Содержание

Определение 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ $f\colon E \to [0; +\infty]$. **Подграфиком** f называется множество

$$Q_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in E, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

Определение 2. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. **Графиком** f называется множество

$$\Gamma_f = \{(x; f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in E\}$$

Замечание. Отличается от общего определения тем, что $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Теорема 1 (О мере графика)**.** *Пусть* $E \in \mathbb{A}_n$, $f \in S(E)$. *Тогда* $\Gamma_f \in \mathbb{A}_{n+1}$ *и* $\mu_{n+1}\Gamma_f = 0$.

Доказательство.

- Сначала разберём случай, когда $\mu E < +\infty$. Заключим Γ_f в множество сколь угодно малой меры. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть

$$e_k = E(k\varepsilon < f(k+1)\varepsilon)$$

Тогда

$$E = E(|f| = +\infty) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} e_k$$

Тогда

$$\Gamma_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma_{f\big|_{e_k}} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} e_k \times [k\varepsilon; (k+1)\varepsilon) = H_\varepsilon$$

Заметим, что

$$\mu_{n+1} H_\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_n e_k \cdot \varepsilon \leqslant \mu_n E \varepsilon$$

По критерию измеримости утверждение теоремы верно.

- Теперь пусть $\mu E = +\infty$. По σ-конечности μ_n

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \qquad \mu_n E_j < +\infty$$

А значит $f\Big|_{E_j}$ имеет измеримый график нулевой меры, а поскольку

$$\Gamma_f = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_{f\big|_{E_j}}$$

Верно требуемое.

$\square$

Теорема 2. *Пусть* $E \in \mathbb{A}_n$, $f\colon E \to [0; +\infty]$. *Тогда измеримость* f *и её подграфика равносильны и в случае измеримости имеет место равенство*

$$\mu_{n+1} Q_f = \int_E f \, \mathrm{d}\mu_n$$

Доказательство. Пусть нам известна измеримость подграфика. Тогда искомая формула следует из принципа Кавальери:

$$Q_f(x) = \begin{cases} \varnothing & x \notin E \\ [0; f(x)\rangle & x \in E \end{cases}$$

Отсюда

$$\mu_1 Q_f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin E \\ f(x) & x \in E \end{cases}$$

Отсюда если Q_f измеримо, то формула следует из принципа Кавальери. А также в принципе Кавальери в качестве следствия был факт, что функция $x \mapsto \mu_1 Q_f(x)$ измерима, а значит и f измерима как сужение $x \mapsto \mu_1 Q_f(x)$ на E.
Осталось доказать, что если f измерима, то её подграфик измерим. Рассмотрим случаи:

1. f простая.
$$f = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k} \qquad A_k \in \mathbb{A}_n, c_k \in [0; +\infty)$$
Можно считать, что A_k дизъюнктны. И ещё можно считать, что $A_k \subset E$ и в объединении дают E. Тогда
$$Q_f = \bigsqcup_{k=1}^{N} A_k \times [0; c_k]$$
Отсюда следует измеримость.

2. Общий случай: f произвольная неотрицательная измеримая функция. Приблизим её возрастающей последовательность простых функций φ_n. Проверим, что
$$Q_f = \bigcup Q_{\varphi_n} \cup \Gamma_f$$
Тогда мы докажем искомое.
   - $\supset$ ясно т.к. $\varphi_n \leqslant f \Rightarrow Q_{\varphi_n} \subset Q_f$.
   - $\subset$ рассмотрим $(x; y) \in Q_f$. То есть $x \in E$, $y \in [0; f(x)]$. Если $y = f(x)$, то понятно. Иначе
   $$\exists N \in \mathbb{N}\ y < \varphi_N(x) \Rightarrow \exists N\ (x; y) \in Q_{\varphi_N}$$

□

Замечание. Условие измеримости E существенно. Если $f \equiv 0$ не неизмеримом множестве, например, то $Q_f \in \mathbb{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1} Q_f = 0$.

Теорема 3 (Теорема Тонелли)**.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in S(E \to [0; +\infty])$. Тогда*

1. *При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(x; \bullet) \in S(E(x))$.*
2. *Пусть $I(x) = \int_{E(x)} f(x; y)\ \mathrm{d}y$. Тогда $I(x) \in S(\mathbb{R}^n)$.*
3. $$\int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x)\ \mathrm{d}x$$

Доказательство. По теореме 2, что $Q_f \in \mathbb{A}_{n+m+1}$ и

$$\mu_{n+m+1} Q_f = \int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m}$$

Воспользуемся принципом Кавальери:

$$\mu_{n+m+1} Q_f = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_{m+1} Q_f(x)\ \mathrm{d}x$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} Q_f(x) &= \left\{(y; z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x; y; z) \in Q_f\right\} = \\ &= \left\{(y; z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x; y) \in E, z \in [0; f(x; y)]\right\} = \\ &= \left\{(y; z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid y \in E(x), z \in [0; f(x; y)]\right\} \end{aligned}$$

Да это же подграфик $f(x; \bullet)$!

1. По теореме Кавальери при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $Q_f(x)$ измеримо, а значит мы доказали первое утверждение по теореме 2.

2. $$\mu_{m+1} Q_f(x) = \mu_{m+1} Q_{f(x;\bullet)} \overset{2}{=} \int_{E(x)} f(x;y)\ \mathrm{d}y = I(x)$$

   Отсюда $I(x)$ измерима по всё тому же принципу Кавальери.

3. Приравняем два выражения для $\mu_{n+m+1} Q_f$.

□

Теорема 4 (Теорема Фубини)**.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in L(E)$. Тогда*

1. *При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(x;\bullet) \in L(E(x))$.*

2. *Пусть $I(x) = \int_{E(x)} f(x;y)\ \mathrm{d}y$. Тогда $I(x) \in L(\mathbb{R}^n)$.*

3. $$\int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x)\ \mathrm{d}x$$

Доказательство. Применим теорему Тонелли для f_+ и f_-. Пусть $I^\pm = \int_{E(x)} f_\pm(x;y)\ \mathrm{d}y$. По теореме Тонелли

$$\int_E f_\pm\ \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I^\pm(x)\ \mathrm{d}x < +\infty$$

Учитывая $f_\pm(x;\bullet) = (f(x;\bullet))_\pm$, имеем

$$I^+ - I^- = I \in L(\mathbb{R}^n)$$

При почти всех x $I^\pm(x) < +\infty$, а значит при почти всех x $f_\pm \in L(E(x))$ отсюда $f \in L(E(x))$. □

Замечание. В теореме Тонелли все условия можно ослабить:

1. Если $f \in S(E)$ (не важен знак), то при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x;\bullet) \in S(E(x))$.

2. Если $I(x)$ существует почти во всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $I \in S(\mathbb{R}^n)$

3. Если существует $\int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m} \in \overline{\mathbb{R}}$, то верно условие пункта 2 и

$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m} \in \overline{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x)\ \mathrm{d}x$$

Доказывается всё это как в теореме Фубини.

Замечание.

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n\ f(x;\bullet) \in S(E(x)) \\ \forall y \in \mathbb{R}^m\ f(\bullet;m) \in S(E(y)) \end{cases} \not\Rightarrow f \in S(E)$$

Серпинский построил пример такого неизмеримого $E \subset \mathbb{R}^2$, что E пересекается с любой прямой не более чем в двух точках. Мы говорить о нём не будем, т.к. он довольно сложен.

Определение 3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon Y \to \mathbb{R}$. Тогда

$$f \otimes g\colon \substack{X \times Y \to \mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto f(x)g(y)}$$

Лемма 1. *Если $f \in S(X)$, $g \in S(Y)$, то $f \otimes g \in S(X \times Y)$.*

Доказательство. Пусть

$$\tilde{f}(x;y) = f(x) \qquad \tilde{g}(x;y) = g(y)$$

Докажем, что $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ измеримы, тогда $f \otimes g$ будет измеримо как произведение измеримых.

$$(X \times Y)(\tilde{f} > a) = X(\tilde{f} > 0) \times Y$$

Левое измеримо по измеримости f, правое — потому что, а произведение измеримы измеримо. □

Следствие 1.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. Если*

$$\left[\begin{aligned} & f \in S(X \to [0;+\infty]) \land g \in S(Y \to [0;+\infty]) \\ & f \in L(X) \land g \in L(Y) \end{aligned}\right.$$

То

$$\int_{X \times Y} f \otimes g \ \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_X f \ \mathrm{d}\mu_n \int_Y g \ \mathrm{d}\mu_m$$

Доказательство. В первом случае нет сомнений в существовании интегралов. Пусть $E = X \times Y$. Тогда

$$\int_E f \otimes g \ \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_X \left(\int_Y f(x)g(y) \ \mathrm{d}y \right) \ \mathrm{d}x$$

так как $E(x) = \begin{cases} \varnothing & x \notin X \\ Y & x \in X \end{cases}$.

А почему то же самое верны для произвольного знака, если интегралы от них конечны? Ну, чтобы применить теорему Фубини, надо проверить суммируемость $f \otimes g$. Ну, смотрите. По доказанному

$$\int_{X \times Y} |f \otimes g| \ \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_X |f| \ \mathrm{d}\mu_n \int_Y |g| \ \mathrm{d}\mu_m$$

По условию оба этих интеграла конечны, значит $|f \otimes g|$ суммируема, а суммируемость функции равносильна суммируемости её модуля. □

Замечание. Мы знаем, что в условиях теорем Тонелли и Фубини верно

$$\int_E f \ \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E(x)} f(x;y) \ \mathrm{d}y \right) \ \mathrm{d}x$$

Тривиально, то же можно записать, поменяв x и y ролями.

$$\int_E f \ \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E(y)} f(x;y) \ \mathrm{d}x \right) \ \mathrm{d}y$$

А значит два повторных интеграла равны.

Пример. Повторные интегралы могут быть не равны

$$f(x;y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad E = [-1;1]^2$$

Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \ \mathrm{d}y = \left. \frac{y}{x^2+y^2} \right|_{y=-1}^{1} = \frac{2}{x^2+1}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{x^2+1} \ \mathrm{d}x = 4 \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \pi$$

Другой повторный интеграл будет равен $-\pi$, как несложно заметить.

Пример. Неверно, что если повторные интегралы равны, то двойной существует.

$$g(x;y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad E = [-1;1]^2$$

Поскольку функция g нечётна по каждой переменной, оба повторных интеграла равны нулю. Отсюда если двойной интеграл существует, то равен нулю.
Докажем, что он не существует. Для этого докажем, что g не суммируема. Попробуем проинтегрировать $|g|$:

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{|2xy|}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = 4\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1} \frac{|2xy|}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = 4\int\limits_{0}^{1} \frac{-x}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}^{1}\ \mathrm{d}x = 4\int\limits_{0}^{1} \frac{-x}{x^2+1} + \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = +\infty$$

Отсюда g не суммируема. А значит нулю её интеграл не равен, то есть он не существует.

Определение 4. Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ **Проекцией** E на первое координатное пространство называется

$$\mathrm{Pr}_1\, E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid E(x) \neq \varnothing\}$$

Замечание. Проекция измеримого множества может быть быть неизмеримой (достаточно добавить к измеримому двумерному множеству неизмеримое одномерное).

Определение 5. Множество

$$\mathrm{Pr}_1^*\, E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mu_m E(x) > 0\}$$

называется **существенной проекцией** множества E.

Свойство 5.1. *Существенная проекция измерима. (Как Лебегово множество функции $\mu_m E(\bullet)$).*

Свойство 5.2. *При f подходящем под теоремы Тонелли и Фубини верно*

$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathrm{Pr}_1^*} I(x)\ \mathrm{d}x$$

Замечание. Теоремы Тонелли и Фубини можно применять несколько раз.

Определение 6. Пусть $(X;\mathbb{A};\mu)$ и $(Y;\mathbb{B};\nu)$ — пространства с мерами. Пусть

$$\mathbb{A} \odot \mathbb{B} = \{A \times B \mid A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$$

Тогда $\mathbb{A} \odot \mathbb{B}$ является полукольцом, а

$$\pi_0 \colon A \times B \to \mu A \nu B$$

является мерой на $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$. Тогда π — стандартное распространение π_0 на σ-алгебру $\mathbb{C}$ называется произведением мер μ и ν.
Обозначения:

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \qquad \pi = \mu \times \nu$$

Замечание. Доказывать корректность определения мы не будем.

Свойство 6.1.

$$\mu_{n+m} = \mu_n \times \mu_m$$

Свойство 6.2. *Если μ и ν являются σ-конечными, то $\mu \times \nu$ — тоже.*

Свойство 6.3. *Произведение мер ассоциативно.*

Свойство 6.4. *Все теоремы этого параграфа с доказательствами верны для полных σ-конечных мер.*

Теорема 5 (Теорема Тонелли для абстрактных пространств с мерой)**.** *Пусть $E \subset X \times Y$, $f \in S_{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}}(E \to [0;+\infty])$. Тогда*

1. *При почти всех $x \in x$ функция $f(x;\bullet) \in S_{\mathbb{B}}(E(x))$.*
2. *Пусть $I(x) = \int_{E(x)} f(x;\bullet)\ \mathrm{d}\nu$. Тогда $I(x) \in S_{\mathbb{A}}(X)$.*
3. $$\int_E f\ \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_X I(x)\ \mathrm{d}\mu$$

Замена переменной в интеграле.

Теорема 6 (Общая схема замены переменной в интеграле)**.** *Пусть* $(X; \mathbb{A}; \mu)$, $(Y; \mathbb{B}; \nu)$ *— пространства с мерами. Пусть* $h \in S_{\mathbb{A}}(X \to [0; +\infty])$, $\Phi\colon X \to Y$ *и*

$$\forall B \in \mathbb{B}\ \Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A} \qquad \forall B \in \mathbb{B}\ \nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h \ \mathrm{d}\mu$$

Пусть $f \in S_{\mathbb{B}}(Y)$. *Тогда*

1. $f \circ \Phi \in S_{\mathbb{A}}(X)$.
2. $$\int_Y f \ \mathrm{d}\nu = \int_X (f \circ \Phi) h \ \mathrm{d}\mu$$
   (Трактовка стандартная: интегралы существуют или нет одновременно, если существуют, то равны.)

Доказательство. 1. Рассмотрим Лебегово множество

$$X(f \circ \Phi > a) = \{x \in X \mid f(\Phi(x)) > a\} = \{x \in X \mid \Phi(x) \in Y(f > a)\} = \Phi^{-1}(Y(f > a))$$

По условию $Y(f > a) \in \mathbb{B}$, а значит $\Phi^{-1} \in \mathbb{A}$.

2. Разберём случаи
   a. $f = \chi_B \mid B \in \mathbb{B}$. Тогда
   $$(\chi_B \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Phi^{-1}(B) \\ 0 & x \notin \Phi^{-1}(B) \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}(x)$$
   Тогда
   $$\int_Y \chi_B \ \mathrm{d}\nu = \nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h \ \mathrm{d}\nu = \int_X \underbrace{\chi_{\Phi^{-1}(B)}}_{f \circ \Phi} h \ \mathrm{d}\nu$$
   b. По линейности равенство верно для простых функций.
   c. Для положительных измеримых функций рассмотрим последовательность φ_n, возрастающую к f и перейдём к пределу в равенстве
   $$\int_Y \varphi_n \ \mathrm{d}\nu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi) h \ \mathrm{d}\mu$$
   по теореме Леви.
   d. Для произвольных измеримых функций рассмотрим $f_\pm$
   $$\int_Y f_\pm \ \mathrm{d}\nu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi)_\pm h \ \mathrm{d}\mu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi h)_\pm \ \mathrm{d}\mu$$

□

Замечание. В условиях теоремы 6 суммируемость f по ν равносильная суммируемости $(f \circ \Phi)h$ по μ

Следствие 1.1. *В условиях теоремы 6 если* $B \in \mathbb{B}$, $f \in S_{\mathbb{B}}(B)$, *то*

$$\int_B f \ \mathrm{d}\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) h \ \mathrm{d}\mu$$

Доказательство. Продолжим f нулём на $Y \setminus B$. □

Определение 7. В условии теоремы 6 ν называется h-взвешенным Φ-**образом меры** μ.

Замечание. Пусть
$$\mathbb{A}^* = \{\Phi^{-1}(B) \mid B \in \mathbb{B}\}$$
Нетрудно заметить, что это σ-алгебра.
В условиях теоремы 6 $\mathbb{A}^* \subset \mathbb{A}$.
Пусть
$$\mathbb{B}^* = \{B \subset Y \mid \Phi^{-1} \in \mathbb{A}\}$$
тогда условиях теоремы 6 $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^*$.

Утверждение. *Если*
$$\nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h \, \mathrm{d}\mu$$
То ν — мера на $\mathbb{B}$.

Доказательство. Остаётся как несложное упражнение читателю. □

Пример. $h \equiv 1$ — невзвешенный образ меры.
$$\nu B = \mu\Phi^{-1}(B) \Rightarrow \int_Y f \, \mathrm{d}\nu = \int_X f \circ \Phi \, \mathrm{d}\mu$$

Пример. $X = Y$, $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, $\Phi = \mathrm{id}$.
$$\nu A = \int_A h \, \mathrm{d}\mu \Rightarrow \int_X f \, \mathrm{d}\nu = \int_X fh \, \mathrm{d}\mu$$
Тогда пишут $\mathrm{d}\nu = h\mathrm{d}\mu$.

Определение 8. Если
$$\nu A = \int_A h \, \mathrm{d}\mu$$
то h называется **плотностью** меры ν относительны меры μ.

Свойство 8.1. *Если $h = \tilde{h}$ μ-почти везде, то $\nu = \tilde{\nu}$. Для σ-конечных мер верно и обратное.*
Без доказательства.

Теорема 7 (Критерий плотности)**.** *Пусть даны $X, \mathbb{A}$ и μ и ν — меры на $\mathbb{A}$, $h\colon S(X \to [0; +\infty])$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. *h — плотность ν относительны μ.*
2. $$\forall A \in \mathbb{A} \ \mu A \inf_A h \leqslant \nu A \leqslant \mu A \sup_A h$$

Доказательство.
- Из первого во второе ясно из оценки интеграла.
- Рассмотрим
$$A = A(h = 0) \cup A(0 < h < +\infty) \cup A(h = +\infty)$$
Равенство есть для первой части:
$$\nu A(h = 0) = \int_{A(h=0)} h \, \mathrm{d}\mu$$
так как левое равно нулю по условию второго утверждения, а правое — потому что функция тождественный ноль.
также очевидно равенство есть для третьей части:
$$\nu A(h = +\infty) = \begin{cases} +\infty & \mu A > 0 \\ 0 & \mu A \equiv 0 \end{cases} = \int_{A(h=+\infty)} h \, \mathrm{d}\mu$$

Далее можно считать $0 < h < +\infty$ на A.
Рассмотрим $q \in (0; 1)$. Пусть

$$A_j = A(q^j \leqslant h < q^{j-1})$$

Очевидно, $A_j \in \mathbb{A}$ и $\bigsqcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} A_j = A$. Нам известно, что

$$q^j \mu A_j \leqslant \nu A_j \leqslant q^{j-1} \mu A_j$$

А ещё из оценки интеграла

$$q^j \mu A_j \leqslant \int_{A_j} h \, \mathrm{d}\mu \leqslant q^{j-1} \mu A_j$$

Отсюда

$$\begin{aligned} q \int_A h \, \mathrm{d}\mu = q \sum_j \int_{A_j} h \, \mathrm{d}\mu \leqslant \\ \leqslant \sum_j q^j \mu A_j \leqslant \sum_j \nu A_j = \\ = \boxed{\nu \mathrm{A}} \leqslant \sum_j q^{j-1} \mu A_j \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{q} \sum_j \int_{A_j} h \, \mathrm{d}\mu = \\ = \frac{1}{q} \int_A h \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Если взять начало, конец и то, что в квадратике, после чего устремить q к единице, то получим искомое.

$\square$