Sto: 7.Hausaufgabe (6.12.23) - Till Billerbeck(G3), Cora Zeitler(G1)

Donnerstag, 30. November 2023 09:08

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Bemerkung: Das ist eine Fortsetzung von Aufgabe 3. Es seien $M, N, n \in \mathbb{N}$ mit $M, n \leq N$. Sie ziehen aus einem Stapel mit N Karten eine Hand bestehend aus n Karten. Von den N Karten im Stapel haben M die gleiche Farbe, z.B. $\diamondsuit$ (Karo).

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der gezogenen Hand genau $n-1$ der $\diamondsuit$-Karten sind?

b) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der $\diamondsuit$-Karten in der gezogenen Hand. Bestimmen Sie $P(X = k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

4a) geg: - N-Karten Stapel mit gleiche Farbe M-Karo

- gezogene Hand aus n-Karten

ges: P(genau n-1 Karo)

Lsg: mit Binomialkoeffizienten

① Anzahl der Möglichk. n-1 Karo aus M-Karo

$\hookrightarrow \binom{M}{n-1}$

② Anzahl der Möglichkeiten der restlichen Karten: $n-(n-1)$ aus den Karten ohne Karo: $N-M$

// $n-(n-1$
$= n-n+1$
$= 1$

$\hookrightarrow \binom{N-M}{1}$

③ Gesamtanzahl der Möglichk. n-Handkarten aus N-Stapelkarten zu ziehen

$\hookrightarrow \binom{N}{n}$

$$\Rightarrow P(\text{genau } n-1 \text{ Karo}) = \frac{\binom{M}{n-1} \cdot \binom{N-M}{1}}{\binom{N}{n}} = \underline{\underline{\frac{\binom{M}{n-1} \cdot (N-M)}{\binom{N}{n}}}}$$

4b) geg: X = Anzahl der $\diamondsuit$ (Karo)-Karten in der gezogenen Hand

ges: $P(X=k)$ / $\forall k \in \mathbb{N}_0$

Lsg: mit Binomialkoeffizenten

// keine Binomialverteilung, weil ziehen der Karo abhängig voneinander

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

→ $\binom{M}{k}$ ... Anzahl der Mglkeiten, k-Karo in Hand aus M-Karo in Stapel

→ $\binom{N-M}{n-k}$ .... Anzahl der Mglkeiten, der restlichen Karten $(n-k)$ ohne Karo in Stapel $(N-M)$

→ $\binom{N}{n}$ ... Gesamtanzahl der Mglkeiten, n-Handkarten aus N-Kartenstapel zu ziehen

→ geg war: für alle $k \in \mathbb{N}_0$ $\Rightarrow$ $k \leq n$

Aufgabe 5 🏠 **(4 Punkte)**

Eine Fluggesellschaft verkauft 52 Tickets für einen Flug, bei dem höchstens 50 Fluggäste mitreisen können. Am Tag des Abflugs erscheint jeder Kunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95. Die Kunden erscheinen dabei unabhängig voneinander. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen mehr als 50 Fluggäste?

5) → $n = 52$ (Anzahl der verkauften Tickets)

→ $p = 0{,}95$ (Wahrscheinlichkeit das Kunde erscheint)

→ X = Anzahl der Kunden, die tatsächlich erscheinen

ges: Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 50 Kunden erscheinen

↳ $P(X > 50)$

gesucht

→ Wahrscheinlichk. das k Kunden erscheinen: durch Binomialverteilung:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad // \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$P(X=k) = \binom{52}{k} \cdot (0{,}95)^k \cdot (0{,}05)^{52-k} \quad // X = B(n,p)$$

→ für $k = 51, 52 \dots 52$ (Summe)

$$P(X>50) = \sum_{k=51}^{52} P(X=k)$$

→ Binomialkoeffizienten ausrechnen mit Summe für je einzelnen Ausgang:

$$P(X=51) = \binom{52}{51} \cdot (0{,}95)^{51} \cdot (0{,}05)^{52-51} \quad // \binom{52}{51} = \frac{52!}{51! \cdot (52-51)!} = \frac{52!}{51! \cdot 1!} = 52$$

$$= 52 \cdot (0{,}95)^{51} \cdot 0{,}05$$

$$P(X=52) = \binom{52}{52} \cdot (0{,}95)^{52} \cdot (0{,}05)^{52-52}$$

$$= 1 \cdot (0{,}95)^{52} \cdot \underbrace{(0{,}05)^0}_{1}$$

$$= (0{,}95)^{52}$$

→ Gesamtwahrscheinlichkeit berechnen:

$$P(X>50) = P(X=51) + P(X=52)$$

$$= 52 \cdot (0{,}95)^{51} \cdot 0{,}05 + (0{,}95)^{52} \approx 0{,}26$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 26% kommen mehr als die 50 max. Fluggäste