

Содержание

Замена переменной в интеграле.	6
Интеграл по дискретной мере.	9
Замена переменной в интеграле по мере Лебега.	10
Мера и интеграл Лебега — Стильбеса.	15
Интегралы, зависящие от параметра.	22

Определение 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow [0; +\infty]$. **Подграфиком** f называется множество

$$Q_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Определение 2. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. **Графиком** f называется множество

$$\Gamma_f = \{(x; f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in E\}$$

Замечание. Отличается от общего определения тем, что $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Теорема 1 (О мере графика). Пусть $E \in \mathbb{A}_n$, $f \in S(E)$. Тогда $\Gamma_f \in \mathbb{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1}\Gamma_f = 0$.

Доказательство. • Сначала разберём случай, когда $\mu E < +\infty$. Заключим Γ_f в множество сколь угодно малой меры. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть

$$e_k = E(k\varepsilon < f(k+1)\varepsilon)$$

Тогда

$$E = E(|f| = +\infty) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} e_k$$

Тогда

$$\Gamma_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma_f|_{e_k} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} e_k \times [k\varepsilon; (k+1)\varepsilon) = H_\varepsilon$$

Заметим, что

$$\mu_{n+1}H_\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_n e_k \cdot \varepsilon \leq \mu_n E \varepsilon$$

По критерию измеримости утверждение теоремы верно.

- Теперь пусть $\mu E = +\infty$. По σ -конечности μ_n

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \quad \mu_n E_j < +\infty$$

А значит $f|_{E_j}$ имеет измеримый график нулевой меры, а поскольку

$$\Gamma_f = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_f|_{E_j}$$

Верно требуемое. □

Теорема 2. Пусть $E \in \mathbb{A}_n$, $f: E \rightarrow [0; +\infty]$. Тогда измеримость f и её подграфика равносильны и в случае измеримости имеет место равенство

$$\mu_{n+1}Q_f = \int_E f \, d\mu_n$$

Доказательство. Пусть нам известна измеримость подграфика. Тогда искомая формула следует из принципа Кавальери:

$$Q_f(x) = \begin{cases} \emptyset & x \notin E \\ [0; f(x)] & x \in E \end{cases}$$

Отсюда

$$\mu_1 Q_f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin E \\ f(x) & x \in E \end{cases}$$

Отсюда если Q_f измеримо, то формула следует из принципа Кавальери. А также в принципе Кавальери в качестве следствия был факт, что функция $x \mapsto \mu_1 Q_f(x)$ измерима, а значит и f измерима как сужение $x \mapsto \mu_1 Q_f(x)$ на E .

Осталось доказать, что если f измерима, то её подграфик измерим. Рассмотрим случаи:

1. f простая.

$$f = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{A_k} \quad A_k \in \mathbb{A}_n, c_k \in [0; +\infty)$$

Можно считать, что A_k дизъюнкты. И ещё можно считать, что $A_k \subset E$ и в объединении дают E . Тогда

$$Q_f = \bigsqcup_{k=1}^N A_k \times [0; c_k]$$

Отсюда следует измеримость.

2. Общий случай: f произвольная неотрицательная измеримая функция. Приближим её возрастающей последовательностью простых функций φ_n . Проверим, что

$$Q_f = \bigcup Q_{\varphi_n} \cup \Gamma_f$$

Тогда мы докажем искомое.

\supset ясно т.к. $\varphi_n \leq f \Rightarrow Q_{\varphi_n} \subset Q_f$.

\subset рассмотрим $(x; y) \in Q_f$. То есть $x \in E$, $y \in [0; f(x)]$. Если $y = f(x)$, то понятно. Иначе

$$\exists N \in \mathbb{N} \ y < \varphi_N(x) \Rightarrow \exists N \ (x; y) \in Q_{\varphi_N}$$

□

Замечание. Условие измеримости E существенно. Если $f \equiv 0$ не неизмеримом множестве, например, то $Q_f \in \mathbb{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1} Q_f = 0$.

Теорема 3 (Теорема Тонелли). Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in S(E \rightarrow [0; +\infty])$. Тогда

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(x; \bullet) \in S(E(x))$.
2. Пусть $I(x) = \int_{E(x)} f(x; y) \, dy$. Тогда $I(x) \in S(\mathbb{R}^n)$.
- 3.

$$\int_E f \, d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) \, dx$$

Доказательство. По теореме 2, что $Q_f \in \mathbb{A}_{n+m+1}$ и

$$\mu_{n+m+1} Q_f = \int_E f \, d\mu_{n+m}$$

Воспользуемся принципом Кавальери:

$$\mu_{n+m+1}Q_f = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_{m+1}Q_f(x) \, dx$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} Q_f(x) &= \{(y; z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x; y; z) \in Q_f\} = \\ &= \{(y; z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x; y) \in E, z \in [0; f(x; y)]\} = \\ &= \{(y; z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid y \in E(x), z \in [0; f(x; y)]\} \end{aligned}$$

Да это же подграфик $f(x; \bullet)$!

1. По теореме Кавальери при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $Q_f(x)$ измеримо, а значит мы доказали первое утверждение по теореме 2.

2.

$$\mu_{m+1}Q_f(x) = \mu_{m+1}Q_{f(x; \bullet)} \stackrel{2}{=} \int_{E(x)} f(x; y) \, dy = I(x)$$

Отсюда $I(x)$ измерима по всё тому же принципу Кавальери.

3. Приравняем два выражения для $\mu_{n+m+1}Q_f$.

□

Теорема 4 (Теорема Фубини). Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in L(E)$. Тогда

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(x; \bullet) \in L(E(x))$.
2. Пусть $I(x) = \int_{E(x)} f(x; y) \, dy$. Тогда $I(x) \in L(\mathbb{R}^n)$.
- 3.

$$\int_E f \, d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) \, dx$$

Доказательство. Применим теорему Тонелли для f_+ и f_- . Пусть $I^\pm = \int_{E(x)} f_\pm(x; y) \, dy$. По теореме Тонелли

$$\int_E f_\pm \, d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I^\pm(x) \, dx < +\infty$$

Учитывая $f_\pm(x; \bullet) = (f(x; \bullet))_\pm$, имеем

$$I^+ - I^- = I \in L(\mathbb{R}^n)$$

При почти всех x $I^\pm(x) < +\infty$, а значит при почти всех x $f_\pm \in L(E(x))$ отсюда $f \in L(E(x))$.

□

Замечание. В теореме Тонелли все условия можно ослабить:

1. Если $f \in S(E)$ (не важен знак), то при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x; \bullet) \in S(E(x))$.
2. Если $I(x)$ существует почти во всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $I \in S(\mathbb{R}^n)$
3. Если существует $\int_E f \, d\mu_{n+m} \in \overline{\mathbb{R}}$, то верно условие пункта 2 и

$$\int_E f \, d\mu_{n+m} \in \overline{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) \, dx$$

Доказывается всё это как в теореме Фубини.

Замечание.

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n & f(x; \bullet) \in S(E(x)) \\ \forall y \in \mathbb{R}^m & f(\bullet; y) \in S(E(y)) \end{cases} \not\Rightarrow f \in S(E)$$

Серпинский построил пример такого неизмеримого $E \subset \mathbb{R}^2$, что E пересекается с любой прямой не более чем в двух точках. Мы говорить о нём не будем, т.к. он довольно сложен.

Определение 3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$f \otimes g: \begin{matrix} X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) \mapsto f(x)g(y) \end{matrix}$$

Лемма 1. Если $f \in S(X)$, $g \in S(Y)$, то $f \otimes g \in S(X \times Y)$.

Доказательство. Пусть

$$\tilde{f}(x; y) = f(x) \quad \tilde{g}(x; y) = g(y)$$

Докажем, что \tilde{f} и \tilde{g} измеримы, тогда $f \otimes g$ будет измеримо как произведение измеримых.

$$(X \times Y)(\tilde{f} > a) = X(\tilde{f} > 0) \times Y$$

Левое измеримо по измеримости f , правое — потому что, а произведение измеримы измеримо. \square

Следствие 1.1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. Если

$$\begin{cases} f \in S(X \rightarrow [0; +\infty]) \wedge g \in S(Y \rightarrow [0; +\infty]) \\ f \in L(X) \wedge g \in L(Y) \end{cases}$$

То

$$\int_{X \times Y} f \otimes g \, d\mu_{n+m} = \int_X f \, d\mu_n \int_Y g \, d\mu_m$$

Доказательство. В первом случае нет сомнений в существовании интегралов. Пусть $E = X \times Y$. Тогда

$$\int_E f \otimes g \, d\mu_{n+m} = \int_X \left(\int_Y f(x)g(y) \, dy \right) dx$$

$$\text{так как } E(x) = \begin{cases} \emptyset & x \notin X \\ Y & x \in X \end{cases}.$$

А почему то же самое верно для произвольного знака, если интегралы от них конечны? Ну, чтобы применить теорему Фубини, надо проверить суммируемость $f \otimes g$. Ну, смотрите. По доказанному

$$\int_{X \times Y} |f \otimes g| \, d\mu_{n+m} = \int_X |f| \, d\mu_n \int_Y |g| \, d\mu_m$$

По условию оба этих интеграла конечны, значит $|f \otimes g|$ суммируема, а суммируемость функции равносильна суммируемости её модуля. \square

Замечание. Мы знаем, что в условиях теорем [Тонелли](#) и [Фубини](#) верно

$$\int_E f \, d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E(x)} f(x; y) \, dy \right) dx$$

Тривиально, то же можно записать, поменяв x и y ролями.

$$\int_E f \, d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E(y)} f(x; y) \, dx \right) dy$$

А значит два повторных интеграла равны.

Пример. Повторные интегралы могут быть не равны

$$f(x; y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad E = [-1; 1]^2$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy &= \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=-1}^1 = \frac{2}{x^2 + 1} \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx &= \int_{-1}^1 \frac{2}{x^2 + 1} dx = 4 \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \pi \end{aligned}$$

Другой повторный интеграл будет равен $-\pi$, как несложно заметить.

Пример. Неверно, что если повторные интегралы равны, то двойной существует.

$$g(x; y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad E = [-1; 1]^2$$

Поскольку функция g нечётна по каждой переменной, оба повторных интеграла равны нулю. Отсюда если двойной интеграл существует, то равен нулю.

Докажем, что он не существует. Для этого докажем, что g не суммируема. Попробуем проинтегрировать $|g|$:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|2xy|}{(x^2 + y^2)^2} dy dx = 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{|2xy|}{(x^2 + y^2)^2} dy dx = 4 \int_0^1 \frac{-x}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^1 dx = 4 \int_0^1 \frac{-x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x} dx = +\infty$$

Отсюда g не суммируема. А значит нулю её интеграл не равен, то есть он не существует.

Определение 4. Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ **Проекцией** E на первое координатное пространство называется

$$\text{Pr}_1 E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid E(x) \neq \emptyset\}$$

Замечание. Проекция измеримого множества может быть неизмеримой (достаточно добавить к измеримому двумерному множеству неизмеримое одномерное).

Определение 5. Множество

$$\text{Pr}_1^* E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mu_m E(x) > 0\}$$

называется **существенной проекцией** множества E .

Свойство 5.1. Существенная проекция измерима. (Как Лебегово множество функции $\mu_m E(\bullet)$).

Свойство 5.2. При f подходящем под теоремы [Тонелли](#) и [Фубини](#) верно

$$\int_E f d\mu_{n+m} = \int_{\text{Pr}_1^* E} I(x) dx$$

Замечание. Теоремы [Тонелли](#) и [Фубини](#) можно применять несколько раз.

Определение 6. Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ и $(Y; \mathbb{B}; \nu)$ — пространства с мерами. Пусть

$$\mathbb{A} \odot \mathbb{B} = \{A \times B \mid A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$$

Тогда $\mathbb{A} \odot \mathbb{B}$ является полукольцом, а

$$\pi_0: A \times B \rightarrow \mu A \nu B$$

является мерой на $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$. Тогда π — стандартное распространение π_0 на σ -алгебру \mathbb{C} называется произведением мер μ и ν .

Обозначения:

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \quad \pi = \mu \times \nu$$

Замечание. Доказывать корректность определения мы не будем.

Свойство 6.1.

$$\mu_{n+m} = \mu_n \times \mu_m$$

Свойство 6.2. Если μ и ν являются σ -конечными, то $\mu \times \nu$ — тоже.

Свойство 6.3. Произведение мер ассоциативно.

Свойство 6.4. Все теоремы этого параграфа с доказательствами верны для полных σ -конечных мер.

Теорема 5 (Теорема Тонелли для абстрактных пространств с мерой). Пусть $E \subset X \times Y$, $f \in S_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}}(E \rightarrow [0; +\infty])$. Тогда

1. При почти всех $x \in X$ функция $f(x; \bullet) \in S_{\mathbb{B}}(E(x))$.

2. Пусть $I(x) = \int_{E(x)} f(x; \bullet) d\nu$. Тогда $I(x) \in S_{\mathbb{A}}(X)$.

3.

$$\int_E f d(\mu \times \nu) = \int_X I(x) d\mu$$

Замена переменной в интеграле.

Теорема 6 (Общая схема замены переменной в интеграле). Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$, $(Y; \mathbb{B}; \nu)$ — пространства с мерами. Пусть $h \in S_{\mathbb{A}}(X \rightarrow [0; +\infty])$, $\Phi: X \rightarrow Y$ и

$$\forall B \in \mathbb{B} \quad \Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A} \quad \forall B \in \mathbb{B} \quad \nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h d\mu$$

Пусть $f \in S_{\mathbb{B}}(Y)$. Тогда

1. $f \circ \Phi \in S_{\mathbb{A}}(X)$.

2.

$$\int_Y f d\nu = \int_X (f \circ \Phi) h d\mu$$

(Трактовка стандартная: интегралы существуют или нет одновременно, если существуют, то равны.)

Доказательство. 1. Рассмотрим Лебегово множество

$$X(f \circ \Phi > a) = \{x \in X \mid f(\Phi(x)) > a\} = \{x \in X \mid \Phi(x) \in Y(f > a)\} = \Phi^{-1}(Y(f > a))$$

По условию $Y(f > a) \in \mathbb{B}$, а значит $\Phi^{-1} \in \mathbb{A}$.

2. Разберём случаи

а. $f = \chi_B \mid B \in \mathbb{B}$. Тогда

$$(\chi_B \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Phi^{-1}(B) \\ 0 & x \notin \Phi^{-1}(B) \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}(x)$$

Тогда

$$\int_Y \chi_B d\nu = \nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h d\nu = \int_X \underbrace{\chi_{\Phi^{-1}(B)}}_{f \circ \Phi} h d\nu$$

б. По линейности равенство верно для простых функций.

- с. Для положительных измеримых функций рассмотрим последовательность φ_n , возрастающую к f и перейдём к пределу в равенстве

$$\int_Y \varphi_n \, d\nu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi) h \, d\mu$$

по теореме Леви.

- d. Для произвольных измеримых функций рассмотрим f_{\pm}

$$\int_Y f_{\pm} \, d\nu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi)_{\pm} h \, d\mu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi h)_{\pm} \, d\mu$$

□

Замечание. В условиях теоремы 6 суммируемость f по ν равносильная суммируемости $(f \circ \Phi)h$ по μ

Следствие 1.1. В условиях теоремы 6 если $B \in \mathbb{B}$, $f \in S_{\mathbb{B}}(B)$, то

$$\int_B f \, d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) h \, d\mu$$

Доказательство. Продолжим f нулём на $Y \setminus B$. □

Определение 7. В условии теоремы 6 ν называется h -взвешенным Φ -образом меры μ .

Замечание. Пусть

$$\mathbb{A}^* = \{\Phi^{-1}(B) \mid B \in \mathbb{B}\}$$

Нетрудно заметить, что это σ -алгебра.

В условиях теоремы 6 $\mathbb{A}^* \subset \mathbb{A}$.

Пусть

$$\mathbb{B}^* = \{B \subset Y \mid \Phi^{-1} \in \mathbb{A}\}$$

тогда условия теоремы 6 $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^*$.

Утверждение. Если

$$\nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h \, d\mu$$

то ν — мера на \mathbb{B} .

Доказательство. Остаётся как несложное упражнение читателю. □

Пример. $h \equiv 1$ — невзвешенный образ меры.

$$\nu B = \mu \Phi^{-1}(B) \Rightarrow \int_Y f \, d\nu = \int_X f \circ \Phi \, d\mu$$

Пример. $X = Y$, $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, $\Phi = \text{id}$.

$$\nu A = \int_A h \, d\mu \Rightarrow \int_X f \, d\nu = \int_X f h \, d\mu$$

Тогда пишут $d\nu = h d\mu$.

Определение 8. Если

$$\nu A = \int_A h \, d\mu$$

то h называется **плотностью** меры ν относительно меры μ .

Свойство 8.1. Если $h = \tilde{h}$ μ -почти везде, то $\nu = \tilde{\nu}$. Для σ -конечных мер верно и обратное. Без доказательства.

Теорема 7 (Критерий плотности). Пусть даны X, \mathbb{A} и μ и ν — меры на \mathbb{A} , $h: S(X \rightarrow [0; +\infty])$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. h — плотность ν относительно μ .
- 2.

$$\forall A \in \mathbb{A} \quad \mu A \inf_A h \leq \nu A \leq \mu A \sup_A h$$

Доказательство. • Из первого во второе ясно из оценки интеграла.

- Рассмотрим

$$A = A(h = 0) \cup A(0 < h < +\infty) \cup A(h = +\infty)$$

Равенство есть для первой части:

$$\nu A(h = 0) = \int_{A(h=0)} h \, d\mu$$

так как левое равно нулю по условию второго утверждения, а правое — потому что функция тождественный ноль.

также очевидно равенство есть для третьей части:

$$\nu A(h = +\infty) = \begin{cases} +\infty & \mu A > 0 \\ 0 & \mu A \equiv 0 \end{cases} = \int_{A(h=+\infty)} h \, d\mu$$

Далее можно считать $0 < h < +\infty$ на A .

Рассмотрим $q \in (0; 1)$. Пусть

$$A_j = A(q^j \leq h < q^{j-1})$$

Очевидно, $A_j \in \mathbb{A}$ и $\bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j = A$. Нам известно, что

$$q^j \mu A_j \leq \nu A_j \leq q^{j-1} \mu A_j$$

А ещё из оценки интеграла

$$q^j \mu A_j \leq \int_{A_j} h \, d\mu \leq q^{j-1} \mu A_j$$

Отсюда

$$\begin{aligned} q \int_A h \, d\mu &= q \sum_j \int_{A_j} h \, d\mu \leq \\ &\leq \sum_j q^j \mu A_j \leq \sum_j \nu A_j = \\ &= \boxed{\nu A} \leq \sum_j q^{j-1} \mu A_j \leq \\ &\leq \frac{1}{q} \sum_j \int_{A_j} h \, d\mu = \\ &= \frac{1}{q} \int_A h \, d\mu \end{aligned}$$

Если взять начало, конец и то, что в квадратике, после чего устремить q к единицу, то получим искомое.

□

Интеграл по дискретной мере.

Пример. δ -мера.

Пусть X — пространство, $E \subset X$, $a \in X$, тогда, напомним, δ -мера — это

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1 & a \in E \\ 0 & a \notin E \end{cases}$$

В качестве сигма-алгебры выступает 2^X . Пусть $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Что тогда такое интеграл по этой мере?

$$\int_E f \, d\delta_a = \begin{cases} 0 & a \notin E \\ \int_{\{a\}} f \, d\delta_a = f(a) & a \in E \end{cases}$$

Лемма 2. Пусть μ — считающая мера на X , $E \subset X$, $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\int_E f \, d\mu = \sum_E f$$

Интеграл и сумма существуют или не существуют одновременно, если существуют, то равны.

Доказательство. будем постепенно усложнять f .

1. Сначала докажем для характеристической функции $f = \chi_A$, $A \subset E$. Тогда

$$\int_E \chi_A \, d\mu = \mu A = \sum_A 1 = \sum_A \chi_A$$

2. По линейности равенство верно для простых функций f .

3. $f \geq 0$. Разберём два случая:

- Пусть $\int_E f \, d\mu < +\infty$. Тогда

$$\int_E f \, d\mu = \sup_{\substack{A \subset E \\ \mu A < +\infty}} \int_A f \, d\mu$$

Условие $\mu A < +\infty$ значит что $|A| < +\infty$ (у нас считающая мера). А на конечном множестве положительная функция простая:

$$\int_E f \, d\mu = \sup_{\substack{A \subset E \\ \mu A < +\infty}} \sum_A f$$

Справа написано буквально определение $\sum_E f$ (там супремум частичных сумм).

- Пусть $\int_E f \, d\mu = +\infty$. По определению интеграла неотрицательной функции

$$\forall N > 0 \exists \text{ простая } \varphi \leq f \text{ на } E \quad \int_E \varphi \, d\mu \geq N$$

При этом

$$\sum_E f \geq \sum_E \varphi = \int_E \varphi \, d\mu \geq N$$

4. Дальше надо рассмотреть f_+ и f_- , там всё понятно. Если в одной части нет одновременно двух бесконечностей, то в другой — тоже.

□

Замечание. Причём тут замена переменной?

Следствие 2.1. Пусть $h: X \rightarrow [0; +\infty]$, μ — считающая на X , ν — дискретная мера с весовой функцией h :

$$\forall B \subset X \quad \nu B = \sum_B h$$

Пусть $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\int_E f \, d\nu = \sum_E f \cdot h$$

Доказательство. По только что доказанной лемме

$$\nu B = \int_B h \, d\mu$$

А тогда h — плотность ν относительно μ . Тогда по теореме 6

$$\int_E f \, d\nu \stackrel{6}{=} \int_E fh \, d\mu = \sum_E fh$$

□

Пример. Если $X = \mathbb{N}$, μ — считающая мера, то

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)$$

То есть суммируемость f равносильна абсолютной сходимости ряда $f(k)$.

Пример. Пусть $\{a_k\}_k$ — не более чем счётный набор различных точек X , $\{h_k\}_k \subset [0; +\infty]$, $\nu B = \sum_{k: a_k \in B} h_k$. Тогда

$$\int_E f \, d\nu = \sum_{k: a_k \in E} f(a_k)h_k$$

И опять суммируемость функции равносильна суммируемости семейства (на сей раз семейства $|f(a_k)|h_k$).

Замечание: тут h из следствия — это не совсем h_k . Тут $h_k = h(a_k)$

Замена переменной в интеграле по мере Лебега .

Утверждение. Пусть $G \in \mathbb{A}_n$. Тогда

$$\mathbb{A}_n(G) = \{E \in \mathbb{A}_n \mid E \subset G\}$$

является σ -алгеброй на G .

Доказательство. Очевидно. □

Утверждение. $(G; \mathbb{A}_n(G); \mu|_{\mathbb{A}_n(G)})$ — пространство с мерой.

Доказательство. Очевидно. □

Замечание. До конца параграфа μ — мера Лебега.

Замечание. Напоминание:

Пусть G, V открыты в \mathbb{R}^n . Тогда отображение $\Phi: G \rightarrow V$ называется **диффеоморфизмом**, если Φ гладкая биекция, обратная функция к которой тоже гладкая.

При этом обычно V опускается, и под «диффеоморфизмом Φ на G » называется диффеоморфизм $G \rightarrow \Phi(G)$.

Также заметим некоторые свойства: якобиан Φ нигде не равен нулю. При этом если G открыто, $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ гладко и обратимо и $\det \Phi'(x)$ нигде не равен нулю, то $\Phi(G)$ открыто и $\Phi^{-1} \in C^{(1)}(\Phi(G))$.

Замечание. Также мы знаем, что гладкая замена переводит измеримые множества в измеримые. Вопрос: чему равно $\mu\Phi(A)$? Мы знаем ответ для линейного и аффинного отображения (мера умножается на модуль определителя). При этом для линейного и аффинного отображения $\Phi' = \Phi$, а значит

$$\mu\Phi(E) = |\det \Phi'| \mu E$$

А что в более общем случае? Ну, запишем определение дифференцируемости Φ :

$$\Phi(x) = \underbrace{\Phi(x^0) + \Phi'(x)(x - x^0)}_{\tilde{\Phi}_{x^0}(x)} + o(x - x^0)$$

Если $\Phi = \tilde{\Phi}$, то ответ мы знаем. При этом $\tilde{\Phi}$ тем ближе к Φ , чем ближе x к x^0 . Отсюда возникает предположение, что $|\det \Phi'(x^0)|$ — плотность $\mu\Phi(\bullet)$ относительно μ . И нам удастся это доказать для диффеоморфизма.

Теорема 8 (Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме). Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, Φ — диффеоморфизм на G . Тогда

$$\forall E \in \mathbb{A}_n(G) \quad \mu\Phi(E) = \int_E |\det \Phi'| \, d\mu$$

Доказательство. Why are we still here? Just to suffer.

Для начала пусть $\nu(E) = \mu\Phi(E)$. Несложно проверить, что ν — это мера на $\mathbb{A}_n(G)$.

Теперь нам надо доказать, что $|\det \Phi'|$ — плотность ν относительно μ . Тогда по определению плотности мы победим. У нас был критерий плотности, который мы хотим применить. Что нам надо проверить для этого?

$$\forall E \in \mathbb{A}_n(G) \quad \mu E \inf_E |\det \Phi'| \leq \mu\Phi(E) \leq \mu E \sup_E |\det \Phi'|$$

Здесь есть два неравенства. Мы не хотим доказывать оба. Мы хотим сказать, что если правое доказать для **любого** диффеоморфизма Φ , то из него будет следовать левое. Почему? Ну, применим правое к отображению Φ^{-1} и множеству $\Phi(E)$:

$$\mu\Phi^{-1}(\Phi(E)) \leq \mu\Phi(E) \sup_{y \in \Phi(E)} |\det \Phi^{-1}'(y)|$$

Левая штука — μE . С $\mu\Phi(E)$ делать нечего, а вот с тем, что после него — есть что.

$$\sup_{y \in \Phi(E)} |\det \Phi^{-1}'(y)| = \sup_{y \in \Phi(E)} \frac{1}{|\det \Phi'(\Phi^{-1}(y))|} = \sup_{x \in E} \frac{1}{|\det \Phi'(x)|} = \frac{1}{\inf_{x \in E} |\det \Phi'(x)|}$$

Кажется, это то, что мы хотели.

Теперь наконец начнём доказывать правое неравенство, постепенно усложняя E .

1. Пусть $E = \Delta$ — кубическая ячейка, $\overline{\Delta} \subset G$. Докажем неравенство от противного. Пусть

$$\mu\Phi(\Delta) > \mu\Delta \sup_{\Delta} |\det \Phi'|$$

отсюда

$$\exists C > \mu\Delta \sup_{\Delta} |\det \Phi'| \quad \mu\Phi(\Delta) > C\mu\Delta$$

Будем действовать методом половинного деления. Каждое ребро ячейки попилим пополам, получим 2^n ячеек. Хотя бы для одной из этих ячеек (обозначим её за Δ_1) будет верно $\mu\Phi(\Delta_1) > C\mu\Delta_1$. Иначе можно было бы сложить эти неравенства, воспользоваться аддитивностью меры и прийти к противоречию. Сделаем так ещё неограниченное количество раз.

Получим последовательность вложенных ячеек $\Delta_k \supset \Delta_{k+1}$, для каждой выполнено неравенство $\mu\Phi(\Delta_k) > C\mu\Delta_k$, при этом $\text{diam } \Delta_k \rightarrow 0$. Ну тогда, $\overline{\Delta_k}$ все имеют общую точку $x^0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\Delta_k} \subset \overline{\Delta}$.

Теперь будем усложнять Φ)

(а) Рассмотрим случай $\Phi'(x^0) = I$. Тогда

$$\Phi(x) = \Phi(x^0) + (x - x^0) + o(x - x^0)$$

С точностью до двух сдвигов, Φ почти тождественный оператор:

$$\Theta(x) = \Phi(x) - \Phi(x^0) + x^0 = x + o(x - x^0)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём такое δ из определения $o(x - x^0)$, что

$$\forall x \in B(x^0; \delta) \quad |\Theta(x) - x| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} |x - x^0|$$

Очень хорошо. Заметим, что в некотором номере N $\overline{\Delta_N} \subset B(x^0; \delta)$. Пусть $\overline{\Delta_N} = [a; a + r\mathbb{1}] \ni x^0$. Тогда

$$x \in \overline{\Delta_N} \Rightarrow |x - x^0| \leq r\sqrt{n} \Rightarrow |\Theta(x) - x| \leq \varepsilon r$$

Тогда

$$\forall j \in [1 : n] \quad |\Theta_j(x) - x_j| \leq \varepsilon r$$

А это значит, что

$$a - \varepsilon r \leq x_j - \varepsilon r \leq \Theta_j(x) \leq x_j + \varepsilon r \leq a + (1 + \varepsilon)r$$

другими словами $\Theta(x) \in [a - \varepsilon r\mathbb{1}; a + (1 + \varepsilon)r\mathbb{1}]$. обозначим этот куб буквой Π . Тогда $\Theta(\Delta_N) \subset \Pi$. Тогда

$$\mu\Phi(\Delta_N) = \mu\Theta(\Delta_N) \leq \mu\Pi = (1 + 2\varepsilon)^n r^n = (1 + 2\varepsilon)^n \mu\Delta_N$$

И это уже почти противоречие. Но мы его не хотим, давайте сначала возьмём произвольное Φ , и там уже докопаемся до противоречия.

(b) Итак, пусть Φ произвольное. Пусть $S = (\Phi'(x^0))^{-1}$ (это линейный оператор, его производная в любой точке — он сам). Пусть $\Psi = S \circ \Phi$. Ну, хорошо

$$\Psi'(x^0) = \underbrace{S'(\Phi(x^0))}_S \Phi'(x^0) = S\Phi'(x^0) = I$$

Ψ подходит под наш предыдущий случай, а значит мы нашли для него N :

$$\mu\Psi(\Delta_N) \leq (1 + 2\varepsilon)^n \mu\Delta_N$$

При этом

$$\mu\Psi(\Delta_N) = \mu S(\Phi(\Delta_N)) = |\det S| \mu\Phi(\Delta_N) = \frac{1}{|\det \Phi'(x^0)|} \mu\Phi(\Delta_N)$$

Из двух этих утверждений

$$\mu\Phi(\Delta_N) \leq (1 + 2\varepsilon)^n |\det \Phi'(x^0)| \mu\Delta_N$$

А ещё мы знаем, что $C\mu\Delta_n \leq \mu\Phi(\Delta_n)$. А это уже капец:

$$C < (1 + 2\varepsilon)^n |\det \Phi'(x^0)| \longrightarrow C \leq |\det \Phi(x^0)|$$

А у нас по выбору $C > \sup_{\Delta} |\det \Phi'| \stackrel{|\det \Phi'| \text{ непрерывно}}{=} \sup_{\overline{\Delta}} |\det \Phi'| > |\det \Phi'(x^0)|$

2. Пусть $E = U$ открытое подмножество G . Открытое множество можно представить как счётное объединения ячеек:

$$U = \bigsqcup_k D_k$$

Где D_k — кубические ячейки, $\overline{D_k} \subset U$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu\Phi(U) &= \mu\Phi\left(\bigsqcup_k D_k\right) = \mu\bigsqcup_k \Phi(D_k) = \sum_k \mu\Phi(D_k) \leq \sum_k \mu D_k \sup_{D_k} |\det \Phi'| \leq \\ &\leq \sum_k \mu D_k \sup_U |\det \Phi'| = \sup_U |\det \Phi'| \sum_k \mu D_k = \mu U \sup_U |\det \Phi'| \end{aligned}$$

3. От открытого множества U произвольному $E \in \mathbb{A}_n(G)$. Тут будем пользоваться регулярностью меры Лебега:

$$\mu\Phi(E) = \inf_{\substack{V \text{ открыто} \\ \Phi(E) \subset V \subset \Phi(G)}} \mu V = \inf_{\substack{U \text{ открыто} \\ E \subset U \subset G}} \mu\Phi(U) \leq \inf_{\substack{U \text{ открыто} \\ E \subset U \subset G}} \left(\mu U \sup_U |\det \Phi'| \right)$$

Хочется доказать, что это равно $\mu E \sup_E |\det \Phi'|$. Мы знаем, что правая часть больше либо равна $\mu E \sup_E |\det \Phi'|$, а нам надо доказать, что меньше либо равно.

Если $\mu E = 0$, то неравенство очевидно (тогда $\mu\Phi(E) = 0$, гладкое отображение переводит множество меры ноль в множество меры ноль). Если $\mu E = +\infty$, то доказывать нечего. И если супремум $\sup_E |\det \Phi'|$ равен $+\infty$, то тоже (в правой части либо 0 (когда $\mu E = 0$), либо бесконечность; в обоих случаях доказывать нечего).

Далее считаем $\mu E, \sup_E |\det \Phi'| \in (0; +\infty)$. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\exists \text{ открытое } U, E \subset U \subset G, \mu U \leq \mu E + \varepsilon, \sup_U |\det \Phi'| \leq \sup_E |\det \Phi'| + \varepsilon$$

первое условие — регулярность меры Лебега, а второе вот:

$$x \in E \exists V_x \subset G \forall t \in V_x \quad ||\det \Phi'(t)| - |\det \Phi'(x)|| \leq \varepsilon$$

Тогда

$$U = \bigcup_{x \in E} V_x$$

Такое U подходит под

$$\sup_U |\det \Phi'| \leq \sup_E |\det \Phi'| + \varepsilon$$

Если пересечь его с тем, которое в регулярности меры Лебега, то получится искомое U из утверждения выше. Тогда

$$\inf_{\substack{U \text{ открыто} \\ E \subset U \subset G}} \left(\mu U \sup_U |\det \Phi'| \right) \leq (\mu E + \varepsilon) \left(\sup_E |\det \Phi'| + \varepsilon \right)$$

Устремив ε к нулю, получим искомое.

□

Теорема 9 (Замена переменной в кратном интеграле). Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, Φ — диффеоморфизм на G , $E \in \mathbb{A}_n(G)$, $f \in S(\Phi(E))$. Тогда

$$\int_{\Phi(E)} f \, d\mu = \int_E (f \circ \Phi) |\det \Phi'| \, d\mu$$

Интегралы существуют или не существуют одновременно, если существуют, то равны. Также равенство пишется как

$$\int_{\Phi(E)} f(y) \, dy = \int_E (f \circ \Phi)(x) |\det \Phi'(x)| \, dx$$

Доказательство. Возьмём теорему 6 и возьмём в ней

$$(X; \mathbb{A}; \mu) = (G; \mathbb{A}_n(G); \mu) \quad (Y; \mathbb{B}; \nu) = (\Phi(G); \mathbb{A}_N(\Phi(G)); \mu) \quad h = |\det \Phi'|$$

От нас хотят равенство

$$\forall B \in \mathbb{B} \quad \Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A}, \nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} \int h \, d\mu$$

Ну, если $B = \Phi(E)$, то $\nu\Phi(E) = \int_E |\det \Phi'| \, d\mu$. А это мы доказали в 8.

□

Следствие 2.1. В условии теоремы 9

$$f \in L(\Phi(E)) \Leftrightarrow (f \circ \Phi)|\det \Phi'| \in L(E)$$

Следствие 2.2. Пусть $G \subset H \subset \mathbb{R}^n$, G открыто. Пусть $\Phi: H \rightarrow \mathbb{R}^n$ и пусть $\Phi|_G$ — диффеоморфизм. И пусть ещё $\mu(H \setminus G) = \mu(\Phi(H) \setminus \Phi(G)) = 0$. $E \in \mathbb{A}_n(H)$, $f \in S(\Phi(E))$. Тогда верна формула замены переменной:

$$\int_{\Phi(E)} f(y) \, dy = \int_E (f \circ \Phi)(x) |\det \Phi'(x)| \, dx$$

Доказательство.

$$\int_{\Phi(E)} f(y) \, dy = \int_{\Phi(E \cap G)} f(y) \, dy = \int_{E \cap G} (f \circ \Phi)(x) |\det \Phi'(x)| \, dx = \int_E (f \circ \Phi)(x) |\det \Phi'(x)| \, dx$$

□

Замечание. Ослаблять условия теоремы 9 дальше трудно и больно. Но можно. Но туда мы лезть не будем. Для желающих есть книжка Эванса и Гариеси «Теория меры и тонкие свойства функций».

Замечание. А что у нас в $n = 1$, как это коррелирует с тем, что мы знаем?

$$\int_a^b f = \int_a^\beta (f \circ \varphi) \varphi' \quad \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$$

Почему модуль? На самом деле у нас и тут есть модуль? Потому что φ может как возрастать, так и убывать, и во втором случае у нас меняются местами пределы интегрирования. А в формуле 9 ориентации на E не задано.

Пример. Сдвиг и отражение.

$\Phi(x) = a \pm x$, $a \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, это диффеоморфизм и модуль якобиана равен единице. То есть

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(a \pm x) \, dx$$

Пример. Полярные координаты в \mathbb{R}^2 .

$(x; y) = (r \cos \phi; r \sin \phi) = \Phi(r; \phi)$. Посчитаем якобиан:

$$\begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r$$

Это не равно нулю всюду, кроме начала координат. Где Φ — диффеоморфизм? По-разному можно отвечать, например, так: удалим из плоскости отрицательную часть вещественной оси. Тогда $G = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi)$, $\Phi(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x; 0) \mid x \leq 0\}$. Тогда Φ — диффеоморфизм. Очевидно, пренебрегать тем, что мы сделали, можно, там мера ноль.

Посчитаем следующий интеграл:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx$$

Это не берётся, но посчитать можно:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} \, dy \right) = \iint_{(0; +\infty)^2} e^{-x^2 - y^2} \, dx dy \stackrel{\substack{x=r \cos \phi \\ y=r \sin \phi}}{=} \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r \, d\phi dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r \, dr = \frac{\pi}{2} \frac{-e^{-r^2}}{2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Отсюда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Пример. Цилиндрические координаты: $(x; y; z) = (r \cos \phi; r \sin \phi; h) = \Phi(r; \phi; h)$. Тогда $\det \Phi' = r$, $G = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi) \times \mathbb{R}$, $\Phi(G) = \{(x; 0; z) \mid x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$.

Пример. Сферические координаты:

$$\begin{cases} \rho = r \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \end{cases}$$

(Обозначения могут быть другими.)

Тогда

$$(x; y; z) = (r \cos \phi \cos \psi; r \sin \phi \cos \psi; r \sin \psi) = \Phi(r; \phi; \psi)$$

Из написанного выше Φ можно представить как два полярных преобразования, а якобиан произведения равен произведению якобианов, т.е. $\det \Phi' = r\rho = r^2 \cos \psi$.

Что покусать из пространства? Ну,

$$G = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \Phi(G) = \{(x; 0; z) \mid x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$$

Пример. Сферические координаты в \mathbb{R}^n .

$x \in \mathbb{R}^n$, $r \in (0; +\infty)$, $\phi \in \mathbb{R}^{n-1}$. Тут тоже последовательные полярные замены:

$$\begin{cases} x_1 = \rho_1 \cos \phi_1 \\ x_2 = \rho_1 \sin \phi_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \cos \phi_2 \\ x_3 = \rho_2 \sin \phi_2 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} \rho_{n-3} = \rho_{n-2} \cos \phi_{n-2} \\ x_{n-1} = \rho_{n-2} \sin \phi_{n-2} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_{n-2} = r \cos \phi_{n-1} \\ x_n = r \sin \phi_{n-1} \end{cases}$$

Отсюда

$$\det \Phi' = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-2} r = r^{n-1} \cos^{n-2} \phi_{n-1} \cos^{n-1} \phi_{n-2} \dots \cos^2 \phi_3 \cos \phi_2$$

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \phi_{n-1} \cos \phi_{n-2} \dots \cos \phi_2 \cos \phi_1 \\ x_2 = r \cos \phi_{n-1} \cos \phi_{n-2} \dots \cos \phi_2 \sin \phi_1 \\ x_3 = r \cos \phi_{n-1} \cos \phi_{n-2} \dots \sin \phi_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = r \cos \phi_{n-1} \sin \phi_{n-2} \\ x_n = r \sin \phi_{n-1} \end{cases}$$

В качестве G можно берётся вот что:

$$G = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)^{n-2}$$

Желающие узнать $\Phi(G)$, могут почитать учебник.

Мера и интеграл Лебега — Стильеса.

Определение 9. Пусть $\Delta = (\alpha; \beta) \subset \mathbb{R}$. Пусть $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ возрастает и непрерывна слева. Пусть \mathbb{P}_Δ — множество ячеек (полуинтервалов), содержащихся в Δ вместе с замыканием:

$$\mathbb{P}_\Delta = \{[a; b) \mid \alpha < a \leq b < \beta\}$$

(В случае $\Delta = \mathbb{R}$ $\mathbb{P}_\Delta = \mathbb{P}_1$.) Очевидно, \mathbb{P}_Δ — полукольцо.

Объём, порождённый функцией g — $V_g[a; b) = g(b) - g(a)$.

Свойство 9.1. Очевидно, это объём.

Свойство 9.2. Объём, порождённый функцией — мера.

Доказательство. См. доказательство для меры Лебега, но используя следующее равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_g \left[a - \frac{1}{n}; b \right) = Vg[a; b) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_g \left[a; b - \frac{1}{n} \right)$$

□

Определение 10. Стандартное продолжение V_g на некоторую σ -алгебру называется **мерой Стильеса — Лебега**, порождённой функцией g (и обозначается μ_g).

Сигма-алгебру, на которой определена эта мера, обозначают \mathbb{A}_g .

Замечание. Мера Лебега μ_1 является частным случаем меры Стильеса — Лебега при $g(x) = x$, $\Delta = \mathbb{R}$.

Свойство 10.1. Мера односточечного множества $\{a\}$ равна $g(a+) - g(a)$

Доказательство.

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a; a + \frac{1}{n} \right)$$

По непрерывности меры

$$\mu_g\{a\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_g \left[a; a + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g \left(a + \frac{1}{n} \right) - g(a) = g(a+) - g(a)$$

□

Свойство 10.2. Аналогично

$$\begin{aligned} \mu_g[a; b] &= g(b+) - g(a) \\ \mu_g(\alpha; b] &= g(b+) - g(\alpha+) \\ \mu_g[a; \beta) &= g(\beta-) - g(a) \\ \mu_g(\alpha; \beta) &= g(\beta-) - g(\alpha+) \end{aligned}$$

Замечание. Мера точки может быть положительной. Нулю она равна тогда и только тогда, когда g непрерывна в этой точке.

Свойство 10.3. Мера Лебега — Стильеса σ -конечна. Конечна она тогда и только тогда, когда μ_g ограничена.

Определение 11. Определим меру μ_g на промежутке произвольного типа.

Пусть $\Delta = \langle \alpha; \beta \rangle \subset \mathbb{R}$.

Если $\alpha \in \Delta$, то пусть $\tilde{g}(x) = g(\alpha)$ при $x < \alpha$.

Если $\beta \in \Delta$, то не требуем непрерывности g слева в точке β , но положим

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \langle \alpha; \beta \rangle \\ g(\beta-) & x = \beta \\ g(\beta) & x > \beta \end{cases}$$

После этого получим \tilde{g} , заданное на открытом промежутке $\tilde{\Delta} \supset \Delta$. При этом на нём \tilde{g} возрастает и непрерывно слева. Положим, что мера Лебега — Стильеса μ_g равна $\mu_{\tilde{g}}|_{\mathbb{A}_{\tilde{g}}(\Delta)}$.

Замечание. Также можно определить меру μ_g для функции g , которая возрастает на Δ , но не обязательно непрерывна слева. Тогда мы просто исправляем g в точках левого разрыва (кроме β).

Другой способ — просто определить меру Лебега — Стильеса как $\mu_g[a; b) = g(b-) - g(a-)$.

Замечание. У этих мер есть проблемы: \mathbb{A}_g различны для разных g . А иногда хочется сложить две меры Лебега — Стильеса. Тогда их сужают на Борелевскую σ -алгебру (на ней они все определены т.к. определены на ячейках), получая меру Бореля — Стильеса (на самом деле бывает более широкая сигма-алгебра, но обычно хватает Борелевской).

Лемма 3. Пусть Δ — промежуток в \mathbb{R} , есть мера ν , заданная на \mathbb{B}_Δ , которая конечна на \mathbb{P}_Δ (ячейках, лежащих в Δ вместе с замыканием). Тогда существует такая $g \uparrow \Delta$, что $\nu = \mu_g|_{\mathbb{B}_\Delta}$.

Доказательство. Пусть для определённости Δ открыт.

Пусть $x \in \Delta$. Определим g так:

$$g(x) = \begin{cases} \nu[x_0; x] & x \geq x_0 \\ -\nu[x; x_0] & x < x_0 \end{cases}$$

Возрастание g на Δ очевидно. Проверим непрерывность слева. Пусть для определённости $x > x_0$. Рассмотрим $u \in (x_0; x)$. Тогда

$$g(u) = \nu[x_0; u] \xrightarrow{u \rightarrow x-} \nu[x_0; x] = g(x)$$

Если же $x \leq x_0$, возьмём $u < x$:

$$g(u) = -\nu[u; x_0] \xrightarrow{u \rightarrow x-} -\nu[x; x_0] = g(x)$$

(Здесь мы используем конечность на отрезках.)

Осталось проверить, что ν и μ_g совпадают на ячейках. Рассмотрим $[a; b] \subset [a; b] \subset \Delta$. Тогда

$$\mu_g[a; b] = g(b) - g(a) = \begin{cases} \nu[x_0; b] - \nu[x_0; a] & x_0 \leq a < b \\ \nu[x_0; b] - (-\nu[a; x_0]) & a < x_0 < b = \nu[a; b] \\ -\nu[b; x_0] - (-\nu[a; x_0]) & a < b \leq x_0 \end{cases}$$

□

Определение 12. Интегралом Лебега — Стильтьеса называется никогда не догадаетесь что. Помимо стандартного обозначения $\int_E f \, d\mu_g$ также пишут

$$\int_E f \, dg \quad \int_E f(x) \, dg(x)$$

f называются **интегрируемой функцией** (integrand), а g — **интегрирующей функцией** (integrant).

Утверждение. Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, а $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$. Пусть $f \in S_{\mathbb{B}}(X)$. Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\mu|_{\mathbb{B}}$$

Доказательство. Частный случай **замены переменной в интеграле**, для $\Phi = \text{id}_X$. □

Замечание. Далее рассмотрим несколько частных случаев меры и интеграла Лебега — Стильтьеса.

Пример. Дискретная мера.

Введём

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

— тета-функцию Хевисайда. Очевидно, что

$$\mu_\theta E = \delta_0 E = \begin{cases} 1 & 0 \in E \\ 0 & 0 \notin E \end{cases}$$

А дальше рассмотрим $\{a_k\}$ — не более чем счётный набор точек из Δ , Δ открыт в \mathbb{R} , $\{h_k\} \subset (0; +\infty)$. (Далее будем считать, что имеем счётный набор, конечный будет частным случаем (много нулей)). Пусть

$$\forall [a; b] \subset \Delta \quad \sum_{k: a_k \in [a; b]} h_k < +\infty$$

Тогда возьмём $x \in \Delta, c \in \mathbb{R}$ и определим

$$g(x) = c + \sum_k h_k(\theta(x - a_k) - \theta(x_0 - a_k))$$

Заметим, что θ возрастает, а значит при фиксированном x все слагаемые одного знака. Поэтому сумма ряда есть в $\overline{\mathbb{R}}$. На самом деле эта сумма конечна.

Пусть $x \geq x_0$. Тогда, выкинув из суммы нулевые слагаемые, получим

$$c \leq g(x) = c + \sum_{k: a_k \in [x_0; x]} h_k < +\infty$$

В случае $x < x_0$ аналогично. А ещё g возрастает (т.к. это сумма ряда возрастающих функций).

Утверждение. g непрерывна везде, кроме a_k , а в a_k непрерывна только слева, а скачок равен h_k .

Доказательство. Докажем, что ряд в определении g сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в Δ .

Достаточно доказывать для $[a; x_0]$ и $[x_0; b]$ (остальные являют собой объединение или разность двух таких). Рассмотрим $[x_0; b]$, $[a; x_0]$ аналогично.

Рассмотрим $x \in [x_0; b]$. Заметим, что

$$h_k(\theta(x - a_k) - \theta(x_0 - a_k)) \leq h_k(\theta(b - a_k) - \theta(x_0 - a_k))$$

А ряд с тем, что справа, сходится (т.к. поточечно сходится $g(b)$), то есть g равномерно сходится по признаку Вейерштрасса.

Заметим, что все члены ряда непрерывны на $\Delta \setminus \{a_k\}_k$, а значит и сумма тоже. Также заметим, что если удалить из суммы k -тое слагаемое, то всё остальное будет непрерывным. А $h_k(\theta(x - a_k) - \theta(x_0 - a_k))$ ведёт себя так, как нам хочется. \square

Определение 13. Функция g такого вида, как в примере выше, называется **функцией скачков**.

Теорема 10 (Дискретная мера как мера Лебега — Стильтьеса). В условиях определения g , $\mathbb{A}_g = 2^\Delta$, μ_g — дискретная мера с нагрузками h_k в точках a_k .

Доказательство. Если $[a; b] \subset \Delta$, то

$$\mu_g[a; b] = g(b) - g(a) = \sum_k h_k(\theta(b - a_k) - \theta(a - a_k)) = \sum_{k: a_k \in [a; b]} h_k$$

Кажется, это ровно определение дискретной меры. Обозначим её за $\nu[a; b]$. Кайф, две меры совпадают на ячейках. А значит совпадают на \mathbb{A}_g . (В книжке есть доказательство без теоремы о единственности стандартного продолжения меры.) Остаётся лишь доказать, что $\mathbb{A}_g = 2^\Delta$. Рассмотрим

$$H = \{a_1; a_2; \dots\}$$

Это множество измеримо (как не более чем счётное). Значит и дополнение его измеримо. А $\mu_g(\Delta \setminus H) = 0$. А меры μ_g (как и любое стандартное продолжение) полна, а значит любое подмножество $\Delta \setminus H$ измеримо (и имеет меру ноль). Ну и всё, $A = (A \cap H) \cup (A \cap H^c)$, и первое измеримо как не более чем счётное, а второе как множество меры ноль. \square

Замечание. Как мы видим, μ_g не зависит от x_0 и c . А значит, если ряд $\sum_k h_k \theta(x - a_k)$ сходится для любого x , то $\sum_k h_k \theta(x_0 - a_k)$ можно вынести в c .

Пример. $g(x) = [x]$ порождает считающую меру на \mathbb{Z} .

Замечание. Если $\alpha \in \Delta$ или $\beta \in \Delta$, то можно добавить нагрузки в этих точках.

Следствие 3.1.

$$\int_E f \, dg = \sum_{k: a_k \in E} f(a_k) h_k$$

Замечание. Мы видим dg . Очень хочется заменить это на $g'dx$. В рассмотренном выше примере это не получится без обобщённых функций, но в некоторых примерах получится.

Замечание. Здесь и далее $\int_a^b f$ — интеграл Лебега, $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Определение 14. Пусть Δ — промежуток в \mathbb{R} , $h: \Delta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется **локально суммируемой** на Δ , если она суммируема на любом отрезке в Δ . Обозначение: $L_{\text{loc}}(\Delta)$.

Определение 15. Пусть Δ — промежуток в \mathbb{R} . $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ называется **локально абсолютно непрерывной** на Δ , если g представляется в виде $g(x) = \int_{x_0}^x h + \underbrace{\text{const}}_{g(x_0)}$, где $x_0 \in \Delta$, h локально суммируема.

Обозначение $AC_{\text{loc}}(\Delta)$.

Замечание. Далее мы будем опускать слово «локально» в этом термине.

Свойство 15.1. Если h непрерывно в точке x , то g дифференцируема в ней и $g'(x) = h(x)$.

Доказательство. См. доказательство теоремы Барроу. □

Свойство 15.2. По теореме Барроу и формуле Ньютона — Лейбница

$$C^{(1)}(\Delta) \subsetneq AC_{\text{loc}}(\Delta)$$

Доказательство. Включение строгое, если в качестве h взять θ . □

Свойство 15.3.

$$AC_{\text{loc}}(\Delta) \subsetneq C(\Delta)$$

Свойство 15.4. Для включения см. теорему об абсолютной непрерывности интеграла из прошлого семестра.

Включение строгое:

$$g(x) = \int_x^1 \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} \, dt \quad \Delta = [0; 1]$$

В $x = 0$ условно сходится (а значит функция g непрерывна), но абсолютно непрерывной она не будет т.к. единственный кандидат на роль h ($\frac{1}{t} \sin \frac{1}{t}$) не суммируемо.

Замечание. Более интересно то, что включение строгое, даже если рассматривать только возрастающие функции. Например, если взять Θ — канторову лестницу, то h по крайней мере в дополнительных канторовых промежутках была равна производной Θ , а значит почти везде была бы равна нулю.

Свойство 15.5. Если $g \in AC_{\text{loc}}(\Delta)$, то g дифференцируема в почти всех точках Δ , $g' \in L_{\text{loc}}(\Delta)$ и $g' = h$ почти везде.

Без доказательства.

Следствие 3.2. Тогда

$$g(x) = \int_{x_0}^x g' + g(x_0)$$

Утверждение. Однако условие « g почти везде дифференцируема на Δ и $g' \in L_{\text{loc}}(\Delta)$ » не влечёт равенства

$$g(x) = \int_{x_0}^x g' + g(x_0)$$

(и не влечёт абсолютной локальной непрерывности).

Доказательство. Канторова лестница. □

Замечание. Абсолютно локально непрерывные функции — в точности те функции, для которых верна формула Ньютона — Лейбница.

Утверждение. Если g возрастает на $[a; b]$, то g дифференцируема почти везде на $[a; b]$. Тогда g' неотрицательно почти везде и

$$\int_a^b g' \leq g(b) - g(a)$$

Без доказательства.

Теорема 11 (Интеграл Лебега — Стильеса абсолютно локально непрерывной функции.). Пусть Δ — промежуток в \mathbb{R} , $h \in L_{\text{loc}}(\Delta)$, $h \geq 0, x_0 \in \Delta$,

$$g(x) = \int_{x_0}^x h + g(x_0) \quad x \in \Delta$$

Тогда

1. $\mathbb{A}_1(\Delta) \subset \mathbb{A}_g(\Delta)$.
2. Если $E \in \mathbb{A}_1(\Delta)$, $f \in S(E)$, то $\int_E f \, dg = \int_E f h$. Интегралы существуют или нет одновременно, если существуют, то равны.

Доказательство. Пусть $\nu E = \int_E h$. Это мера на $\mathbb{A}_1(\Delta)$. Заметим, что тогда второе утверждение — замена переменной в интеграле. О'кей, заметим, что μ_g и ν равны нулю на одноточечном множестве, а значит можно считать Δ открытым.

Круть, заметим, что $\mu_g[a; b] = g(b) - g(a) = \int_a^b h = \nu[a; b]$, то есть ν и μ_g совпадают на ячейках. А значит совпадают на \mathbb{B}_Δ . А хочется, чтобы они совпадали на измеримых Лебегу множествах.

Хорошо, давайте дальше проверим, что ν и μ_g совпадают на множествах нулевой меры. Возьмём $e \subset \Delta : \mu_1 e = 0$. Его можно заключить в множество типа G_δ с нулевой мерой, а на множестве типа G_δ ν и μ_g совпадают (и равны нулю). Тогда по полноте $\mu_g e \in \mathbb{A}_g(\Delta)$.

Итого рассмотрев множество $E \in \mathbb{A}_1(\Delta)$, представим его как $A \cup e$, где $A \in \mathbb{B}_\Delta$, $\mu_1 e = 0$, получим, что любое такое E лежит в $\mathbb{A}_g(\Delta)$.

Осталось применить теорему 6 ($\Phi = \text{id}_\Delta$). □

Следствие 3.1. Если $g \in C^{(1)}(\Delta)$ и возрастает, то $\int_E f \, dg = \int_E f g'$

Замечание. Очень жаль, но наши два примера — это не все функции.

Определение 16. $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ называется **сингулярной**, если $g \equiv 0$ или g непрерывна, $g \neq \text{const}$ и $g' = 0$ почти везде.

Пример. Канторова лестница.

Утверждение. Пусть $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, возрастает и непрерывна слева (кроме, возможно, правого конца Δ). Тогда g единственным образом (с точностью до константы) представляется в виде

$$g = g_{\text{disc}} + g_c$$

где первое — функция скачков, второе — непрерывная. При этом

$$g_c = g_{\text{ac}} + g_{\text{sing}}$$

Где первое — абсолютно непрерывна, второе — сингулярна. При этом все эти g также возрастают и непрерывны слева (кроме, возможно, левого конца).

Что интересно, то же самое можно записать для мер Стильеса — Лебега (по крайней мере на \mathbb{B}_Δ):

$$\mu_g = \mu_{g_{\text{disc}}} + \mu_{g_{\text{ac}}} + \mu_{g_{\text{sing}}}$$

Определение 17. Интеграл Лебега — Стильтьеса функции произвольного знака.

Пусть $g = g_1 - g_2$, где g_1, g_2 возрастают. Пусть f, E — борелевские. Тогда положим

$$\int_E f \, dg = \int_E f \, dg_1 - \int_E f \, dg_2$$

Если правая часть существует.

Свойство 17.1. Нетрудно заметить, что этот интеграл не зависит от конкретного разбиения g на g_1 и g_2 .

Замечание. В частности, на отрезке можно интегрировать по функции ограниченной вариации.

Свойство 17.2. Интеграл заведомо существует и конечен для борелевской ограниченной функции f .

Свойство 17.3. Для таких интегралов верна теорема 11.

Теорема 12 (Интегрирование по частям в интеграле Лебега — Стильтьеса.). Пусть $f \in AC[a; b]$, $g \in V[a; b]$. Тогда

$$\int_{[a; b]} f \, dg = fg \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

Доказательство. Считаем, что g возрастает, (иначе представим в виде разности двух возрастающих) и непрерывна слева (кроме, может, b).

- Докажем сначала формулу в частном случае $f(a) = g(b) = 0$. Тогда

$$\int_{[a; b]} f \, dg = \int_{[a; b]} \left(\int_a^x f'(u) \, du \right) dg(x)$$

Хочется воспользоваться **теоремой Фубини**. Тогда заметим, что $a \leq u \leq x \leq b$, то есть имеем треугольник. Чтобы менять порядок интегрирования, надо проверить суммируемость подынтегральной функции. Для этого ставим модуль $|f'(u)|$. Тогда изменить порядок интегрирования можно по **Тонелли** и получить $\int_a^b |f'(u)| g$, где первое суммируемо, второе ограничено, а значит интеграл небесконечен. То есть $f'(u)$ суммируема

$$\int_{[a; b]} f \, dg = \int_{[a; b]} f'(u) \underbrace{\left(\int_{[u; b]} dg(x) \right)}_{\mu_g[u; b] = g(b) - g(u) = -g(u)} du = - \int_a^b f' g$$

Получили то, что хотели.

- Общий случай: рассмотрим $f - f(a)$ и $g - g(b)$. По доказанному,

$$\int_{[a; b]} f - f(a) \, d(g - g(b)) = - \int_a^b (f - f(a))' (g - g(b))$$

Тогда

$$\int_{[a; b]} f \, dg - f(a) \int_{[a; b]} dg = - \int_a^b f' g + \int_a^b f' g(b)$$

При этом $\int_{[a; b]} dg$ мы уже считали, это $g(b) - g(a)$, а $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$ по формуле Ньютона — Лейбница ($f \in AC[a; b]$). Приведя подобные слагаемые, получим искомое.

□

Следствие 3.1 (Интегрирование по частям в интеграле Лебега). Если $f, g \in AC[a; b]$, то

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

Интегралы, зависящие от параметра.

Определение 18. Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, Y — множество (произвольное). И есть функция $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Пусть также

$$\forall y \in Y \quad f(\bullet; y) \in L(X; \mu)$$

Тогда $I(y) = \int_X f(x; y) \, dx$ называется **интегралом, зависящим от параметра**.

Замечание. Чтобы исследовать свойства интеграла с параметром, придётся вводить дополнительную структуру на Y . Например, если Y — метрическое пространство, можно ли перейти к пределу под знаком интеграла? Или есть ли непрерывность интеграла с параметром. Что можно сказать о дифференцируемости I и о её производной (тогда уже надо считать Y подмножеством \mathbb{R}^n). Можно ли интегрировать по y , если Y — пространство с мерой?

Впрочем, ответ на 4 вопроса мы знаем — см. теоремы [Тонелли](#) и [Фубини](#). На остальные сейчас попытаемся ответить.

Теорема 13 (Предельный переход по параметру под знаком интеграла). Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, \tilde{Y} — пространство с мерой, $Y \subset \tilde{Y}$. Пусть $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ и пусть

$$\forall y \in Y \quad f(\bullet; y) \in L(X; \mu)$$

Пусть y_0 — предельная точка Y , при почти всех $x \in X$ $f(x; y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} g(x)$.

Пусть

$$\exists \Phi \in L(X; \mu) \quad \exists V_{y_0} \text{ при почти всех } x \in X \quad \forall y \in V_{y_0} \cap Y \quad |f(x; y)| \leq \Phi(x)$$

Тогда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x; y) \, d\mu(x) = \int_X \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) \, d\mu(x)$$

Определение 19. Условие

$$\exists \Phi \in L(X; \mu) \quad \exists V_{y_0} \text{ при почти всех } x \in X \quad \forall y \in V_{y_0} \cap Y \quad |f(x; y)| \leq \Phi(x)$$

называется **локальным условием Лебега** в точке y_0 .

Доказательство. Возьмём последовательность точек $y_n \in Y \setminus \{y_0\}$, $y_n \rightarrow y_0$. Тогда начиная с некоторого y_N все $y_{n>N} \in V_{y_0}$ из локального условия Лебега.

Введём последовательность функций $f_n(x) = f(x; y_n)$. Тогда при почти всех $x \in X$ $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x)$.

Кроме того в силу локального условия Лебега для почти всех $x \in X$ $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x)| \leq \Phi(x)$

То теореме Лебега о мажорируемой сходимости $g \in L(X; \mu)$, и

$$\int_X f_n(x) \, d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X g(x) \, d\mu(x)$$

□

Замечание. Не исключён случай, когда y_0 — бесконечно удалённая точка или $\pm\infty$, если $\tilde{Y} = \mathbb{R}$.

Замечание. Квантор \forall и «для почти всех» в общем случае менять нельзя. «Почти всех $x \forall y$ » сильнее, чем « $\forall y$ для почти всех x ». Но для данной теоремы более слабое условие также работает (без изменения доказательства).

Замечание. Интересный факт: мы имели равномерную сходимость для рядов. А эта теорема в некотором смысле оперирует с равномерной сходимостью для семейств функций (f можно рассматривать как семейство функций $f_y(x)$).

Определение 20. Пусть X — множество, \tilde{Y} — метрическое пространство, $Y \subset \tilde{Y}$, y_0 — предельная точка Y , $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}), $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}). Тогда говорят, что **семейство функций** $\{f(\bullet; y)\}_{y \in Y}$ **сходится к g равномерно** на X при $y \rightarrow y_0$, если

$$\sup_{x \in X} |f(x; y) - g(x)| \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0$$

Записывается привычным образом $f(x; y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} g(x)$

Следствие 3.1 (Предельный переход по параметру при условии равномерной сходимости). Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, μ конечна.

Y — метрическое пространство, $Y \subset \tilde{Y}$, y_0 — предельная точка Y .

Пусть $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x; y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} g(x)$ на X и пусть

$$\forall y \in Y \quad f(\bullet; y) \in L(X; \mu)$$

Тогда $g \in L(X; \mu)$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x; y) \, d\mu(x) = \int_X \lim_{y \rightarrow y_0} f(x; y) \, d\mu(x)$$

Доказательство. Возьмём последовательность $y_n \in Y \setminus \{y_0\}$, $y_n \rightarrow y_0$. Введём $f_n(x) = f(x; y_n)$. Тогда f_n равномерно стремится к g на X .

Возьмём $\varepsilon = 1$ и получим N такое что $\forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < 1$.

Отсюда $|g(x)| < |f_n(x)| + 1$, обе части $\in L(X; \mu)$, значит $g \in L(X; \mu)$. Тогда

$$|f_n(x)| \leq 1 + |g(x)|$$

Если обозначит правую часть за Φ , можно будет применить теорему Лебега. □

Пример. Условие конечности меры существенно. На множестве бесконечной меры равномерная сходимость не работает:

$X = [0; +\infty)$, $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0; n]}$. Тогда интеграл каждой f_n равен 1, что не стремится к нулю.

Следствие 3.2 (Непрерывность интеграла по параметру в точке). Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой.

Пусть Y — метрическое пространство, $y_0 \in Y$.

Пусть $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ и пусть

$$\forall y \in Y \quad f(\bullet; y) \in L(X; \mu)$$

Пусть для почти всех $x \in X$ $f(x; \bullet)$ непрерывна в y_0 и пусть f удовлетворяет локальному условию Лебега нв y_0 . Тогда $\int_X f(x; y) \, d\mu(x)$ непрерывно в y_0 .

Доказательство. Если y_0 — изолированная точка Y , ничего доказывать не надо, иначе она предельная. Возьмём $g(x) = f(x; y_0)$. Всё. □

Следствие 3.3. Если условие следствия 3.2 верно для любой точки $y_0 \in Y$, то

$$\int_X f(x; y) \, d\mu(x) \in C(Y)$$

Замечание. Полезное напоминание: если $f \in C(X \times Y)$, то $\forall x \in X \quad f(x; \bullet) \in C(Y)$ и $\forall y \in Y \quad f(\bullet; y) \in C(X)$.

Теорема 14 (Непрерывность интеграла по параметру на множестве). Пусть X, Y — метрические пространства, X компактно, μ — конечная борелевская мера на X , $f \in C(X \times Y)$. Тогда

$$\int_X f(x; y) \, d\mu(x) \in C(Y)$$

Доказательство. Из комментария выше

$$\forall y \in Y \, f(\bullet; y) \in C(X)$$

Также X — компакт, следовательно $f(\bullet; y)$ ограничена на X . μ — борелевская, значит $f(\bullet; y)$ измерима. $\mu X < +\infty$, а значит $f(\bullet; x) \in L(X; \mu)$. Отлично, теперь интеграл $\int_X f(x; y) \, d\mu(x)$ корректно определён. Ну что ж, осталось проверить локальное условие Лебега в каждой точке $y_0 \in Y$. Давайте докажем, что

$$\exists V_{y_0} \, f \text{ ограничена на } X \times V_{y_0}$$

(мажоранта будет константой).

Ну, давайте докажем от противного. Тогда в частности $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists x_n \in X, y_n \in B(y_0; \frac{1}{n}) \, |f(x_n; y_n)| > n$. y_n стремится к y_0 , а из x_n можно выделить сходящуюся (к x_0) подпоследовательность x_{n_k} (в силу секвенциальной компактности). Но подождите. $|f(x_{n_k}; y_{n_k})| > n_k \rightarrow \infty$. А левая часть стремится к $|f(x_0; y_0)|$. \square

Замечание. В частности, теорема верна для меры Лебега.

Следствие 3.1. Если $[a; b], \langle c; d \rangle \subset \mathbb{R}$, $f \in C([a; b] \times \langle c; d \rangle)$, то $\int_X f(x; y) \, dx \in C\langle c; d \rangle$.

Пример. Локальное условие Лебега в следствии 3.2 и компактность X в теореме 14 существенны. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$,

$$f(x; y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ \frac{1}{1 + \left(x + \frac{1}{|y|}\right)^2} & y \neq 0 \end{cases}$$

Верно ли, что $f \in C(\mathbb{R}^2)$? Если $y_0 \neq 0$, то в точке $(x_0; y_0)$ всё понятно. Что с $y = 0$? Ну, рассмотрим $(x_0; 0)$ в окрестности $|xy| < \frac{1}{2}$. Тогда

$$0 \leq f(x; y) \leq \frac{y^2}{y^2 + (x|y| + 1)^2} \leq 4y^2 \xrightarrow{(x; y) \rightarrow (x_0; 0)} 0$$

Обозначим

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x; y) \, dx$$

Очевидно, $I(0) = 0$. А если $y \neq 0$, то

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \left(x + \frac{1}{|y|}\right)^2} \, dx$$

От y эта штука не зависит никак, потому что сдвиг. А значит y можно выкинуть, и получить, что $I(y) = \pi$. Ой. Разрыв в нуле.

Теорема 15 (Дифференцируемость интеграла по параметру). Пусть $Y = \langle c; d \rangle \subset \mathbb{R}$, $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall y \in Y \, f(\bullet; y) \in L(X; \mu)$, при почти всех $x \in X \, f(x; \bullet)$ дифференцируемо на Y . Пусть $y_0 \in Y$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ удовлетворяет локальному условию Лебега. Тогда

$$\exists \left(\int_X f(x; y) \, d\mu(x) \right)'_y(y_0) = \int_X f'_y(x; y_0) \, d\mu(x)$$

Доказательство. \square

Следствие 3.1. Если X — компакт, μ — конечная борелевская мера на X , $Y = \langle c; d \rangle \subset \mathbb{R}$, $f, f'_y \in C(X \times Y)$. Тогда

$$\int_X f(x; y) \, d\mu(x) \in C^{(1)}(Y)$$

и для любой $y_0 \in Y$ верно правило Лейбница

Доказательство. Надо проверить, локальное условие Лебега для производной. Для любой y_0 возьмём

$$\delta > 0 \quad [y_0 - \delta; y_0 + \delta] \cap \langle c; d \rangle = [\alpha; \beta] \text{ ограничено}$$

Тогда $f'_y \in C(X \times [\alpha; \beta])$, а значит f'_y ограничена на $X \times [\alpha; \beta]$ (мажоранта — постоянная). По теореме 15 $I'(y_0)$ равно тому, чему хочется, а 14. \square