

## Содержание

<b>1 Основы теории вероятности.</b>	<b>1</b>
Вероятностное пространство. . . . .	1
Свойства вероятности. . . . .	2
Условная вероятность. . . . .	4
Схема Бернулли. . . . .	5
<b>2 Случайные величины.</b>	<b>8</b>
Распределение случайных величин, функция распределения случайных величин. .	8
Типы распределений. . . . .	10
Дискретные случайные величины и распределения. . . . .	10
Абсолютно непрерывные случайные величины и распределения. . . . .	10

## 1 Основы теории вероятности.

### Вероятностное пространство.

**Определение 1.** Пусть  $\Omega$  — множество, тогда  $\mathfrak{A} \in 2^\Omega$  называется **алгеброй**, если

1.  $\Omega \in \mathfrak{A}$ .
2.  $\forall A \in \mathfrak{A} \bar{A} \in \mathfrak{A}$ . Здесь и далее  $\bar{A} = \Omega \setminus A$ .
3.  $\forall A, B \in \mathfrak{A} A \cup B \in \mathfrak{A}$ .

При этом  $\Omega$  называется **множеством элементов событий**,  $\mathfrak{A}$  — **набор событий**,  $A \in \mathfrak{A}$  — **событие**,  $A \cup B = A + B$  — **сумма событий**,  $\bar{A}$  — **противоположное событие**,  $A \cap B = AB$  — **произведение событий**.

**Определение 2.** Алгебра является **сигма-алгеброй**, если она замкнута относительно объединения счётного количества своих элементов.

**Определение 3.** Пусть  $\mathfrak{A}$  — сигма-алгебра на  $\Omega$ . Пусть  $P: \mathfrak{A} \rightarrow [0; +\infty)$  и

1.  $P(\Omega) = 1$ .
2. Если  $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathfrak{A}$  и  $\forall A_i A_j = \emptyset$  то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Тогда  $(\Omega; \mathfrak{A}; P)$  называется **вероятностным пространством**.

**Определение 4.** Пара событий называется **несовместной**, если их пересечение пусто. Набор событий **несовместен**, если они попарно несовместны.

**Определение 5.** Пусть  $A \subset 2^\Omega$  — алгебра. Тогда минимальная по включению сигма-алгебра  $\sigma(A) \supset A$  называется **минимальной сигма-алгеброй**.

**Утверждение.** Таковая существует.

*Доказательство.* Хотя бы одна такая существует ( $2^\Omega$ ), причём если пересечь сколько угодно сигма-алгебр, то получится искомая сигма-алгебра.  $\square$

**Определение 6.** Пусть  $\mathfrak{A}$  — алгебра на  $\Omega$ ,  $P: \mathfrak{A} \rightarrow [0; +\infty)$  и

- $P(\Omega) = 1$ .

- Если  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$  и  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$ , то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Тогда  $(\Omega; \mathfrak{A}; P)$  — вероятностное пространство в широком смысле.

**Теорема 1** (О продолжении меры). Пусть  $(\Omega; \mathfrak{A}; P)$  — вероятностное пространство в широком смысле. Тогда существует единственная функция вероятности  $Q: \sigma(\mathfrak{A}) \rightarrow [0 : +\infty)$ , такое что  $Q|_{\mathfrak{A}} \equiv P$ .

Без доказательства.

*Замечание.* Эта теорема позволяет нам сказать, например, что мы хотим задать вероятность на отрезках.

**Определение 7. Борелевская сигма-алгебра** — минимальная  $\sigma$ -алгебра, которая содержит все открытые множества.

*Пример.* Дискретное вероятностное пространство:  $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^N$ ,  $A = 2^{\Omega}$ ,  $P(\{\omega_i\}) = p_i$ ,  $\sum p_i = 1$ . Тогда  $P(A)$  — сумма вероятностей элементов  $A$ .

*Пример.* Геометрическая вероятность:  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , измеримо по Лебегу,  $\mu A < +\infty$ ,  $\mathfrak{A}$  состоит из измеримых по Лебегу множеств,  $P(A) = \frac{\mu A}{\mu \Omega}$ . Обычно при этом  $\mathbb{R}^n$  не более чем трёхмерно.

### Свойства вероятности.

#### Свойство 7.1.

$$\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

*Доказательство.* Понятно, что  $B \setminus A \in \mathfrak{A}$ . Тогда

$$B = A \sqcup (B \setminus A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$

□

#### Следствие 0.1.

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad P(A) \leq 1$$

#### Свойство 7.2.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

#### Свойство 7.3.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

*Доказательство.*

$$B = (B \setminus AB) \sqcup AB \Rightarrow P(B) = P(B \setminus AB) + P(AB)$$

Тогда

$$P(A + B) = P(A) + P(B \setminus AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

□

**Утверждение** (Формула включений-исключений).

$$P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P(A_i A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^n P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^n P(A_1 \dots A_n)$$

*Доказательство.* Мне лень это писать, докажите сами по индукции.

□

**Утверждение.**

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i P(A_i)$$

*Доказательство.* Пусть  $B_1 = A_1$ ,  $B_2 = A_2 \overline{A_1}$ ,  $B_3 = A_3 \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$  и так далее. Тогда

$$\bigcup_i A_i = \bigsqcup_i B_i$$

При этом  $B_i \subset A_i$ , а значит

$$\sum_i P(A_i) \geq \sum_i P(B_i)$$

□

**Теорема 2.** Пусть  $(\Omega; \mathfrak{A}; P)$  — вероятностное пространство. Тогда следующие утверждения равносильны:

1.  $P$  счётно-аддитивна.
2.  $P$  конечно-аддитивна и  $\forall \{B_i\}_{i=1}^\infty : B_{i+1} \subset B_i$ ,  $B = \bigcap_{i=1}^\infty B_i$   $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_i) = P(B)$  (непрерывность сверху).
3.  $P$  конечно-аддитивна и  $\forall \{C_i\}_{i=1}^\infty : C_{i+1} \supset B_i$ ,  $C = \bigcup_{i=1}^\infty C_i$   $\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_i) = P(C)$  (непрерывность снизу).

*Доказательство.* Равносильность двух непрерывностей тривиально из формул де Моргана.

Докажем, что из 1 следует 2. Конечная аддитивность есть, докажем непрерывность сверху. Пусть  $A_1 = B_1 \overline{B_2}$ ,  $A_2 = B_2 \overline{B_3}$  и так далее. Очевидно,  $A_i$  несовместны. Также очевидно, что  $A_i$  несовместны с  $B$ . Также заметим, что

$$B_n = B \sqcup \bigsqcup_{i=n+1}^\infty A_i$$

Отсюда  $P(B_n) = P(B) + \sum_{i=n+1}^\infty P(A_i)$ , а справа остаток (очевидно, сходящегося) ряда, который стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Теперь из 2 докажем 1. Рассмотрим  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  несовместные. Очевидно,

$$\sum_{i=1}^\infty P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

А ещё мы знаем, что

$$\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \sqcup \bigsqcup_{i=n+1}^\infty A_i$$

То есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( P\left(\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i\right) - P\left(\bigsqcup_{i=n+1}^\infty A_i\right) \right) = P\left(\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigsqcup_{i=n+1}^\infty A_i\right)$$

Второе слагаемое — ноль по непрерывности меры, а отсюда счётная аддитивность. □

**Условная вероятность.**

*Замечание.* Пусть  $|\Omega| = n$ ,  $|A| = k$ ,  $|B| = m$ ,  $|AB| = l$ . Если мы знаем, что  $B$  произошло, как узнать вероятность того, что произошло  $A$ ? Ну, это

$$\frac{l}{m} = \frac{l/n}{m/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

**Определение 8.** Пусть  $(\Omega; \mathfrak{A}; P)$  — вероятностное пространство,  $B \in \mathfrak{A}$ ,  $P(B) > 0$ . Тогда **условной вероятностью**  $A$  при условии  $B$  называется

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Также обозначается  $P_B(A)$ .

**Свойство 8.1.** Несложно проверить, что условная вероятность является вероятностью.

**Утверждение** (Произведение вероятностей). Несложно по определению проверить

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1})$$

**Теорема 3** (Формула полной вероятности). Пусть  $A \in \mathfrak{A}$ ,  $B_i \in \mathfrak{A}$  несовместны,  $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$  (обычно объединение равно  $\Omega$ ), и  $\forall i \in [0 : n] P(B_i) > 0$ . Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

*Доказательство.*

$$P(A) = P\left(A \cap \bigcup_{i=1}^n B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A \cap B_i\right)$$

Всё. □

**Теорема 4** (Формула Байеса). Пусть  $A, B \in \mathfrak{A}$ ,  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ . Тогда

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

*Доказательство.* Очевидно из определения. □

**Определение 9.** События  $A, B \in \mathfrak{A}$  называются **независимыми**, если

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

**Определение 10.** Говорят, что  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$  **независимы в совокупности**, если  $P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n)$

**Свойство 10.1.** Несложно проверить, что независимость событий  $A, B$  равносильна  $P(A|B) = P(A)$ .

**Свойство 10.2.** Независимые в совокупности события попарно независимы. Обратное неверно.

**Определение 11.** Пусть у нас есть два вероятностных пространства:  $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; P_1)$  и  $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2; P_2)$ . Рассмотрим вот такое вероятностное пространство:  $(\Omega, \mathfrak{A}; P)$ , где  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $\mathfrak{A}$  — минимальная  $\sigma$ -алгебра, включающая в себя  $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ ,

$$P((A_1; A_2)) = P_1(A_1)P_2(A_2)$$

Тогда  $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; P_1)$  и  $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2; P_2)$  — независимые испытания.

**Схема Бернулли.**

*Пример.* Схема Бернулли:  $\Omega_1 = \{0; 1\}$ ,  $\mathfrak{A}_1 = 2^{\Omega_1}$ ,  $P_1(1) = p$ ,  $P_1(0) = 1 - p = q$ . Хочется рассмотреть эту штуку в степени  $n$  (то есть  $n$  одинаковых независимых испытаний). Тогда что у нас получается для  $\omega \in \Omega = \Omega_1^n$ ?

$$P(\omega) = \sum_{i=1}^n P_i(\omega_i) = p^{\sum \omega_i} q^{n - \sum \omega_i}$$

Посчитаем тут такую вероятность: пусть  $S_n$  — количество успехов в  $n$  испытаниях? Посчитаем вероятность того, что  $S_n = k$ ? Очевидно, оно равно  $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

**Утверждение.** Пусть  $k^*$  — наиболее вероятное число успехов в Бернуллиевских испытаниях. Тогда

$$k^* = \begin{cases} p(n-1) \text{ или } p(n-1) + 1 & p(n-1) \in \mathbb{N} \\ \lceil p(n-1) - 1 \rceil & p(n-1) \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

*Доказательство.* Давайте рассмотрим вот такое частное:

$$\frac{P(S_n = k+1)}{P(S_n = k)}$$

Чему оно равно?

$$\frac{P(S_n = k+1)}{P(S_n = k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

Нам хочется оценить, больше это чем 1 или меньше (это позволит нам найти  $K^*$ ). Ну,

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{n-k}{k+1} > 1 \Leftrightarrow p(n-k) > q(k+1) \Leftrightarrow pn - pk > k = pk + 1 - p \Leftrightarrow pn > k + 1 - p \Leftrightarrow pn + p - 1 > k$$

То есть возрастание достигается при  $k < p(n-1) - 1$ , а иначе убывание. Тогда где экстремум? Рассмотрим  $k = p(n-1) - 1$ . Если это целое число, то там  $P(S_n = k+1) = P(S_n = k)$ , и это самое  $k$  даёт значение больше остальных. То есть  $k^* = p(n-1) - 1$  или  $k^* = p(n-1)$ .

А что если оно не целое? То надо куда-то округлить. А именно вверх, потому что тогда оно больше, чем следующее, а предыдущее меньше его.  $\square$

*Пример.* Пусть  $n = 10000$ ,  $p = \frac{1}{10000}$ . Давайте посчитаем  $P(S_n > 3)$ . Ну, это

$$1 - P(S_n \leq 3) = 1 - q^{10000} - 10000pq^{10000-1} - \binom{10000}{2} p^2 q^{10000-2} - \binom{10000}{3} p^3 q^{10000-3}$$

Фиг мы такое посчитаем.

*Пример.* Или если взять  $p = q = 0.5$ , то при  $n = 5 \cdot 10^3$  мы не сможем нормально посчитать  $P(S_n = 2349)$ .

*Замечание.* Ну и как такое считать?

**Теорема 5** (Теорема Пуассона). Пусть у нас есть несколько схем Бернулли. В первой одно испытание и вероятность успеха  $p_1$ , во второй — 2 и вероятность успеха  $p_2$ , в  $n$ -ной  $n$  испытаний и вероятность  $p_n$ . Пусть  $np_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda > 0$ . Тогда

$$P(S_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

*Доказательство.* Известно,

$$P(S_n = k) = \frac{1}{k!} n(n-1) \cdots (n-k+1) p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

Известно, что

$$np_n = \lambda + o(1) \Rightarrow p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Тогда

$$P(S_n = k) = \frac{1}{k!} n(n-1) \cdots (n-k+1) \frac{1}{n^k} \xrightarrow{\lambda^k} \frac{(1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^n}{(1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

□

**Лемма 1.** Пусть  $p \in (0; 1)$ ,  $H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p}$ . Пусть  $p^* = \frac{k}{n}$ . Пусть  $k \rightarrow +\infty$ ,  $n-k \rightarrow +\infty$ . Тогда

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}} \exp(-nH(p^*))$$

*Доказательство.* Мы знаем формулу Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi} \underbrace{k}_{np^*}^k e^{-k} \sqrt{2\pi} \underbrace{(n-k)}_{n(1-p^*)}^{n-k} e^{-n+k}} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{n^n p^k (1-p)^{n-k}}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)} k^k (n-k)^{n-k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}} \exp \underbrace{\ln \frac{n^n p^k (1-p)^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}}}_L \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} L &= \ln \frac{n^n p^k (1-p)^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}} = \ln \frac{n^n p^k (1-p)^n (n-k)^k}{k^k (n-k)^n (1-p)^k} = \\ &= \ln \left( \frac{n^n}{\underbrace{(n-k)^n}_{(1-p^*)^{-n}}} (1-p)^n \right) + \ln \frac{p^k (n-k)^k}{(np^*)^k (1-p)^k} = \\ &= n \ln \frac{1-p}{1-p^*} + k \ln \frac{p}{p^*} + k \ln \frac{(n-k)}{n(1-p)} = n \ln \frac{1-p}{1-p^*} + k \ln \frac{p}{p^*} + k \ln \frac{1-p^*}{1-p} = \\ &= -(n-k) \ln \frac{1-p^*}{1-p} - k \ln \frac{p^*}{p} = -n \underbrace{\left( p^* \ln \frac{p^*}{p} + (1-p^*) \ln \frac{1-p^*}{1-p} \right)}_{H(p^*)} \end{aligned}$$

Это ли не то, что нам надо?

□

**Лемма 2.**

$$H(x) = \frac{(x-p)^2}{2p(1-p)} + O((x-p)^3)$$

*Доказательство.*

$$H'(x) = \ln \frac{x}{p} + x \cdot \frac{p}{x} \cdot \frac{1}{p} - \ln \frac{1-x}{1-p} - 1 = \ln \frac{x}{p} - \ln \frac{1-x}{1-p}$$

$$H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

Тогда  $H'(p) = 0$ ,  $H''(p) = \frac{1}{p(1-p)}$ . По Тейлору получаем искомое.  $\square$

**Теорема 6** (Локальная теорема Муавра — Лапласа). Пусть  $p \in (0; 1)$ ,  $H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p}$ . Пусть  $p^* = \frac{k}{n}$ . Пусть  $k \rightarrow +\infty$ ,  $n - k \rightarrow +\infty$ . Пусть  $k = np = p(n^{2/3})$ . Тогда

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2np(1-p)}\right)$$

*Доказательство.* Известно

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp(-nH(p^*))$$

Отсюда

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-n \frac{(p^* - p)^2}{2p(1-p)} + n \cdot O((p^* - p)^3)\right)$$

Заметим, что  $\frac{k}{n} - p = o(n^{-1/3})$ . Тогда

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-n \frac{(p - k/n)^2}{2p(1-p)} + O(n(k/n - p)^3)\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-n \frac{(np - k)^2}{2p(1-p)n^2} + o(1)\right)$$

Что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 7** (Интегральная теорема Муавра — Лапласа). Пусть

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Далее мы будем называть эту функцию функцией стандартного нормального распределения. Тогда

$$\sup_{-\infty < x_1 < x_2 < +\infty} \left| P\left(x_1 \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x_2\right) (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Иными словами

$$P\left(x_1 \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x_2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Пока без доказательства.

*Замечание.* Оценка теоремы Пуассона.

Обычно в задачах  $np_n$  не стремится, а просто равно  $\lambda > 0$ . Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| P(S_n = k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq \frac{\lambda}{n} \leq \frac{2\lambda}{n} \min\{2; \lambda\}$$

Оценка локальной теоремы Лапласа. Если  $|p^* - p| \leq \frac{1}{2} mn \min\{p; q\}$ , то

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2np(1-p)}\right) (1 + \varepsilon(k; n))$$

Где

$$\varepsilon(k; n) = \exp \left( \theta \frac{|k - np|^3}{3n^2 p^2 q^2} + \frac{1}{npq} \left( \frac{1}{6} + |k - np| \right) \right) \quad |\theta| < 1$$

Оценка интегральной теоремы Лапласа.

$$\sum_x \left| P \left( \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}$$

*Пример.* Пусть у нас есть два узла связи на 2000 пользователей в каждом. И у нас есть канал связи, который пропускает  $N$ . Хотелось минимизировать  $N$ , но так, чтобы вероятность перегрузки была меньше  $\frac{1}{100}$ . Будем предполагать, что люди пользуются данным каналом связи в течение двух минут из одного часа, то есть каждый пользователь может пользоваться каналом в данный момент с вероятностью  $p = \frac{1}{30}$ .

Ну так и что мы хотим по сути? Мы хотим  $P(S_{2000} > N) < \frac{1}{100}$ , что равносильно  $P(S_{2000} \leq N) \geq \frac{99}{100}$ . Используем Пуассона:  $np \approx 6.67$ .

$$\sum_{k=0}^N e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Это мы хрен посчитаем, но, короче, получится  $N = 87$ .

А если применить интегральную теорему Муавра — Лапласа, то получим мы

$$N = \left\lceil q \frac{99}{100} \sqrt{npq} + np \right\rceil = 86$$

Где  $q \frac{99}{100}$  — такое число, что  $\Phi(q \frac{99}{100}) = \frac{99}{100}$ .

**Определение 12.** Если  $\alpha \in (0; 1)$  и  $\Phi(q_\alpha) = \alpha$ , то  $q_\alpha$  называется **квантилем порядка  $\alpha$** .

## 2 Случайные величины.

**Распределение случайных величин, функция распределения случайных величин.**

**Определение 1.** Борелевская сигма-алгебра — это минимальная сигма-алгебра, содержащая все открытые множества.

**Определение 2.** Пусть  $\Omega; \mathfrak{A}$  — множество с сигма-алгеброй. Тогда такое  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $\forall B \in \mathfrak{B} \xi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ , называется **случайной величиной**.

**Определение 3.** Пусть  $(\Omega; \mathfrak{A}; P)$  — вероятностное пространство,  $\xi$  — случайная величина. Тогда распределение  $\xi$  — функция

$$P_\xi: B \mapsto P(\{\omega \mid \xi(\omega) \in B\})$$

*Замечание.*  $P(\{\omega \mid \xi(\omega) \in B\})$  обозначается  $P(\xi \in B)$ .

**Свойство 3.1.**  $P_\xi$  — вероятность на  $(\mathbb{R}; \mathfrak{B})$ .

**Определение 4.** Пусть  $\xi$  — случайная величина. Тогда

$$F_\xi(t) = P(\xi \leq t)$$

называется **функцией распределения  $\xi$**

**Свойство 4.1.** Очевидно, функция распределения нестрого возрастает.

**Свойство 4.2.** Не менее очевидно,  $F_\xi(+\infty) = 1$ ,  $F_\xi(-\infty) = 0$ ;

**Свойство 4.3.** Функция распределения непрерывна справа.



*Доказательство.* Возьмём  $F(t + \varepsilon_n) - F(t)$ . Она равна  $P(t < \xi \leq t + \varepsilon_n)$ . При  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , получим, что аргумент  $P$  стремится к  $\emptyset$ , а значит  $P(t < \xi \leq t + \varepsilon_n)$  стремится к нулю.  $\square$

**Лемма 1.** Пусть  $P: \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая функция. Тогда

$$\begin{aligned} \forall \{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{B} : B_{n+1} \subset B_n \quad P(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall \{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{B} : C_{n+1} \subset C_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset \quad P(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

*Доказательство.* Следствие слева направо очевидно. Наоборот. Пусть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B$$

Возьмём  $C_n = B_n \overline{B}$ . Тогда, очевидно,  $C_n$  подходят под условие справа, а значит  $P(C_n) \rightarrow 0$ .

Также несложно заметить, что  $P(B_n) = P(C_n) + P(B)$ , а отсюда получим  $P(B_n) \rightarrow P(B)$ .  $\square$

**Теорема 1.** Пусть  $F$  — монотонно возрастающая непрерывная слева функция, равная нулю в  $-\infty$  и единице в  $+\infty$ . Тогда существует вероятностное пространство и случайная величина в нём, что  $F$  — её функция распределения.

*Доказательство.* Пусть  $\Omega = \mathbb{R}, \mathfrak{A}$  — алгебра, состоящая из множеств вида  $\bigcup_{k=1}^n (a_k; b_k]$  или  $(-\infty; b)$  или  $(a; \infty)$  или  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n (a_k; b_k]\right) &= \sum_{k=1}^n F(b_k) - F(a_k) \\ P((-\infty; b)) &= F(b) \quad P((a; +\infty)) = 1 - F(a) \quad P(\mathbb{R}) = 1 \end{aligned}$$

Получим вероятностное пространство в широком смысле (разве что непрерывность сверху надо проверить). Ну, проверим её, используя лемму. Пусть, не умаляя общности,  $A_n = (a_{n,1}; a_{n,2}]$ ,  $A_{n+1} \subset A_n$  и пересечение всех пусто.

Из непрерывности  $F$  справа следует, что существует  $B_n = (b_{n,1}; b_{n,2}]$ , где  $\text{Cl } B_n \subset A_n$  и  $P(A_n) - P(B_n) \leq \varepsilon 2^{-n}$ . Тогда пересечение всех  $B_n$  также пусто.

Предположим, что существует  $M$ , такое что  $\forall n \quad A_n \in [-M; M]$ .  $[-M; M]$  — компакт, следовательно. Заметим, что

$$[-M; M] = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-M; M] \setminus \text{Cl } B_n$$

Справа — открытое покрытие компакта, значит из него можно вытащить конечное подпокрытие, то есть пересечение какого-то конечного числа  $B_n$  пусто. Пусть это пересечение от 1 до  $n_0$ . Тогда

$$P(A_{n_0}) = P(A_{n_0} \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} B_k) + P\left(\bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\right)$$

Отсюда  $P\left(\bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\right) = 0$ . А

$$P(A_{n_0} \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} B_k) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n_0} A_{n_0} \setminus B_k\right) \leq P\left(\bigcap_{k=1}^{n_0} A_k \setminus B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n_0} P(A_k) - P(B_k) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n_0} 2^{-k} < \varepsilon$$

Если же мы не находимся в промежутке  $[-M; M]$ , то можно указать такие  $M_1$  и  $M_2$ , что  $P((-\infty; M_1) \cup (M_2; +\infty)) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда

$$P(A_n) = P(A_n[M_1; M_2]) + P(A_n[\overline{M_1}; \overline{M_2}])$$

Левую часть суммы мы разобрали, а правая мала т.к.  $M_2$ , что  $P((-\infty; M_1) \cup (M_2; +\infty)) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Осталось предъявить случайную величину  $\xi(\omega) = \omega$ .  $\square$

**Типы распределений.****Дискретные случайные величины и распределения.**

**Определение 5.** Случайная величина  $\xi$  называется **дискретной**, если существует такое не более чем счётное множество  $E$ , что  $P_\xi(E) = 1$ .

*Пример.* Вырожденное:  $P(\xi = c) = 1$ . Обозначают  $I(c)$  или  $I_c$ .

*Пример.* Распределение Бернулли:  $P(\xi = 0) = p$ ,  $P(\xi = 1) = q = 1 - p$ . Обозначение:  $\text{Bern}(p)$ .

*Пример.* Биномиальное распределение:  $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ . Обозначение:  $\text{Bin}(n; p)$ ,

*Пример.* Отрицательное биномиальное распределение:  $\xi = (\min n : S_n = r) - r$ , где  $r \in \mathbb{N}$ . То есть

$$P(\xi = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k$$

Обозначение:  $\text{NB}(r; p)$ . Также это обобщается на произвольное  $r$  при помощи гамма-функции.

В случае  $r = 1$  распределение называется геометрическим. Геометрическое распределение — количество неудач до первого успеха.

*Пример.* Распределение Пуассона:

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

Обозначение:  $\text{Pois}(\lambda)$ .

**Определение 6.** Носителем случайной величины  $\xi$  называется минимально по включению замкнутое множество  $E$ , удовлетворяющее условию  $P(\xi \in E) = 1$ .

**Абсолютно непрерывные случайные величины и распределения.**

**Определение 7.** Величина  $\xi$  (или её случайное распределение) называется **абсолютно непрерывной**, если существует  $p \in L(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$  с неотрицательными значениями такая что  $P(\xi \in B) = \int_B p(x) dx$ . В таком случае  $p$  называется **плотностью**  $\xi$ .

**Свойство 7.1.** В таком случае

$$F(t) = \int_{-\infty}^t p(x) dx$$

То есть плотность почти всюду равна производной функции распределения.

**Свойство 7.2.**  $P(\xi = c) = 0$ .

**Свойство 7.3.** Функция распределения абсолютно непрерывной случайной величины непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

**Свойство 7.4.**

$$P(x_0 \leq \xi \leq x_0 + h) = P(x_0 < \xi < x_0 + h) = F(x_0 + h) - F(x_0) = p(x_0)h + o(h)$$

**Свойство 7.5.** Пусть  $E = \text{supp } p$ . Тогда  $E$  является носителем по нашему прошлому определению.

*Пример.*

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \chi_{[a;b]}$$

Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a; b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Обозначение:  $U[a; b]$ .

**Утверждение.** Пусть  $\xi = U[a; b]$ ,  $c > 0$ . Тогда  $\eta = c\xi + d = U[ac + d; bc + d]$

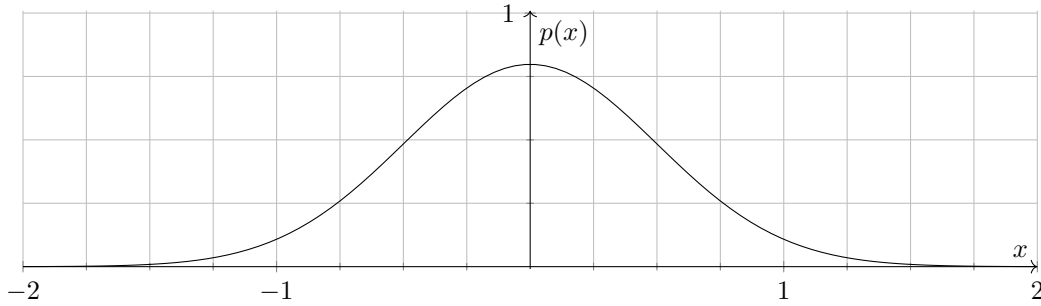
*Доказательство.*

$$P(\eta \leq t) = P(c\xi + d \leq t) = P\left(\xi \leq \frac{t-d}{c}\right)$$

Несложно проверить, что это именно  $U[ac + d; bc + d]$ . □

*Пример.* Нормальное (гауссовское) распределение:  $N(\mu; \sigma^2)$ :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



$N(0; 1)$  — стандартное нормальное распределение. Ещё оно обозначается  $\Phi(x)$ .

**Утверждение.** Пусть  $\xi = N(\mu; \sigma^2)$ ,  $\eta = a\xi + b$ . Тогда  $\eta = N(a\mu; a^2\sigma^2)$ .

*Доказательство.* Пусть  $a > 0$ . Обозначим  $y = ax + b$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(\eta \leq t) &= P(a\xi + b \leq t) = P\left(\xi \leq \frac{t-b}{a}\right) = F_\xi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\frac{t-b}{a}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}\right) dy \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. При  $a < 0$  аналогично. □

**Следствие 1.1.** Если  $\xi = N(0; 1)$ , то  $\sigma\xi + \mu = N(\mu; \sigma^2)$ .

*Пример.* Распределение Коши: Cauchy( $x_0; \gamma$ ).

$$p(x) = \frac{1}{\pi\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2}$$

Тогда

$$F(t) = \frac{1}{\pi\gamma} \int_{-\infty}^t \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{t-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$$

*Пример.* Экспоненциальное распределение:  $\text{Exp}(\lambda)$ .

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \chi_{\mathbb{R}_+}$$

Тогда

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \chi_{\mathbb{R}_+}$$