Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ "Фундаментальные науки"

КАФЕДРА "Вычислительная математика и математическая физика"(ФН-11)

ОТЧЕТ

к домашннему заданию №1 на тему

Марковская цепь

Дисциплина: *Теория случайных процессов*

Вариант: **7**

Студент группы ФН11-61Б ____________________ А.Е. Каргополов
(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Преподаватель, канд. физ.-мат. наук, доцент ____________________ Т.В. Облакова
(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Оценка: ____________________

Москва, 2023 г.

Задание

Дана однородная Марковская цепь с данным числом состояний $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$. Ненулевые переходные вероятности $p_{ij}, i \neq j$, заданы в таблице.

$$m = 6 \quad k = 25 \quad n = 130$$

$$p_{12} = 0.3 \quad p_{21} = 0.2 \quad p_{23} = 0.2 \quad p_{34} = 0.1$$
$$p_{45} = 0.3 \quad p_{56} = 0.2 \quad p_{61} = 0.4$$

1. Выпишите матрицу переходных вероятностей

2. Изобразите размеченный граф Марковской цепи

3. Докажите, что цепь эргодическая

4. Смоделируйте вектор начальных вероятностей $p(0)$ согласно приложенному алгоритму

5. Вычислите безусловные вероятности состояний смоделированной цепи на k шаге по формуле из лекции 1 для полученного $p(0)$

6. Смоделируйте n траекторий полученной цепи за k шагов (см алгоритм ниже). Несколько траекторий выведите на печать

7. По полученным реализациям траекторий найдите вектор эмпирических безусловных вероятностей состояний цепи на k шаге

8. Сравните найденные эмпирические вероятности с теоретическими для k шага

9. Вычислите финальные вероятности для рассматриваемой Марковской цепи (лекция 2) и сравните их с вероятностями состояний на k шаге

10. Сформулируйте выводы

Решение

In [ ]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
import seaborn as sns
```

In [ ]:
```
pd.set_option('display.max_columns', 100)
```

In [ ]:
```
np.random.seed(42)
```

In [ ]:
```
m = 6
k = 25
n = 130
```

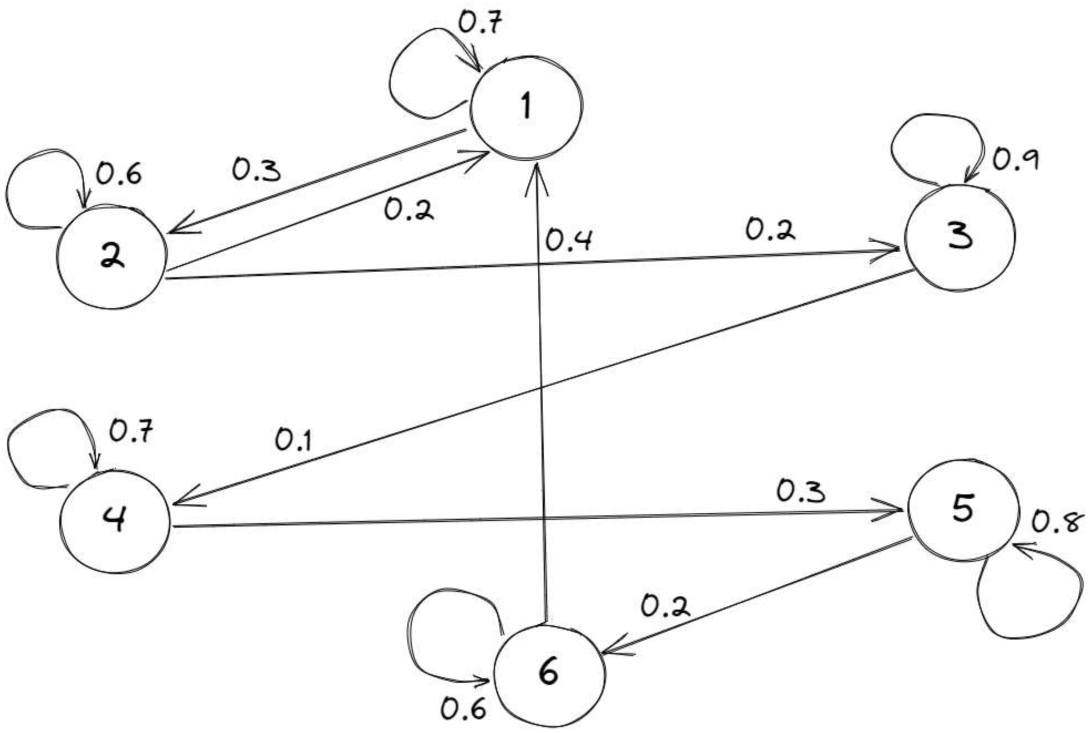
1. Матрица переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

In [ ]:
```
P = np.array([[0.7, 0.3, 0, 0, 0, 0],
              [0.2, 0.6, 0.2, 0, 0, 0],
              [0, 0, 0.9, 0.1, 0, 0],
              [0, 0, 0, 0.7, 0.3, 0],
              [0, 0, 0, 0, 0.8, 0.2],
              [0.4, 0, 0, 0, 0, 0.6]])
print(P)
print(f'Размерность полученной матрицы: {P.shape}')
print(f'Проверим, является ли полученная матрица стохастической: {(P.sum(axis=1)
```

```
[[0.7 0.3 0.  0.  0.  0. ]
 [0.2 0.6 0.2 0.  0.  0. ]
 [0.  0.  0.9 0.1 0.  0. ]
 [0.  0.  0.  0.7 0.3 0. ]
 [0.  0.  0.  0.  0.8 0.2]
 [0.4 0.  0.  0.  0.  0.6]]
Размерность полученной матрицы: (6, 6)
Проверим, является ли полученная матрица стохастической: True
```

2. Размеченный граф Марковской цепи



3.Доказательство эргодичности

In [ ]:
```
def count_zeros(pow : int) -> np.int32:
    return (np.linalg.matrix_power(P, pow).ravel() == 0).sum()

count_zeros = np.vectorize(count_zeros)
```

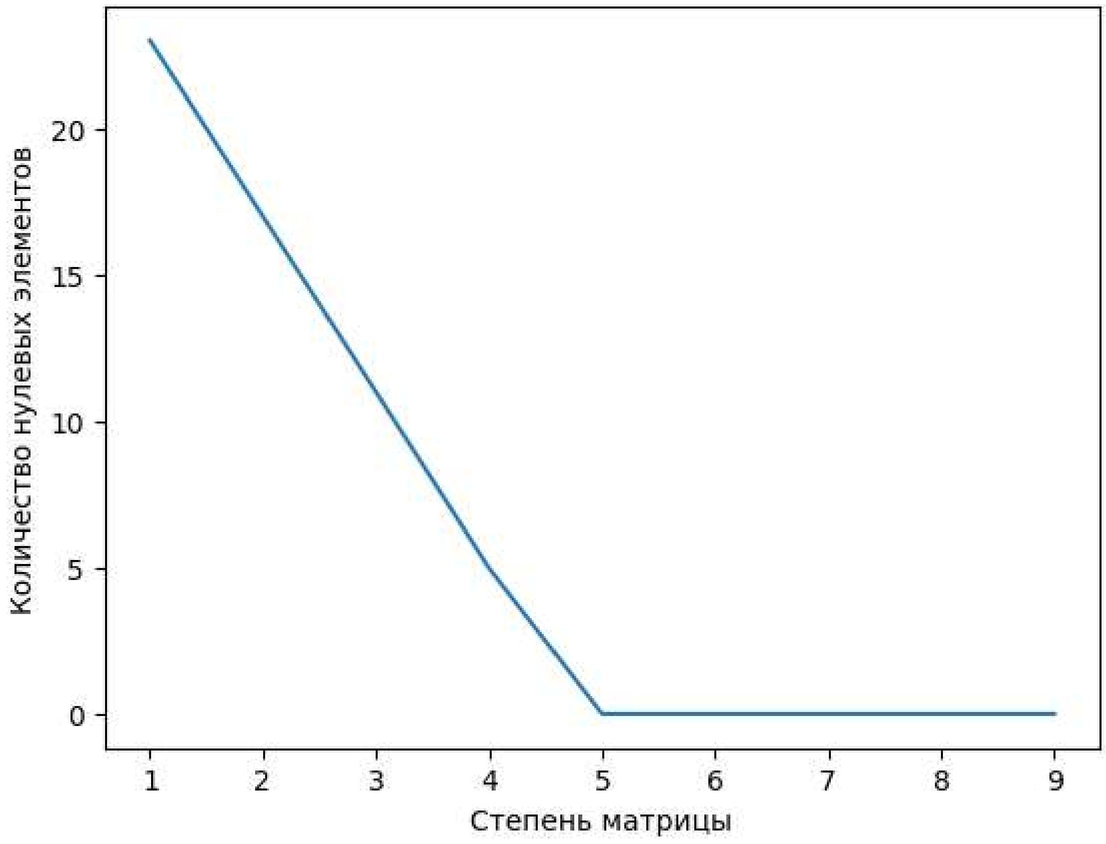
In [ ]:
```
df = pd.DataFrame()
df['Степень матрицы'] = np.arange(1, 10)
df['Количество нулевых элементов'] = count_zeros(df['Степень матрицы'])
df
```

Out[ ]:

	Степень матрицы	Количество нулевых элементов
0	1	23
1	2	17
2	3	11
3	4	5
4	5	0
5	6	0
6	7	0
7	8	0
8	9	0

In [ ]:
```
sns.lineplot(df, x='Степень матрицы', y='Количество нулевых элементов')
```

Out[ ]:
```
<AxesSubplot: xlabel='Степень матрицы', ylabel='Количество нулевых элементов'>
```



Так как существует $n_0 = 5$ такое, что $\min\limits_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$, цепь является эргодической.

Выведем P^5.

In [ ]:
```
np.round(np.linalg.matrix_power(P, 5), 4).tolist()
```

Out[ ]:
```
[[0.3584, 0.3481, 0.2544, 0.032, 0.0067, 0.0004],
 [0.2326, 0.2423, 0.4017, 0.0848, 0.0343, 0.0043],
 [0.0089, 0.0007, 0.5905, 0.2112, 0.1548, 0.0339],
 [0.1193, 0.0245, 0.0014, 0.1681, 0.4788, 0.2079],
 [0.2935, 0.1111, 0.0173, 0.0005, 0.3277, 0.2499],
 [0.4642, 0.3292, 0.1198, 0.0084, 0.0007, 0.0778]]
```

4. Моделировние вектора начальных вероятностей $p(0)$ согласно приложенному алгоритму

а)Генерируем вектор $\vec{r}$ из независимых и равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин;
б)Строим вариационный ряд, сортируя сгенерированный вектор;
в)Находим длины отрезков, на которые вектор $\vec{r}$ разбивает отрезок $[0, 1]$ - получаем вектор начальных вероятностей.

In [ ]:
```
r = np.random.random(m-1)
r_series = np.sort(r)
p_0 = np.diff(np.insert(r_series, [0, len(r_series)], [0, 1]))
print(f'Вектор из независимых и равномерно распределенных на отрезке [0,1] случа
print(f'Вариационный ряд: {np.round(r_series, 4).tolist()}')
print(f'Вектор начальных вероятностей: {np.round(p_0, 4).tolist()}')
```

```
Вектор из независимых и равномерно распределенных на отрезке [0,1] случайных ве
личин: [0.3745, 0.9507, 0.732, 0.5987, 0.156]
Вариационный ряд: [0.156, 0.3745, 0.5987, 0.732, 0.9507]
Вектор начальных вероятностей: [0.156, 0.2185, 0.2241, 0.1333, 0.2187, 0.0493]
```

5. Вычисление безусловных вероятностей состояний цепи через k шагов

$$p(k)^T = p(0)^T \cdot P^k,\ k = 10$$

In [ ]:
```
p_k = p_0 @ np.linalg.matrix_power(P, k)
p_k
```

Out[ ]:
```
array([0.20349169, 0.15347911, 0.31096943, 0.10356577, 0.15288001,
       0.07561398])
```

6. Моделирование n траекторий полученной цепи за k шагов

In [ ]:
```
num_states = np.zeros(m)
trajectories = []
for i in range(n):
    state = np.argmax(p_0.cumsum()>np.random.random(1))
    trajectory = [state]
    for j in range(k):
        state = np.argmax(P[state].cumsum()>np.random.random(1))
        trajectory.append(state)
    num_states[state]+=1
    trajectories.append(trajectory)
```

Выведем 3 случайных траектории.

In [ ]:
```
for i in range(3):
    ind = int(np.random.random(1)*len(trajectories))
    print(f'Номер в списке: {ind}\n{trajectories[ind]}')
```

```
Номер в списке: 31
[4, 4, 5, 5, 5, 5, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]
Номер в списке: 72
[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]
Номер в списке: 5
[1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 0, 0, 1, 1, 1, 1]
```

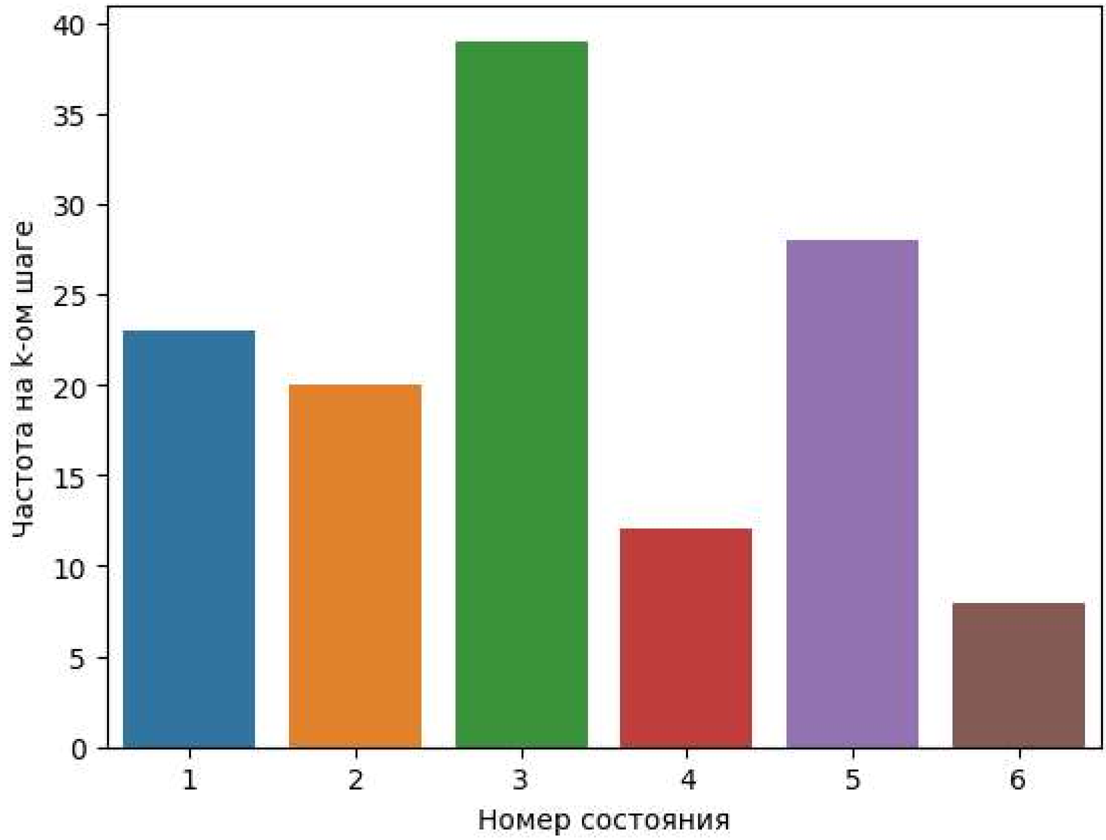
In [ ]:
```
state_df = pd.DataFrame({'Номер состояния':np.arange(1,7), 'Частота на k-ом шаге
state_df
```

Out[ ]:

	Номер состояния	Частота на k-ом шаге
0	1	23.0
1	2	20.0
2	3	39.0
3	4	12.0
4	5	28.0
5	6	8.0

In [ ]:
```
sns.barplot(state_df, x='Номер состояния', y='Частота на k-ом шаге')
```

Out[ ]: <AxesSubplot: xlabel='Номер состояния', ylabel='Частота на k-ом шаге'>



7. Вычисление эмпирических вероятностей состояний цепи на k-ом шаге и сравним их с теоретическими

In [ ]:
```
state_df['Эмпирическая вероятность'] = state_df['Частота на k-ом шаге']/n
state_df['Теоретическая вероятность'] = p_k
state_df
```

Out[ ]:

	Номер состояния	Частота на k-ом шаге	Эмпирическая вероятность	Теоретическая вероятность
0	1	23.0	0.176923	0.203492
1	2	20.0	0.153846	0.153479
2	3	39.0	0.300000	0.310969
3	4	12.0	0.092308	0.103566
4	5	28.0	0.215385	0.152880
5	6	8.0	0.061538	0.075614

8. Вычисление финальных вероятностей состояний цепи

Для того, чтобы найти финальные вероятности состояний цепи, необходимо решить следующую систему:

$$\begin{cases} p_1 = 0.7p_1 + 0.2p_2 + 0.4p_6 \\ p_2 = 0.3p_1 + 0.6p_2 \\ p_3 = 0.2p_2 + 0.9p_3 \\ p_4 = 0.1p_3 + 0.7p_4 \\ p_5 = 0.3p_4 + 0.8p_5 \\ p_6 = 0.2p_5 + 0.6p_6 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \end{cases}$$

In [ ]:

```
p_final = np.array([0.205128, 0.15384, 0.307692, 0.102564, 0.153846, 0.0769231])
state_df['Финальная вероятность'] = p_final
state_df[['Эмпирическая вероятность', 'Теоретическая вероятность', 'Финальная ве
```

Out[ ]:

	Эмпирическая вероятность	Теоретическая вероятность	Финальная вероятность
0	0.176923	0.203492	0.205128
1	0.153846	0.153479	0.153840
2	0.300000	0.310969	0.307692
3	0.092308	0.103566	0.102564
4	0.215385	0.152880	0.153846
5	0.061538	0.075614	0.076923

Выводы

При относитнльно большом количестве $n = 130$ смоделированных траекторий, эмпирические вероятности состояний цепи близки к теоретическим. Кроме того, теоретические вероятности слабо отличаются от финальных. Таким образом, мы проверили эргодичность системы.