Lösungshinweise zur Klausur vom 23.02.2018

Aufgabe 1: *Lineare Gleichungssysteme*

a) Lin. unabh. $\iff \forall \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$: Wenn $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$ dann $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 0$.
Erzeugendensystem $\iff \forall \vec{v} \in V\colon\ \exists \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}\colon\ \vec{v} = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{v}_i$.

b) Gauß: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 2 & -9 \\ 2 & 7 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -4 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Pivotspalten der ZSF entsprechen Basis des Spaltenraums, also Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
- Nichtnullzeilen der ZSF bilden Basis des Zeilenraums, also Basis $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Einzige Basislösung des homogenen Systems: $\vec{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
  Spezielle Lösung des inhomogenen Systems: $\vec{x}_{\text{inh}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. $\mathrm{LR}(A; \vec{b}) = \{\vec{x}_{\text{inh}} + c\vec{\beta}_3 \mid c \in \mathbb{R}\}$.

c) **Zusatzaufgabe:** Sei $r := \mathrm{Rang}(A)$; das ist insbesondere auch der Zeilenrang. Dann $\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} A^\top & \vec{0} \\ \vec{b}^\top & 1 \end{pmatrix} = r+1$, da die letzte Zeile als einzige einen Eintrag in der letzten Spalte hat und daher linear unabhängig von allen vorherigen Zeilen ist. Auch $\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} A^\top \\ \vec{b}^\top \end{pmatrix} = r+1$, denn wegen der Voraussetzung $\mathrm{LR}(A;\vec{b}) = \emptyset$ ist $\vec{b}$ nicht im Spaltenraum von A (also $\vec{b}^\top$ nicht im Zeilenraum von $A^\top$) enthalten.
Das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} A^\top \\ \vec{b}^\top \end{pmatrix} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{pmatrix}$ hat eine Lösung, weil der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Matrix ist.

Aufgabe 2: *Euklidische Räume*

a) i) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, also nicht positiv definit (kein Skalarprodukt).

ii) $6 > 0$, $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0$, $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & -2 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (30-4) + 5 \cdot (-30) = 30 - 6 \cdot 4 = 6 > 0$, also positiv definit (Skalarprodukt).

b) $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ sind schon orthogonal.
$\vec{w}_3 := \vec{u}_3 - \frac{\langle \vec{u}_1 | \vec{u}_3 \rangle}{\langle \vec{u}_1 | \vec{u}_1 \rangle} \vec{u}_1 - \frac{\langle \vec{u}_2 | \vec{u}_3 \rangle}{\langle \vec{u}_2 | \vec{u}_2 \rangle} \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

Reskaliert $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, Länge $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Also ONB $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ \frac{3}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

c) $\vec{y} \perp \vec{b} \iff \vec{b}^\top \vec{y} = 0$; $\vec{b}^\top \vec{y} = (A\vec{x})^\top \vec{y} = \vec{x}^\top (A^\top \vec{y}) = 0$.

Aufgabe 3: *Lineare Abbildungen*

a) Sei $f\colon V \to W$ linear. $\ker(f) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\}$ und $\mathrm{Bild}(f) = \{f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}$. Für V endlichdimensional sagt die Rangformel: $\dim V = \dim(\ker(f)) + \mathrm{Rang}(f) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$.

b) $\forall c, d \in \mathbb{K}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V\colon\ h(c\vec{v} + d\vec{w}) = 2f(c\vec{v} + d\vec{w}) - 5g(c\vec{v} + d\vec{w}) = 2cf(\vec{v}) + 2df(\vec{w}) - 5cg(\vec{v}) + 5dg(\vec{w}) = ch(\vec{v}) + dh(\vec{w})$.

c) Die Abbildung $h\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $h(\vec{v}) := 2\psi(\vec{v}) - 5\varphi(\vec{v})$ ist linear. Also (Rangformel) $5 = \mathrm{Rang}(h) + \dim(\ker(h)) \le 3 + \dim(\ker(h))$. Folglich $\ker(h) \neq \{\vec{0}\}$, d.h. $\exists \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, mit $h(\vec{v}) = \vec{0}$, d.h. $5\varphi(\vec{v}) = 2\psi(\vec{v})$.

d) $E_\lambda(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}\} = \ker(\varphi)$, ebenso $\ker(\psi) = E_\mu(A)$. Rangformel $\Rightarrow$ $n = \dim(\mathbb{K}^n) = \mathrm{Rang}(\varphi) + \dim(\ker(\varphi)) = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) + \dim(E_\lambda(A))$.

e) $\forall \vec{x} \in \mathrm{Bild}(\varphi)$, d.h. $\vec{x} = A\vec{y} - \lambda\vec{y}$ für ein $\vec{y} \in \mathbb{K}^n$ gilt $\psi(\vec{x}) = \psi \circ \varphi(\vec{y}) = (A - \mu\mathbb{1}_n) \cdot (A - \lambda\mathbb{1}_n)\vec{y} = \vec{0}$ nach Voraussetzung, d.h. $\vec{x} \in \ker(\psi) = E_\mu(A)$.

f) $n = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) + \dim(E_\lambda(A)) \le \dim(E_\mu(A)) + \dim(E_\lambda(A)) \le n$ (ersteres nach den vorigen Teilaufgaben, letzteres da die beiden Eigenwerte verschieden sind), folglich $n = \dim(E_\mu(A)) + \dim(E_\lambda(A))$, und das impliziert die Diagonalisierbarkeit von A.

Aufgabe 4: *Eigenwertprobleme*

a) Sei A die gegebene Matrix. $\chi_A(X) = X^2 - X + 1$. $X^2 - X = -1 \iff (X - 1/2)^2 = -1 + 1/4 = -3/4$, also Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Sei A die gegebene Matrix. Berechnung der Eigenwerte via Blockgestalt: $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-5 & 2 \\ -4 & X+1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 2 & X+1 \end{vmatrix} = (X^2 - 4X + 3) \cdot (X^2 - X) = (X-1)(X-3)X(X-1)$, also Eigenwerte 0, 1, 3.
Berechnung der Eigenräume:

$\lambda = 0$: $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $E_0(A) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix})$

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -7 & -5 \\ -4 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ streiche Zeilen 2 und 4, also $E_1(A) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$.

$\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -7 & -5 \\ -4 & 4 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $E_3 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Somit ist (ggf. mit oder ohne Skalierung der Spalten) $S := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine diagonalisierende Matrix für A.