Содержание

Основные определения теории графов.

Определение 1. **(Неориентированным) графом** называется пара из множеств V и E, где $E \subset V \times V \setminus \{(u;u) \mid u \in V\}/_{(u;v)\sim(v;u)}$.

Определение 2. **(Неориентированным) графом с кратными рёбрами** называется набор множеств V, E и функции $\text{ends}\colon E \to A \subset 2^X$, где $A = \{B \subset V \mid |B| = 2\}$, определяющей концы ребра. При этом

Определение 3. **(Неориентированным) графом с кратными рёбрами и петлями** называется то же самое, что и в предыдущем определении, но $1 \leqslant |B| \leqslant 2$.

Определение 4. **(Неориентированным) графом с петлями** называется пара из множеств V и E, где $E \subset V \times V/_{(u;v)\sim(v;u)}$.

Определение 5. **Ориентированным графом (с петлями)** называется пара из множеств V и $E \subset V \times V$.

Определение 6. **Ориентированным графом с кратными рёбрами (и петлями)** называется набор из множеств V и E и двух функций $\text{beg}\colon E \to V$, $\text{end}\colon E \to V$.

Определение 7. Говорят, что ребро и вершина в графе **инцидентны**, если одним из концов/началом или концом ребра является вершина.

Определение 8. Количество рёбер, с которыми данная вершина инцидентна, называется **степенью вершины** ($\deg u$). Если разрешены кратные рёбра, считается, что они вносят два в степень, а не один.

Лемма 1 (Лемма о рукопожатиях.). *Тривиально,*

$$\sum_{u \in V} \deg u = 2|E|$$

Определение 9. Количество рёбер, исходящих из данной вершины, называется **исходящей степенью** ($\deg^- u$ или $\deg_{\text{out}} u$).

Определение 10. Количество рёбер, исходящих из данной вершины, называется **входящей степенью** ($\deg^+ u$ или $\deg_{\text{in}} u$).

Лемма 2. *Тривиально,*

$$\sum_{u \in V} \deg^+ u + \deg^- u = 2|E|$$

Связность. Сильная связность. Двусвязность.

Определение 11. Последовательность

$$u_0; e_1; u_1; e_2; u_2; \ldots; e_k; u_k$$

где $\forall i \in [0:k]\ u_i \in V$, $\forall j \in [1:k]\ e_j \in E$ и $\forall i \in [1:k]\ u_{i-1}$ и u_i инцидентны e_i называется **путём** (в неориентированном графе). k называется **длиной пути**.

Определение 12. Сами допилите напильником предыдущее определение до определения **пути в ориентированном графе**.

Определение 13. В неориентированном графе
Циклическим путём называется путь, у которых начало совпадает с концом и длина больше нуля.
Циклические пути называются эквивалентными, если они совпадают с точностью до циклического сдвига.
Классы эквивалентности циклический путей по данной эквивалентности называются **циклами**.

Определение 14. Путь или цикл в ориентированном графе называется **рёберно простым/вершинно простым**, если все e_i/v_i соотвественно различны.

Определение 15. В ориентированном графе
Циклическим путём называется путь, у которых начало совпадает с концом и длина больше нуля.
Циклический путь называется корректным, если $\forall i \in [1 : k-1]$ $e_i \neq e_{i+1}$, если e_i не петля и $e_1 \neq e_k$, если e_1 — не петля.
Корректные циклические пути называются эквивалентными, если они совпадают с точностью до циклического сдвига и/или отражения.
Классы эквивалентности корректных циклический путей по данной эквивалентности называются **циклами**.

Определение 16. Путь или цикл в неориентированном графе называется **рёберно простым/вершинно простым**, если догадайтесь, когда.

Определение 17. Говорят, что v **достижима** из u ($u \rightsquigarrow v$), если существует путь из u в v.

Утверждение. *Достижимость рефлексивна и транзитивна. В неориентированном графе также симметрична.*

Определение 18. Отношение $u \rightsquigarrow v \land v \rightsquigarrow u$ называется **отношением сильной связности**.

Утверждение. *Отношение сильной связности симметрично.*

Определение 19. В неориентированном графе классы эквивалентности по достижимости называются **компонентами связности**.

Определение 20. В ориентированном графе классы эквивалентности по сильной связности называются **компонентами сильной связности**.

Определение 21. Конденсацией ориентированного графа называется граф, получаемый из ориентированного графа заменой компонент сильной связности на вершины с сохранением ориентированных рёбер.

Утверждение. *Конденсация всегда не содержит циклов.*

Определение 22. В неориентированном графе $u, v \in V$ называются рёберно двусвязными, если существуют два пути из u в v, не имеющие общих рёбер.

Утверждение. *Рёберная двусвязность является отношением эквивалентности.*

Доказательство.

- Рефлексивность: возьмём 2 одинаковых пути из вершины в себя. Они не пересекаются по рёбрам.
- Симметричность: очевидно.
- Транзитивность. Пусть u двусвязана с v, а v — с w. Рассмотрим p_1 и p_2 — два пути из u в v. Давайте теперь возьмём w и будем из неё идти в сторону v по путям q_1 и q_2.
  - Если мы дошли без пересечения с p_1 или p_2, мы победили.
  - Если мы по одному пути пересеклись с p_1, а по другому — с p_2, мы победили.
  - Если мы пришли на один и тот же путь, то от одного из q_1 и q_2 пойдём в сторону u, а от другого — в сторону v. В сторону v — от того, которого ближе. После этого из второго пойдём и v в u по второму пути между ними. Мы победили.

□

Определение 23. Классы эквивалентности по рёберной двусвязности называются **компонентами рёберной двусвязности** или **листами**.

Определение 24. Ребро, концы которого не являются рёберно двусвязными, — **мост**.

Определение 25. Ребро, при удалении которого, количество компонент связности увеличивается, — **мост**.

Теорема 1. *Следующие 4 утверждения для связного графа (и первые 3 для несвязного) равносильны.*

1. *uv — мост в смысле первого определения.*
2. *uv — мост в смысле второго определения.*
3. *$\exists x, y \in V$ любой путь из x в y содержит uv.*
4. *$V = X \sqcup Y$, $X \neq \varnothing \neq Y$ такие что $\forall x \in X$ $\forall y \in Y$ любой путь из x в y содержит uv.*

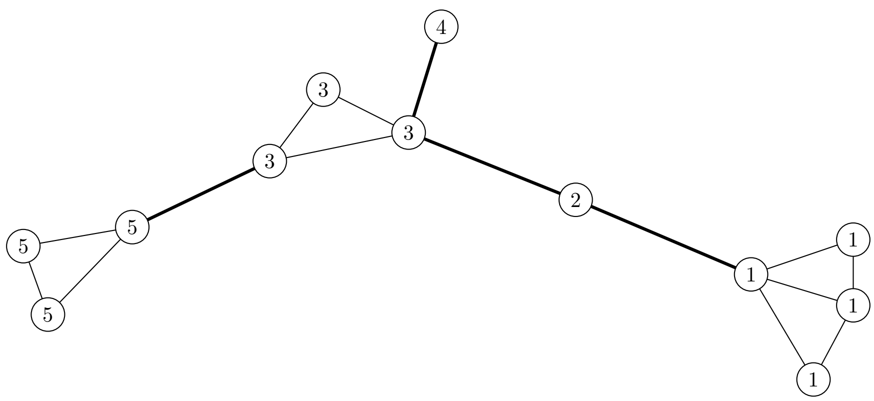
Доказательство.$1 \to 2$ Если при удалении количество компонент связности не увеличится, был другой путь $u \rightsquigarrow v$. Противоречие.

$2 \to 4$ Возьмём в качестве X и Y те две (а тривиально, что в связном графе их две) компоненты связности, на которые развалится наш граф. Всё.

$4 \to 3$ Тривиально.

$3 \to 1$ Если u и v рёберно двусвязны, то от x до y можно пройти другим путём, игнорируя uv.
Для несвязного графа справьтесь сами. □

Пример. Жирным выделены мосты, цифрами помечены компоненты рёберной двусвязности.



Определение 26. Два ребра ab и cd называются вершинно двусвязными, если между существуют два вершинно непересекающихся пути $a \rightsquigarrow c$ и $b \rightsquigarrow d$ (или, наоборот, $a \rightsquigarrow d$ и $b \rightsquigarrow c$).

Теорема 2. *В неориентированном графе без петель вершинная двусвязность является отношением эквивалентности.*

Доказательство.

- Рефлексивность: очевидно.
- Симметричность: очевидно.
- Транзитивность: та же заплатка, что и в рёберной двусвязности.

□

Определение 27. Классы эквивалентности по вершинной двусвязности называются **компонентами вершинной двусвязности** или **блоками**.

Определение 28. **Точкой сочленения** называется вершина, принадлежащая нескольким компонентам вершинной двусвязности.

Определение 29. **Точкой сочленения** называется вершина, удаление которой (вместе с инцидентными рёбрами) приводит к увеличению компонент связности.

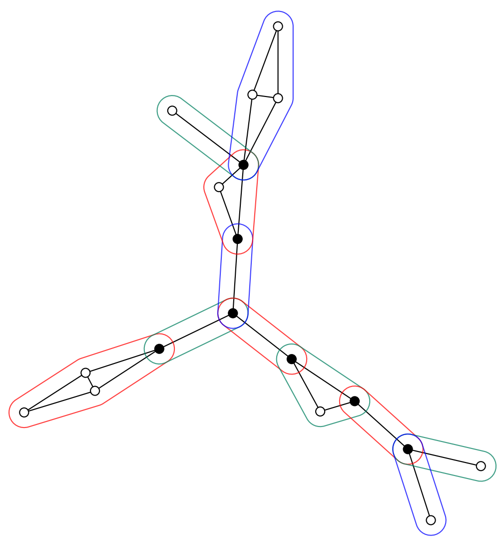
Теорема 3. *Сами докажите, что следующие 4 утверждения для связного графа (и первые 3 для несвязного) равносильны.*

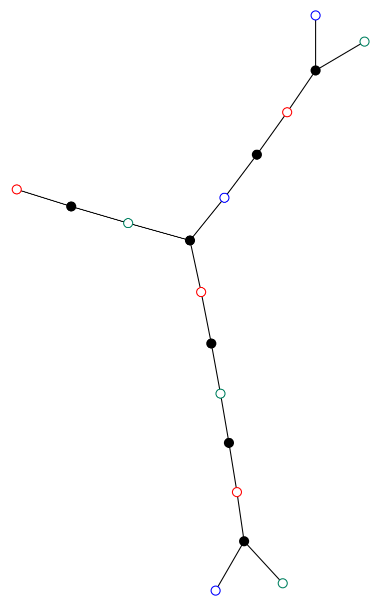
1. *v — точка сочленения в смысле первого определения.*
2. *v — точка сочленения в смысле второго определения.*
3. *$\exists x, y \in V : x \neq v \neq y$ любой путь из x в y содержит v.*
4. *$V = X \sqcup Y$, $X \neq \varnothing \neq Y$ такие что $\forall x \in X$ $\forall y \in Y$ любой путь из x в y содержит v.*

Определение 30. Дерево блоков — точек сочленения — это граф, получаемый из графа заменой блоков на отдельные вершины, добавлением по каждой вершине для точки сочленения и рёбрами, показывающими отношение «содержать данную точку сочленения».

Пример. Некоторый граф; обведены компоненты вершинной двусвязности, закрашены вершины, состоящие хотя бы в двух.

Дерево блоков — точек сочленения графа слева.





Деревья. Остовные деревья.

Определение 31. Неориентированный граф называется **лесом**, если в нём нет циклов.

Определение 32. Связный лес называется **деревом**.

Определение 33. Вершина степени 1 в лесе называется **листом**.

Лемма 3. *Дерево с хотя бы двумя вершинами содержит лист.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую вершину u_1. Если это не лист, возьмём случайного её соседа u_2, перейдём в него. Если это лист, мы победили. Если нет, есть хотя бы 2 соседа. Из одного мы пришли, пойдём во второго (u_3). Рано или поздно мы либо найдём лист, либо придём в вершину, где уже были. Во втором случае мы нашли цикл, значит такого не бывает. □

Теорема 4. *Следующие три утверждения равносильны:*

1. *G — связный граф без циклов.*
2. *G — связный граф с n вершинами и $n-1$ ребром.*
3. *G — ациклический граф с n вершинами и $n-1$ ребром.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ Докажем по индукции. В дереве на 1 вершину всё выполнено. Переход. рассмотрим граф на $n+1$ вершину. Хочется доказать, что там n рёбер. Давайте рассмотрим наше дерево, найдём лист и вырежем его. Получится дерево на n вершин, по предположению в нём $n-1$ ребро, а одно ребро из исходного мы вырезали, значит там их было n.

$2 \Rightarrow 3$ Если в графе n вершин и $n-1$ ребро, то в нём есть вершина степени не больше одного (иначе сумма всех степеней вершин $\geqslant 2n$, значит рёбер $\geqslant \frac{2n}{2} = n$). У нас граф связен, поэтому вершина степени 0 там может быть только если $n = 1$. А теперь можно доказать по индукции, что в графе нет циклов (таким же методом, как предыдущее).

$3 \Rightarrow 1$ Пусть у нас k компонент связности. Каждая из них — ациклический связный граф, то есть дерево, в котором m вершин и $m-1$ ребро. Просуммировав это по всем компонентам, получим суммарно n вершин и $n-k$ рёбер, то есть $k = 1$.

□

Лемма 4. *Дерево с хотя бы двумя вершинами содержит хотя бы два листа.*

Доказательство. В противном случае суммарная степень вершин слишком велика. □

Утверждение. *Разные тривиальные утверждения о том, что в дереве каждое ребро — мост (и если в графе каждое ребро — мост, то это лес), о том, что в дереве от любой вершины до любой есть ровно один путь, и все подобные сами найдите и докажите.*

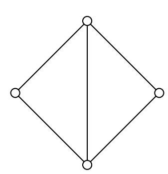
Определение 34. Пусть G — граф. Дерево T с тем же множеством вершин и $ET \subset EG$ называется **остовным деревом** G.

Лемма 5. *У любого связного графа есть остовное дерево.*

Доказательство. Рассмотрим граф. Из всех его связных подграфов выберем тот, у которого минимальное количество рёбер. Если рёбер там больше $n-1$, там есть циклы, из них можно вырезать рандомное ребро без потери связности. Значит рёбер там ровно $n-1$, и это дерево. □

Замечание. На алгоритмах мы будем искать остовное дерево минимального веса, а тут мы хотим рассмотреть задачу вычисления количества остовных деревьев.

Пример. Например, сколько деревьев тут?



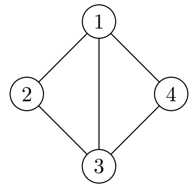
Ну, 8. А вообще есть такой алгоритм:

Определение 35. **Матрицей Кирхгофа** графа G называется матрица $K(G)$, равная

$$\begin{pmatrix} \deg u_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \deg u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \deg u_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \deg u_n \end{pmatrix} - AG$$

Где AG — матрица смежности G.

Пример. Например, для графа



матрица Кирхгофа выглядит как

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Теорема 5 (Теорема Кирхгофа)**.** *Количество остовных деревьев в графе равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа.*
Во-первых, мы не будем доказывать эту теорему в общем виде, а докажем для алгебраического пополнения диагональных элементов. Во-вторых, делать мы то будем немного потом, для доказательства нам надо будет ввести несколько новых сущностей.

Определение 36. Пусть G — граф из m рёбер и n вершин. Тогда **матрицей инцидентности** G называется матрица B размерности $n \times m$, где в столбце, отвечающем за ребро uv находятся единицы в строках номер u и v и нули в остальных строках.

Замечание. Вообще матрица инцидентности — интересная штука. Например, давайте рассмотрим её как матрицу над $\mathbb{F}_2$. Что тогда происходит, если мы решим уравнение $Bx = 0$? Ну, умножение её на вектор — сложение некоторых столбцов B по модулю 2. То есть мы берём набор рёбер, и там во всех вершинах степень получается чётной.

Определение 37. Множество наборов рёбер, в которых степень каждой вершины степень чётна (т.е. $\ker B$ над $\mathbb{F}_2$, по сути) называется **циклическим пространством графа**.

Определение 38. Пусть T — остовное дерево G, $uv \notin T$. Тогда рассмотрим $T \cup uv$. Тривиально, полученный граф содержит ровано один цикл, который называется **фундаментальным циклом относительно** uv.

Теорема 6. *Фундаментальные циклы образуют базис циклического пространства.*

Доказательство. Тривиально, они все линейно независимы (в каждом есть ровно одно ребро не из дерева, у каждого своё).
Теперь докажем, что эта система порождающая. Рассмотрим $X \in \ker B$. Если $X \neq 0$, то в нём, тривиально, есть цикл, а значит есть ребро не из T. Возможно, несколько. Так вот, давайте рассмотрим все фундаментальные циклы для каждого такого ребра и возьмём их сумму. Теперь нам надо доказать, что мы получили именно что X. Понятно, что все рёбра не из T будут взяты 1 раз, как нам и хочется. Теперь посмотрим на рёбра T. Нам надо, чтобы в нём рёбра из X были, а рёбер не из X не было. Ну, подвесим T. и рассмотрим какое-то ребро $e \in T$. Если $e \in X$, то (поскольку степени всех вершин X чётны) из поддерева e выходит нечётное количество рёбер. То есть именно в нечётном количестве фундаментальных циклов состоит e, а значит оно в сумме этих циклов есть. Если же $e \notin X$, то, аналогично, циклов будет чётное количество, а значит в сумме e лежать не будет. ∎

Замечание. Вернёмся к теореме Кирхгофа.

Определение 39. Пусть G — неориентированный граф. Тогда его **ориентацией** ($\overrightarrow{G}$) называется ориентированный граф, вершины которого — это вершины G, а каждое ребро является ребром G, ориентированным в одну из двух сторон.

Определение 40. Матрицей инцидентности ориентированного графа называется такая матрица $\overrightarrow{B}$ размерности $n \times m$, что в столбце, отвечающем за ребро $\overrightarrow{uv}$ находится единица в строке номер v, минус единица в строке номер u и нули во всех остальных строках.

Лемма 6. *Пусть $\overrightarrow{G}$ — произвольная ориентация G. Тогда $\overrightarrow{B}\overrightarrow{B}^T = K$.*

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение строки $\overrightarrow{B}$ на столбец $\overrightarrow{B}^T$.

- Если они имеют одинаковый номер, то в этом скалярном произведении умножается 1 на 1 для каждого входящего ребра и -1 на -1 для исходящего. То есть суммируется столько единиц, сколько рёбер, инцидентной с данной вершиной, то есть $(\overrightarrow{B}\overrightarrow{B}^T)_{i,i} = \deg i$, как и надо.
- Теперь пусть мы взяли i-тую строку и j-тый столбец. Ну, смотрите. Если i и j не соединены ребром, то на одном и том же месте в i-той и j-той строках $\overrightarrow{B}$ в одинаковом месте не может быть двух не-нулей (иначе получится, что i-тая и j-тая вершина инцидентны одному ребру, а они нет). То есть в таком случае $(\overrightarrow{B}\overrightarrow{B}^T)_{i,j} = 0$. Если же i и j связаны ребром, то у него один конец в i-той строке $\overrightarrow{B}$, в другой — в j-той, и в скалярном произведении получим -1. А ровно это нам и надо.

□

Лемма 7.

$$K_{\not u}^{\not v} = \overrightarrow{B}_{\not u}\overrightarrow{B}^{T\not v}$$

То есть если выкинуть u-тую строку из $\overrightarrow{B}$ и v-тый столбец из $\overrightarrow{B}^T$, то их произведение будет давать K без u-той строки и v-того столбца.

Доказательство. Доказательство как в предыдущей лемме. □

Лемма 8. *Рассмотрим $\overrightarrow{B}$. Рассмотрим любые $n-1$ столбцов и любые $n-1$ строк. Получим матрицу Q размерности $(n-1)\times(n-1)$. Тогда $\det Q$ равен нулю, если в исходном графе выбранные нами столбцы соответствовали рёбрам, содержащим цикл (в G) и ± 1 иначе.*

Доказательство. Обозначим множество оставшихся рёбер за EQ, а вершину, которую мы вычеркнули, — за u.

- Если EQ содержит цикл, то граф, тривиально, не связен. Рассмотрим компоненту связности, не содержащую u. В ней сумма столбцов равна нулю, и хорошо. Ну, как хорошо. Вообще EQ может не содержать ориентированного цикла, но содержать цикл G. Так вот, в таком случае нам придётся взять не сумму соответствующих столбцов, а алгебраическую сумму, где неправильно направленные рёбра идут с коэффициентом -1. Тогда мы получим-таки наш ноль, то есть линейная комбинация столбцов будет равна нулю, следовательно определитель нулевой.
- Теперь пусть циклов там нет. Тогда там дерево (нет циклов и $n-1$ ребро). Оно содержит 2 листа. Один из них — не u. Обзовём его v_1. Поскольку мы считаем определок, нам разрешают переставлять строки и столбцы матрицы: давайте возьмём строку v_1, в ней где-то ровно одна ± 1. Переместим строку на первое место, а ± 1 — в первый столбец, после чего забудем о v_1. Оставшаяся часть — дерево, в нём есть два листа, один — не u, возьмём его как v_2. Так сделаем до посинения, получим нижне-треугольную матрицу с ± 1 на диагонали.

□

Утверждение (Формула Коши — Бине)**.** *Пусть A — матрица $r \times s$, B — матрица $s \times r$, $s \geqslant r$. Тогда*

$$\det(AB) = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_r\leqslant s} \det A^{[i_1;\ldots;i_r]} \det B_{[i_1;\ldots;i_r]}$$

Напомню, что $A^{[i_1;\ldots;i_r]}$ — минор матрицы A, где выбраны столбцы $i_1;\ldots;i_r$, а $B_{[i_1;\ldots;i_r]}$ — минор B, где выбраны строки $i_1;\ldots;i_r$.
Доказывать формулу мы не будем, желающие могут ознакомиться с её доказательством в любом учебнике линейной алгебры.

Замечание. Наконец-то докажем теорему Кирхгофа. Как и было анонсировано, только для алгебраических дополнений диагональных элементов.

Доказательство.

$$\det K_{\cancel{u}}^{\cancel{u}} = \det(\overrightarrow{B}_{\cancel{u}}\overrightarrow{B}^{T\cancel{u}}) = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_r\leqslant n-1} \det \overrightarrow{B}_{\cancel{u}}^{[i_1;\ldots;i_{n-1}]} \det \overrightarrow{B}^{T\cancel{u}}_{[i_1;\ldots;i_{n-1}]}$$

Ну, и что у нас получается? Мы перебираем все возможные наборы из $n-1$ ребра. Если набор соответствует дереву, по лемме 8, $\det \overrightarrow{B}_{\cancel{u}}^{[i_1;\ldots;i_{n-1}]} = \pm 1$, а значит ровно тому же равно $\det \overrightarrow{B}^{T\cancel{u}}_{[i_1;\ldots;i_{n-1}]}$, и мы получаем вклад в сумму в виде единицы. Если же дереву рёбра не соответствуют, получаем ноль. Итого именно количество остовных деревьев. □

Эйлеровы и гамильтоновы пути и циклы.

Определение 41. Эйлеровым циклом/путём называется цикл/путь, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз.

Определение 42. Гамильтоновым циклом/путём называется цикл/путь, проходящий по каждой вершине ровно 1 раз.

Замечание. С эйлеровым циклом и путём есть простой, линейный по времени алгоритм, который строит эту конструкцию (почитайте АиСД). С гамильтоновым же циклом/путём всё очень плохо. Даже для довольно узких классов графов эта задача NP-полна.

Замечание. На существование эйлерова цикла/путь не влияют изолированные вершины, поэтому отсюда и далее во всех утверждениях про эйлеровость будем игнорировать таковые.

Определение 43. Граф называется **эйлеровым**/**полуэйлеровым**/**гамильтоновым**/**полугамильтоновым**, когда в нём есть эйлеров цикл/эйлеров путь/гамильтонов путь/гамильтонов цикл.

Замечание. Пустые графы могут считаться как эйлеровыми, так и нет. Мы будем когда как.

Теорема 7. *Неориентированный связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин чётны.*

Доказательство. Индукция по количеству рёбер. Если их 0, то в данной теореме мы будем считать такой граф эйлеровым.
Переход. Степень каждой вершины 2, значит в графе есть какий-то цикл. Возьмём его, и вырежем из графа все его рёбра. Граф развалится на какие-то компоненты связности, давайте для всех непустых выпишем эйлеров цикл компоненты связности. Склеим эти циклы с вырезанным в начале, получим эйлеров цикл для всего графа.
В обратную сторону очевидно. □

Утверждение. *Граф содержит эйлеров путь тогда и только тогда, когда он связен и в нём не более 2 вершин нечётной степени.*

Доказательство. Если вершин нечётной степени 0, разрежем эйлеров цикл по случайной вершине, получим путь. Одна вершина нечётной степени быть не может. Если их две, соединим их, в полученном графе построим цикл, удалим ребро. В доказательстве теоремы об эйлеровом цикле мы не опирались на отсутствие кратных рёбер, так что всё хорошо.
В обратную сторону, опять же, очевидно. □

Утверждение. *Связный граф с $2k$ вершинами нечётной степени можно разбить на* $\max\{1; k\}$ *рёберно-непересекающихся путей рёберно простых путей.*

Теорема 8. *Ориентированный слабо связный граф содержит эйлеров цикл, если для любой вершины входящая степень равна исходящей.*

Доказательство. Аналогично теореме для неориентированных графов. □

Замечание. Сами сформулируйте аналоги утверждений про эйлеров путь и разбиение на пути для ориентированных графов.

Замечание. Отсюда и дальше в критериях гамильтоновости считаем, что наши графы связны и содержат хотя бы 3 вершины.

Теорема 9 (Теорема Дирака)**.** *Пусть G — связный граф с хотя бы 3 вершинами. Если степень любой его вершины $\geqslant \frac{n}{2}$, то граф гамильтонов.*

Теорема 10 (Теорема Оре)**.** *Пусть G — связный граф с хотя бы 3 вершинами. Если для любых двух его несмежных вершин u, v $\deg u + \deg v \geqslant n$, то граф гамильтонов.*

Теорема 11 (Теорема Хватала)**.** *Пусть G — связный граф с хотя бы 3 вершинами. Пусть его степени вершин — $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \dots \leqslant d_n$. Если выполнено условие*

$$d_k \leqslant k < \frac{n}{2} \to d_{n-k} \geqslant n-k$$

то G — гамильтонов.

Доказательство. Для начала условие

$$d_k \leqslant k < \frac{n}{2} \to d_{n-k} \geqslant n-k$$

назовём $(*)$.
Итак, пусть G — негамильтонов граф, в котором $(*)$.

Лемма 9. *Пусть G выполнено $(*)$, $uv \notin E$. Тогда $G \cup \{uv\}$ также $(*)$.*

Доказательство. Пусть мы имели

$$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \dots \leqslant d_n$$

Мы увеличили на 1 d_u и d_v. После пересортировки они переедут после всех вершин, которые имели степень ровно d_u/d_v соотвественно. Давайте заметим, что $d_i \leqslant d'_i$, если трактовать i как номера. Ну, и хорошо, от этого условия мы как раз и понимаем, что $(*)$. □

Из всех графов, для которых не выполняется теорема Хватала, рассмотрим граф, у которого наименьшее количество вершин, а из всех таких граф с наибольшим количеством рёбер. Во-первых, это не полный граф, иначе граф гамильтонов. Тогда возьмём ребро, которого в графе нет. Пусть это ребро uv. Очевидно, $G \cup \{uv\}$ гамильтонов (мы брали максимальное количество рёбер). Давайте тогда выберем не просто u, v, а такие, что $\deg u + \deg v$ максимально. Итак, $G \cup \{uv\}$ гамильтонов, а значит G — полугамильтонов. Давайте тогда вдоль пути пронумеруем вершины: $u = u_1 \to u_2 \to \dots \to u_{n-1} \to u_n = v$. Введём множество $S = \{i \in [1:n] \mid uu_i \in E\}$. Понятно, что $S \subset \{2, 3, \dots, n-1\}$. Введём множество $T = \{i \in [1:n] \mid u_{i-1}v \in E\} \subset \{3, 4, \dots, n\}$. Понятно, $|S| = \deg u$, $|T| = \deg v$. Менее понятно, $S \cap T = \varnothing$. Почему так? Если они пересекаются по i, то есть гамильтонов цикл

$$u \to u_2 \to u_3 \to \dots \to u_{i-1} \to v \to u_{n-1} \to u_{n-2} \to \dots \to u_i \to u$$

Отсюда $\deg u + \deg v \leqslant n - 1$.
Не умаляя общности давайте считать, что $\deg u \leqslant \deg v$. Тогда $\deg u = k < \frac{n}{2}$. Рассмотрим множество вершин $\{u_{i-1} \mid i \in S\}$. По условию $S \cap T = \varnothing$, для каждой $u_{i-1}v \notin E$. Заметим, что степень каждой вершины $\deg u_{i-1} \leqslant k$. А значит, у нас существует хотя бы k вершин степени $\leqslant k$. Отсюда $d_k \leqslant k < \frac{n}{2}$. По $(*)$ отсюда следует, что $d_{n-k} \geqslant n-k$. То есть существует хотя бы $k+1$ вершина степени $\geqslant n-k$ (с номерами от $n-k$ до n включительно). А отсюда $\exists w\ uw \notin E \wedge \deg w \geqslant n-k$. А тогда $\deg u + \deg w \geqslant n$ — противоречие с выбором v. □

Теорема 12 (Обратная к теореме Хватала)**.** *Если $n \geqslant 3$ и $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \dots \leqslant d_n$ — последовательность, для которой не выполнено $(*)$, то существует негамильтонов граф, для которого $d_1, \dots d_n$ являются степенной последовательностью.*
Доказательство данной теоремы оставляется читателю.

Теорема 13 (Теорема Гуйа — Ури)**.** *Рассмотрим ориентированный граф. Если для любой вершины её входящая и исходящая степень больше либо равны $\frac{n}{2}$, то G — гамильтонов.*
Тоже оставляется читателю.

Определение 44. Граф называется турниром, если он является ориентацией полного графа.

Теорема 14 (Теорема Релеи — Камеона)**.** *Любой сильно связный турнир содержит гамильтонов цикл.*
Также оставляется читателю.

Укладки графов. Планарность.

Замечание. Концептуально мы рассматриваем достаточно хорошее многообразие и пытаемся уложить на нём граф. «Хорошее» — не надо треугольников Серпинского, непрерывных нигде не гладких многообразий, тороидов с бесконечным числом дырок и т.п. Не очень интересно всё это формализовать, и мы не будем.

Определение 45. Пусть X — «достаточно хорошее» многообразие, G — граф. Тогда его **вложением** в X называется отображения $p\colon V \to X$ и $q\colon E \to C_X$ (множество всех кривых в X), при этом никакие две кривые, соответствующие рёбрам, не пересекаются кроме как в вершине, и две кривые пересекаются в вершине только тогда, когда они оба инцидентны этой вершине.

Теорема 15. *Любой граф вкладываем в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Давайте возьмём случайное расположение вершин и соединим их прямыми. Вероятность пересечения — ноль (как минимум потому, что нам необходимо, чтобы 4 точки лежали в одной плоскости, а у этого нулевая вероятность). □

Доказательство. Давайте расположим вершины по окружности, для каждой вершины u выделим $\deg u$ прямых (близких к вертикальной), и если у нас не получается провести ребро в плоскости, на разную высоту будем подниматься (вдоль правильной прямой), и там проводим ребро. □

Утверждение. *Любая замкнутая кривая без самопересечений и самокасаний делит плоскость на две части: конечную и бесконечную.*

Определение 46. У условиях предыдущего утверждения конечную часть будем называть **внутренней**, бесконечную — **внешней**.

Утверждение. *При наличии замкнутой кривой без самопересечений и самокасаний любые две точки в одной части разбиения можно соединить «достаточно хорошей кривой».*

Определение 47. Граф, вложимый в $\mathbb{R}^2$, называется **планарным**.

Определение 48. Укладка планарного графа называется **плоским графом**.

Определение 49. Плоский граф разбивает плоскости на какие-то связные области. Эти области называются **гранями**.

Теорема 16 (Формула Эйлера)**.** *Пусть в связном планарном графе V вершин и E рёбер, а при его укладке на плоскости получилось F граней. Тогда*

$$V + F - E = 2$$

Доказательство. Докажем индукцией по количеству вершин и рёбер. Если у нас 1 вершина и 0 рёбер, то грань там тоже одна.
Пусть у нас не 1 вершина. Если наш граф дерево, у него n вершин, $n-1$ ребро и 1 грань. Если наш граф не дерево, у нас есть хоть один не-мост. Тогда он лежит в цикле, а значит при удалении этого ребра у нас уменьшится количество граней на 1. При этом граф останется связным. Из индукционного предположения $V + (F-1) - (E-1) = 2$, всё. □

Следствие 9.1. *Если планарный граф имеет k компонент связности, V вершин, E рёбер, а при его укладке получилось F граней, то*

$$F + V - E = k + 1$$

Лемма 10. *Граф K_5 не планарен.*

Доказательство. Пусть он планарен. Тогда для любой его укладки верна формула Эйлера. То есть уложив его на плоскости, получим $F = 7$. Посмотрим на эти грани. Каждая окружается каким-то циклом, а цикл содержит хотя бы 3 ребра. То есть сумма длин циклов вокруг граней больше либо равна 21. С другой стороны, каждое ребро входит в 2 цикла. А значит у нас $\geqslant 10.5$ рёбер. Ой. □

Утверждение. *В планарном графе $E \leqslant 3V - 6$.*

Доказательство. В доказательстве предыдущей теоремы мы выяснили, что $F = 2 - V + E$ и $2E \geqslant 2F$. Отсюда следует то, что мы хотели доказать. □

Лемма 11. *$K_{3,3}$ не планарен.*

Доказательство. Пусть он планарен. Тогда, для него верна формула Эйлера. То есть уложив его на плоскости, получим $F = 5$. Посмотрим на эти грани. Каждая окружается каким-то циклом, а цикл содержит хотя бы 4 ребра, потому что граф двудолен. То есть сумма длин циклов вокруг граней больше либо равна 20. С другой стороны, каждое ребро входит в 2 цикла. А значит у нас $\geqslant 10$ рёбер. Ой. □

Замечание. Оказывается, каждый не планарный граф содержит внутри себя K_5 или $K_{3,3}$. Но содержит весьма специфичным образом. Сейчас опишем, каким.

Определение 50. Граф G_1 **гомеоморфен** графу G_2, если $\exists G_3$ изоморфный G_1 такой что его можно получить из G_2 конечным количеством следующих операций: убрать вершину степени 2 и соединить её соседей либо, наоборот, убрать ребро и заменить его вершиной степени 2, соединённой с концами удалённого ребра.

Замечание. Гомеоморфность, на самом деле, — эквивалентность топологический пространств. Как это вообще с графами связано? А вот как:
Граф можно сделать топологическим пространством. У нас вершины будут точками, а рёбра — бесконечно тонкими нитками. И тогда у вершины будет окрестность из маленьких кусочков инцидентных её рёбер, а ещё будут окрестности на ребре. Вот это всё чудо является базой топологии на графах. При этом, очевидно, у нас ничего не меняется в окрестностях, если мы добавляем либо убираем вершину степени 2, а значит в качестве гомеоморфности на графах мы имеем именно то определение, что написано выше.

Свойство 50.1. *Гомеоморфные графы либо одновременно планарны, либо одновременно нет.*

Доказательство. Тривиально. □

Лемма 12. *Дерево планарно.*

Доказательство. Подвесим дерево. Теперь сопоставим каждой вершине отрезок вот так: корню соответствует $[0; 1]$, для детей берём их родителя и делим его отрезок на столько частей, сколько детей. После этого расположим вершины одного уровня на одной вертикали, а по горизонтали в их отрезок. Нетрудно заметить, что получится плоский граф. □

Лемма 13. *Граф планарен тогда и только тогда, когда его можно уложить на сфере.*

Доказательство. Для начала предъявим гомеоморфизм сферы без точки и плоскости. Возьмём сферу, положим южным полюсом на плоскости, и будем проводит прямые через северный полюс. Они соединяют ещё одну точку сферы с точкой плоскости, вот это и нужное нам отображение. Тривиально, оно непрерывно и биективно (и обратное к нему непрерывно).
Тогда по этой биекции располагаем граф, и получаем то, что мы хотим. □

Лемма 14. *Для любой вершины u существует укладка G на плоскости, что u — вершина внешней грани.*

Доказательство. Уложим граф на сферу, возьмём сферу в руки и повернём сферу так, чтобы верхняя грань содержала u. Разложим обратно из сферы на плоскости. ☐

Лемма 15. *Для любого ребра uv существует укладка G на плоскости, что uv — ребро внешней грани.*

Доказательство. Аналогично предыдущему. ☐

Лемма 16. *Граф планарен тогда и только тогда, когда все его компоненты рёберной двусвязности планарны.*

Доказательство. В одну сторону очевидно, в другую раскладываем по индукции по количеству компонент.
Если компонент одна, понятно, если несколько, уберём ту, которая в дереве мостов — лист. По индукции расположим остаток так, чтобы вершина, к которой соединён мост, оказалась на внешней грани. Соединим с удалённой компонентой рёберной двусвязности. ☐

Лемма 17. *Граф планарен тогда и только тогда, когда все его компоненты вершинной двусвязности планарны.*

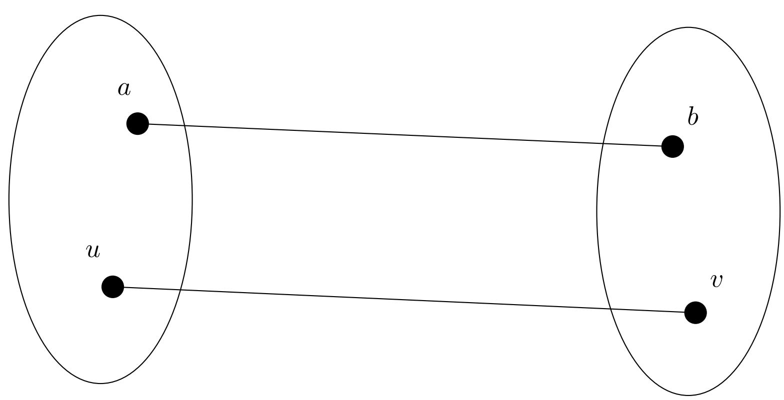
Доказательство. Доказательство. Опять же, в одну сторону очевидно, в другую по индукции. База — очевидно, переход — аналогично. ☐

Теорема 17 (Теорема Понтрягина — Куратовского)**.** *Граф планарен тогда и только тогда, когда у него не существует подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$.*

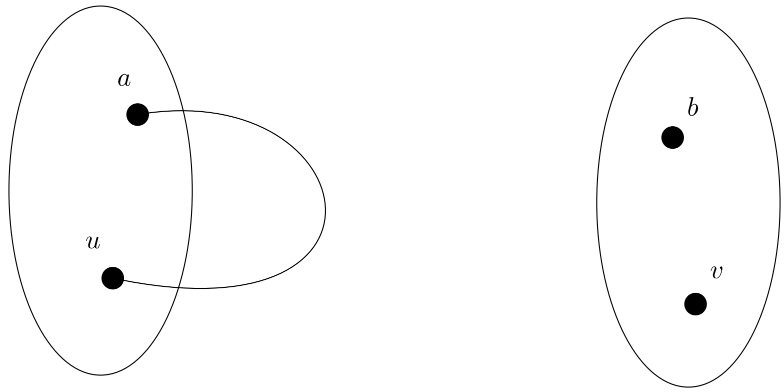
Доказательство. Влево очевидно, а вправо придётся страдать.
Нам надо доказать, что граф без K_5 и $K_{3,3}$ планарен. Пусть это не так. Тогда давайте из всех таких графов рассмотрим граф G, у которого минимальное количество вершин. Если таких несколько, возьмём с минимальным количеством рёбер. Тогда пусть uv — ребро. При его удалении K_5 или $K_{3,3}$ не появится, а рёбер станет меньше, значит $G \setminus uv$ планарен.

Лемма 18. *$G \setminus uv$ не содержит мостов и точек сочленения.*

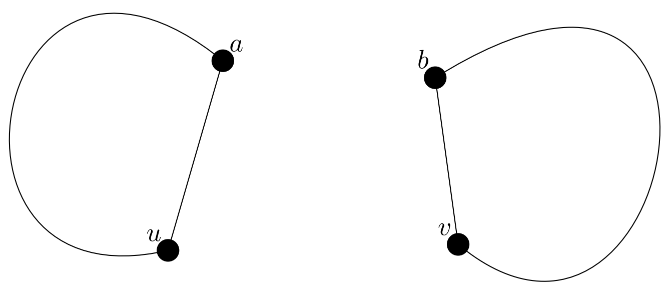
Доказательство. Заметим, что по минимальности G и леммам 16 и 17 сам G не содержит мостов и точек сочленения. А значит, если $G \setminus uv$ содержит, то u и v лежат в разных компонентах двусвязности. Пусть $G \setminus uv$ содержит мост ab.



Тогда сделаем вот такое преобразование:

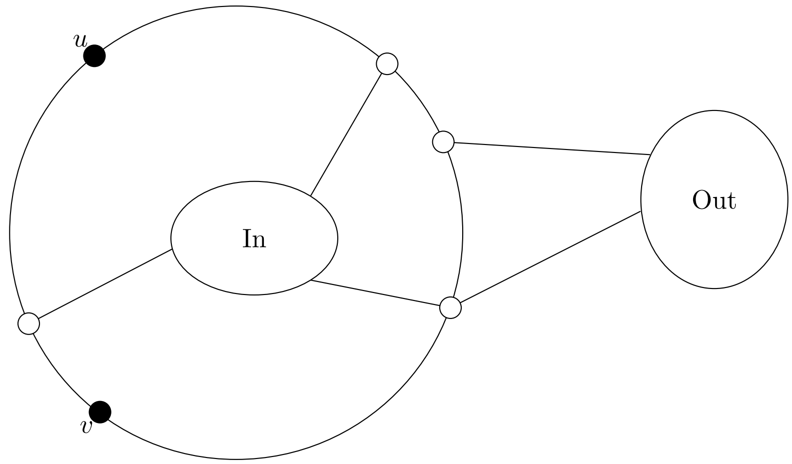


Утверждается, что каждая из компонент связности (например, левая) не содержит K_5 и $K_{3,3}$. Почему? Ну, пусть содержит. Тогда au — ребро такого подграфа. А давайте вместо него возьмём $u \to v \rightsquigarrow b \to a$ в исходном графе и сожмём в одно ребро (по определению гомеоморфности мы так можем). Получим, что исходный граф тоже содержал K_5 или $K_{3,3}$. Поскольку в левой компоненте связности меньше рёбер, чем в G, она планарна. А значит её можно уложить так, чтобы au было на внешней грани. То же самое сделаем с правой компонентой связности



А после этого мы можем удалить обратно добавленные рёбра au и bv, но добавить два удалённых ребра ab и uv, получив, что исходный граф был планарен, тем самым получив противоречие с наличием моста в $G \setminus uv$.
Доказательство отсутствия точек сочленения аналогично. □

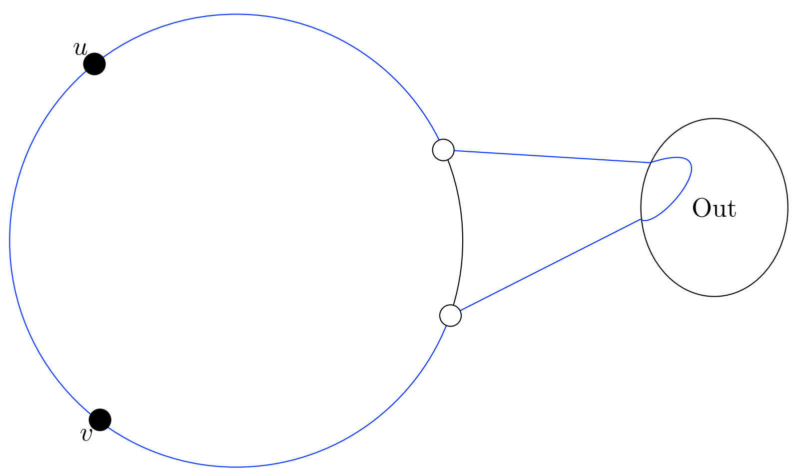
Отсюда получается, что uv лежат на цикле в графе $G \setminus uv$. Почему? Потому что возьмём два любых ребра, инцидентных u и v соотвественно, по лемме эти рёбра вершинно двусвязны, а значит лежат на цикле.
Давайте среди всех циклов, на которых лежат uv и для всех укладок графа $G \setminus uv$ на плоскости возьмём тот цикл C и ту укладку, что внутри C находится максимальное количество граней. Несмотря на то, что укладок у нас бесконечно много, взять максимум мы можем, потому что граней у нас в принципе конечное число, а значит укладки разбиваются на классы эквивалентности по количеству граней внутри C.
Давайте удалим наш цикл. Что останется от графа? Какие-то компоненты связности. Очевидно, каждая компонента лежит либо полностью внутри цикла, либо полностью вне (иначе рёбра пересекаются). Как они лежат в графе? Ну, как-то так:



Если у нас вершины цикла соединены между собой напрямую, будем считать, что между ними просто внешняя или внутренняя компонента из 0 вершин. Или можно вставить туда вершину степени 2 (у нас же всё работает с точностью до гомеоморфзма). При этом и внешних, и внутренних компонент есть хотя бы одна, иначе G планарен (мы можем соединить u и v либо снаружи, либо внутри ребром).
Заметим, что у нас цикл C мы можем разделить на 2 участка, на 2 пути от u до v. На картинке есть левая часть цикла и правая. Так вот,

Лемма 19. *Каждая внешняя компонента подсоединяется к циклу ровно в двух точках. Причём эти две точки лежат на разных частях цикла.*

Доказательство. В одной не может быть, потому что это точка сочленения. Если не в одной и либо не в двух, либо в двух, но с одной стороны, то две вершины с одной стороны точно есть, а значит в качестве цикла C мы могли взять вот такой, у которого внутри больше граней.

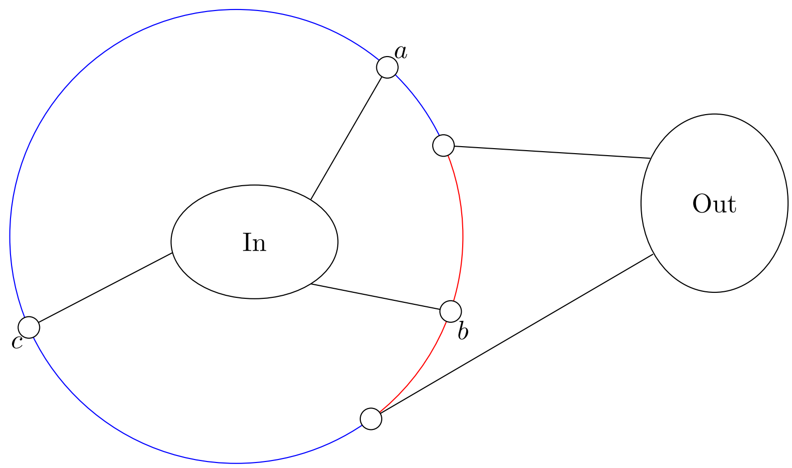


□

А отсюда следует, что на внутренних компонентах есть естественный порядок. Если есть две компоненты, то у одной обе точки присоединения ближе к u, а у другой — ближе к v.
А что мы можем сказать про внутренние компоненты? Ну, с ними уже всё не так понятно. Но введём пару определений

Определение 51. Будем говорить, что внутренняя часть In разделяет u и v, если у неё существуют две точки подключения по разные стороны цикла C.

Определение 52. Будем говорить, что внутренняя часть In разделяет внешнюю часть Out, если у неё существуют две точки подключения, которые находятся по разные стороны цикла C, где стороны берутся относительно точек подключения Out (см. картинку).



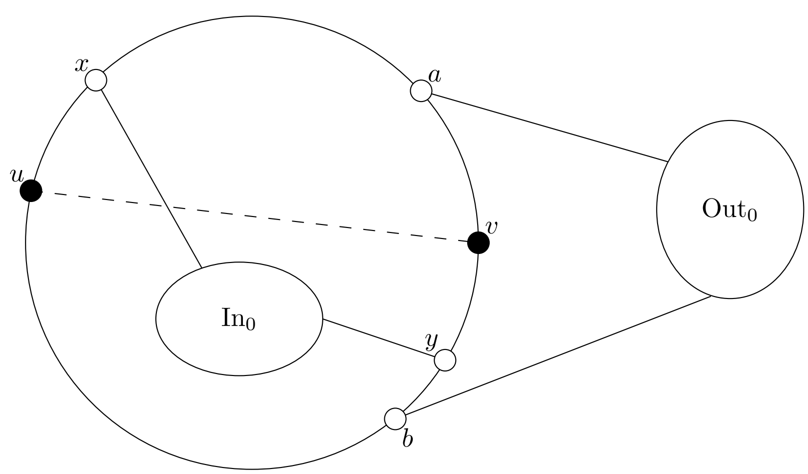
Пример. Тут у нас In разделяет Out, потому что Out делит C на красную и синюю часть. Если были бы только рёбра в a и c, то не разделяла бы, а так разделяет, хотя хватило бы и пары рёбер в a и в b или в b и в c.

Замечание. При этом считается, что если точка соединения внутренней и внешней части одна и та же, то это не разделение. Аналогично с разделением u и v.

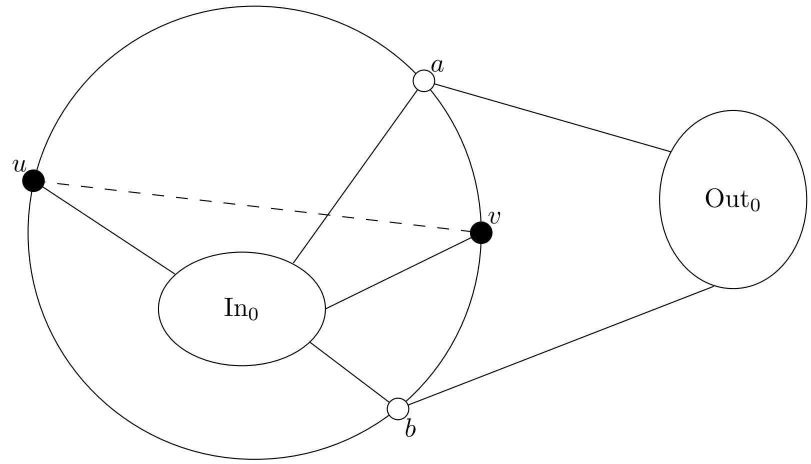
Лемма 20. *Существует внутренняя часть* In_0 *и внешняя часть* Out_0 *такие что* In_0 *разделяет и* u v *и* Out_0.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда рассмотрим любую внутреннюю часть. Она не разделяет ни одну внешнюю, а значит её точки соединения лежат строго между какими-то точками соединения разных внешних частей, а это значит, что её можно превратить во внешнюю, вынеся наружу. После проведения такой операции у нас не останется компонент, разделяющий u и v, а значит мы сможем провести ребро между ними. Противоречие. □

Пусть наша компонента Out_0 подключается в точках a и b. А у того, как подключается In_0, есть варианты. А точнее, получается 12 случаев. Мы рассмотрим два из них, потому что нам лень рассматривать все. Первый:



Ну, тут $K_{3,3}$ налицо. Первая доля состоит из вершин v, b и x, вторая — из u, a и y.
И на самом деле почти во всех случаях мы будем находить $K_{3,3}$ и только в одном найдём K_5. случай там такой:



Причём на самом деле K_5 мы найдём не совсем в таком случае. Случай с картинки делится ещё на 2 под-случая: когда внутри In_0 есть вершина, соединённая с a, b, u и v непересекающимися путями, и когда такой нет. И вот когда такая есть, только тогда мы найдём K_5 (собственно, из этой вершины и a, b, u и v). Если нет, там будет $K_{3,3}$. □

Раскраски графа.

Определение 53. Пусть дан G — неориентированный граф и отображение $c\colon V \to [1:k]$. При этом выполнено условие $\forall uv \in E\ c(u) \neq c(v)$. Тогда c называется **(корректной) раскраской** графа G в k цветов.

Определение 54. **k-раскрашиваемый граф** — граф, который можно покрасить в k цветов. Также он называется **k-дольным**.

Утверждение. *В планарном графе существует вершина степени* $\leqslant 5$.

Доказательство. Следует из $E \leqslant 3V - 6$. □

Теорема 18. *Любой планарный граф можно раскрасить в 6 цветов.*

Доказательство. Индукция по числу вершин. База ясно, в переходе удалим вершину степени $\leqslant 5$, покрасим, вернём, останется лишний цвет. □

Теорема 19 (Теорема Хивуда)**.** *Любой планарный граф можно раскрасить в 5 цветов.*

Доказательство. Рассмотрим вершину u $\deg u \leqslant 5$. Если $\deg u < 5$, мы см. предыдущую теорему. Если среди соседей вершины u есть не все цвета — тоже. А что есть есть все? Давайте пронумеруем соседей u по часовой стрелке и перенумеруем цвета в соответствии с этим порядком. Связаны ли 1 и 3 вершина? Если нет, то возьмём все вершины цветов 1 и 3 (связанные с нашей вершиной цвета 3) перекрасим в противоположный цвет. Если же 1 и 3 связаны, то рассмотрим 2 и 4, и сделаем с ними то же самое. 2 и 4 связаны точно быть не могут, им мешает планарность и путь из 1 в 3. □

Теорема 20. *Любой планарный граф можно раскрасить в 4 цвета.*

Замечание. К чему нам нужна раскраска графов? Это напрямую связано с раскрасками карт. Пусть у нас есть какие-то средневековые княжества, никакие 4 границы в одной точке не сходятся, нет анклавов и прочих приколов. И это сейчас у нас куча цветов, а в средние века краски были дороги. И хочется использовать минимум красок.

Понятно, что в 3 нельзя (рассмотрите K_4). И во времена Эйлера была сформулирована гипотеза о 4 красках, что всегда можно в 4 цвета. Никто не мог ни доказать, ни опровергнуть. Где-то в середине 20 века был получен следующий результат: существует конечное множество графов, что если каждый из них красится в 4 цвета, то любой граф точно красится. И были оценки на размер этого множества. Дальше во второй половине XX века людям пришла в голову идея построить это множество и перебрать все. В 1976 Аппель и Хакен написали программу, получили 1936 графов, каждый из которых раскрасили. Но научное сообщество знатно охренело, и разгорелся спор о том, насколько это легально вообще. Но в 2005 доказательство было представлено на Coq, и после этого все согласились.

Замечание. Остаётся лишь сделать алгоритм проверки графа на то, красится ли он в 3 цвета. Но, увы, даже для планарных графов задача NP-полна.

Определение 55. $p_G(t)$ — количество способов покрасить граф G в t цветов — **хроматический полином**.

Пример.
- $p_{\overline{K_n}}(t) = t^n$.
- $p_{K_n}(t) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1) = t^{\underline{n}}$.
- Пусть T — дерево. Подвесим дерево, первую вершину красим в t, остальные в $t-1$ цвет: $p_T(t) = t(t-1)^{n-1}$.

Теорема 21. *Пусть $uv \in EG$. Тогда $p_G(t) = p_{G\setminus uv}(t) - p_{G/uv}(t)$.*

Доказательство. Самое сложное здесь — понять, что такое G/uv. А это когда вы берёте граф и объединяете u и v в одну вершину, к которой теперь идут все рёбра, инцидентные u или v.
Дальше доказать это очень просто: берём раскраску $G \setminus uv$. Она нам либо подходит, либо нет. Когда нет? Когда u и v покрашены в один цвет. Ну так это корректная раскраска G/uv. Все такие раскраски вычтем, получим что хотим. □

Теорема 22. $p_G(t)$ *— многочлен по t. При этом:*

$$p_G(t) = t^n - mt^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} - a_{n-3}t^{n-3} + \cdots \pm a_k t^k$$

где k — количество компонент связности.

Доказательство. Будем вести индукцию по чисту вершин и рёбер. В $G \setminus uv$ на одно ребро меньше, в G/uv на одну вершину. Если вычесть, мы сразу получим всё, что хотим, кроме компонент связности (а именно степень многочлена, коэффициент при t^{n-1} и знакочередование). Теперь вопрос в компонентах связности. Если мы сожмём, количество компонент связности не изменится. Если мы уберём ребро, количество компонент связности либо увеличится, либо не изменится. Итого у нас a_k будет либо как в G/uv, либо больше. □

Следствие 20.1. *G дерево тогда и только тогда, когда $p_G(t) = t(t-1)^{n-1}$.*

Определение 56. Минимальное число цветов, в которое можно покрасить граф G называется **хроматическим числом** и обозначается χ_G.

Лемма 21. *Пусть G — не регулярный граф. Тогда $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.*

Доказательство. Рассмотрим вершину не максимальной степени u. Если граф не связен, рассмотрим каждую компоненту отдельно. Занумеруем вершины графа в порядке убывания расстояния до u. Выполним жадную раскраску в этом порядке. У нас на каждом этапе, кроме последнего, будет хотя бы один непокрашенный сосед, а значит в Δ цветов можно покрасить. А на последнем этапе мы посмотрим на u, у неё степень меньше Δ, значит тоже можно покрасить. □

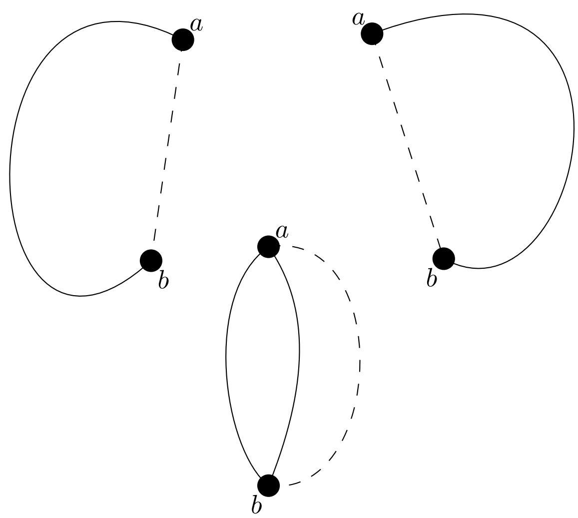
Определение 57. $\kappa(G)$ — минимальное число вершин, которое можно удалить, чтобы G потеряет связность.

Теорема 23 (Теорема Брукса)**.** *Если G — не K_m и не цикл нечётной длины, то $\chi_G \leqslant \Delta(G)$.*

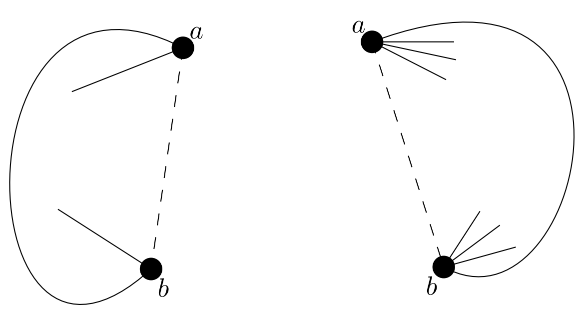
Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $\kappa(G) = 1$. Тогда у нас есть точка сочленения, расчленим её, покрасим две полученные компоненты связности по лемме (степень точки сочленения изменилась, значит граф перестал быть регулярным), объединив обратно, попутно перенумеровав цвета в одной из компонент.

2. Пусть $\kappa(G) = 2$. Тогда у нас есть две вершины, которые мы удаляем (a и b). Если они соединены ребром, сделаем то же самое, что в случае раньше. Если они не соединены ребром, то у нас могут быть проблемы с тем, что у нас в одной раскраске они одного цвета, а в другой — разного. Тогда мы очень хотим добавить ребро ab во все компоненты связности.



Мы не можем его добавить только если какая-то компонента связности станет регулярной. То есть в одной из них степень всех вершин, кроме a и b равна Δ, а у a и b — $\Delta - 1$. Тогда компонент всего две и во второй у a и b степень 1.



И тогда если у них общий сосед, можно покрасить их хоть в разные цвета, хоть в 1 (тут мы используем то, что $\Delta > 2$). А если разные соседи, то можно заменить b на её соседа, они тоже будут разделять вершины, и это предыдущий случай.

3. Пусть $\kappa(G) > 2$. То есть удаление никаких двух вершин не разделяет граф. Рассмотрим вершину x. Какие-то два её соседа не соединены ребром (по неполноте G). Назовём их a и b. Упорядочим вершины по убыванию расстояния от x в графе $G \setminus \{a, b\}$ (он связен из-за $\kappa(G) > 2$). Раскрасим a и b в первый цвет, а дальше используем жадную раскраску. У нас не будет проблем ни с x (у неё два соседа одного цвета), ни с остальными вершинами.

□

Определение 58. Инвариантом графа называется некоторая его характеристика, не меняющееся при изоморфизме.

Замечание. И тут уже есть вопросы: можно ли проверять изоморфность быстро? С одной стороны, мы не умеем делать это полиномиально, но и доказывать NP-полноту также не умеем (более того, предположив её NP-полноту, получим очень сомнительные (но не факт, что неверные) следствия).

Паросочетания.

Определение 59. Паросочетанием в графе называется множество рёбер, такое что никакие два не имеют общую вершину. **Размером паросочетания** называется количество его рёбер. Размер максимального паросочетания обозначается $\alpha'(G)$.

Определение 60. Независимым множеством или **антикликой** в графе называется множество вершин, такое что никакие две не соединены ребром. Размер максимальной антиклики обозначается $\alpha(G)$.

Определение 61. Вершинным покрытием графа называется множество вершин, такое что хотя бы один из концов любого ребра лежит в нём. Размер минимального вершинного покрытия обозначается $\beta(G)$.

Определение 62. Рёберным покрытием графа называется множество рёбер, такое что каждая вершина инцидентна хотя бы одному ребру. Размер минимального вершинного покрытия обозначается $\beta'(G)$.

Определение 63. Вершинным доминирующим множеством графа называется такое множество вершин, что любая вершина либо лежит в нём, либо имеет соседа в этом множестве. Размер минимального вершинного доминирующего множества обозначается $\gamma(G)$.

Определение 64. Рёберным доминирующим множеством графа называется такое множество рёбер, что любое ребро либо лежит в нём, имеет общую вершину с каким-то ребром множества. Размер минимального рёберного доминирующего множества обозначается $\gamma'(G)$.

Утверждение. $\alpha(G) + \beta(G) = n$

Доказательство. Очевидно, если A — независимое множество, то $V \setminus A$ — вершинное покрытие. □

Определение 65. Вершина называется **покрытой** паросочетанием, если в паросочетании есть ребро с концом в ней. Иначе вершина называется **свободной**.

Определение 66. Паросочетание называется **совершенным** или **полным**, если оно покрывает все вершины.

Замечание. Чтобы в графе существовало совершенное паросочетание необходимо, чтобы количество вершин было чётно. Но, разумеется, не достаточно.

Теорема 24 (Критерий Татта). *Граф G содержит совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $\forall A \subset V$ $|A| \geqslant$ количество нечётных компонент связности $G \setminus A$. Далее количество нечётных компонент называется* odd.

Замечание. Практического применения у этой теоремы маловато будет в силу количества подмножеств.

Замечание. Перед доказательством обсудим, как выглядит xor двух паросочетаний. Это граф, в котором степень каждой вершины не больше двух. Ноль — когда вершина не была ни в одном, либо в обоих имело одно ребро в паросочетании. Один — когда вершина была только в одном паросочетании. Два — когда имела два разных ребра в разных паросочетаниях.
При этом если оба паросочетания были полны, у нас убирается вариант 1. И получается, что граф состоит из циклов и изолированных вершин.

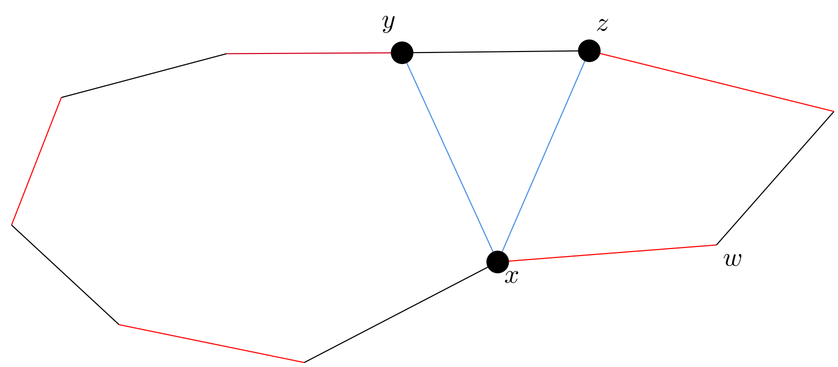
Доказательство. Когда мы удалим A у нас какие-то пары останутся, какие-то удалятся, а у каких-то мы отрежем одну вершину из паросочетания. А значит нечётные компоненты связности должны были соединяться с A. Причём все с различными вершинами. Это доказательство право.
Теперь влево. Предположим, что совершенного паросочетания нет, но условие выполнено (назовём условие $(*)$). Выберем из всех таких графов граф с минимальным числом вершин, а из всех с одинаковым количеством вершин — с максимальным числом рёбер. Заметим, что проведение нового ребра не нарушает $(*)$, а значит если $uv \notin E$, то $G \cup \{uv\}$ содержит совершенное паросочетание. Заметим, что G не полон (в силу $(*)$ и отсутствия паросочетания). А значит существует ребро $uv \notin E$.
Выберем U — множество вершин степени $n - 1$.

Лемма 22. *Все компоненты связности $G \setminus U$ — полный граф.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Значит в $G \setminus U$ есть компонента — не полный граф. Там хотя бы 3 вершины. Из одного из случаев теоремы Брукса в неполном графе есть вершина x с двумя несоединёнными соседями: y и z. При этом $x \notin U$, а значит x не соединена с какой-то вершиной w. При этом если мы добавим yz, то граф будет содержать совершенное паросочетание (M_1). Аналогично, при добавлении wz получается граф с совершенным паросочетанием M_2. Каждое из них содержит соответствующее ребро. Когда мы видим два паросочетания, хочется сделать им xor. Паросочетания точно разные и оба совершенные, значит $M_1 \oplus M_2$ содержит изолированные вершины и циклы. Дальше есть два варианта:

1. xw и yz лежат в разных циклах (C_1 и C_2 соотвественно). Тогда взяв $M_1 \oplus C_2$, получим совершенное паросочетание исходного графа.

2. Если xw и yz лежат в одном цикле



Тогда на правой половине этого цикла возьмём чёрные рёбра, в левой — красные. И ещё возьмём ребро xz. Ещё у нас может быть отражённая картинка, нам пришлось бы брать yx.

В любом случае получаем противоречие. □

Когда у нас есть лемма, подставим U в $(*)$. Тогда мы удалим U и у нас останется набор полных графов. В полных чётного размера возьмём совершенное паросочетание, в нечётных — полное без одной вершины. По $(*)$ в U хотя бы столько вершин, сколько надо, да ещё и каждая связана со всеми вершинами, а значит паросочетание можно дополнить до совершенного. □

Определение 67. **Множеством Татта** называется $A \subset V$ $|A| < \mathrm{odd}(G \setminus A)$.

Замечание. Множества Татта могут быть разными. Хочется узнать, влияет ли на что-то его «таттовость».

Теорема 25 (Теорема Бержа)**.** $n - 2\alpha'(G) = \max\limits_{A \subset V}(\mathrm{odd}(G \setminus A) - |A|)$

Доказательство. Если максимум равен нулю, см. теорему Татта. Иначе обозначит правую часть за k. Давайте рассмотрим $G + K_k$ (соединение всех вершин G и K_k «каждая с каждой»). Докажем, что для $G + K_k$ выполнен критерий Татта. Ну, возьмём $A \subset G + K_k$. Дальше случаи

1. A пусто. Пусть исходно максимум достигался на каком-то множестве S. Пусть

   $$n' = n + \mathrm{odd}(G \setminus S) - |S| \overset{\mathrm{mod}\,2}{\equiv} n + \mathrm{odd}(G \setminus S) + |S| \overset{\mathrm{mod}\,2}{\equiv} \sum_{S_i \text{ — компонента связности } G \setminus S} (|S_i| \,\%\, 2) + S \,\%\, 2 + \mathrm{odd}(G \setminus S) \,\%\, 2 + |S| \,\%\, 2$$

   Это делится на 2.

2. $K_k \not\subset A$. Тогда $G + K_k \setminus A$ связен. Если он чётен, мы победили, иначе, если в силу непустоты A — тоже.

3. $K_k \subset A$. Тогда

   $$\mathrm{odd}(G + K_k \setminus A) = \mathrm{odd}(G \setminus (A \setminus K_k)) \leqslant |A \setminus K_k| + k = |A| - k + k = |A|$$

Действительно, выполнен. А значит в $G + K_k$ есть совершенное паросочетание. Когда мы удалим K_k обратно, мы получим, что в $G + K_k$ есть паросочетание на $n - 2k$ вершин. Это даёт нам оценку на равенство, а пример следует напрямую из теоремы Татта. $\square$

Определение 68. Дефицитом графа называется величина справа в теореме Бержа.