1 Производящие функции.

Замечание. Вообще производящая функция — не очень такое название. Потому что это скорее не функция, а способ записи бесконечных последовательностей.
Вот есть у нас $2, 4, 8, 16, \ldots$ и сразу понятно, что имеется ввиду. А вот когда мы видим $1, 2, 5, 14, 42$ и знающие люди поймут, что это, скорее всего, числа Каталана. Но всё равно это не то чтобы однозначно определяет, что мы имеем ввиду.
Можно записать $a_n = 2^n$ и сразу станет понятно, что это степени двойки. А когда мы запишем $a_n = C_n$, то поймут точно не все.
Короче, работать с такими вещами не очень приятно. И люди задумались: а как компьютеру дать бесконечные последовательности, чтобы он их понял.
И люди нашли инструмент из теории вероятности и статистики — собственно, производящие функции.

Определение 1. Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность. Тогда **формальный степенной ряд** этой последовательности — это запись вида

$$A(t) = a_0t^0 + a_1t^1 + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n + \cdots$$

Замечание. Вот есть у нас многочлен: $t^2 + t - 7$. Что такое t? Ну, по сути, буква. Она не обладает значением, мы можем только потом уже рассмотреть многочлен как многочлен над каким-то кольцом, и уже значения его анализировать.
Вот и тут по сути мы имеем просто букву t, она ничему не равна.

Утверждение. *Очевидно, формальные степенные ряды биективно сопоставляются последовательностям.*

Замечание. Пока что формальный степенной ряд ничем не лучше просто последовательности. Но на самом деле с формальными степенными рядами можно производить полезные операции, которые позволят нам конечным количеством символов описать интересующие нас последовательности.

Пример. Какие формальные степенные ряды мы уже можем легко записать? Ну, те, которые соответствуют многочленам. То есть формальные степенные ряды тех последовательностей, которые имеют конечное количество ненулевых элементов.

Определение 2. Суммой формальных степенных рядов называется степенной ряд суммы их последовательностей.
Умножением формального ряда на число называется произведение его последовательности и этого числа.

Замечание. Понятно, что это согласуется с тем, как мы могли бы сложить ряды.
Но ведь ряды ещё можно умножать. Что получим?

Определение 3. Произведением формальных степенных рядов

$$A(t) = a_0t^0 + a_1t^1 + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n + \cdots \qquad B(t) = b_0t^0 + b_1t^1 + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n + \cdots$$

называется ряд

$$(AB)(t) = C(t) = c_0 + c_1t^1 + c_2t^2 + \cdots + c_nt^n + \cdots \qquad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}$$

Замечание. А делить как? Ну, если $\frac{A(t)}{B(t)} = C(t)$, то $A(t) = (BC)(t)$. Ну,

$$a_0 = b_0c_0 \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{b_0}$$

$$a_1 = b_1c_0 + b_0c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{a_1 - c_0b_1}{b_0}$$

Определение 4. Частным формальных степенных рядов

$$A(t) = a_0t^0 + a_1t^1 + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n + \cdots \qquad B(t) = b_0t^0 + b_1t^1 + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n + \cdots$$

где $b_0 \neq 0$ называется ряд

$$(\frac{A}{B})(t) = C(t) = c_0 + c_1t^1 + c_2t^2 + \cdots + c_nt^n + \cdots \qquad c_k = \frac{a_k - \sum\limits_{j=0}^{k-1} c_jb_{k-j}}{b_0}$$

Пример.

$$\frac{1}{1-t-t^2}$$

Так, $c_0 = 1$,

$$c_1 = \frac{a_1 - c_0b_1}{b_0} = 1$$

$$c_2 = \frac{a_2 - c_1b_1 - c_0b_2}{b_0} = 2$$

Давайте в общем виде, учитывая тот факт, что $b_k = 0$ для $k > 2$,

$$c_n = a_n - c_{n-1}b_1 - c_{n-2}b_2 = c_{n-1} + c_{n-2}$$

Да это же числа Фибоначчи!

Утверждение. *Если $a_n \in \mathbb{Z}$, $b_n \in \mathbb{Z}$, $b_0 = \pm 1$, $C(t) = \frac{A(t)}{B(t)}$, то $c_n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Очевидно. □

Пример. Давайте получим 2^n! Что нам хочется?

$$P(t) = 1 + 2t + 4t^2 + \cdots + 2^nt^n + \cdots$$

Хм-м-м-м. Может, так:

$$P(t) = (2t)^0 + (2t)^1 + (2t)^2 + \cdots + (2t)^n + \cdots$$

Хм-м-м, кажется, геометрическая прогрессия.

$$P(t) = \frac{1}{1-2t}$$

Ок?

Замечание. Ну, очень хочется так думать, но вообще так жить некорректно, неверно интерпретировать t как число. Потому что если мы будем, то мы придём в мат. анализ и вспомним о том, что у рядов есть радиус сходимости, и если ряд условно сходится или расходится, то мы проиграли.
Но почему производящие функции использовались в мат. статистике? Потому что к ним часто применяется следующий приём: давайте сделаем то, что делать нельзя, получим что-то, а потом как-нибудь иным способом докажем, что наш ответ норм.

Пример. Мы получили

$$P(t) = \frac{1}{1-2t}$$

Давайте проверим, что подходит.

$$a_0 = 1, a_{k\geqslant 1} = 0 \qquad b_0 = 1, b_1 = -2, b_{n\geqslant 2} = 0$$

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0} = 1 \qquad c_1 = \frac{a_1 - c_0b_1}{b_0} = 2 \qquad c_n = -c_{n-1}b_1 = 2c_{n-1}$$

Действительно, подходит.

Замечание. Почему мы так делаем вообще? Потому что у нас для некоторых t верна формула

$$(2t)^0 + (2t)^1 + (2t)^2 + \cdots + (2t)^n + \cdots = \frac{1}{1-2t}$$

И если бы мы получили иной ряд на самом деле при делении, мы бы получили, что указанная выше формула не верна нигде. Есть патологические примеры (см. математический анализ, функция со всеми нулевыми производными, не равная тождественно нулю), но в целом обычно получается жить в ситуации, когда мы нарушаем правила математики, а потом доказываем, что получили верный ответ.

Пример. Хорошо, давайте построим числа Каталана. Мы знаем, что

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

Та-а-а-ак, что-то знакомое. Пусть $C(t)$ — числа Каталана. Тогда из формулы выше хотелось бы, чтобы получилось

$$A(t) = C(t)C(t)$$

Где $A(t)$ — числа Каталана со сдвинутыми коэффициентами. Как нам сдвинуть коэффициенты? Умножить на t:

$$C(t) = C(t)C(t)t$$

Это почти хорошо, разве что тут нулевой коэффициент получится ноль, а нам надо 1:

$$C(t) = C(t)C(t)t + 1$$

Так, ну, хорошо, начинаем делать грязь:

$$C(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{t}$$

Тут всё плохо. Тут и $\pm$, и корень формального ряда и деление на t, а на t делить нельзя т.к. у него нулевой коэффициент ноль.
Ну, делаем грязь дальше. Что делать с корнем? По Тейлору раскладывать, конечно же

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

Это мы так легко не докажем, но у нас α конкретное ($\frac{1}{2}$), и вот верность этой формулы для него доказать можно довольно легко.

$$\sqrt{1-4t} = 1 - \frac{1/2}{1}4t + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}16t^2 - \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}64t^3 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{24}256t^4 + \cdots$$

Хорошо, давайте попытаемся это посчитать. Получим

$$1 - 2t - 4t^2 - 10t^5 - 28t^5 - \cdots$$

Теперь оставшиеся две проблемы: $\pm$ и деление на t. Посмотрим на второе. Почему мы не хотели делить на t? Потому что у нас был a_0, который не поделить на 0. Но если свободного члена нет, то будет логично делить на t. Так понятно, что нам надо взять $\pm$ как $-$. И мы, как нетрудно заметить, получим числа Каталана.

Замечание. Хорошо, какие ещё у нас есть операции? Ну, интегрирование и дифференцирование. Например, что будет, если мы хотим каждый коэффициент умножить на его номер? Ну, очевидно, так:

$$B(t) = A'(t) \cdot t$$

Определение 5. Производной формального степенного ряда называется понятно, что.

Свойство 5.1. *Несложно проверить формулы производной произведения и производной частного для формальных степенных рядов.*

Определение 6. Интегралом формального степенного ряда называется также понятно, что, разве что константа интегрирования равна нулю. Обозначение:

$$\int A(t)$$

Замечание. Из-за последнего (конкретной константы интегрирования) интегралами пользуются довольно нечасто.

Свойство 6.1. *Несложно проверить, что верна формула интегрирования по частям.*

Замечание. Ну что, подставляем один ряд в другой?
Пусть есть

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$
$$B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n + \cdots$$

Тогда что такое $A(B(t))$?

$$C(t) = A(B(t)) = a_0 + a_1(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n + \cdots) + a_2(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n + \cdots)^2 + \cdots$$

Ну и что с этим делать? У нас даже свободный член нормально не считается, там получится $a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \cdots$. Это вообще какая-то сумма ряда, а это, во-первых, матан, во-вторых, радиусы сходимости и прочий ужас.
Нам не нравится b_0, пусть подставлять можно только ряд с $b_0 = 0$. Тогда $c_0 = a_0$. Чему равно c_1? Ну, во второй скобке там степени не ниже квадрата. Значит

$$c_1 = a_1 b_1$$

А c_2? Ну,

$$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2$$

Пока непонятно, давайте запишем c_3:

$$c_3 = a_1 b_3 + a_2(b_1 b_2 + b_2 b_1) + a_3 b_1^3$$

Кринж какой-то, но уже что-то более понятное.

Определение 7. Пусть

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$
$$B(t) = b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n + \cdots$$

Тогда **подстановкой формального степенного ряда** B **в ряд** A называется ряд

$$C(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n + \cdots \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{n = i_1 + \cdots + i_k} \prod_{j=1}^{k} b_{i_j}$$