig ist. Jetzt findet sie ein neues Beweisstück, das zeigt, dass der Täter Linkshänder ist. Angenommen 10,6% der (unschuldigen) Bevölkerung ist linkshändig. Wie sicher sollte sich die Detektivin sein, dass der Verdächtige schuldig ist, wenn dieser tatsächlich linkshändig sein sollte?

3) S = "Sicher das Verdächtigte schuldig ist"

L = "linkshänder aus (unschuldigen) Bevölkerung"

→ $P(S) = 0{,}60$, $P(S^c) = 0{,}40$

→ $P(L) = 0{,}106$

↳ $P(L|S^c) = 0{,}106$, da 10,6% aller unschuldigen Linkshänder sind

$P(L|S) = 1$, da Beweisstück zeigt, dass Täter linkshänder ist

$$↳ P(S|L) = \frac{P(L|S)\cdot P(S)}{P(L|S)\cdot P(S) + P(L|S^c)\cdot P(S^c)} \quad // \text{ Bayes}$$

$$= \frac{1\cdot 0{,}60}{1\cdot 0{,}60 + 0{,}106\cdot 0{,}40} \approx 0{,}934$$

↳ Detektivin kann sich zu ≈93,4% sicher sein, dass der Verdächtigte schuldig ist, wenn dieser linkshänder ist

Aufgabe 4 🏠 **(4 Punkte)**

Richtig oder falsch? *Korrekte Antworten geben einen Punkt, inkorrekte einen Minuspunkt. Die minimale Punktzahl ist trotzdem 0.*

a) Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A bezüglich ist B ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ereignisse A und B beide eintreten.

b) Ein Test auf eine Infektion fällt bei 98% der Infizierten positiv aus. Das heißt, wenn Ihr Test positiv ausfällt, dann können Sie sich zu 98% sicher sein, dass Sie infiziert sind.

c) Für alle Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{A}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit gilt
$$P(C|A \cup B)P(B|A) = P(C \cup B|A).$$

d) Für alle Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{A}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit gilt
$$P(C|A \cap B)P(B|A) = P(C \cap B|A).$$

4) a) falsch (folglich aus Defin. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

b) falsch ($P(T_+ | I) \neq P(I | T_+)$)

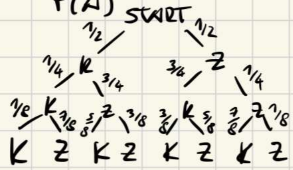
c) falsch

d) richtig (Def. 4.1. , $P(B\cap A)$ kürzt sich)

c) $\forall$ WR $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $A, B, C \in \mathcal{A}$ mit $P > 0$: $P(C|A \cup B) \cdot P(B|A) = P(C \cup B|A)$?

$$P(C|A \cup B) \cdot P(B|A) = \frac{P(C \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \cdot \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \qquad P(C \cup B|A) = \frac{P((C \cup B) \cap A)}{P(A)}$$

Gegenbeispiel: - 3 Münzwürfe mit Wahrscheinlichkeitsbaum:



A = „erster Wurf Kopf" $\rightsquigarrow |A| = 4 \rightsquigarrow \{\underline{KKK}, \underline{KKZ}, \underline{KZK}, KZZ\}$

B = „zweiter Wurf Kopf" $\rightsquigarrow |B| = 4 \rightsquigarrow \{\underline{KKK}, \underline{KKZ}, ZKK, ZKZ\}$

C = „dritter Wurf Kopf" $\rightsquigarrow |C| = 4 \rightsquigarrow \{\underline{KKK}, \underline{KZK}, \underline{ZKK}, ZZK\}$

$P(KKK) = 1/64$ $P(KKZ) = 7/64$ $P(KZK) = 15/65$ $P(KZZ) = 9/64$

$P(ZKK) = 9/64$ $P(ZKZ) = 15/64$ $P(ZZK) = 7/64$ $P(ZZZ) = 1/64$

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$

$A \cup B$ = „erster $\vee$ zweiter Wurf Kopf" $= \{KKK, KKZ, KZK, KZZ, ZKK, ZKZ\} \rightsquigarrow P(A \cup B) = 56/64$

$C \cup B$ = „zweiter $\vee$ dritter Wurf Kopf" $= \{KKK, KKZ, ZKK, ZKZ, KZK, ZZK\}$

$\underline{(C \cup B) \cap A} = \{KKK, KKZ, KZK\} \rightsquigarrow P((C \cup B) \cap A) = 23/64$

$\underline{C \cap (A \cup B)} = \{KKK, KZK, ZKK\} \rightsquigarrow P(C \cap (A \cup B)) = 25/64$

$\underline{B \cap A} = \{KKK, KKZ\} \rightsquigarrow P(A \cap B) = 8/64$

$$\Rightarrow P(C|A \cup B) \cdot P(B|A) = \frac{23/64}{56/64} \cdot \frac{8/64}{1/2} = \frac{25}{224} \neq \frac{23/64}{1/2} = \frac{23}{32} = P(C \cup B|A) \Longrightarrow \underline{\underline{\text{Falsch!}}}$$

d) $\forall$ WR $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $A, B, C \in \mathcal{A}$ mit $P > 0$: $P(C|A \cap B) \cdot P(B|A) = P(C \cap B|A)$

$$P(C|A \cap B) \cdot P(B|A) = \frac{P(C \cap A \cap B)}{\cancel{P(A \cap B)}} \cdot \frac{\cancel{P(B \cap A)}}{P(A)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A}$$

$$P(C \cap B|A) = \frac{P(C \cap B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)} \Longrightarrow \underline{\underline{\text{Richtig!}}}$$