Содержание

Определение 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ $f\colon E \to [0;+\infty]$. **Подграфиком** f называется множество

$$Q_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in E, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

Определение 2. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. **Графиком** f называется множество

$$\Gamma_f = \{(x;f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in E\}$$

Замечание. Отличается от общего определения тем, что $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Теорема 1 (О мере графика). *Пусть $E \in \mathbb{A}_n$, $f \in S(E)$. Тогда $\Gamma_f \in \mathbb{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1}\Gamma_f = 0$.*

Доказательство.

- Сначала разберём случай, когда $\mu E < +\infty$. Заключим Γ_f в множество сколь угодно малой меры. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть

  $$e_k = E(k\varepsilon < f(k+1)\varepsilon)$$

  Тогда

  $$E = E(|f| = +\infty) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} e_k$$

  Тогда

  $$\Gamma_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Gamma_{f\big|_{e_k}} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} e_k \times [k\varepsilon;(k+1)\varepsilon) = H_\varepsilon$$

  Заметим, что

  $$\mu_{n+1}H_\varepsilon = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_n e_k \cdot \varepsilon \leqslant \mu_n E\varepsilon$$

  По критерию измеримости утверждение теоремы верно.

- Теперь пусть $\mu E = +\infty$. По σ-конечности μ_n

  $$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \qquad \mu_n E_j < +\infty$$

  А значит $f\Big|_{E_j}$ имеет измеримый график нулевой меры, а поскольку

  $$\Gamma_f = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_{f\big|_{E_j}}$$

  Верно требуемое.

$\square$

Теорема 2. *Пусть $E \in \mathbb{A}_n$, $f\colon E \to [0;+\infty]$. Тогда измеримость f и её подграфика равносильны и в случае измеримости имеет место равенство*

$$\mu_{n+1}Q_f = \int_E f \, \mathrm{d}\mu_n$$

Доказательство. Пусть нам известна измеримость подграфика. Тогда искомая формула следует из принципа Кавальери:

$$Q_f(x) = \begin{cases} \varnothing & x \notin E \\ [0; f(x)\rangle & x \in E \end{cases}$$

Отсюда

$$\mu_1 Q_f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin E \\ f(x) & x \in E \end{cases}$$

Отсюда если Q_f измеримо, то формула следует из принципа Кавальери. А также в принципе Кавальери в качестве следствия был факт, что функция $x \mapsto \mu_1 Q_f(x)$ измерима, а значит и f измерима как сужение $x \mapsto \mu_1 Q_f(x)$ на E.
Осталось доказать, что если f измерима, то её подграфик измерим. Рассмотрим случаи:

1. f простая.

$$f = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k} \qquad A_k \in \mathbb{A}_n, c_k \in [0; +\infty)$$

   Можно считать, что A_k дизъюнктны. И ещё можно считать, что $A_k \subset E$ и в объединении дают E. Тогда

$$Q_f = \bigsqcup_{k=1}^{N} A_k \times [0; c_k]$$

   Отсюда следует измеримость.

2. Общий случай: f произвольная неотрицательная измеримая функция. Приблизим её возрастающей последовательность простых функций φ_n. Проверим, что

$$Q_f = \bigcup Q_{\varphi_n} \cup \Gamma_f$$

   Тогда мы докажем искомое.

   $\supset$ ясно т.к. $\varphi_n \leqslant f \Rightarrow Q_{\varphi_n} \subset Q_f$.

   $\subset$ рассмотрим $(x; y) \in Q_f$. То есть $x \in E$, $y \in [0; f(x)]$. Если $y = f(x)$, то понятно. Иначе

$$\exists N \in \mathbb{N}\ y < \varphi_N(x) \Rightarrow \exists N\ (x; y) \in Q_{\varphi_N}$$

□

Замечание. Условие измеримости E существенно. Если $f \equiv 0$ не неизмеримом множестве, например, то $Q_f \in \mathbb{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1} Q_f = 0$.

Теорема 3 (Теорема Тонелли)**.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in S(E \to [0; +\infty])$. Тогда*

1. *При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(x; \bullet) \in S(E(x))$.*
2. *Пусть $I(x) = \int_{E(x)} f(x; y)\ \mathrm{d}y$. Тогда $I(x) \in S(\mathbb{R}^n)$.*
3.

$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x)\ \mathrm{d}x$$

Доказательство. По теореме 2, что $Q_f \in \mathbb{A}_{n+m+1}$ и

$$\mu_{n+m+1} Q_f = \int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m}$$

Воспользуемся принципом Кавальери:

$$\mu_{n+m+1} Q_f = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_{m+1} Q_f(x) \, \mathrm{d}x$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} Q_f(x) &= \left\{(y; z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x; y; z) \in Q_f\right\} = \\ &= \left\{(y; z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x; y) \in E, z \in [0; f(x; y)]\right\} = \\ &= \left\{(y; z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid y \in E(x), z \in [0; f(x; y)]\right\} \end{aligned}$$

Да это же подграфик $f(x; \bullet)$!

1. По теореме Кавальери при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $Q_f(x)$ измеримо, а значит мы доказали первое утверждение по теореме 2.

2. $$\mu_{m+1} Q_f(x) = \mu_{m+1} Q_{f(x;\bullet)} \overset{2}{=} \int_{E(x)} f(x; y) \, \mathrm{d}y = I(x)$$

   Отсюда $I(x)$ измерима по всё тому же принципу Кавальери.

3. Приравняем два выражения для $\mu_{n+m+1} Q_f$.

□

Теорема 4 (Теорема Фубини)**.** *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in L(E)$. *Тогда*

1. *При почти всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *функция* $f(x; \bullet) \in L(E(x))$.

2. *Пусть* $I(x) = \int_{E(x)} f(x; y) \, \mathrm{d}y$. *Тогда* $I(x) \in L(\mathbb{R}^n)$.

3. $$\int_E f \, \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) \, \mathrm{d}x$$

Доказательство. Применим теорему Тонелли для f_+ и f_-. Пусть $I^\pm = \int_{E(x)} f_\pm(x; y) \, \mathrm{d}y$. По теореме Тонелли

$$\int_E f_\pm \, \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I^\pm(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

Учитывая $f_\pm(x; \bullet) = (f(x; \bullet))_\pm$, имеем

$$I^+ - I^- = I \in L(\mathbb{R}^n)$$

При почти всех x $I^\pm(x) < +\infty$, а значит при почти всех x $f_\pm \in L(E(x))$ отсюда $f \in L(E(x))$. □

Замечание. В теореме Тонелли все условия можно ослабить:

1. Если $f \in S(E)$ (не важен знак), то при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x; \bullet) \in S(E(x))$.

2. Если $I(x)$ существует почти во всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $I \in S(\mathbb{R}^n)$

3. Если существует $\int_E f \, \mathrm{d}\mu_{n+m} \in \overline{\mathbb{R}}$, то верно условие пункта 2 и

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu_{n+m} \in \overline{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) \, \mathrm{d}x$$

Доказывается всё это как в теореме Фубини.

Замечание.
$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}^n\ f(x;\bullet)\in S(E(x))\\ \forall y\in\mathbb{R}^m\ f(\bullet;m)\in S(E(y))\end{cases}\not\Rightarrow f\in S(E)$$

Серпинский построил пример такого неизмеримого $E\subset\mathbb{R}^2$, что E пересекается с любой прямой не более чем в двух точках. Мы говорить о нём не будем, т.к. он довольно сложен.

Определение 3. Пусть $X\subset\mathbb{R}^n$, $Y\subset\mathbb{R}^m$, $f\colon X\to\mathbb{R}$, $g\colon Y\to\mathbb{R}$. Тогда
$$f\otimes g\colon \substack{X\times Y\to\mathbb{R}\\(x;y)\mapsto f(x)g(y)}$$

Лемма 1. *Если $f\in S(X)$, $g\in S(Y)$, то $f\otimes g\in S(X\times Y)$.*

Доказательство. Пусть
$$\tilde f(x;y)=f(x)\qquad \tilde g(x;y)=g(y)$$
Докажем, что $\tilde f$ и $\tilde g$ измеримы, тогда $f\otimes g$ будет измеримо как произведение измеримых.
$$(X\times Y)(\tilde f>a)=X(\tilde f>0)\times Y$$
Левое измеримо по измеримости f, правое — потому что, а произведение измеримы измеримо. □

Следствие 1.1. *Пусть $X\subset\mathbb{R}^n$, $Y\subset\mathbb{R}^m$. Если*
$$\left[\begin{array}{l}f\in S(X\to[0;+\infty])\land g\in S(Y\to[0;+\infty])\\ f\in L(X)\land g\in L(Y)\end{array}\right.$$
То
$$\int_{X\times Y}f\otimes g\ \mathrm{d}\mu_{n+m}=\int_X f\ \mathrm{d}\mu_n\int_Y g\ \mathrm{d}\mu_m$$

Доказательство. В первом случае нет сомнений в существовании интегралов. Пусть $E=X\times Y$. Тогда
$$\int_E f\otimes g\ \mathrm{d}\mu_{n+m}=\int_X\left(\int_Y f(x)g(y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x$$
так как $E(x)=\begin{cases}\varnothing & x\notin X\\ Y & x\in X\end{cases}$.
А почему то же самое верны для произвольного знака, если интегралы от них конечны? Ну, чтобы применить теорему Фубини, надо проверить суммируемость $f\otimes g$. Ну, смотрите. По доказанному
$$\int_{X\times Y}|f\otimes g|\ \mathrm{d}\mu_{n+m}=\int_X|f|\ \mathrm{d}\mu_n\int_Y|g|\ \mathrm{d}\mu_m$$
По условию оба этих интеграла конечны, значит $|f\otimes g|$ суммируема, а суммируемость функции равносильна суммируемости её модуля. □

Замечание. Мы знаем, что в условиях теорем Тонелли и Фубини верно
$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m}=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{E(x)}f(x;y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x$$
Тривиально, то же можно записать, поменяв x и y ролями.
$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m}=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{E(y)}f(x;y)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y$$
А значит два повторных интеграла равны.

Пример. Повторные интегралы могут быть не равны

$$f(x;y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad E=[-1;1]^2$$

Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y=\left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_{y=-1}^{1}=\frac{2}{x^2+1}$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\frac{2}{x^2+1}\ \mathrm{d}x=4\tan^{-1}x\Big|_{0}^{1}=\pi$$

Другой повторный интеграл будет равен $-\pi$, как несложно заметить.

Пример. Неверно, что если повторные интегралы равны, то двойной существует.

$$g(x;y)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\qquad E=[-1;1]^2$$

Поскольку функция g нечётна по каждой переменной, оба повторных интеграла равны нулю. Отсюда если двойной интеграл существует, то равен нулю.
Докажем, что он не существует. Для этого докажем, что g не суммируема. Попробуем проинтегрировать $|g|$:

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{|2xy|}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x=4\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{|2xy|}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x=4\int\limits_{0}^{1}\left.\frac{-x}{x^2+y^2}\right|_{y=0}^{1}\mathrm{d}x=4\int\limits_{0}^{1}\frac{-x}{x^2+1}+\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x=+\infty$$

Отсюда g не суммируема. А значит нулю её интеграл не равен, то есть он не существует.

Определение 4. Пусть $E\subset\mathbb{R}^{n+m}$ **Проекцией** E на первое координатное пространство называется

$$\operatorname{Pr}_1 E=\{x\in\mathbb{R}^n\mid E(x)\neq\varnothing\}$$

Замечание. Проекция измеримого множества может быть быть неизмеримой (достаточно добавить к измеримому двумерному множеству неизмеримое одномерное).

Определение 5. Множество

$$\operatorname{Pr}_1^* E=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \mu_m E(x)>0\}$$

называется **существенной проекцией** множества E.

Свойство 5.1. *Существенная проекция измерима. (Как Лебегово множество функции $\mu_m E(\bullet)$).*

Свойство 5.2. *При f подходящем под теоремы Тонелли и Фубини верно*

$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m}=\int_{\operatorname{Pr}_1^*} I(x)\ \mathrm{d}x$$

Замечание. Теоремы Тонелли и Фубини можно применять несколько раз.

Определение 6. Пусть $(X;\mathbb{A};\mu)$ и $(Y;\mathbb{B};\nu)$ — пространства с мерами. Пусть

$$\mathbb{A}\odot\mathbb{B}=\{A\times B\mid A\in\mathbb{A},B\in\mathbb{B}\}$$

Тогда $\mathbb{A}\odot\mathbb{B}$ является полукольцом, а

$$\pi_0\colon A\times B\to\mu A\nu B$$

является мерой на $\mathbb{A}\oplus\mathbb{B}$. Тогда π — стандартное распространение π_0 на σ-алгебру $\mathbb{C}$ называется произведением мер μ и ν.
Обозначения:

$$\mathbb{C}=\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}\qquad\pi=\mu\times\nu$$

Замечание. Доказывать корректность определения мы не будем.

Свойство 6.1.

$$\mu_{n+m} = \mu_n \times \mu_m$$

Свойство 6.2. *Если μ и ν являются σ-конечными, то $\mu \times \nu$ — тоже.*

Свойство 6.3. *Произведение мер ассоциативно.*

Свойство 6.4. *Все теоремы этого параграфа с доказательствами верны для полных σ-конечных мер.*

Теорема 5 (Теорема Тонелли для абстрактных пространств с мерой)**.** *Пусть $E \subset X \times Y$, $f \in S_{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}}(E \to [0;+\infty])$. Тогда*

1. *При почти всех $x \in x$ функция $f(x;\bullet) \in S_{\mathbb{B}}(E(x))$.*
2. *Пусть $I(x) = \int_{E(x)} f(x;\bullet)\ \mathrm{d}\nu$. Тогда $I(x) \in S_{\mathbb{A}}(X)$.*
3. $$\int_E f\ \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_X I(x)\ \mathrm{d}\mu$$

Замена переменной в интеграле.

Теорема 6 (Общая схема замены переменной в интеграле)**.** *Пусть $(X;\mathbb{A};\mu)$, $(Y;\mathbb{B};\nu)$ — пространства с мерами. Пусть $h \in S_{\mathbb{A}}(X \to [0;+\infty])$, $\Phi\colon X \to Y$ и*

$$\forall B \in \mathbb{B}\ \Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A} \qquad \forall B \in \mathbb{B}\ \nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h\ \mathrm{d}\mu$$

Пусть $f \in S_{\mathbb{B}}(Y)$. Тогда

1. *$f \circ \Phi \in S_{\mathbb{A}}(X)$.*
2. $$\int_Y f\ \mathrm{d}\nu = \int_X (f \circ \Phi)h\ \mathrm{d}\mu$$

   (Трактовка стандартная: интегралы существуют или нет одновременно, если существуют, то равны.)

Доказательство.

1. Рассмотрим Лебегово множество

   $$X(f \circ \Phi > a) = \{x \in X \mid f(\Phi(x)) > a\} = \{x \in X \mid \Phi(x) \in Y(f > a)\} = \Phi^{-1}(Y(f > a))$$

   По условию $Y(f > a) \in \mathbb{B}$, а значит $\Phi^{-1} \in \mathbb{A}$.

2. Разберём случаи

   a. $f = \chi_B \mid B \in \mathbb{B}$. Тогда

   $$(\chi_B \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Phi^{-1}(B) \\ 0 & x \notin \Phi^{-1}(B) \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}(x)$$

   Тогда

   $$\int_Y \chi_B\ \mathrm{d}\nu = \nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h\ \mathrm{d}\nu = \int_X \underbrace{\chi_{\Phi^{-1}(B)}}_{f\circ\Phi} h\ \mathrm{d}\nu$$

   b. По линейности равенство верно для простых функций.

c. Для положительных измеримых функций рассмотрим последовательность φ_n, возрастающую к f и перейдём к пределу в равенстве

$$\int_Y \varphi_n \, \mathrm{d}\nu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi) h \, \mathrm{d}\mu$$

по теореме Леви.

d. Для произвольных измеримых функций рассмотрим $f_\pm$

$$\int_Y f_\pm \, \mathrm{d}\nu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi)_\pm h \, \mathrm{d}\mu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi h)_\pm \, \mathrm{d}\mu$$

□

Замечание. В условиях теоремы 6 суммируемость f по ν равносильная суммируемости $(f \circ \Phi)h$ по μ

Следствие 1.1. *В условиях теоремы 6 если $B \in \mathbb{B}$, $f \in S_{\mathbb{B}}(B)$, то*

$$\int_B f \, \mathrm{d}\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) h \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство. Продолжим f нулём на $Y \setminus B$. □

Определение 7. В условии теоремы 6 ν называется h-взвешенным **Φ-образом меры** μ.

Замечание. Пусть

$$\mathbb{A}^* = \{\Phi^{-1}(B) \mid B \in \mathbb{B}\}$$

Нетрудно заметить, что это σ-алгебра.
В условиях теоремы 6 $\mathbb{A}^* \subset \mathbb{A}$.
Пусть

$$\mathbb{B}^* = \{B \subset Y \mid \Phi^{-1} \in \mathbb{A}\}$$

тогда условиях теоремы 6 $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^*$.

Утверждение. *Если*

$$\nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h \, \mathrm{d}\mu$$

То ν — мера на $\mathbb{B}$.

Доказательство. Остаётся как несложное упражнение читателю. □

Пример. $h \equiv 1$ — невзвешенный образ меры.

$$\nu B = \mu \Phi^{-1}(B) \Rightarrow \int_Y f \, \mathrm{d}\nu = \int_X f \circ \Phi \, \mathrm{d}\mu$$

Пример. $X = Y$, $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, $\Phi = \mathrm{id}$.

$$\nu A = \int_A h \, \mathrm{d}\mu \Rightarrow \int_X f \, \mathrm{d}\nu = \int_X f h \, \mathrm{d}\mu$$

Тогда пишут $\mathrm{d}\nu = h \mathrm{d}\mu$.

Определение 8. Если

$$\nu A = \int_A h \, \mathrm{d}\mu$$

то h называется **плотностью** меры ν относительны меры μ.

Свойство 8.1. *Если $h = \tilde{h}$ μ-почти везде, то $\nu = \tilde{\nu}$. Для σ-конечных мер верно и обратное.*
Без доказательства.

Теорема 7 (Критерий плотности)**.** *Пусть даны $X, \mathbb{A}$ и μ и ν — меры на $\mathbb{A}$, $h\colon S(X \to [0; +\infty])$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. *h — плотность ν относительны μ.*
2. $$\forall A \in \mathbb{A}\ \ \mu A \inf_A h \leqslant \nu A \leqslant \mu A \sup_A h$$

Доказательство.

- Из первого во второе ясно из оценки интеграла.
- Рассмотрим
$$A = A(h = 0) \cup A(0 < h < +\infty) \cup A(h = +\infty)$$
Равенство есть для первой части:
$$\nu A(h = 0) = \int_{A(h=0)} h \,\mathrm{d}\mu$$
так как левое равно нулю по условию второго утверждения, а правое — потому что функция тождественный ноль.
также очевидно равенство есть для третьей части:
$$\nu A(h = +\infty) = \begin{cases} +\infty & \mu A > 0 \\ 0 & \mu A \equiv 0 \end{cases} = \int_{A(h=+\infty)} h \,\mathrm{d}\mu$$
Далее можно считать $0 < h < +\infty$ на A.
Рассмотрим $q \in (0; 1)$. Пусть
$$A_j = A(q^j \leqslant h < q^{j-1})$$
Очевидно, $A_j \in \mathbb{A}$ и $\bigsqcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} A_j = A$. Нам известно, что
$$q^j \mu A_j \leqslant \nu A_j \leqslant q^{j-1} \mu A_j$$
А ещё из оценки интеграла
$$q^j \mu A_j \leqslant \int_{A_j} h \,\mathrm{d}\mu \leqslant q^{j-1} \mu A_j$$
Отсюда
$$\begin{aligned} q \int_A h \,\mathrm{d}\mu = q \sum_j \int_{A_j} h \,\mathrm{d}\mu \leqslant \\ \leqslant \sum_j q^j \mu A_j \leqslant \sum_j \nu A_j = \\ = \boxed{\nu \text{A}} \leqslant \sum_j q^{j-1} \mu A_j \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{q} \sum_j \int_{A_j} h \,\mathrm{d}\mu = \\ = \frac{1}{q} \int_A h \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$
Если взять начало, конец и то, что в квадратике, после чего устремить q к единицу, то получим искомое.

□

Интеграл по дискретной мере.

Пример. δ-мера.
Пусть X — пространство, $E \subset X$, $a \in X$, тогда, напомним, δ-мера — это

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1 & a \in E \\ 0 & a \notin E \end{cases}$$

В качестве сигма-алгебры выступает 2^X. Пусть $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Что тогда такое интеграл по этой мере?

$$\int_E f \, \mathrm{d}\delta_a = \begin{cases} 0 & a \notin E \\ \int_{\{a\}} f \, \mathrm{d}\delta_a = f(a) & a \in E \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть μ — считающая мера на X, $E \subset X$, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_E f$$

Интеграл и сумма существуют или не существуют одновременно, если существуют, то равны.

Доказательство. будем постепенно усложнять f.

1. Сначала докажем для характеристической функции $f = \chi_A$, $A \subset E$. Тогда

$$\int_E \chi_A \, \mathrm{d}\mu = \mu A = \sum_A 1 = \sum_A \chi_A$$

2. По линейности равенство верно для простых функций f.

3. $f \geqslant 0$. Разберём два случая:

   - Пусть $\int_E f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$. Тогда
   $$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{A \subset E \\ \mu A < +\infty}} \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$
   Условие $\mu A < +\infty$ значит что $|A| < +\infty$ (у нас считающая мера). А на конечном множестве положительная функция простая:
   $$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{A \subset E \\ \mu A < +\infty}} \sum_A f$$
   Справа написано буквально определение $\sum\limits_E f$ (там супремум частичных сумм).

   - Пусть $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = +\infty$. По определению интеграла неотрицательной функции
   $$\forall N > 0 \ \exists \text{простая } \varphi \leqslant f \text{ на } E \ \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu \geqslant N$$
   При этом
   $$\sum_E f \geqslant \sum_E \varphi = \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu \geqslant N$$

4. Дальше надо рассмотреть f_+ и f_-, там всё понятно. Если в одной части нет одновременно двух бесконечностей, то в другой — тоже.

□

Замечание. Причём тут замена переменной?

Следствие 2.1. *Пусть* $h\colon X \to [0;+\infty]$, μ *— считающая на* X, ν *— дискретная мера с весовой функцией* h*:*

$$\forall B \subset X \ \nu B = \sum_B h$$

Пусть $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда*

$$\int_E f \ \mathrm{d}\nu = \sum_E f \cdot h$$

Доказательство. По только что доказанной лемме

$$\nu B = \int_B h \ \mathrm{d}\mu$$

А тогда h — плотность ν относительно μ. Тогда по теореме 6

$$\int_E f \ \mathrm{d}\nu \overset{6}{=} \int_E fh \ \mathrm{d}\mu = \sum_E fh$$

□

Пример. Если $X = \mathbb{N}$, μ — считающая мера, т

$$\int_{\mathbb{N}} f \ \mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$$

То есть суммируемость f равносильна абсолютной сходимости ряда $f(k)$.

Пример. Пусть $\{a_k\}_k$ — не более чем счётный набор различных точек X, $\{h_k\}_k \subset [0;+\infty]$, $\nu B = \sum\limits_{k:a_k\in B} h_k$. Тогда

$$\int_E f \ \mathrm{d}\nu = \sum_{k:a_k\in B} f(a_k)h_k$$

И опять суммируемость функции равносильна суммируемости семейства (на сей раз семейства $|f(a_k)|h_k$).
Замечание: тут h из следствия — это не совсем h_k. Тут $h_k = h(a_k)$

Замена переменной в интеграле по мере Лебега .

Утверждение. *Пусть* $G \in \mathbb{A}_n$. *Тогда*

$$\mathbb{A}_n(G) = \{E \in \mathbb{A}_n \mid E \subset G\}$$

является σ*-алгеброй на* G.

Доказательство. Очевидно. □

Утверждение. $(G; \mathbb{A}_n(G); \mu\big|_{\mathbb{A}_n(G)})$ *— пространство с мерой.*

Доказательство. Очевидно. □

Замечание. До конца параграфа μ — мера Лебега.

Замечание. Напоминание:
Пусть G, V открыты в $\mathbb{R}^n$. Тогда отображение $\Phi\colon G \to V$ называется **диффеоморфизмом**, если Φ гладкая биекция, обратная функция к которой тоже гладкая.
При этом обычно V опускается, и под «диффеоморфизмом Φ на G называется диффеоморфизм $G \to \Phi(G)$».
Также заметим некоторые свойства: якобиан Φ нигде не равен нулю. При этом если G открыто, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$ гладко и обратимо и $\det \Phi'(x)$ нигде не равен нулю, то $\Phi(G)$ открыто и $\Phi^{-1} \in C^{(1)}(\Phi(G))$.

Замечание. Также мы знаем, что гладкая замена переводит измеримые множества в измеримые. Вопрос: чему равно $\mu\Phi(A)$? Мы знаем ответ для линейного и аффинного отображения (мера умножается на модуль определителя). При этом для линейного и аффинного отображения $\Phi' = \Phi$, а значит

$$\mu\Phi(E) = |\det\Phi'|\mu E$$

А что в более общем случае? Ну, запишем определение дифференцируемости Φ:

$$\Phi(x) = \underbrace{\Phi(x^0) + \Phi'(x)(x - x^0)}_{\widetilde{\Phi}_{x^0}(x)} + o(x - x^0)$$

Если $\Phi = \widetilde{\Phi}$, то ответ мы знаем. При этом $\widetilde{\Phi}$ тем ближе к Φ, чем ближе x к x^0. Отсюда возникает предположение, что $|\det\Phi'(x^0)|$ — плотность $\mu\Phi(\bullet)$ относительно μ. И нам удастся это доказать для диффеоморфизма.

Теорема 8 (Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, Φ — диффеоморфизм на G. Тогда*

$$\forall E \in \mathbb{A}_n(G)\ \mu\Phi(E) = \int_E |\det\Phi'|\ \mathrm{d}\mu$$

Доказательство. Why are we still here? Just to suffer.
Для начала пусть $\nu(E) = \mu\Phi(E)$. Несложно проверить, что ν — это мера на $\mathbb{A}_n(G)$.
Теперь нам надо доказать, что $|\det\Phi'|$ — плотность ν относительно μ. Тогда по определению плотности мы победим. У нас был критерий плотности, который мы хотим применить. Что нам надо проверить для этого?

$$\forall E \in \mathbb{A}_n(G)\ \mu E \inf_E |\det\Phi'| \leqslant \mu\Phi(E) \leqslant \mu E \sup_E |\det\Phi'|$$

Здесь есть два неравенства. Мы не хотим доказывать оба. Мы хотим сказать, что если правое доказать для **любого** диффеоморфизма Φ, то из него будет следовать левое. Почему? Ну, применим правое к отображению Φ^{-1} и множеству $\Phi(E)$:

$$\mu\Phi^{-1}(\Phi(E)) \leqslant \mu\Phi(E) \sup_{y\in\Phi(E)} |\det{\Phi^{-1}}'(y)|$$

Левая штука — μE. С $\mu\Phi(E)$ делать нечего, а вот с тем, что после него — есть что.

$$\sup_{y\in\Phi(E)} |\det{\Phi^{-1}}'(y)| = \sup_{y\in\Phi(E)} \frac{1}{|\det\Phi'(\Phi^{-1}(y))|} = \sup_{x\in E} \frac{1}{|\det\Phi'(x)|} = \frac{1}{\inf\limits_{x\in E} |\det\Phi'(x)|}$$

Кажется, это то, что мы хотели.
Теперь наконец начнём доказывать правое неравенство, постепенно усложняя E.

1. Пусть $E = \Delta$ — кубическая ячейка, $\overline{\Delta} \subset G$. Докажем неравенство от противного. Пусть

   $$\mu\Phi(\Delta) > \mu\Delta \sup_\Delta |\det\Phi'|$$

   отсюда

   $$\exists C > \mu\Delta \sup_\Delta |\det\Phi'|\ \mu\Phi(\Delta) > C\mu\Delta$$

   Будем действовать методом половинного деления. Каждое ребро ячейки попилим пополам, получим 2^n ячеек. Хотя бы для одной из этих ячеек (обозначим её за Δ_1) будет верно $\mu\Phi(\Delta_1) > C\mu\Delta_1$. Иначе можно было бы сложить эти неравенства, воспользоваться аддитивностью меры и прийти к противоречию. Сделаем так ещё неограниченное количество раз.
   Получим последовательность вложенных ячеек $\Delta_k \supset \Delta_{k+1}$, для каждой выполнено неравенство $\mu\Phi(\Delta_k) > C\mu\Delta_k$, при этом $\operatorname{diam}\Delta_k \to 0$. Ну тогда, $\overline{\Delta_k}$ все имеют общую точку $x^0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\Delta_k} \subset \overline{\Delta}$.
   Теперь будем усложнять Φ))

(a) Рассмотрим случай $\Phi'(x^0) = I$. Тогда

$$\Phi(x) = \Phi(x^0) + (x - x^0) + o(x - x^0)$$

С точностью до двух сдвигов, Φ почти тождественный оператор:

$$\Theta(x) = \Phi(x) - \Phi(x^0) + x^0 = x + o(x - x^0)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём такое δ из определения $o(x - x^0)$, что

$$\forall x \in B(x^0; \delta)\ |\Theta(x) - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}|x - x^0|$$

Очень хорошо. Заметим, что в некотором номере N $\overline{\Delta_N} \subset B(x^0; \delta)$. Пусть $\overline{\Delta_N} = [a; a + r\mathbb{1}] \ni x^0$. Тогда

$$x \in \overline{\Delta_n} \Rightarrow |x - x^0| \leqslant r\sqrt{n} \Rightarrow |\Theta(x) - x| \leqslant \varepsilon r$$

Тогда

$$\forall j \in [1:n]\ |\Theta_j(x) - x_j| \leqslant \varepsilon r$$

А это значит, что

$$a - \varepsilon r \leqslant x_j - \varepsilon r \leqslant \Theta_j(x) \leqslant x_j + \varepsilon r \leqslant a + (1 + \varepsilon)r$$

другими словами $\Theta(x) \in [a - \varepsilon r\mathbb{1}; a + (1+\varepsilon)r\mathbb{1}]$. обозначим этот куб буквой Π. Тогда $\Theta(\Delta_N) \subset \Pi$. Тогда

$$\mu\Phi(\Delta_N) = \mu\Theta(\Delta_N) \leqslant \mu\Pi = (1 + 2\varepsilon)^n r^n = (1 + 2\varepsilon)^n \mu\Delta_N$$

И это уже почти противоречие. Но мы его не хотим, давайте сначала возьмём произвольное Φ, и там уже докопаемся до противоречия.

(b) Итак, пусть Φ произвольное. Пусть $S = (\Phi'(x^0))^{-1}$ (это линейный оператор, его производная в любой точке — он сам). Пусть $\Psi = S \circ \Phi$. Ну, хорошо

$$\Psi'(x^0) = \underbrace{S'(\Phi(x^0))}_{S}\Phi'(x^0) = S\Phi'(x^0) = I$$

Ψ подходит под наш предыдущий случай, а значит мы нашли для него N:

$$\mu\Psi(\Delta_N) \leqslant (1 + 2\varepsilon)^n \mu\Delta_N$$

При этом

$$\mu\Psi(\Delta_N) = \mu S(\Phi(\Delta_N)) = |\det S|\mu\Phi(\Delta_N) = \frac{1}{|\det \Phi'(x^0)|}\mu\Phi(\Delta_N)$$

Из двух этих утверждений

$$\mu\Phi(\Delta_N) \leqslant (1 + 2\varepsilon^n)|\det \Phi'(x^0)|\mu\Delta_N$$

А ещё мы знаем, что $C\mu\Delta_n \leqslant \mu\Phi(\Delta_n)$. А это уже капец:

$$C < (1 + 2\varepsilon)^n|\det \Phi'(x^0)| \longrightarrow C \leqslant |\det \Phi(x^0)|$$

А у нас по выбору C $C > \sup\limits_{\Delta}|\det \Phi'| \overset{|\det \Phi'|\text{непрерывно}}{=} \sup\limits_{\overline{\Delta}}|\det \Phi'| > |\det \Phi'(x^0)|$

2. Пусть $E = U$ открытое подмножество G. Открытое множество можно представить как счётное объединения ячеек:

$$U = \bigsqcup_k D_k$$

Где D_k — кубические ячейки, $\overline{D_k} \subset U$. Тогда

$$\mu\Phi(U) = \mu\Phi\left(\bigsqcup_k D_k\right) = \mu\bigsqcup_k \Phi(D_k) = \sum_k \mu\Phi(D_k) \leqslant \sum_k \mu D_k \sup_{D_k}|\det \Phi'| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k \mu D_k \sup_U|\det \Phi'| = \sup_U|\det \Phi'|\sum_k \mu D_k = \mu U \sup_U|\det \Phi'|$$

3. От открытого множества у произвольному $E \in \mathbb{A}_n(G)$. Тут будем пользоваться регулярностью меры Лебега:

$$\mu\Phi(E) = \inf_{\substack{V \text{ открыто} \\ \Phi(E)\subset V\subset\Phi(G)}} \mu V = \inf_{\substack{U \text{ открыто} \\ E\subset U\subset G}} \mu\Phi(U) \leqslant \inf_{\substack{U \text{ открыто} \\ E\subset U\subset G}} \left(\mu U \sup_U |\det\Phi'|\right)$$

Хочется доказать, что это равно $\mu E \sup\limits_E |\det\Phi'|$. Мы знаем, что правая часть больше либо равна $\mu E \sup\limits_E |\det\Phi'|$, а нам надо доказать, что меньше либо равно.
Если $\mu E = 0$, то неравенство очевидно (тогда $\mu\Phi(E) = 0$, гладкое отображение переводит множество меры ноль в множество меры ноль). Если $\mu E = +\infty$, по доказывать нечего. И если супремум $\sup\limits_E |\det\Phi'|$ равен $+\infty$, то тоже (в правой части либо 0 (когда $\mu E = 0$), либо бесконечность; в обоих случаях доказывать нечего).
Далее считаем $\mu E, \sup\limits_E |\det\Phi'| \in (0; +\infty)$. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\exists\text{октрытое } U, E \subset U \subset G, \mu U \leqslant \mu E + \varepsilon, \sup_U |\det\Phi'| \leqslant \sup_E |\det\Phi'| + \varepsilon$$

первое условие — регулярность меры Лебега, а второе вот:

$$x \in E\ \exists V_x \subset G\ \forall t \in V_x\ \ ||\det\Phi'(t)| - |\det\Phi'(x)|| \leqslant \varepsilon$$

Тогда

$$U = \bigcup_{x\in E} V_x$$

Такое U подходит под

$$\sup_U |\det\Phi'| \leqslant \sup_E |\det\Phi'| + \varepsilon$$

Если пересечь его с тем, которое в регулярности меры Лебега, то получится искомое U из утверждения выше. Тогда

$$\inf_{\substack{U \text{ открыто} \\ E\subset U\subset G}} \left(\mu U \sup_U |\det\Phi'|\right) \leqslant (\mu E + \varepsilon)\left(\sup_E |\det\Phi'| + \varepsilon\right)$$

Устремив ε к нулю, получим искомое.

□

Теорема 9 (Замена переменной в кратном интеграле)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, Φ — диффеоморфизм на G, $E \in \mathbb{A}_n(G)$, $f \in S(\Phi(E))$. Тогда*

$$\int_{\Phi(E)} f\ \mathrm{d}\mu = \int_E (f\circ\Phi)|\det\Phi'|\ \mathrm{d}\mu$$

Интегралы существуют или не существуют одновременно, если существуют, то равны.
Также равенство пишется как

$$\int_{\Phi(E)} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_E (f\circ\Phi)(x)|\det\Phi'(x)|\ \mathrm{d}x$$

Доказательство. Возьмём теорему 6 и возьмём в ней

$$(X;\mathbb{A};\mu) = (G;\mathbb{A}_n(G);\mu) \qquad (Y;\mathbb{B};\nu) = (\Phi(G);\mathbb{A}_N(\Phi(G));\mu) \qquad h = |\det\Phi'|$$

От нас хотят равенство

$$\forall B \in \mathbb{B}\ \Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A}, \nu B = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} \int h\ \mathrm{d}\mu$$

Ну, если $B = \Phi(E)$, то $\nu\Phi(E) = \int_E |\det\Phi'|\ \mathrm{d}\mu$. А это мы доказали в 8. □

Следствие 2.1. *В условии теоремы 9*

$$f \in L(\Phi(E)) \Leftrightarrow (f \circ \Phi)|\det \Phi'| \in L(E)$$

Следствие 2.2. *Пусть $G \subset H \subset \mathbb{R}^n$, G открыто. Пусть $\Phi \colon H \to \mathbb{R}^n$ и пусть $\Phi\big|_G$ — диффеоморфизм. И пусть ещё $\mu(H \setminus G) = \mu(\Phi(H) \setminus \Phi(G)) = 0$. $E \in \mathbb{A}_n(H)$, $f \in S(\Phi(E))$. Тогда верна формула замены переменной:*

$$\int_{\Phi(E)} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_E (f \circ \Phi)(x)|\det \Phi'(x)|\ \mathrm{d}x$$

Доказательство.

$$\int_{\Phi(E)} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_{\Phi(E\cap G)} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_{E\cap G} (f \circ \Phi)(x)|\det \Phi'(x)|\ \mathrm{d}x = \int_E (f \circ \Phi)(x)|\det \Phi'(x)|\ \mathrm{d}x$$

□

Замечание. Ослаблять условия теоремы 9 дальше трудно и больно. Но можно. Но туда мы лезть не будем. Для желающих есть книжка Эванса и Гариепи «Теория меры и тонкие свойства функций».

Замечание. А что у нас в $n = 1$, как это коррелирует с тем, что мы знаем?

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' \qquad \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$$

Почему модуль? На самом деле у нас и тут есть модуль? Потому что φ может как возрастать, так и убывать, и во втором случае у нас меняются местами пределы интегрирования. А в формуле 9 ориентации на E не задано.

Пример. Сдвиг и отражение.
$\Phi(x) = a \pm x$, $a \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, это диффеоморфизм и модуль якобиана равен единице. То есть

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(a \pm x)\ \mathrm{d}x$$

Пример. Полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.
$(x; y) = (r\cos\phi; r\sin\phi) = \Phi(r; \phi)$. Посчитаем якобиан:

$$\begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r$$

Это не равно нулю всюду, кроме начала координат. Где Φ — диффеоморфизм? По-разному можно отвечать, например, так: удалим из плоскости отрицательную часть вещественной оси. Тогда $G = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi)$, $\Phi(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x; 0) \mid x \leqslant 0\}$. Тогда Φ — диффеоморфизм. Очевидно, пренебрегать тем, что мы сделали, можно, там мера ноль.
Посчитаем следующий интеграл:

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$$

Это не берётся, но посчитать можно:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\ \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\ \mathrm{d}y\right) = \iint\limits_{(0;+\infty)^2} e^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\substack{x=r\cos\phi \\ y=r\sin\phi}}{=}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\ \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left.\frac{-e^{-r^2}}{2}\right|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Отсюда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Пример. Цилиндрические координаты: $(x;y;z)=(r\cos\phi;r\sin\phi;h)=\Phi(r;\phi;h)$. Тогда $\det\Phi'=r$, $G=(0;+\infty)\times(-\pi;\pi)\times\mathbb{R}$, $\Phi(G)=\{(x;0;z)\mid x\leqslant 0, z\in\mathbb{R}\}$.

Пример. Сферические координаты:

$$\begin{cases}\rho=r\cos\psi\\ z=r\sin\psi\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\rho\cos\phi\\ y=\rho\sin\phi\end{cases}$$

(Обозначения могут быть другими.)
Тогда

$$(x;y;z)=(r\cos\phi\cos\psi;r\sin\phi\cos\psi;r\sin\psi)=\Phi(r;\phi;\psi)$$

Из написанного выше Φ можно представить как два полярных преобразования, а якобиан произведения равен произведению якобианов, т.е. $\det\Phi'=r\rho=r^2\cos\psi$.
Что покусать из пространства? Ну,

$$G=(0;+\infty)\times(-\pi;\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\qquad\Phi(G)=\{(x;0;z)\mid x\leqslant 0, z\in\mathbb{R}\}$$

Пример. Сферические координаты в $\mathbb{R}^n$.
$x\in\mathbb{R}^n$, $r\in(0;+\infty)$, $\phi\in\mathbb{R}^{n-1}$. Тут тоже последовательные полярные замены:

$$\begin{cases}x_1=\rho_1\cos\phi_1\\ x_2=\rho_1\sin\phi_1\end{cases}\quad\begin{cases}\rho_1=\rho_2\cos\phi_2\\ x_3=\rho_2\sin\phi_2\end{cases}\quad\dots\quad\begin{cases}\rho_{n-3}=\rho_{n-2}\cos\phi_{n-2}\\ x_{n-1}=\rho_{n-2}\sin\phi_{n-2}\end{cases}\quad\begin{cases}\rho_{n-2}=r\cos\phi_{n-1}\\ x_n=r\sin\phi_{n-1}\end{cases}$$

Отсюда

$$\det\Phi'=\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-2}r=r^{n-1}\cos^{n-2}\phi_{n-1}\cos^{n-1}\phi_{n-2}\cdots\cos^2\phi_3\cos\phi_2$$

$$\begin{cases}x_1=r\cos\phi_{n-1}\cos\phi_{n-2}\cdots\cos\phi_2\cos\phi_1\\ x_2=r\cos\phi_{n-1}\cos\phi_{n-2}\cdots\cos\phi_2\sin\phi_1\\ x_3=r\cos\phi_{n-1}\cos\phi_{n-2}\cdots\sin\phi_2\\ \vdots\\ x_{n-1}=r\cos\phi_{n-1}\sin\phi_{n-2}\\ x_n=r\sin\phi_{n-1}\end{cases}$$

В качестве G можно берётся вот что:

$$G=(0;+\infty)\times(-\pi;\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)^{n-2}$$

Желающие узнать $\Phi(G)$, могут почитать учебник.

Мера и интеграл Лебега — Стилтьеса.

Определение 9. Пусть $\Delta=(\alpha;\beta)\subset\mathbb{R}$. Пусть $g\colon\Delta\to\mathbb{R}$ возрастает и непрерывна слева. Пусть $\mathbb{P}_\Delta$ — множество ячеек (полуинтервалов), содержащихся в Δ вместе с замыканием:

$$\mathbb{P}_\Delta=\{[a;b)\mid\alpha<a\leqslant b<\beta\}$$

(В случае $\Delta=\mathbb{R}$ $\mathbb{P}_\Delta=\mathbb{P}_1$.) Очевидно, $\mathbb{P}_\Delta$ — полукольцо.
Объём, порождённый функцией g — $V_g[a;b)=g(b)-g(a)$.

Свойство 9.1. *Очевидно, это объём.*

Свойство 9.2. *Объём, порождённый функцией — мера.*

Доказательство. См. доказательство для меры Лебега, но используя следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} V_g\left[a-\frac{1}{n};b\right) = Vg[a;b) = \lim_{n\to\infty} V_g\left[a;b-\frac{1}{n}\right)$$

□

Определение 10. Стандартное продолжение V_g на некоторую σ-алгебру называется **мерой Стилтьеса — Лебега**, порождённой функцией g (и обозначается μ_g).
Сигма-алгебру, на которой определена эта мера, обозначают $\mathbb{A}_g$.

Замечание. Мера Лебега μ_1 является частным случаем меры Стилтьеса — Лебега при $g(x)=x$, $\Delta=\mathbb{R}$.

Свойство 10.1. *Мера одноточечного множества* $\{a\}$ *равна* $g(a+)-g(a)$

Доказательство.

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[a;a+\frac{1}{n}\right)$$

По непрерывности меры

$$\mu_g\{a\} = \lim_{n\to\infty}\mu_g\left[a;a+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} g\left(a+\frac{1}{n}\right) - g(a) = g(a+)-g(a)$$

□

Свойство 10.2. *Аналогично*

$$\mu_g[a;b] = g(b+)-g(a)$$
$$\mu_g(\alpha;b] = g(b+)-g(\alpha+)$$
$$\mu_g[a;\beta) = g(\beta-)-g(a)$$
$$\mu_g(\alpha;\beta) = g(\beta-)-g(\alpha+)$$

Замечание. Мера точки может быть положительной. Нулю она равна тогда и только тогда, когда g непрерывна в этой точке.

Свойство 10.3. *Мера Лебега — Стилтьеса σ-конечна. Конечна она тогда и только тогда, когда μ_g ограничена.*

Определение 11. Определим меру μ_g на промежутке произвольного типа.
Пусть $\Delta = \langle\alpha;\beta\rangle\subset\mathbb{R}$.
Если $\alpha\in\Delta$, то пусть $\widetilde{g}(x)=g(\alpha)$ при $x<\alpha$.
Если $\beta\in\Delta$, то не требуем непрерывности g слева в точке β, но положим

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x\in\langle\alpha;\beta) \\ g(\beta-) & x=\beta \\ g(\beta) & x>\beta \end{cases}$$

После этого получим $\widetilde{g}$, заданное на открытом промежутке $\widetilde{\Delta}\supset\Delta$. При этом на нём $\widetilde{g}$ возрастает и непрерывно слева. Положим, что мера Лебега — Стилтьеса μ_g равна $\mu_{\widetilde{g}}\big|_{\mathbb{A}_{\widetilde{g}}(\Delta)}$.

Замечание. Также можно определить меру μ_g для функции g, которая возрастает на Δ, но не обязательно непрерывна слева. Тогда мы просто исправляем g в точках левого разрыва (кроме β).
Другой способ — просто определить меру Лебега — Стилтьеса как $\mu_g[a;b)=g(b-)-g(a-)$.

Замечание. У этих мер есть проблемы: $\mathbb{A}_g$ различны для разных g. А иногда хочется сложить две меры Лебега — Стилтьеса. Тогда их сужают на Борелевскую σ-алгебру (на ней они все определены т.к. определены на ячейках), получая меру Бореля — Стилтьеса (на самом деле бывает более широкая сигма-алгебра, но обычно хватает Борелевской).

Лемма 3. *Пусть Δ — промежуток в $\mathbb{R}$, есть мера ν, заданная на $\mathbb{B}_\Delta$, которая конечна на $\mathbb{P}_\Delta$ (ячейках, лежащих в Δ вместе с замыканием). Тогда существует такая $g \uparrow \Delta$, что $\nu = \mu_g\big|_{\mathbb{B}_\Delta}$.*

Доказательство. Пусть для определённости Δ открыт.
Пусть $x \in \Delta$. Определим g так:

$$g(x) = \begin{cases} \nu[x_0; x) & x \geqslant x_0 \\ -\nu[x; x_0) & x < x_0 \end{cases}$$

Возрастание g на Δ очевидно. Проверим непрерывность слева. Пусть для определённости $x > x_0$. Рассмотрим $u \in (x_0; x)$. Тогда

$$g(u) = \nu[x_0; u) \underset{u \to x-}{\longrightarrow} \nu[x_0; x) = g(x)$$

Если же $x \leqslant x_0$, возьмём $u < x$:

$$g(u) = -\nu[u; x_0) \underset{u \to x-}{\longrightarrow} -\nu[x; x_0) = g(x)$$

(Здесь мы используем конечность на отрезках.)
Осталось проверить, что ν и μ_g совпадают на ячейках. Рассмотрим $[a; b) \subset [a; b] \subset \Delta$. Тогда

$$\mu_g[a; b) = g(b) - g(a) = \begin{cases} \nu[x_0; b) - \nu[x_0; a) & x_0 \leqslant a < b \\ \nu[x_0; b) - (-\nu[a; x_0)) & a < x_0 < b = \nu[a; b) \\ -\nu[b; x_0) - (-\nu[a; x_0)) & a < b \leqslant x_0 \end{cases}$$

□

Определение 12. Интегралом Лебега — Стилтьеса называется никогда не догадаетесь что. Помимо стандартного обозначения $\int_E f \, \mathrm{d}\mu_g$ также пишут

$$\int_E f \, \mathrm{d}g \qquad \int_E f(x) \, \mathrm{d}g(x)$$

f називаутся **интегрируемой функцией** (integrant), а g — **интегрирующей функцией** (integrand).

Утверждение. *Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, а $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$. Пусть $f \in S_\mathbb{B}(X)$. Тогда*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu\big|_\mathbb{B}$$

Доказательство. Частный случай замены переменной в интеграле, для $\Phi = \mathrm{id}_X$. □

Замечание. Дальше рассмотрим несколько частных случаев меры и интеграла Лебега — Стилтьеса.

Пример. Дискретная мера.
Введём

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

— тета-функцию Хевисайда. Очевидно, что

$$\mu_\theta E = \delta_0 E = \begin{cases} 1 & 0 \in E \\ 0 & 0 \notin E \end{cases}$$

А дальше рассмотрим $\{a_k\}$ — не более чем счётный набор точек из Δ, Δ открыт в $\mathbb{R}$, $\{h_k\} \subset (0; +\infty)$. (Дальше будем считать, что имеем счётный набор, конечный будет частным случаем (много нулей)). Пусть

$$\forall [a; b] \subset \Delta \sum_{k : a_k \in [a; b)} h_k < +\infty$$

Тогда возьмём $x \in \Delta, c \in \mathbb{R}$ и определим

$$g(x) = c + \sum_k h_k(\theta(x - a_k) - \theta(x_0 - a_k))$$

Заметим, что θ возрастает, а значит при фиксированном x все слагаемые одного знака. Поэтому сумма ряда есть в $\overline{\mathbb{R}}$. На самом деле эта сумма конечна.
Пусть $x \geqslant x_0$. Тогда, выкинув из суммы нулевые слагаемые, получим

$$c \leqslant g(x) = c + \sum_{k:a_k \in [x_0;x)} h_k < +\infty$$

В случае $x < x_0$ аналогично. А ещё g возрастает (т.к. это сумма ряда возрастающих функций).

Утверждение. *g непрерывна везде, кроме a_k, а в a_k непрерывна только слева, а скачок равен h_k.*

Доказательство. Докажем, что ряд в определении g сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в Δ.
Достаточно доказывать для $[a; x_0]$ и $[x_0; b]$ (остальные являют собой объединение или разность двух таких). Рассмотрим $[x_0; b]$, $[a; x_0]$ аналогично.
Рассмотрим $x \in [x_0; b]$. Заметим, что

$$h_k(\theta(x - a_k) - \theta(x_0 - a_k)) \leqslant h_k(\theta(b - a_k) - \theta(x_0 - a_k))$$

А ряд с тем, что справа, сходится (т.к. поточечно сходится $g(b)$), то есть g равномерно сходится по признаку Вейерштрасса.
Заметим, что все члены ряда непрерывны на $\Delta \setminus \{a_k\}_k$, а значит и сумма тоже. Также заметим, что если удалить из суммы k-тое слагаемое, то всё остальное будет непрерывным. А $h_k(\theta(x-a_k)-\theta(x_0-a_k))$ ведёт себя так, как нам хочется. $\square$

Определение 13. Функция g такого вида, как в примере выше, называется **функцией скачков**.

Теорема 10 (Дискретная мера как мера Лебега — Стилтьеса)**.** *В условиях определения g, $\mathbb{A}_g = 2^\Delta$, μ_g — дискретная мера с нагрузками h_k в точках a_k.*

Доказательство. Если $[a; b] \subset \Delta$, то

$$\mu_g[a; b) = g(b) - g(a) = \sum_k h_k(\theta(b - a_k) - \theta(a - a_k)) = \sum_{k:a_k \in [a;b)} h_k$$

Кажется, это ровно определение дискретной меры. Обозначим её за $\nu[a; b)$. Кайф, две меры совпадают на ячейках. А значит совпадают на $\mathbb{A}_g$. (В книжке есть доказательство без теоремы о единственности стандартного продолжения меры.) Остаётся лишь доказать, что $\mathbb{A}_g = 2^\Delta$. Рассмотрим

$$H = \{a_1; a_2; \ldots\}$$

Это множество измеримо (как не более чем счётное). Значит и дополнение его измеримо. А $\mu_g(\Delta \setminus H) = 0$. А меры μ_g (как и любое стандартное продолжение) полна, а значит любое подмножество $\Delta \setminus H$ измеримо (и имеет меру ноль). Ну и всё, $A = (A \cap H) \cup (A \cap H^\complement)$, и первое измеримо как не более чем счётное, а второе как множество меры ноль. $\square$

Замечание. Как мы видим, μ_g не зависит от x_0 и c. А значит, если ряд $\sum\limits_k h_k\theta(x - a_k)$ сходится для любого x, то $\sum\limits_k h_k\theta(x_0 - a_k)$ можно вынести в c.

Пример. $g(x) = \lfloor x \rfloor$ порождает считающую меру на $\mathbb{Z}$.

Замечание. Если $\alpha \in \Delta$ или $\beta \in \Delta$, то можно добавить нагрузки в этих точках.

Следствие 3.1.

$$\int_E f \ \mathrm{d}g = \sum_{k: a_k \in E} f(a_k) h_k$$

Замечание. Мы видим $\mathrm{d}g$. Очень хочется заменить это на $g'\mathrm{d}x$. В рассмотренном выше примере это не получится без обобщённых функций, но в некоторых примерах получится.

Замечание. Здесь и далее $\int\limits_a^b f$ — интеграл Лебега, $\int\limits_b^a f = -\int\limits_a^b f$.

Определение 14. Пусть Δ — промежуток в $\mathbb{R}$, $h\colon \Delta \to \overline{\mathbb{R}}$ называется **локально суммируемой** на Δ, еси она суммируема на любом отрезке в Δ. Обозначение: $L_{\mathrm{loc}}(\Delta)$.

Определение 15. Пусть Δ — промежуток в $\mathbb{R}$. $g\colon \Delta \to \mathbb{R}$ называется **локально абсолютно непрерывной** на Δ, если g представляется в виде $g(x) = \int_{x_0}^x h + \underbrace{\mathrm{const}}_{g(x_0)}$, где $x_0 \in \Delta$, h локально суммируема.

Обозначение $AC_{\mathrm{loc}}(\Delta)$.

Замечание. Далее мы будем опускать слово «локально» в этом термине.

Свойство 15.1. *Если h непрерывно в точке x, то g дифференцируема в ней и $g'(x) = h(x)$.*

Доказательство. См. доказательство теоремы Барроу. □

Свойство 15.2. *По теореме Барроу и формуле Ньютона — Лейбница*

$$C^{(1)}(\Delta) \subsetneqq AC_{\mathrm{loc}}(\Delta)$$

Доказательство. Включение строгое, если в качестве h взять θ. □

Свойство 15.3.

$$AC_{\mathrm{loc}}(\Delta) \subsetneqq C(\Delta)$$

Свойство 15.4. *Для включения см. теорему об абсолютной непрерывности интеграла из прошлого семестра.*
Включение строгое:

$$g(x) = \int_x^1 \frac{1}{t} \sin\frac{1}{t} \ \mathrm{d}t \qquad \Delta = [0; 1]$$

В $x = 0$ условно сходится (а значит функция g непрерывна), но абсолюно непрерывной она не будет т.к. единственный кандидат на роль h ($\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}$) не суммируемо.

Замечание. Более интересно то, что включение строгое, даже если рассматривать только возрастающие функции. Например, если взять Θ — канторову лестницу, то h по крайней мере в дополнительных канторовых промежутках была равна производной Θ, а значит почти везде была бы равна нулю.

Свойство 15.5. *Если $g \in AC_{\mathrm{loc}}(\Delta)$, то g дифференцируема в почти всех точках Δ, $g' \in L_{\mathrm{loc}}(\Delta)$ и $g' = h$ почти везде.*
Без доказательства.

Следствие 3.2. *Тогда*

$$g(x) = \int_{x_0}^x g' + g(x_0)$$

Утверждение. *Однако условие «g почти везде дифференцируема на Δ и $'g \in L_{\mathrm{loc}}(\Delta)$» не влечёт равенства*

$$g(x) = \int_{x_0}^x g' + g(x_0)$$

(и не влечёт абсолютной локальной непрерывности).

Доказательство. Канторова лестница. □

Замечание. Абсолютно локально непрерывные функции — в точности те функции, для которых верна формула Ньютона — Лейбница.

Утверждение. *Если g возрастает на $[a;b]$, то g дифференцируема почти везде на $[a;b]$. Тогда g' неотрицательно почти везде и*

$$\int\limits_a^b g' \leqslant g(b) - g(a)$$

Без доказательства.

Теорема 11 (Интеграл Лебега — Стилтьеса абсолютно локально непрерывной функции.)**.** *Пусть Δ — промежуток в $\mathbb{R}$, $h \in L_{\text{loc}}(\Delta)$, $h \geqslant 0$,$x_0 \in \Delta$,*

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} h + g(x_0) \qquad x \in \Delta$$

Тогда

1. *$\mathbb{A}_1(\Delta) \subset \mathbb{A}_g(\Delta)$.*
2. *Если $E \in \mathbb{A}_1(\Delta)$, $f \in S(E)$, то $\int_E f \, \mathrm{d}g = \int_E fh$. Интегралы существуют или нет одновременно, если существуют, то равны.*

Доказательство. Пусть $\nu E = \int_E h$. Это мера на $\mathbb{A}_1(\Delta)$. Заметим, что тогда второе утверждение — замена переменной в интеграле. О'кей, заметим, что μ_g и ν равны нулю на одноточечном множестве, а значит можно считать Δ открытым.

Круть, заметим, что $\mu_g[a;b) = g(b) - g(a) = \int\limits_a^b h = \nu[a;b)$, то есть ν и μ_g совпадают на ячейках. А значит совпадают на $\mathbb{B}_\Delta$. А хочется, чтобы они совпадали на измеримых Лебегу множествах.
Хорошо, давайте дальше проверим, что ν и μ_g совпадают на множествах нулевой меры. Возьмём $e \subset \Delta : \mu_1 e = 0$. Его можно заключить в множестве типа G_δ с нулевой мерой, а на множестве типа G_δ ν и μ_g совпадают (и равны нулю). Тогда по полноте μ_g $e \in \mathbb{A}_g(\Delta)$.
Итого рассмотрев множество $E \in \mathbb{A}_1(\Delta)$, представим его как $A \cup e$, где $A \in \mathbb{B}_\Delta$, $\mu_1 e = 0$, получим, что любое такое E лежит в $\mathbb{A}_g(\Delta)$.
Осталось применить теорему 6 ($\Phi = \mathrm{id}_\Delta$). □

Следствие 3.1. *Если $g \in C^{(1)}(\Delta)$ и возрастает, то $\int_E f \, \mathrm{d}g = \int_E fg'$*

Замечание. Очень жаль, но наши два примера — это не все функции.

Определение 16. $g\colon \Delta \to \mathbb{R}$ называется **сингулярной**, если $g \equiv 0$ **или** g непрерывна, $g \neq \text{const}$ и $g' = 0$ почти везде.

Пример. Канторова лестница.

Утверждение. *Пусть $g\colon \Delta \to \mathbb{R}$, возрастает и непрерывна слева (кроме, возможно, правого конца Δ). Тогда g единственным образом (с точностью до константы) представляется в виде*

$$g = g_{\text{disc}} + g_{\text{c}}$$

где первое — функция скачков, второе — непрерывная. При этом

$$g_{\text{c}} = g_{\text{ac}} + g_{\text{sing}}$$

Где первое — абсолютно непрерывна, второе — сингулярна. При этом все эти g также возрастают и непрерывны слева (кроме, возможно, левого конца).
Что интересно, то же самое можно записать для мер Стелтьеса — Лебега (по крайней мере на $\mathbb{B}_\Delta$):

$$\mu_g = \mu_{g_{\text{disc}}} + \mu_{g_{\text{ac}}} + \mu_{g_{\text{sing}}}$$

Определение 17. Интеграл Лебега — Стилтьеса функции произвольного знака.
Пусть $g = g_1 - g_2$, где g_1, g_2 возрастают. Пусть f, E — борелевские. Тогда положим

$$\int_E f \, \mathrm{d}g = \int_E f \, \mathrm{d}g_1 - \int_E f \, \mathrm{d}g_2$$

Если правая часть существует.

Свойство 17.1. *Нетрудно заметить, что этот интеграл не зависит от конкретного разбиения g на g_1 и g_2.*

Замечание. В частности, на отрезке можно интегрировать по функции ограниченной вариации.

Свойство 17.2. *Интеграл заведомо существует и конечен для борелевской ограниченной функции f.*

Свойство 17.3. *Для таких интегралов верна теорема 11.*

Теорема 12 (Интегрирование по частям в интеграле Лебега — Стилтьеса.)**.** *Пусть $f \in AC[a;b]$, $g \in V[a;b]$. Тогда*

$$\int_{[a;b]} f \; \mathrm{g} = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

Доказательство. Считаем, что g возрастает, (иначе представим в виде разности двух возрастающих) и непрерывна слева (кроме, может, b).

- Докажем сначала формулу в частном случае $f(a) = g(b) = 0$. Тогда

$$\int_{[a;b]} f \, \mathrm{d}g = \int_{[a;b]} \left(\int\limits_a^x f'(u) \, \mathrm{d}u \right) \, \mathrm{d}g(x)$$

  Хочется воспользоваться теоремой Фубини. Тогда заметим, что $a \leqslant u \leqslant x \leqslant b$, то есть имеем треугольник. Чтобы менять порядок интегрирования, надо проверить суммируемость подынтегральной функции. Для этого ставим модуль $|f'(u)|$. Тогда изменить порядок интегрирования можно по Тонелли и получить $\int\limits_a^b |f'|g$, где первое суммируемо, второе ограничено, а значит интеграл небесконечен. То есть $f'(u)$ суммируема

$$\int_{[a;b]} f \, \mathrm{d}g = \int_{[a;b]} f'(u) \underbrace{\left(\int_{[u;b]} \mathrm{d}g(x) \right)}_{\mu_g[u;b] = g(b) - g(u) = -g(u)} \mathrm{d}u = -\int\limits_a^b f'g$$

  Получили то, что хотели.

- Общий случай: рассмотрим $f - f(a)$ и $g - g(b)$. По доказанному,

$$\int_{[a;b]} f - f(a) \, \mathrm{d}(g - \cancel{g(b)}) = -\int\limits_a^b (f - \cancel{f(a)})'(g - g(b))$$

  Тогда

$$\int_{[a;b]} f \, \mathrm{d}g - f(a) \int_{[a;b]} \mathrm{d}g = -\int\limits_a^b f'g + \int\limits_a^b f'g(b)$$

  При этом $\int_{[a;b]} \mathrm{d}g$ мы уже считали, это $g(b) - g(a)$, а $\int\limits_a^b f' = f(b) - f(a)$ по формуле Ньютона — Лейбница ($f \in AC[a;b]$). Приведя подобные слагаемые, получим искомое.

□

Следствие 3.1 (Интегрирование по частям в интеграле Лебега)**.** *Если* $f, g \in AC[a;b]$*, то*

$$\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

Интегралы, зависящие от параметра.

Определение 18. Пусть $(X;\mathbb{A};\mu)$ — пространство с мерой, Y — множество (произвольное). И есть функция $f\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Пусть также

$$\forall y \in Y \;\; f(\bullet; y) \in L(X;\mu)$$

Тогда $I(y) = \int_X f(x;y)\,\mathrm{d}x$ называется **интегралом, зависящим от параметра**.

Замечание. Чтобы исследовать свойства интеграла с параметром, придётся вводить дополнительную структуру на Y. Например, если Y — метрическое пространство, можно ли перейти к пределу под знаком интеграла? Или есть ли непрерывность интеграла с параметром. Что можно сказать о дифференцируемости I и о её производной (тогда уже надо считать Y подмножеством $\mathbb{R}^n$). Можно ли интегрировать по y, если Y — пространство с мерой?
Впрочем, ответ на 4 вопросы мы знаем — см. теоремы Тонелли и Фубини. На остальные сейчас попытаемся ответить.

Теорема 13 (Предельный переход по параметру под знаком интеграла)**.** *Пусть* $(X;\mathbb{A};\mu)$ *— пространство с мерой,* $\tilde{Y}$ *— пространство с морой,* $Y \subset Y$*. Пусть* $f\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *и пусть*

$$\forall y \in Y \;\; f(\bullet; y) \in L(X;\mu)$$

Пусть y_0 *— предельная точка* Y*, при почти всех* $x \in X$ $f(x;y) \underset{y \to y_0}{\to} g(x)$*.*
Пусть

$$\exists \Phi \in L(X;\mu) \; \exists V_{y_0} \textit{ при почти всех } x \in X \; \forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y \; |f(x;y)| \leqslant \Phi(x)$$

Тогда

$$\lim_{y \to y_0} \int_X f(x;y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \lim_{y \to y_0} f(x;y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Определение 19. Условие

$$\exists \Phi \in L(X;\mu) \; \exists V_{y_0} \text{ при почти всех } x \in X \; \forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y \; |f(x;y)| \leqslant \Phi(x)$$

называется **локальным условием Лебега** в точке y_0.

Доказательство. Возьмём последовательность точек $y_n \in Y \setminus \{y_0\}$, $y_n \to y_0$. Тогда начиная с некоторого y_N все $y_{n>N} \in V_{y_0}$ из локального условия Лебега.
Введём последовательность функций $f_n(x) = f(x;y_n)$. Тогда при почти всех $x \in X$ $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} g(x)$.
Кроме того в силу локального условия Лебега для почти всех $x \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leqslant \Phi(x)$
То теореме Лебега о мажорируемой сходимости $g \in L(X;\mu)$, и

$$\int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

□

Замечание. Не исключён случай, когда y_0 — бесконечно удалённая точка или $\pm\infty$, если $\tilde{Y} = \mathbb{R}$.

Замечание. Квантор $\forall$ и «для почти всех» в общем случае менять нельзя. «Почти всех x $\forall y$» сильнее, чем «$\forall y$ для почти всех x». Но для данной теоремы более слабое условие также работает (без изменения доказательства).

Замечание. Интересный факт: мы имели равномерную сходимость для рядов. А эта теорема в некотором смысле оперирует с равномерной сходимостью для семейств функций (f можно рассматривать как семейство функций $f_y(x)$).

Определение 20. Пусть X — множество, $\tilde{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subset \tilde{Y}$, y_0 — передельная точка Y, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $g\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Тогда говорят, что **семейство функций** $\{f(\bullet; y)\}_{y \in Y}$ **сходится** к g **равномерно** на X при $y \to y_0$, если

$$\sup_{x \in X} |f(x; y) - g(x)| \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0$$

Записывается привычным образом $f(x; y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g(x)$

Следствие 3.1 (Предельный переход по параметру при условии равномерной сходимости)**.** *Пусть* $(X; \mathbb{A}; \mu)$ *— пространство с мерой,* μ *конечна.*
$\tilde{Y}$ *— метрическое пространство,* $Y \subset Y$*,* y_0 *— предельная точка* Y*.*
Пусть $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$*,* $f(x; y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g(x)$ *на* X *и пусть*

$$\forall y \in Y \;\; f(\bullet; y) \in L(X; \mu)$$

Тогда $g \in L(X; \mu)$

$$\lim_{y \to y_0} \int_X f(x; y)\ \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \lim_{y \to y_0} f(x; y)\ \mathrm{d}\mu(x)$$

Доказательство. Возьмём последовательность $y_n \in Y \setminus \{y_0\}$, $y_n \to y_0$. Введём $f_n(x) = f(x; y_n)$. Тогда f_n равномерно стремится к g на X.
Возьмём $\varepsilon = 1$ и получим N такое что $\forall n > N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - g(x)| < 1$.
Отсюда $|g(x)| < |f_N(x)| + 1$, обе части $\in L(X; \mu)$, значит $g \in L(X; \mu)$. Тогда

$$|f_n(x)| \leqslant 1 + |g(x)|$$

Если обозначит правую часть за Φ, можно будет применить теорему Лебега. □

Пример. Условие конечности меры существенно. На множестве бесконечной меры равномерная сходимость не работает:
$X = [0; +\infty)$, $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0;n]}$. Тогда интеграл каждой f_n равен 1, что не стремится к нулю.

Следствие 3.2 (Непрерывность интеграла по параметру в точке)**.** *Пусть* $(X; \mathbb{A}; \mu)$ *— пространство с мерой.*
Пусть Y *— метрическое пространство,* $y_0 \in Y$*.*
Пусть $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ *и пусть*

$$\forall y \in Y \;\; f(\bullet; y) \in L(X; \mu)$$

Пусть для почти всех $x \in X$ $f(x; \bullet)$ *непрерывна в* y_0 *и пусть* f *удовлетворяет локальному условию Лебега нв* y_0*. Тогда* $\int_X f(x; y)\ \mathrm{d}\mu(x)$ *непрерывно в* y_0*.*

Доказательство. Если y_0 — изолированная точка Y, ничего доказывать не надо, иначе она предельная. Возьмём $g(x) = f(x; y_0)$. Всё. □

Следствие 3.3. *Если условие следствия 3.2 верно для любой точки* $y_0 \in Y$*, то*

$$\int_X f(x; y)\ \mathrm{d}\mu(x) \in C(Y)$$

Замечание. Полезное напоминание: если $f \in C(X \times Y)$, то $\forall x \in X\ f(x; \bullet) \in C(Y)$ и $\forall y \in Y\ f(\bullet; y) \in C(X)$.

Теорема 14 (Непрерывность интеграла по параметру на множестве)**.** *Пусть X, Y — метрические пространства, X компактно, μ — конечная борелевская мера на X, $f \in C(X \times Y)$. Тогда*

$$\int_X f(x; y)\ \mathrm{d}\mu(x) \in C(Y)$$

Доказательство. Из комментария выше

$$\forall y \in Y\ f(\bullet; y) \in C(X)$$

Также X — компакт, следовательно $f(\bullet; y)$ ограничена на X. μ — борелевская, значит $f(\bullet; y)$ измерима. $\mu X < +\infty$, а значит $f(\bullet; x) \in L(X; \mu)$. Отлично, теперь интеграл $\int_X f(x; y)\ \mathrm{d}\mu(x)$ корректно определён. Ну что ж, осталось проверить локальное условие Лебега в каждой точке $y_0 \in Y$. Давайте докажем, что

$$\exists V_{y_0}\ f \text{ ограничена на } X \times V_{y_0}$$

(мажоранта будет константой).
Ну, давайте докажем от противного. Тогда в частности $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in X, y_n \in B(y_0; \frac{1}{n})\ |f(x_n; y_n)| > n$. y_n стремится к y_0, а из x_n можно выделить сходящуюся (к x_0) подпоследовательность x_{n_k} (в силу секвенциальной компактности). Но подождите. $|f(x_{n_k}; y_{n_k})| > n_k \to \infty$. А левая часть стремится к $|f(x_0; y_0)|$. □

Замечание. В частности, теорема верна для меры Лебега.

Следствие 3.1. *Если $[a; b], \langle c; d\rangle \subset \mathbb{R}$, $f \in C([a; b] \times \langle c; d\rangle)$, то $\int_X f(x; y)\ \mathrm{d}x \in C\langle c; d\rangle$.*

Пример. Локальное условие Лебега в следствии 3.2 и компактность X в теореме 14 существенны. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$,

$$f(x; y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ \frac{1}{1 + \left(x + \frac{1}{|y|}\right)^2} & y \neq 0 \end{cases}$$

Верно ли, что $f \in C(\mathbb{R}^2)$? Если $y_0 \neq 0$, то в точке $(x_0; y_0)$ всё понятно. Что с $y = 0$? Ну, рассмотрим $(x_0; 0)$ в окрестности $|xy| < \frac{1}{2}$. Тогда

$$0 \leqslant f(x; y) \leqslant \frac{y^2}{y^2 + (x|y| + 1)^2} \leqslant 4y^2 \underset{(x;y)\to(x_0;0)}{\longrightarrow} 0$$

Обозначим

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x; y)\ \mathrm{d}x$$

Очевидно, $I(0) = 0$. А если $y \neq 0$, то

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \left(x + \frac{1}{|y|}\right)^2}\ \mathrm{d}x$$

От y эта штука не зависит никак, потому что сдвиг. А значит y можно выкинуть, и получить, что $I(y) = \pi$. Ой. Разрыв в нуле.

Теорема 15 (Дифференцируемость интеграла по параметру)**.** *Пусть $Y = \langle c; d\rangle \subset \mathbb{R}$, $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, $\forall y \in Y\ f(\bullet; y) \in L(X; \mu)$, при почти всех $x \in X$ $f(x; \bullet)$ дифференцируемо на Y. Пусть $y_0 \in Y$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ удовлетворяет локальному условию Лебега. Тогда*

$$\exists \left(\int_X f(x; y)\ \mathrm{d}\mu(x)\right)'_y \Bigg|_{y=y_0} = \int_X f'_y(x; y_0)\ \mathrm{d}\mu(x)$$

Доказательство. Производную будем искать по определению. Возьмём $h \neq 0$, $y_0 + h \in Y$. Рассмотрим

$$F(x;h) = \frac{f(x;y_0+h) - f(x;y_0)}{h}$$

Из дифференцируемости $f(x;\bullet)$ почти везде, при почти всех x $F(x;h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'_y(x;y_0)$. Пусть

$$I(y) = \int_X f(x;y)\mathrm{d}\mu(x)$$

Тогда

$$\frac{I(y_0+h) - I(y_0)}{h} = \int_X F(x;h)\ \mathrm{d}\mu(x)$$

Очень хочется сделать переход под знаком интеграла. Чтобы так было можно сделать по теореме 13, надо проверить локальное условие Лебега для F в точке h. По теореме Лагранжа

$$\exists \theta \in (0;1)\ F(x;h) = f'_y(x;y+\theta h)$$

Какое-то условие Лебега нам дано ($f'_y \in L_{\mathrm{loc}}$ в y_0). Запишем его подробно:

$$\exists \Phi \in L(X;\mu)\ \exists V_{y_0} \text{ для почти всех } x \in X\ \forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y\ |f'_y(x;y)| \leqslant \Phi(x)$$

Понятно, что

$$\exists \delta > 0\ \forall h \in (-\delta;\delta) \setminus \{0\}\ y_0 + \theta h \in \dot{V}_{y_0} \cap Y$$

Тогда

$$|F(x;h)| = |f'(x;y_0+\theta h)| \leqslant \Phi(x)$$

□

Следствие 3.1. *Если X — компакт, μ — конечная борелевская мера на X, $Y = \langle c;d\rangle \subset \mathbb{R}$, $f, f'_y \in C(X \times Y)$. Тогда*

$$\int_X f(x;y)\ \mathrm{d}\mu(x) \in C^{(1)}(Y)$$

и для любой $y_0 \in Y$ верно правило Лейбница.

Доказательство. Надо проверить, локальное условие Лебега для производной. Для любой y_0 возьмём

$$\delta > 0\ [y_0 - \delta; y_0 + \delta] \cap \langle c;d\rangle = [\alpha;\beta] \text{ ограничено}$$

Тогда $f'_y \in C(X \times [\alpha;\beta])$, а значит f'_y ограничена на $X \times [\alpha;\beta]$ (мажоранта — постоянная). По теореме 15 $I'(y_0)$ равно тому, чему хочется, а 14. □

Пример. Условие Лебега в теореме 15 и компактность в следствии 1 существенны.
Пусть $X = (0;1]$, $Y = [0;+\infty)$, $f(x;y) = \ln(x^2+y^2)$. Тогда

$$I(y) = \int_0^1 \ln(x^2+y^2)\ \mathrm{d}x \overset{y\neq 0}{=} x\ln(x^2+y^2)\Big|_{x=0}^{1} - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x =$$
$$= \ln(1+y^2) - 2 + 2y^2\frac{1}{y}\tan^{-1}\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{1} = \ln(1+y^2) - 2 + 2y\tan^{-1}\frac{1}{y}$$

А при $y = 0$ это просто -2.
Теперь давайте считать производную в нуле (где нарушено правило Лейбница)

$$I'(0) = I'_+(0) = 0 - 0 + \pi$$

Но

$$\int_0^1 \left(\ln(x^2+y^2)\right)'_y\Big|_{y=0}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 0\ \mathrm{d}x = 0$$

Интеграл комплекснозначной функции.

Определение 21. Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$, $f\colon E \to \mathbb{C}$ (или даже $\overline{\mathbb{C}}$). Пусть $f = u + \mathbf{i}v$.
f называется **измеримой** на E, если u и v измеримы на E.
f называется **измеримой** на E, если u и v измеримы на E.
Положим

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E u \,\mathrm{d}\mu + \mathbf{i}\int_E v \,\mathrm{d}\mu$$

если правая часть имеет смысл.

Свойство 21.1. *Очевидно.*

$$\int_E \overline{f} \,\mathrm{d}\mu = \overline{\int_E \overline{f} \,\mathrm{d}\mu}$$

Свойство 21.2. *Арифметические свойства интеграла переносятся очевидно.*

Лемма 4. *Пусть $f = u + \mathbf{i}v$, $f \in S(E)$. Тогда*

1. $|f| \in S(E)$.
2. *Суммируемость f и $|f|$ равносильны.*
3. $$\left|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu$$

Доказательство.

1. $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$. А правая часть $\in S(E)$ по арифметическим действиям с измеримыми функциями.
2. Из
$$|u|, |v| \leqslant |f| \leqslant |u| + |v|$$
Отсюда всё понятно.
3. Если $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ или ∞, то всё понятно. Иначе
$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$
Тогда пусть
$$z = \frac{\left|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right|}{\int_E f \,\mathrm{d}\mu}$$
Понятно, что $|z| = 1$. Тогда
$$\left|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right| = z\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E zf \,\mathrm{d}\mu$$
При этом левая штука $\in \mathbb{R}$, а значит правая — тоже. Отсюда
$$\left|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right| = \Re\int_E zf \,\mathrm{d}\mu = \int_E \Re zf \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E |zf| \,\mathrm{d}\mu = \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu$$

□

Свойство 21.3. *Из леммы переносятся теоремы Фубини, Лебега о мажорируемой сходимости и все теоремы этого параграфа. При дифференцируемость сейчас разберёмся.*

Теорема 16 (Голоморфность интеграла по параметру)**.** *Пусть* $(X;\mathbb{A};\mu)$ *— пространство с мерой,* $Y \subset \mathbb{C}$*,* $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$*,*

$$\forall y \in Y \ f(\bullet;y) \in L(X;\mu)$$

$$\textit{При почти всех } \forall x \in X \ f(x;\bullet) \in \mathcal{A}(Y)$$

И пусть ещё

$$\forall y_0 \in Y \ f'_y \in L_{\text{loc}} \textit{ в точке } y_0$$

тогда $I \in \mathcal{A}(Y)$ *и верно правило Лейбница.*

Доказательство. Единственное отличие доказательства от доказательства 15 в том, что

$$|F(x;h)| \leqslant |f'_y(x;y_0+\theta h)|$$

Этого нам хватит, так как нам нужна мажоранта. □

Пример. Пусть Γ замкнуто в $\mathbb{C}$. Пусть μ — борелевская мера на Γ. Пусть $G = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, $h \in L(\Gamma;\mu)$. Пусть

$$F(z) = \int_\Gamma \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\mu(\zeta), \qquad z \in G$$

тогда $F \in \mathcal{A}(G)$ и

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall z \in G \ F^{(n)}(z) = n!\int_\Gamma \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\mu(\zeta)$$

Почему?
Пусть $z_0 \in \Gamma$. Пусть $2\sigma = \rho(z_0;\Gamma) > 0$. Если $|z - z_0| < \sigma$, а $\zeta \in \Gamma$, то $|\zeta - z| \geqslant \sigma$. Тогда

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\right| = n!\frac{|h(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} \leqslant \underbrace{\frac{n!}{\sigma^{n+1}}|h(\zeta)|}_{\in L(\Gamma;\mu)}$$

Значит можно дифференцировать сколько угодно раз.

Примеры вычисления интегралов.

Пример.

$$I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} \qquad n \in \mathbb{Z}_+$$

А давайте введём вот такую штуку:

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y + x^2}$$

Это мы считать умеем. А зачем? В потому что если продифференцировать это по y n раз, то получится то, что мы хотели (только с точностью до знака и факториала):

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{1}{y + x^2} = \frac{(-1)^n n!}{(y + x^2)^{n+1}}$$

Хорошо, а почему можно дифференцировать под знаком интеграла? Пусть $V_{y_0} = \left(\frac{y_0}{2};+\infty\right)$. Тогда

$$\forall y \in V_{y_0} \ \forall x \in [0;+\infty) \ \left|\frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{1}{y + x^2}\right| \leqslant \frac{n!}{\left(\frac{y_0}{2} + x^2\right)^{n+1}} = \Phi_{y_0}(x)$$

Где $\Phi_{y_0} \in L[0;+\infty)$. Ну, о'кей. Давайте считать $I(y)$.

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{y}}\bigg|_{x=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}$$

Тогда

$$I^{(n)}(y)=\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2}}{y^{n+1/2}}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+1}y^{n+1/2}}\pi$$

Тогда

$$I_n=\frac{(-1)^n}{n!}I^{(n)}(1)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$$

Пример. Давайте возьмём интеграл из предыдущего примера, и начнём делать с ним тёмную магию

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$$

Давайте сделаем замену $x=\frac{t}{\sqrt{n+1}}$. Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\frac{t^2}{n+1})^{n+1}}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\sqrt{n+1}$$

И теперь давайте устремим n у бесконечности. В правой части по формуле Валлиса $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. А в левой части получится замечательный предел, и мы получим интеграл Пуассона:

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$$

Остаётся только понять, почему можно переходить к пределу под знаком интеграла. Ну, заметим, что

$$f_n(t)=\left(1+\frac{t^2}{n+1}\right)^{-n-1}$$

убывает по n. А тогда

$$0\leqslant f_n(t)\leqslant f_0(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

Где $f_0\in L([0;+\infty))$.

Замечание. Поговорим о несобственных интегралах.

А что о них говорить-то? А то, что у нас были несобственные интегралы в смысле Римана (это предельчик), но тут у нас интеграл по множеству, и никто не заставляет множество иметь конечную меру. Надо как-то связать несобственный интеграл Римана и интеграл по множеству.

Определение 22. Пусть $a\in\mathbb{R}$, $f\colon[a;+\infty)\to\mathbb{R}$, и $\forall A\in(a;+\infty)\ \exists(L)\int\limits_a^A f$. Тогда положим

$$\int\limits_a^{\to+\infty}f=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f$$

Лемма 5. *Если существует $(L)\int\limits_a^{+\infty}f$, то существует $\int\limits_a^{\to+\infty}f$, равный собственному лебеговому интегралу.*

Доказательство. Достаточно доказать для $f\geqslant 0$ (иначе рассмотреть f_+ и f_-, а потом $\Re f$ и $\Im f$). В таком случае оба интеграла существуют в $[0;+\infty]$.

Рассмотрим $f_n=f\cdot\chi_{[a;n]}$, где $n>a$. Тогда f_n возрастают (по n) и стремятся к f. Тогда с одной стороны

$$\int\limits_a^n f=(L)=\int\limits_a^{+\infty}f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{Леви}}(L)\int\limits_a^{+\infty}f$$

С другой стороны по определению несобственного интеграла левая часть стремится к несобственному интегралу. □

Утверждение. $\int\limits_a^{\to+\infty} f$ *сходится абсолютно тогда и только тогда, когда* $f \in L[a;+\infty)$.

Доказательство. Если f суммируема, то и модуль тоже. Поэтому несобственный интеграл сходится абсолютно. Аналогично обратное. □

Пример.
- $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$ можно рассматривать как Лебегов интеграл или как сходящийся несобственный.
- $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = +\infty$ можно рассматривать как Лебегов интеграл или как расходящийся несобственный.
- $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ можно рассматривать как сходящийся несобственный, но не как Лебегов.

Замечание. Аналогично определяются несобственные интегралы для других типов промежутков или даже для многомерных интегралов. Как, например, можно трактовать такое?

$$\iint\limits_{\to\mathbb{R}^2} f$$

Ну, рассматривать $\{G_k\}$ открытые, $G_k \subset G_{k+1}$, и объединение их всех — $\mathbb{R}^2$.
Так вот это не даст нам ничего нового. Почему? Докажем, что условно сходящихся интегралов не бывает. Почему? Ну, потому что если такой бывает, то у нас разошлись интегралы f_+ и f_-. Тогда мы можем взять места, где f положительно, взять их столько, чтобы в интеграле получилось > 1 и соединить эти области перемычками. Потом сделаем то же с отрицательными частями так, чтобы они в сумме с положительными давали < -2. И так далее. Получим, что предела f нет.
В итоге рассматривают только какие-то специфичные G_n. Типа предел по квадратам или по кому-нибудь ещё.

Замечание. Есть много замечательных теорем о хороших свойствах несобственных интегралов, их можно прочитать в Фихтенгольце или где-нибудь ещё, а мы расскажем только одну лемму.

Лемма 6. *Пусть* $a \in \mathbb{R}$, $f \in C[a;+\infty)$, $\int\limits_a^{+\infty} f$ *сходится. Введём*

$$I(y) = \int\limits_a^{\to+\infty} e^{-yx} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Тогда $I \in C[0;+\infty)$.

Доказательство. Докажем сначала, что интеграл сходится. Попутно оценим остаток. Рассмотрим $A > a$ и проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_A^{\to+\infty} e^{-yx} f(x)\ \mathrm{d}x = \underbrace{e^{-yx}(F(x) - F(A))\Big|_{X=A}^{+\infty}}_{0} + \int\limits_a^{\to+\infty} y \underbrace{e^{-yx}}_{\text{интеграл сходится}} \underbrace{(F(x) - F(A))}_{\text{ограничена}}\ \mathrm{d}x$$

Теперь докажем непрерывность интеграла в точке $y_0 \geqslant 0$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$ и подберём

$$A > a \quad \left|\int\limits_A^{+\infty} f\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\left|\int\limits_A^{\to+\infty} e^{-yx} f(x)\ \mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_a^{\to+\infty} y e^{-yx} \underbrace{(F(x) - F(A))}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{3}}\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} e^{-Ay} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

То есть $I_A(y) = \int\limits_a^A e^{-yx} f(x)\ \mathrm{d}x$ непрерывна. Остаётся рассмотреть такое $\delta > 0$, что $\forall y \geqslant 0 : |y - y_0| < \delta\ |I_A(y) - I_A(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, тогда

$$|I(y) - I(y_0)| \leqslant |I(y) - I_A(y)| + |I_A(y) - I_A(y_0)| + |I_A(y_0) - I(y_0)| < \varepsilon$$

$\square$