FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Dr. Simon King

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Modul–Nr.: FMI-MA3023, BGEO1.3.5

Wintersemester 2016/17 Prüfungsdatum: 21.03.2017

- Hilfsmittel: Ein handgeschriebenes Din–A4–Blatt (Vorder- und Rückseite), nicht gedruckt, nicht fotokopiert. Keine elektronischen Hilfsmittel, auch keine Taschenrechner.
  Kommunikationsgeräte (z.B. Handys) müssen ausgeschaltet sein.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und geben Sie die jeweilige Aufgabennummer, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.
- Dieses Deckblatt bitte zusammen mit Ihren Lösungen abgeben.
- Alle Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar. Sie dürfen die in einer Teilaufgabe zu beweisenden Aussagen in allen späteren Teilaufgaben als gegeben ansehen. Alle Antworten sind zu begründen.
- Die Lösungshinweise deuten einen *möglichen* Lösungsweg sowie erreichbare Teilpunkte an. Andere Lösungswege werden analog bewertet.

Name, Vorname:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Ich erkläre hiermit meine Prüfungsfähigkeit vor Beginn der Prüfung:

Jena, der 21.03.2017, Unterschrift:

Prüfungsdauer: 150 Min. Zum Bestehen reichen 17 Punkte aus 35.

1	2	3	4	5	6	$\sum$
/ 4	/ 5	/ 7	/ 5	/ 7	/ 7	/ 35

Prüfer: Simon King **Note:**

FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Dr. Simon King

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Modul–Nr.: FMI-MA3023, BGEO1.3.5

Wintersemester 2016/17 Prüfungsdatum: 21.03.2017

Aufgabe 1: *Basen*

(4 P.) Sei $A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$.

Bestimmen Sie eine aus Spalten von A bestehende Basis des Spaltenraums von A und ergänzen Sie sie zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$. **Hinweis:** Beides zusammen lässt sich sich durch Berechnung der Zeilenstufenform einer *einzelnen* geeigneten (4×7)-Matrix lösen. Sie dürfen aber auch in zwei getrennten Schritten vorgehen.

Aufgabe 2: *Matrixinvertierung*

(5 P.) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Berechnen Sie A^{-1}.

Aufgabe 3: *Untere Dreiecksmatrizen*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ die Menge aller Matrizen $A \in M_n(\mathbb{R})$, die auf der Hauptdiagonale 1 sind und die oberhalb der Hauptdiagonale Null sind. Anders gesagt: $\forall i = 1, ..., n\colon\ A_{i,i} = 1$ und $\forall j = i+1, ..., n\colon\ A_{i,j} = 0$. Also zum Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_4(\mathbb{R})$. Beweisen Sie:

a) (3 P.) $\forall A, B \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})\colon\ AB \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$. **Hinweis:** Definition von $(AB)_{i,j}$ als Summe von Produkten von Einträgen von A, B. Warum ist für $j > i$ jeder der Summanden Null und für $j = i$ nur ein Summand nicht Null?

b) (4 P.) $\forall A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})\colon\ A$ ist invertierbar und $A^{-1} \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$.
Möglicher Beweisweg: Warum ist $\mathbb{1}_n$ das einzige Element von $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ in Zeilenstufenform? Warum ergibt ein nicht-optionaler Schritt des Gauß-Algorithmus angewandt auf ein Element von $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ stets ein Element von $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$? Folgern Sie, dass die Berechnung von A^{-1} aus der erweiterten Matrix $(A|\mathbb{1}_n)$ ohne die optionalen Schritte des Gauß-Algorithmus möglich ist. Folgern Sie schließlich die Behauptung durch Betrachtung der rechten Hälfte von $(A|\mathbb{1}_n)$.

Bitte wenden

Aufgabe 4: *Lineare Abbildungen*

a) (2 P.) Wie lauten die Dimensionsformel und die Rangformel? Was besagt der Satz über die lineare Fortsetzung?

Im Rest der Aufgabe sei $f\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ eine surjektive lineare Abbildung.

b) (3 P.) Sei $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ linear, $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$. Beweisen Sie $\mathbb{R}^7 = \ker(f) + \mathrm{Bild}(g))$. **Hinweis:** Warum ist g injektiv? Bestimmen Sie $\dim(\ker(f))$ und $\dim(\mathrm{Bild}(g)$ mit der Rangformel. Zeigen Sie $\ker(f) \cap \mathrm{Bild}(g) = \{\underline{0}\}$ (Definition von g) und folgern Sie den Rest mit der Dimensionsformel.

c) **Zusatzaufgabe (3 Bonus-P.):**
Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}_f := \{g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7 | \, g \text{ linear}, \ f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\}$ ein affiner Unterraum im $\mathbb{R}$-Vektorraum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^7$ ist, und bestimmen Sie $\dim(\mathcal{S}_f)$.

Aufgabe 5: *Eigenwerte/Diagonalisierbarkeit*

a) (2 P.) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wann heißt eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ***diagonalisierbar***? Geben Sie alle vier Charakterisierungen dieses Begriffes an.

b) (5 P.) Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$. Berechnen Sie die Eigenwerte von A und prüfen Sie, ob A diagonalisierbar ist. **Hinweis:** Blockgestalt. Zur Prüfung der Diagonalisierbarkeit genügt es (warum?), den Eigenraum eines bestimmten Eigenwertes (welches?) zu berechnen.

c) **Zusatzaufgabe (3 Bonus-P.):** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Sei $T \in M_n(\mathbb{R})$ eine diagonalisierende Matrix gleichzeitig für A und für B. Beweisen Sie $AB = BA$. **Hinweis:** Transformation von A, B in Diagonalmatrizen D_A, D_B, Einsetzen in $D_A \cdot D_B$, $D_B \cdot D_A$, Rücktransformation. Warum $D_A D_B = D_B D_A$?

Aufgabe 6: *Hauptachsentransformation*

a) (1 P.) Wie ist der Begriff ***spezielle orthogonale Matrix*** definiert?

b) (6 P.) Es sei $A := \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Sie dürfen verwenden, dass A die Eigenwerte 0 und -3 hat. Berechnen Sie eine diagonalisierende Matrix $S \in SO(3)$ für A.

Viel Erfolg!

Erreichbare Punktzahl: 35