

Содержание

1 Основы теории вероятности.	1
Вероятностное пространство.	1
Свойства вероятности.	2
Условная вероятность.	4
Схема Бернулли.	5
2 Случайные величины.	8
Распределение случайных величин, функция распределения случайных величин. .	8
Типы распределений.	10
Дискретные случайные величины и распределения.	10
Абсолютно непрерывные случайные величины и распределения.	10

1 Основы теории вероятности.

Вероятностное пространство.

Определение 1. Пусть Ω — множество, тогда $\mathfrak{A} \in 2^\Omega$ называется **алгеброй**, если

1. $\Omega \in \mathfrak{A}$.
2. $\forall A \in \mathfrak{A} \bar{A} \in \mathfrak{A}$. Здесь и далее $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
3. $\forall A, B \in \mathfrak{A} A \cup B \in \mathfrak{A}$.

При этом Ω называется **множеством элементов событий**, \mathfrak{A} — **набор событий**, $A \in \mathfrak{A}$ — **событие**, $A \cup B = A + B$ — **сумма событий**, \bar{A} — **противоположное событие**, $A \cap B = AB$ — **произведение событий**.

Определение 2. Алгебра является **сигма-алгеброй**, если она замкнута относительно объединения счётного количества своих элементов.

Определение 3. Пусть \mathfrak{A} — сигма-алгебра на Ω . Пусть $P: \mathfrak{A} \rightarrow [0; +\infty)$ и

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Если $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathfrak{A}$ и $\forall A_i A_j = \emptyset$ то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Тогда $(\Omega; \mathfrak{A}; P)$ называется **вероятностным пространством**.

Определение 4. Пара событий называется **несовместной**, если их пересечение пусто. Набор событий **несовместен**, если они попарно несовместны.

Определение 5. Пусть $A \subset 2^\Omega$ — алгебра. Тогда минимальная по включению сигма-алгебра $\sigma(A) \supset A$ называется **минимальной сигма-алгеброй**.

Утверждение. Таковая существует.

Доказательство. Хотя бы одна такая существует (2^Ω), причём если пересечь сколько угодно сигма-алгебр, то получится искомая сигма-алгебра. \square

Определение 6. Пусть \mathfrak{A} — алгебра на Ω , $P: \mathfrak{A} \rightarrow [0; +\infty)$ и

- $P(\Omega) = 1$.

- Если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Тогда $(\Omega; \mathfrak{A}; P)$ — вероятностное пространство в широком смысле.

Теорема 1 (О продолжении меры). Пусть $(\Omega; \mathfrak{A}; P)$ — вероятностное пространство в широком смысле. Тогда существует единственная функция вероятности $Q: \sigma(\mathfrak{A}) \rightarrow [0 : +\infty)$, такое что $Q|_{\mathfrak{A}} \equiv P$.

Без доказательства.

Замечание. Эта теорема позволяет нам сказать, например, что мы хотим задать вероятность на отрезках.

Определение 7. Борелевская сигма-алгебра — минимальная σ -алгебра, которая содержит все открытые множества.

Пример. Дискретное вероятностное пространство: $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^N$, $A = 2^{\Omega}$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$, $\sum p_i = 1$. Тогда $P(A)$ — сумма вероятностей элементов A .

Пример. Геометрическая вероятность: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, измеримо по Лебегу, $\mu A < +\infty$, \mathfrak{A} состоит из измеримых по Лебегу множеств, $P(A) = \frac{\mu A}{\mu \Omega}$. Обычно при этом \mathbb{R}^n не более чем трёхмерно.

Свойства вероятности.

Свойство 7.1.

$$\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Доказательство. Понятно, что $B \setminus A \in \mathfrak{A}$. Тогда

$$B = A \sqcup (B \setminus A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$

□

Следствие 0.1.

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad P(A) \leq 1$$

Свойство 7.2.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Свойство 7.3.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Доказательство.

$$B = (B \setminus AB) \sqcup AB \Rightarrow P(B) = P(B \setminus AB) + P(AB)$$

Тогда

$$P(A + B) = P(A) + P(B \setminus AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

□

Утверждение (Формула включений-исключений).

$$P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P(A_i A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^n P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^n P(A_1 \dots A_n)$$

Доказательство. Мне лень это писать, докажите сами по индукции.

□

Утверждение.

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i P(A_i)$$

Доказательство. Пусть $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \overline{A_1}$, $B_3 = A_3 \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ и так далее. Тогда

$$\bigcup_i A_i = \bigsqcup_i B_i$$

При этом $B_i \subset A_i$, а значит

$$\sum_i P(A_i) \geq \sum_i P(B_i)$$

□

Теорема 2. Пусть $(\Omega; \mathfrak{A}; P)$ — вероятностное пространство. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. P счётно-аддитивна.
2. P конечно-аддитивна и $\forall \{B_i\}_{i=1}^\infty : B_{i+1} \subset B_i$, $B = \bigcap_{i=1}^\infty B_i$ $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_i) = P(B)$ (непрерывность сверху).
3. P конечно-аддитивна и $\forall \{C_i\}_{i=1}^\infty : C_{i+1} \supset B_i$, $C = \bigcup_{i=1}^\infty C_i$ $\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_i) = P(C)$ (непрерывность снизу).

Доказательство. Равносильность двух непрерывностей тривиально из формул де Моргана.

Докажем, что из 1 следует 2. Конечная аддитивность есть, докажем непрерывность сверху. Пусть $A_1 = B_1 \overline{B_2}$, $A_2 = B_2 \overline{B_3}$ и так далее. Очевидно, A_i несовместны. Также очевидно, что A_i несовместны с B . Также заметим, что

$$B_n = B \sqcup \bigsqcup_{i=n+1}^\infty A_i$$

Отсюда $P(B_n) = P(B) + \sum_{i=n+1}^\infty P(A_i)$, а справа остаток (очевидно, сходящегося) ряда, который стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Теперь из 2 докажем 1. Рассмотрим $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ несовместные. Очевидно,

$$\sum_{i=1}^\infty P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

А ещё мы знаем, что

$$\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \sqcup \bigsqcup_{i=n+1}^\infty A_i$$

То есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(P\left(\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i\right) - P\left(\bigsqcup_{i=n+1}^\infty A_i\right) \right) = P\left(\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigsqcup_{i=n+1}^\infty A_i\right)$$

Второе слагаемое — ноль по непрерывности меры, а отсюда счётная аддитивность. □

Условная вероятность.

Замечание. Пусть $|\Omega| = n$, $|A| = k$, $|B| = m$, $|AB| = l$. Если мы знаем, что B произошло, как узнать вероятность того, что произошло A ? Ну, это

$$\frac{l}{m} = \frac{l/n}{m/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Определение 8. Пусть $(\Omega; \mathfrak{A}; P)$ — вероятностное пространство, $B \in \mathfrak{A}$, $P(B) > 0$. Тогда **условной вероятностью** A при условии B называется

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Также обозначается $P_B(A)$.

Свойство 8.1. Несложно проверить, что условная вероятность является вероятностью.

Утверждение (Произведение вероятностей). Несложно по определению проверить

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1})$$

Теорема 3 (Формула полной вероятности). Пусть $A \in \mathfrak{A}$, $B_i \in \mathfrak{A}$ несовместны, $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$ (обычно объединение равно Ω), и $\forall i \in [0 : n] P(B_i) > 0$. Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

Доказательство.

$$P(A) = P\left(A \cap \bigcup_{i=1}^n B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A \cap B_i\right)$$

Всё. □

Теорема 4 (Формула Байеса). Пусть $A, B \in \mathfrak{A}$, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$. Тогда

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Доказательство. Очевидно из определения. □

Определение 9. События $A, B \in \mathfrak{A}$ называются **независимыми**, если

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Определение 10. Говорят, что $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ **независимы в совокупности**, если $P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n)$

Свойство 10.1. Несложно проверить, что независимость событий A, B равносильна $P(A|B) = P(A)$.

Свойство 10.2. Независимые в совокупности события попарно независимы. Обратное неверно.

Определение 11. Пусть у нас есть два вероятностных пространства: $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; P_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2; P_2)$. Рассмотрим вот такое вероятностное пространство: $(\Omega, \mathfrak{A}; P)$, где $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, \mathfrak{A} — минимальная σ -алгебра, включающая в себя $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$,

$$P((A_1; A_2)) = P_1(A_1)P_2(A_2)$$

Тогда $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; P_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2; P_2)$ — независимые испытания.

Схема Бернулли.

Пример. Схема Бернулли: $\Omega_1 = \{0; 1\}$, $\mathfrak{A}_1 = 2^{\Omega_1}$, $P_1(1) = p$, $P_1(0) = 1 - p = q$. Хочется рассмотреть эту штуку в степени n (то есть n одинаковых независимых испытаний). Тогда что у нас получается для $\omega \in \Omega = \Omega_1^n$?

$$P(\omega) = \sum_{i=1}^n P_i(\omega_i) = p^{\sum \omega_i} q^{n - \sum \omega_i}$$

Посчитаем тут такую вероятность: пусть S_n — количество успехов в n испытаниях? Посчитаем вероятность того, что $S_n = k$? Очевидно, оно равно $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Утверждение. Пусть k^* — наиболее вероятное число успехов в Бернуллиевских испытаниях. Тогда

$$k^* = \begin{cases} p(n-1) \text{ или } p(n-1) + 1 & p(n-1) \in \mathbb{N} \\ \lceil p(n-1) - 1 \rceil & p(n-1) \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Доказательство. Давайте рассмотрим вот такое частное:

$$\frac{P(S_n = k+1)}{P(S_n = k)}$$

Чему оно равно?

$$\frac{P(S_n = k+1)}{P(S_n = k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

Нам хочется оценить, больше это чем 1 или меньше (это позволит нам найти K^*). Ну,

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{n-k}{k+1} > 1 \Leftrightarrow p(n-k) > q(k+1) \Leftrightarrow pn - pk > k = pk + 1 - p \Leftrightarrow pn > k + 1 - p \Leftrightarrow pn + p - 1 > k$$

То есть возрастание достигается при $k < p(n-1) - 1$, а иначе убывание. Тогда где экстремум? Рассмотрим $k = p(n-1) - 1$. Если это целое число, то там $P(S_n = k+1) = P(S_n = k)$, и это самое k даёт значение больше остальных. То есть $k^* = p(n-1) - 1$ или $k^* = p(n-1)$.

А что если оно не целое? То надо куда-то округлить. А именно вверх, потому что тогда оно больше, чем следующее, а предыдущее меньше его. \square

Пример. Пусть $n = 10000$, $p = \frac{1}{10000}$. Давайте посчитаем $P(S_n > 3)$. Ну, это

$$1 - P(S_n \leq 3) = 1 - q^{10000} - 10000pq^{10000-1} - \binom{10000}{2} p^2 q^{10000-2} - \binom{10000}{3} p^3 q^{10000-3}$$

Фиг мы такое посчитаем.

Пример. Или если взять $p = q = 0.5$, то при $n = 5 \cdot 10^3$ мы не сможем нормально посчитать $P(S_n = 2349)$.

Замечание. Ну и как такое считать?

Теорема 5 (Теорема Пуассона). Пусть у нас есть несколько схем Бернулли. В первой одно испытание и вероятность успеха p_1 , во второй — 2 и вероятность успеха p_2 , в n -ной n испытаний и вероятность p_n . Пусть $np_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda > 0$. Тогда

$$P(S_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Доказательство. Известно,

$$P(S_n = k) = \frac{1}{k!} n(n-1) \cdots (n-k+1) p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

Известно, что

$$np_n = \lambda + o(1) \Rightarrow p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Тогда

$$P(S_n = k) = \frac{1}{k!} n(n-1) \cdots (n-k+1) \frac{1}{n^k} \xrightarrow{\lambda^k} \frac{(1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^n}{(1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

□

Лемма 1. Пусть $p \in (0; 1)$, $H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p}$. Пусть $p^* = \frac{k}{n}$. Пусть $k \rightarrow +\infty$, $n-k \rightarrow +\infty$. Тогда

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}} \exp(-nH(p^*))$$

Доказательство. Мы знаем формулу Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi} \underbrace{k}_{np^*}^k e^{-k} \sqrt{2\pi} \underbrace{(n-k)}_{n(1-p^*)}^{n-k} e^{-n+k}} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{n^n p^k (1-p)^{n-k}}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)} k^k (n-k)^{n-k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}} \exp \underbrace{\ln \frac{n^n p^k (1-p)^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}}}_L \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} L &= \ln \frac{n^n p^k (1-p)^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}} = \ln \frac{n^n p^k (1-p)^n (n-k)^k}{k^k (n-k)^n (1-p)^k} = \\ &= \ln \left(\frac{n^n}{\underbrace{(n-k)^n}_{(1-p^*)^{-n}}} (1-p)^n \right) + \ln \frac{p^k (n-k)^k}{(np^*)^k (1-p)^k} = \\ &= n \ln \frac{1-p}{1-p^*} + k \ln \frac{p}{p^*} + k \ln \frac{(n-k)}{n(1-p)} = n \ln \frac{1-p}{1-p^*} + k \ln \frac{p}{p^*} + k \ln \frac{1-p^*}{1-p} = \\ &= -(n-k) \ln \frac{1-p^*}{1-p} - k \ln \frac{p^*}{p} = -n \underbrace{\left(p^* \ln \frac{p^*}{p} + (1-p^*) \ln \frac{1-p^*}{1-p} \right)}_{H(p^*)} \end{aligned}$$

Это ли не то, что нам надо?

□

Лемма 2.

$$H(x) = \frac{(x-p)^2}{2p(1-p)} + O((x-p)^3)$$

Доказательство.

$$H'(x) = \ln \frac{x}{p} + x \cdot \frac{p}{x} \cdot \frac{1}{p} - \ln \frac{1-x}{1-p} - 1 = \ln \frac{x}{p} - \ln \frac{1-x}{1-p}$$

$$H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

Тогда $H'(p) = 0$, $H''(p) = \frac{1}{p(1-p)}$. По Тейлору получаем искомое. \square

Теорема 6 (Локальная теорема Муавра — Лапласа). Пусть $p \in (0; 1)$, $H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p}$. Пусть $p^* = \frac{k}{n}$. Пусть $k \rightarrow +\infty$, $n - k \rightarrow +\infty$. Пусть $k = np = p(n^{2/3})$. Тогда

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2np(1-p)}\right)$$

Доказательство. Известно

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp(-nH(p^*))$$

Отсюда

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-n \frac{(p^* - p)^2}{2p(1-p)} + n \cdot O((p^* - p)^3)\right)$$

Заметим, что $\frac{k}{n} - p = o(n^{-1/3})$. Тогда

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-n \frac{(p - k/n)^2}{2p(1-p)} + O(n(k/n - p)^3)\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-n \frac{(np - k)^2}{2p(1-p)n^2} + o(1)\right)$$

Что и требовалось доказать. \square

Теорема 7 (Интегральная теорема Муавра — Лапласа). Пусть

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Далее мы будем называть эту функцию функцией стандартного нормального распределения. Тогда

$$\sup_{-\infty < x_1 < x_2 < +\infty} \left| P\left(x_1 \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x_2\right) (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Иными словами

$$P\left(x_1 \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x_2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Пока без доказательства.

Замечание. Оценка теоремы Пуассона.

Обычно в задачах np_n не стремится, а просто равно $\lambda > 0$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| P(S_n = k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq \frac{\lambda}{n} \leq \frac{2\lambda}{n} \min\{2; \lambda\}$$

Оценка локальной теоремы Лапласа. Если $|p^* - p| \leq \frac{1}{2} mn \min\{p; q\}$, то

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2np(1-p)}\right) (1 + \varepsilon(k; n))$$

Где

$$\varepsilon(k; n) = \exp \left(\theta \frac{|k - np|^3}{3n^2 p^2 q^2} + \frac{1}{npq} \left(\frac{1}{6} + |k - np| \right) \right) \quad |\theta| < 1$$

Оценка интегральной теоремы Лапласа.

$$\sum_x \left| P \left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}$$

Пример. Пусть у нас есть два узла связи на 2000 пользователей в каждом. И у нас есть канал связи, который пропускает N . Хочется минимизировать N , но так, чтобы вероятность перегрузки была меньше $\frac{1}{100}$. Будем предполагать, что люди пользуются данным каналом связи в течение двух минут из одного часа, то есть каждый пользователь может пользоваться каналом в данный момент с вероятностью $p = \frac{1}{30}$.

Ну так и что мы хотим по сути? Мы хотим $P(S_{2000} > N) < \frac{1}{100}$, что равносильно $P(S_{2000} \leq N) \geq \frac{99}{100}$. Используем Пуассона: $np \approx 6.67$.

$$\sum_{k=0}^N e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Это мы хрен посчитаем, но, короче, получится $N = 87$.

А если применить интегральную теорему Муавра — Лапласа, то получим мы

$$N = \left\lceil q \frac{99}{100} \sqrt{npq} + np \right\rceil = 86$$

Где $q \frac{99}{100}$ — такое число, что $\Phi(q \frac{99}{100}) = \frac{99}{100}$.

Определение 12. Если $\alpha \in (0; 1)$ и $\Phi(q_\alpha) = \alpha$, то q_α называется **квантилем порядка α** .

2 Случайные величины.

Распределение случайных величин, функция распределения случайных величин.

Определение 1. Борелевская сигма-алгебра — это минимальная сигма-алгебра, содержащая все открытые множества.

Определение 2. Пусть $\Omega; \mathfrak{A}$ — множество с сигма-алгеброй. Тогда такое $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, что $\forall B \in \mathfrak{B} \xi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$, называется **случайной величиной**.

Определение 3. Пусть $(\Omega; \mathfrak{A}; P)$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина. Тогда распределение ξ — функция

$$P_\xi: B \mapsto P(\{\omega \mid \xi(\omega) \in B\})$$

Замечание. $P(\{\omega \mid \xi(\omega) \in B\})$ обозначается $P(\xi \in B)$.

Свойство 3.1. P_ξ — вероятность на $(\mathbb{R}; \mathfrak{B})$.

Определение 4. Пусть ξ — случайная величина. Тогда

$$F_\xi(t) = P(\xi \leq t)$$

называется **функцией распределения ξ**

Свойство 4.1. Очевидно, функция распределения нестрого возрастает.

Свойство 4.2. Не менее очевидно, $F_\xi(+\infty) = 1$, $F_\xi(-\infty) = 0$;

Свойство 4.3. Функция распределения непрерывна справа.

Доказательство. Возьмём $F(t + \varepsilon_n) - F(t)$. Она равна $P(t < \xi \leq t + \varepsilon_n)$. При $\varepsilon_n \rightarrow 0$, получим, что аргумент P стремится к \emptyset , а значит $P(t < \xi \leq t + \varepsilon_n)$ стремится к нулю. \square

Лемма 1. Пусть $P: \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Тогда

$$\begin{aligned} \forall \{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{B} : B_{n+1} \subset B_n \quad P(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall \{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{B} : C_{n+1} \subset C_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset \quad P(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Доказательство. Следствие слева направо очевидно. Наоборот. Пусть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B$$

Возьмём $C_n = B_n \overline{B}$. Тогда, очевидно, C_n подходят под условие справа, а значит $P(C_n) \rightarrow 0$.

Также несложно заметить, что $P(B_n) = P(C_n) + P(B)$, а отсюда получим $P(B_n) \rightarrow P(B)$. \square

Теорема 1. Пусть F — монотонно возрастающая непрерывная слева функция, равная нулю в $-\infty$ и единице в $+\infty$. Тогда существует вероятностное пространство и случайная величина в нём, что F — её функция распределения.

Доказательство. Пусть $\Omega = \mathbb{R}, \mathfrak{A}$ — алгебра, состоящая из множеств вида $\bigcup_{k=1}^n (a_k; b_k]$ или $(-\infty; b)$ или $(a; \infty)$ или \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n (a_k; b_k]\right) &= \sum_{k=1}^n F(b_k) - F(a_k) \\ P((-\infty; b)) &= F(b) \quad P((a; +\infty)) = 1 - F(a) \quad P(\mathbb{R}) = 1 \end{aligned}$$

Получим вероятностное пространство в широком смысле (разве что непрерывность сверху надо проверить). Ну, проверим её, используя лемму. Пусть, не умаляя общности, $A_n = (a_{n,1}; a_{n,2}]$, $A_{n+1} \subset A_n$ и пересечение всех пусто.

Из непрерывности F справа следует, что существует $B_n = (b_{n,1}; b_{n,2}]$, где $\text{Cl } B_n \subset A_n$ и $P(A_n) - P(B_n) \leq \varepsilon 2^{-n}$. Тогда пересечение всех B_n также пусто.

Предположим, что существует M , такое что $\forall n \quad A_n \in [-M; M]$. $[-M; M]$ — компакт, следовательно. Заметим, что

$$[-M; M] = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-M; M] \setminus \text{Cl } B_n$$

Справа — открытое покрытие компакта, значит из него можно вытащить конечное подпокрытие, то есть пересечение какого-то конечного числа B_n пусто. Пусть это пересечение от 1 до n_0 . Тогда

$$P(A_{n_0}) = P(A_{n_0} \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} B_k) + P\left(\bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\right)$$

Отсюда $P\left(\bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\right) = 0$. А

$$P(A_{n_0} \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} B_k) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n_0} A_{n_0} \setminus B_k\right) \leq P\left(\bigcap_{k=1}^{n_0} A_k \setminus B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n_0} P(A_k) - P(B_k) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n_0} 2^{-k} < \varepsilon$$

Если же мы не находимся в промежутке $[-M; M]$, то можно указать такие M_1 и M_2 , что $P((-\infty; M_1) \cup (M_2; +\infty)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$P(A_n) = P(A_n[M_1; M_2]) + P(A_n \overline{[M_1; M_2]})$$

Левую часть суммы мы разобрали, а правая мала т.к. M_2 , что $P((-\infty; M_1) \cup (M_2; +\infty)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Осталось предъявить случайную величину $\xi(\omega) = \omega$. \square

Типы распределений.**Дискретные случайные величины и распределения.**

Определение 5. Случайная величина ξ называется **дискретной**, если существует такое не более чем счётное множество E , что $P_\xi(E) = 1$.

Пример. Вырожденное: $P(\xi = c) = 1$. Обозначают $I(c)$ или I_c .

Пример. Распределение Бернулли: $P(\xi = 0) = p$, $P(\xi = 1) = q = 1 - p$. Обозначение: $\text{Bern}(p)$.

Пример. Биномиальное распределение: $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Обозначение: $\text{Bin}(n; p)$,

Пример. Отрицательное биномиальное распределение: $\xi = (\min n : S_n = r) - r$, где $r \in \mathbb{N}$. То есть

$$P(\xi = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k$$

Обозначение: $\text{NB}(r; p)$. Также это обобщается на произвольное r при помощи гамма-функции.

В случае $r = 1$ распределение называется геометрическим. Геометрическое распределение — количество неудач до первого успеха.

Пример. Распределение Пуассона:

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

Обозначение: $\text{Pois}(\lambda)$.

Определение 6. Носителем случайной величины ξ называется минимально по включению замкнутое множество E , удовлетворяющее условию $P(\xi \in E) = 1$.

Абсолютно непрерывные случайные величины и распределения.

Определение 7. Величина ξ (или её случайное распределение) называется **абсолютно непрерывной**, если существует $p \in L(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ с неотрицательными значениями такая что $P(\xi \in B) = \int_B p(x) dx$. В таком случае p называется **плотностью** ξ .

Свойство 7.1. В таком случае

$$F(t) = \int_{-\infty}^t p(x) dx$$

То есть плотность почти всюду равна производной функции распределения.

Свойство 7.2. $P(\xi = c) = 0$.

Свойство 7.3. Функция распределения абсолютно непрерывной случайной величины непрерывна на \mathbb{R} .

Свойство 7.4.

$$P(x_0 \leq \xi \leq x_0 + h) = P(x_0 < \xi < x_0 + h) = F(x_0 + h) - F(x_0) = p(x_0)h + o(h)$$

Свойство 7.5. Пусть $E = \text{supp } p$. Тогда E является носителем по нашему прошлому определению.

Пример.

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \chi_{[a;b]}$$

Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a; b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Обозначение: $U[a; b]$.

Утверждение. Пусть $\xi = U[a; b]$, $c > 0$. Тогда $\eta = c\xi + d = U[ac + d; bc + d]$

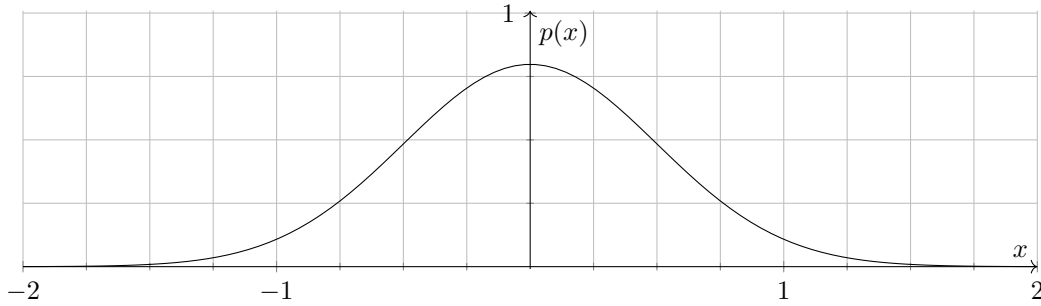
Доказательство.

$$P(\eta \leq t) = P(c\xi + d \leq t) = P\left(\xi \leq \frac{t-d}{c}\right)$$

Несложно проверить, что это именно $U[ac + d; bc + d]$. □

Пример. Нормальное (гауссовское) распределение: $N(\mu; \sigma^2)$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



$N(0; 1)$ — стандартное нормальное распределение. Ещё оно обозначается $\Phi(x)$.

Утверждение. Пусть $\xi = N(\mu; \sigma^2)$, $\eta = a\xi + b$. Тогда $\eta = N(a\mu; a^2\sigma^2)$.

Доказательство. Пусть $a > 0$. Обозначим $y = ax + b$. Тогда

$$\begin{aligned} P(\eta \leq t) &= P(a\xi + b \leq t) = P\left(\xi \leq \frac{t-b}{a}\right) = F_\xi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{t-b}{a}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}\right) dy \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. При $a < 0$ аналогично. □

Следствие 1.1. Если $\xi = N(0; 1)$, то $\sigma\xi + \mu = N(\mu; \sigma^2)$.

Пример. Распределение Коши: $\text{Cauchy}(x_0; \gamma)$.

$$p(x) = \frac{1}{\pi\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2}$$

Тогда

$$F(t) = \frac{1}{\pi\gamma} \int_{-\infty}^t \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{t-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$$

Пример. Экспоненциальное распределение: $\text{Exp}(\lambda)$.

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \chi_{\mathbb{R}_+}$$

Тогда

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \chi_{\mathbb{R}_+}$$