Содержание

Определение 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ $f\colon E \to [0; +\infty]$. **Подграфиком** f называется множество

$$Q_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in E, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

Определение 2. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. **Графиком** f называется множество

$$\Gamma_f = \{(x; f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in E\}$$

Замечание. Отличается от общего определения тем, что $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Теорема 1 (О мере графика). *Пусть* $E \in \mathbb{A}_n$, $f \in S(E)$. *Тогда* $\Gamma_f \in \mathbb{A}_{n+1}$ *и* $\mu_{n+1}\Gamma_f = 0$.

Доказательство.

- Сначала разберём случай, когда $\mu E < +\infty$. Заключим Γ_f в множество сколь угодно малой меры. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть

  $$e_k = E(k\varepsilon < f(k+1)\varepsilon)$$

  Тогда

  $$E = E(|f| = +\infty) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} e_k$$

  Тогда

  $$\Gamma_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Gamma_{f\big|_{e_k}} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} e_k \times [k\varepsilon; (k+1)\varepsilon) = H_\varepsilon$$

  Заметим, что

  $$\mu_{n+1}H_\varepsilon = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_n e_k \cdot \varepsilon \leqslant \mu_n E\varepsilon$$

  По критерию измеримости утверждение теоремы верно.

- Теперь пусть $\mu E = +\infty$. По σ-конечности μ_n

  $$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \qquad \mu_n E_j < +\infty$$

  А значит $f\Big|_{E_j}$ имеет измеримый график нулевой меры, а поскольку

  $$\Gamma_f = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_{f\big|_{E_j}}$$

  Верно требуемое.

$\square$

Теорема 2. *Пусть $E \in \mathbb{A}_n$, $f\colon E \to [0; +\infty]$. Тогда измеримость f и её подграфика равносильны и в случае измеримости имеет место равенство*

$$\mu_{n+1} Q_f = \int_E f \, \mathrm{d}\mu_n$$

Доказательство. Пусть нам известна измеримость подграфика. Тогда искомая формула следует из принципа Кавальери:

$$Q_f(x) = \begin{cases} \varnothing & x \notin E \\ [0; f(x)\rangle & x \in E \end{cases}$$

Отсюда

$$\mu_1 Q_f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin E \\ f(x) & x \in E \end{cases}$$

Отсюда если Q_f измеримо, то формула следует из принципа Кавальери. А также в принципе Кавальери в качестве следствия был факт, что функция $x \mapsto \mu_1 Q_f(x)$ измерима, а значит и f измерима как сужение $x \mapsto \mu_1 Q_f(x)$ на E.
Осталось доказать, что если f измерима, то её подграфик измерим. Рассмотрим случаи:

1. f простая.

$$f = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k} \qquad A_k \in \mathbb{A}_n, c_k \in [0; +\infty)$$

   Можно считать, что A_k дизъюнктны. И ещё можно считать, что $A_k \subset E$ и в объединении дают E. Тогда

$$Q_f = \bigsqcup_{k=1}^{N} A_k \times [0; c_k]$$

   Отсюда следует измеримость.

2. Общий случай: f произвольная неотрицательная измеримая функция. Приблизим её возрастающей последовательность простых функций φ_n. Проверим, что

$$Q_f = \bigcup Q_{\varphi_n} \cup \Gamma_f$$

   Тогда мы докажем искомое.

   - $\supset$ ясно т.к. $\varphi_n \leqslant f \Rightarrow Q_{\varphi_n} \subset Q_f$.
   - $\subset$ рассмотрим $(x; y) \in Q_f$. То есть $x \in E$, $y \in [0; f(x)]$. Если $y = f(x)$, то понятно. Иначе

$$\exists N \in \mathbb{N} \ y < \varphi_N(x) \Rightarrow \exists N \ (x; y) \in Q_{\varphi_N}$$

□

Замечание. Условие измеримости E существенно. Если $f \equiv 0$ не неизмеримом множестве, например, то $Q_f \in \mathbb{A}_{n+1}$ и $\mu_{n+1} Q_f = 0$.

Теорема 3 (Теорема Тонелли)**.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f \in S(E \to [0; +\infty])$. Тогда*

1. *При почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(x; \bullet) \in S(E(x))$.*
2. *Пусть $I(x) = \int_{E(x)} f(x; y) \, \mathrm{d}y$. Тогда $I(x) \in S(\mathbb{R}^n)$.*
3. $$\int_E f \, \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) \, \mathrm{d}x$$

Доказательство. По теореме 2, что $Q_f \in \mathbb{A}_{n+m+1}$ и

$$\mu_{n+m+1} Q_f = \int_E f \, \mathrm{d}\mu_{n+m}$$

Воспользуемся принципом Кавальери:

$$\mu_{n+m+1} Q_f = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_{m+1} Q_f(x) \, \mathrm{d}x$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} Q_f(x) &= \left\{(y;z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x;y;z) \in Q_f\right\} = \\ &= \left\{(y;z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x;y) \in E, z \in [0; f(x;y)]\right\} = \\ &= \left\{(y;z) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid y \in E(x), z \in [0; f(x;y)]\right\} \end{aligned}$$

Да это же подграфик $f(x;\bullet)$!

1. По теореме Кавальери при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $Q_f(x)$ измеримо, а значит мы доказали первое утверждение по теореме 2.
2. $$\mu_{m+1} Q_f(x) = \mu_{m+1} Q_{f(x;\bullet)} \overset{2}{=} \int_{E(x)} f(x;y) \, \mathrm{d}y = I(x)$$
   Отсюда $I(x)$ измерима по всё тому же принципу Кавальери.
3. Приравняем два выражения для $\mu_{n+m+1} Q_f$.

□

Теорема 4 (Теорема Фубини)**.** *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$*,* $f \in L(E)$*. Тогда*

1. *При почти всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *функция* $f(x;\bullet) \in L(E(x))$*.*
2. *Пусть* $I(x) = \int_{E(x)} f(x;y) \, \mathrm{d}y$*. Тогда* $I(x) \in L(\mathbb{R}^n)$*.*
3. $$\int_E f \, \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) \, \mathrm{d}x$$

Доказательство. Применим теорему Тонелли для f_+ и f_-. Пусть $I^\pm = \int_{E(x)} f_\pm(x;y) \, \mathrm{d}y$. По теореме Тонелли

$$\int_E f_\pm \, \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} I^\pm(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

Учитывая $f_\pm(x;\bullet) = (f(x;\bullet))_\pm$, имеем

$$I^+ - I^- = I \in L(\mathbb{R}^n)$$

При почти всех x $I^\pm(x) < +\infty$, а значит при почти всех x $f_\pm \in L(E(x))$ отсюда $f \in L(E(x))$. □

Замечание. В теореме Тонелли все условия можно ослабить:

1. Если $f \in S(E)$ (не важен знак), то при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x;\bullet) \in S(E(x))$.
2. Если $I(x)$ существует почти во всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $I \in S(\mathbb{R}^n)$
3. Если существует $\int_E f \, \mathrm{d}\mu_{n+m} \in \overline{\mathbb{R}}$, то верно условие пункта 2 и

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu_{n+m} \in \overline{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}^n} I(x) \, \mathrm{d}x$$

Доказывается всё это как в теореме Фубини.

Замечание.

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}^n\ f(x;\bullet)\in S(E(x))\\ \forall y\in\mathbb{R}^m\ f(\bullet;m)\in S(E(y))\end{cases}\not\Rightarrow f\in S(E)$$

Серпинский построил пример такого неизмеримого $E\subset\mathbb{R}^2$, что E пересекается с любой прямой не более чем в двух точках. Мы говорить о нём не будем, т.к. он довольно сложен.

Определение 3. Пусть $X\subset\mathbb{R}^n$, $Y\subset\mathbb{R}^m$, $f\colon X\to\mathbb{R}$, $g\colon Y\to\mathbb{R}$. Тогда

$$f\otimes g\colon \substack{X\times Y\to\mathbb{R}\\ (x;y)\mapsto f(x)g(y)}$$

Лемма 1. *Если $f\in S(X)$, $g\in S(Y)$, то $f\otimes g\in S(X\times Y)$.*

Доказательство. Пусть

$$\tilde f(x;y)=f(x)\qquad \tilde g(x;y)=g(y)$$

Докажем, что $\tilde f$ и $\tilde g$ измеримы, тогда $f\otimes g$ будет измеримо как произведение измеримых.

$$(X\times Y)(\tilde f>a)=X(\tilde f>0)\times Y$$

Левое измеримо по измеримости f, правое — потому что, а произведение измеримы измеримо. □

Следствие 1.1. *Пусть $X\subset\mathbb{R}^n$, $Y\subset\mathbb{R}^m$. Если*

$$\left[\begin{array}{l}f\in S(X\to[0;+\infty])\wedge g\in S(Y\to[0;+\infty])\\ f\in L(X)\wedge g\in L(Y)\end{array}\right.$$

То

$$\int_{X\times Y}f\otimes g\ \mathrm{d}\mu_{n+m}=\int_X f\ \mathrm{d}\mu_n\int_Y g\ \mathrm{d}\mu_m$$

Доказательство. В первом случае нет сомнений в существовании интегралов. Пусть $E=X\times Y$. Тогда

$$\int_E f\otimes g\ \mathrm{d}\mu_{n+m}=\int_X\left(\int_Y f(x)g(y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x$$

так как $E(x)=\begin{cases}\varnothing & x\notin X\\ Y & x\in X\end{cases}$.

А почему то же самое верны для произвольного знака, если интегралы от них конечны? Ну, чтобы применить теорему Фубини, надо проверить суммируемость $f\otimes g$. Ну, смотрите. По доказанному

$$\int_{X\times Y}|f\otimes g|\ \mathrm{d}\mu_{n+m}=\int_X|f|\ \mathrm{d}\mu_n\int_Y|g|\ \mathrm{d}\mu_m$$

По условию оба этих интеграла конечны, значит $|f\otimes g|$ суммируема, а суммируемость функции равносильна суммируемости её модуля. □

Замечание. Мы знаем, что в условиях теорем Тонелли и Фубини верно

$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m}=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{E(x)}f(x;y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x$$

Тривиально, то же можно записать, поменяв x и y ролями.

$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m}=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{E(y)}f(x;y)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y$$

А значит два повторных интеграла равны.

Пример. Повторные интегралы могут быть не равны

$$f(x;y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad E=[-1;1]^2$$

Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y=\left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_{y=-1}^{1}=\frac{2}{x^2+1}$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\frac{2}{x^2+1}\ \mathrm{d}x=4\tan^{-1}x\Big|_{0}^{1}=\pi$$

Другой повторный интеграл будет равен $-\pi$, как несложно заметить.

Пример. Неверно, что если повторные интегралы равны, то двойной существует.

$$g(x;y)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\qquad E=[-1;1]^2$$

Поскольку функция g нечётна по каждой переменной, оба повторных интеграла равны нулю. Отсюда если двойной интеграл существует, то равен нулю.
Докажем, что он не существует. Для этого докажем, что g не суммируема. Попробуем проинтегрировать $|g|$:

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{|2xy|}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x=4\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{|2xy|}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x=4\int\limits_{0}^{1}\left.\frac{-x}{x^2+y^2}\right|_{y=0}^{1}\ \mathrm{d}x=4\int\limits_{0}^{1}\frac{-x}{x^2+1}+\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x=+\infty$$

Отсюда g не суммируема. А значит нулю её интеграл не равен, то есть он не существует.

Определение 4. Пусть $E\subset\mathbb{R}^{n+m}$ **Проекцией** E на первое координатное пространство называется

$$\operatorname{Pr}_1 E=\{x\in\mathbb{R}^n\mid E(x)\neq\varnothing\}$$

Замечание. Проекция измеримого множества может быть быть неизмеримой (достаточно добавить к измеримому двумерному множеству неизмеримое одномерное).

Определение 5. Множество

$$\operatorname{Pr}_1^* E=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \mu_m E(x)>0\}$$

называется **существенной проекцией** множества E.

Свойство 5.1. *Существенная проекция измерима. (Как Лебегово множество функции $\mu_m E(\bullet)$).*

Свойство 5.2. *При f подходящем под теоремы Тонелли и Фубини верно*

$$\int_E f\ \mathrm{d}\mu_{n+m}=\int_{\operatorname{Pr}_1^*} I(x)\ \mathrm{d}x$$

Замечание. Теоремы Тонелли и Фубини можно применять несколько раз.

Определение 6. Пусть $(X;\mathbb{A};\mu)$ и $(Y;\mathbb{B};\nu)$ — пространства с мерами. Пусть

$$\mathbb{A}\odot\mathbb{B}=\{A\times B\mid A\in\mathbb{A},B\in\mathbb{B}\}$$

Тогда $\mathbb{A}\odot\mathbb{B}$ является полукольцом, а

$$\pi_0\colon A\times B\to\mu A\nu B$$

является мерой на $\mathbb{A}\oplus\mathbb{B}$. Тогда π — стандартное распространение π_0 на σ-алгебру $\mathbb{C}$ называется произведением мер μ и ν.
Обозначения:

$$\mathbb{C}=\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}\qquad\pi=\mu\times\nu$$

Замечание. Доказывать корректность определения мы не будем.

Свойство 6.1.

$$\mu_{n+m} = \mu_n \times \mu_m$$

Свойство 6.2. *Если μ и ν являются σ-конечными, то $\mu \times \nu$ — тоже.*

Свойство 6.3. *Произведение мер ассоциативно.*

Свойство 6.4. *Все теоремы этого параграфа с доказательствами верны для полных σ-конечных мер.*

Теорема 5 (Теорема Тонелли для абстрактных пространств с мерой)**.** *Пусть $E \subset X \times Y$, $f \in S_{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}}(E \to [0; +\infty])$. Тогда*

1. *При почти всех $x \in x$ функция $f(x; \bullet) \in S_{\mathbb{B}}(E(x))$.*
2. *Пусть $I(x) = \int_{E(x)} f(x; \bullet)\ \mathrm{d}\nu$. Тогда $I(x) \in S_{\mathbb{A}}(X)$.*
3. $$\int_E f\ \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_X I(x)\ \mathrm{d}\mu$$

Замена переменной в интеграле.

Теорема 6 (Общая схема замены переменной в интеграле)**.** *Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$, $(Y; \mathbb{B}; \nu)$ — пространства с мерами. Пусть $h \in S_{\mathbb{A}}(X \to [0; +\infty])$, $\Phi\colon X \to Y$ и*

$$\forall B \in \mathbb{B}\ \Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A} \qquad \forall B \in \mathbb{B}\ \nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h\ \mathrm{d}\mu$$

Пусть $f \in S_{\mathbb{B}}(Y)$. Тогда

1. *$f \circ \Phi \in S_{\mathbb{A}}(X)$.*
2. $$\int_Y f\ \mathrm{d}\nu = \int_X (f \circ \Phi) h\ \mathrm{d}\mu$$

   (Трактовка стандартная: интегралы существуют или нет одновременно, если существуют, то равны.)

Доказательство.

1. Рассмотрим Лебегово множество

   $$X(f \circ \Phi > a) = \{x \in X \mid f(\Phi(x)) > a\} = \{x \in X \mid \Phi(x) \in Y(f > a)\} = \Phi^{-1}(Y(f > a))$$

   По условию $Y(f > a) \in \mathbb{B}$, а значит $\Phi^{-1} \in \mathbb{A}$.
2. Разберём случаи

   a. $f = \chi_B \mid B \in \mathbb{B}$. Тогда

   $$(\chi_B \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Phi^{-1}(B) \\ 0 & x \notin \Phi^{-1}(B) \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}(x)$$

   Тогда

   $$\int_Y \chi_B\ \mathrm{d}\nu = \nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h\ \mathrm{d}\nu = \int_X \underbrace{\chi_{\Phi^{-1}(B)}}_{f\circ\Phi} h\ \mathrm{d}\nu$$

   b. По линейности равенство верно для простых функций.

c. Для положительных измеримых функций рассмотрим последовательность φ_n, возрастающую к f и перейдём к пределу в равенстве

$$\int_Y \varphi_n \, \mathrm{d}\nu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi) h \, \mathrm{d}\mu$$

по теореме Леви.

d. Для произвольных измеримых функций рассмотрим $f_\pm$

$$\int_Y f_\pm \, \mathrm{d}\nu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi)_\pm h \, \mathrm{d}\mu = \int_X (\varphi_n \circ \Phi h)_\pm \, \mathrm{d}\mu$$

□

Замечание. В условиях теоремы 6 суммируемость f по ν равносильная суммируемости $(f \circ \Phi)h$ по μ

Следствие 1.1. *В условиях теоремы 6 если $B \in \mathbb{B}$, $f \in S_{\mathbb{B}}(B)$, то*

$$\int_B f \, \mathrm{d}\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) h \, \mathrm{d}\mu$$

Доказательство. Продолжим f нулём на $Y \setminus B$. □

Определение 7. В условии теоремы 6 ν называется h-взвешенным Φ-**образом меры** μ.

Замечание. Пусть

$$\mathbb{A}^* = \{\Phi^{-1}(B) \mid B \in \mathbb{B}\}$$

Нетрудно заметить, что это σ-алгебра.
В условиях теоремы 6 $\mathbb{A}^* \subset \mathbb{A}$.
Пусть

$$\mathbb{B}^* = \{B \subset Y \mid \Phi^{-1} \in \mathbb{A}\}$$

тогда условиях теоремы 6 $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^*$.

Утверждение. *Если*

$$\nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} h \, \mathrm{d}\mu$$

То ν — мера на $\mathbb{B}$.

Доказательство. Остаётся как несложное упражнение читателю. □

Пример. $h \equiv 1$ — невзвешенный образ меры.

$$\nu B = \mu \Phi^{-1}(B) \Rightarrow \int_Y f \, \mathrm{d}\nu = \int_X f \circ \Phi \, \mathrm{d}\mu$$

Пример. $X = Y$, $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, $\Phi = \mathrm{id}$.

$$\nu A = \int_A h \, \mathrm{d}\mu \Rightarrow \int_X f \, \mathrm{d}\nu = \int_X fh \, \mathrm{d}\mu$$

Тогда пишут $\mathrm{d}\nu = h \mathrm{d}\mu$.

Определение 8. Если

$$\nu A = \int_A h \, \mathrm{d}\mu$$

то h называется **плотностью** меры ν относительны меры μ.

Свойство 8.1. *Если $h = \tilde{h}$ μ-почти везде, то $\nu = \tilde{\nu}$. Для σ-конечных мер верно и обратное.*
Без доказательства.

Теорема 7 (Критерий плотности)**.** *Пусть даны* $X, \mathbb{A}$ *и* μ *и* ν *— меры на* $\mathbb{A}$*,* $h\colon S(X \to [0; +\infty])$*. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. h *— плотность* ν *относительны* μ*.*
2. $$\forall A \in \mathbb{A}\ \mu A \inf_A h \leqslant \nu A \leqslant \mu A \sup_A h$$

Доказательство.

- Из первого во второе ясно из оценки интеграла.
- Рассмотрим
$$A = A(h = 0) \cup A(0 < h < +\infty) \cup A(h = +\infty)$$
Равенство есть для первой части:
$$\nu A(h = 0) = \int_{A(h=0)} h \ \mathrm{d}\mu$$
так как левое равно нулю по условию второго утверждения, а правое — потому что функция тождественный ноль.
также очевидно равенство есть для третьей части:
$$\nu A(h = +\infty) = \begin{cases} +\infty & \mu A > 0 \\ 0 & \mu A \equiv 0 \end{cases} = \int_{A(h=+\infty)} h \ \mathrm{d}\mu$$
Далее можно считать $0 < h < +\infty$ на A.
Рассмотрим $q \in (0; 1)$. Пусть
$$A_j = A(q^j \leqslant h < q^{j-1})$$
Очевидно, $A_j \in \mathbb{A}$ и $\bigsqcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} A_j = A$. Нам известно, что
$$q^j \mu A_j \leqslant \nu A_j \leqslant q^{j-1} \mu A_j$$
А ещё из оценки интеграла
$$q^j \mu A_j \leqslant \int_{A_j} h \ \mathrm{d}\mu \leqslant q^{j-1} \mu A_j$$
Отсюда
$$\begin{aligned} q \int_A h \ \mathrm{d}\mu = q \sum_j \int_{A_j} h \ \mathrm{d}\mu \leqslant \\ \leqslant \sum_j q^j \mu A_j \leqslant \sum_j \nu A_j = \\ = \boxed{\nu \text{A}} \leqslant \sum_j q^{j-1} \mu A_j \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{q} \sum_j \int_{A_j} h \ \mathrm{d}\mu = \\ = \frac{1}{q} \int_A h \ \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$
Если взять начало, конец и то, что в квадратике, после чего устремить q к единицу, то получим искомое.

□

Интеграл по дискретной мере.

Пример. δ-мера.
Пусть X — пространство, $E \subset X$, $a \in X$, тогда, напомним, δ-мера — это

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1 & a \in E \\ 0 & a \notin E \end{cases}$$

В качестве сигма-алгебры выступает 2^X. Пусть $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Что тогда такое интеграл по этой мере?

$$\int_E f \, \mathrm{d}\delta_a = \begin{cases} 0 & a \notin E \\ \int_{\{a\}} f \, \mathrm{d}\delta_a = f(a) & a \in E \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть μ — считающая мера на X, $E \subset X$, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_E f$$

Интеграл и сумма существуют или не существуют одновременно, если существуют, то равны.

Доказательство. будем постепенно усложнять f.

1. Сначала докажем для характеристической функции $f = \chi_A$, $A \subset E$. Тогда

$$\int_E \chi_A \, \mathrm{d}\mu = \mu A = \sum_A 1 = \sum_A \chi_A$$

2. По линейности равенство верно для простых функций f.

3. $f \geqslant 0$. Разберём два случая:

   - Пусть $\int_E f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$. Тогда

   $$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{A \subset E \\ \mu A < +\infty}} \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

   Условие $\mu A < +\infty$ значит что $|A| < +\infty$ (у нас считающая мера). А на конечном множестве положительная функция простая:

   $$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{A \subset E \\ \mu A < +\infty}} \sum_A f$$

   Справа написано буквально определение $\sum\limits_E f$ (там супремум частичных сумм).

   - Пусть $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = +\infty$. По определению интеграла неотрицательной функции

   $$\forall N > 0 \ \exists \text{простая } \varphi \leqslant f \text{ на } E \ \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu \geqslant N$$

   При этом

   $$\sum_E f \geqslant \sum_E \varphi = \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu \geqslant N$$

4. Дальше надо рассмотреть f_+ и f_-, там всё понятно. Если в одной части нет одновременно двух бесконечностей, то в другой — тоже.

$\square$

Замечание. Причём тут замена переменной?

Следствие 2.1. *Пусть $h\colon X \to [0;+\infty]$, μ — считающая на X, ν — дискретная мера с весовой функцией h:*

$$\forall B \subset X \ \nu B = \sum_{B} h$$

Пусть $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\int_E f \ \mathrm{d}\nu = \sum_E f \cdot h$$

Доказательство. По только что доказанной лемме

$$\nu B = \int_B h \ \mathrm{d}\mu$$

А тогда h — плотность ν относительно μ. Тогда по теореме 6

$$\int_E f \ \mathrm{d}\nu \overset{6}{=} \int_E fh \ \mathrm{d}\mu = \sum_E fh$$

□

Пример. Если $X = \mathbb{N}$, μ — считающая мера, т

$$\int_{\mathbb{N}} f \ \mathrm{d}\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)$$

То есть суммируемость f равносильна абсолютной сходимости ряда $f(k)$.

Пример. Пусть $\{a_k\}_k$ — не более чем счётный набор различных точек X, $\{h_k\}_k \subset [0;+\infty]$, $\nu B = \sum\limits_{k:a_k \in B} h_k$. Тогда

$$\int_E f \ \mathrm{d}\nu = \sum_{k:a_k \in B} f(a_k) h_k$$

И опять суммируемость функции равносильна суммируемости семейства (на сей раз семейства $|f(a_k)|h_k$).
Замечание: тут h из следствия — это не совсем h_k. Тут $h_k = h(a_k)$

Замена переменной в интеграле по мере Лебега .

Утверждение. *Пусть $G \in \mathbb{A}_n$. Тогда*

$$\mathbb{A}_n(G) = \{E \in \mathbb{A}_n \mid E \subset G\}$$

является σ-алгеброй на G.

Доказательство. Очевидно. □

Утверждение. $(G; \mathbb{A}_n(G); \mu\big|_{\mathbb{A}_n(G)})$ *— пространство с мерой.*

Доказательство. Очевидно. □

Замечание. До конца параграфа μ — мера Лебега.

Замечание. Напоминание:
Пусть G, V открыты в $\mathbb{R}^n$. Тогда отображение $\Phi\colon G \to V$ называется **диффеоморфизмом**, если Φ гладкая биекция, обратная функция к которой тоже гладкая.
При этом обычно V опускается, и под «диффеоморфизмом Φ на G называется диффеоморфизм $G \to \Phi(G)$».
Также заметим некоторые свойства: якобиан Φ нигде не равен нулю. При этом если G открыто, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$ гладко и обратимо и $\det \Phi'(x)$ нигде не равен нулю, то $\Phi(G)$ открыто и $\Phi^{-1} \in C^{(1)}(\Phi(G))$.

Замечание. Также мы знаем, что гладкая замена переводит измеримые множества в измеримые. Вопрос: чему равно $\mu\Phi(A)$? Мы знаем ответ для линейного и аффинного отображения (мера умножается на модуль определителя). При этом для линейного и аффинного отображения $\Phi' = \Phi$, а значит

$$\mu\Phi(E) = |\det\Phi'|\mu E$$

А что в более общем случае? Ну, запишем определение дифференцируемости Φ:

$$\Phi(x) = \underbrace{\Phi(x^0) + \Phi'(x)(x - x^0)}_{\widetilde{\Phi}_{x^0}(x)} + o(x - x^0)$$

Если $\Phi = \widetilde{\Phi}$, то ответ мы знаем. При этом $\widetilde{\Phi}$ тем ближе к Φ, чем ближе x к x^0. Отсюда возникает предположение, что $|\det\Phi'(x^0)|$ — плотность $\mu\Phi(\bullet)$ относительно μ. И нам удастся это доказать для диффеоморфизма.

Теорема 8 (Преобразование меры Лебега при диффеоморфизме)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, Φ — диффеоморфизм на G. Тогда*

$$\forall E \in \mathbb{A}_n(G)\ \mu\Phi(E) = \int_E |\det\Phi'|\ \mathrm{d}\mu$$

Доказательство. Why are we still here? Just to suffer.
Для начала пусть $\nu(E) = \mu\Phi(E)$. Несложно проверить, что ν — это мера на $\mathbb{A}_n(G)$.
Теперь нам надо доказать, что $|\det\Phi'|$ — плотность ν относительно μ. Тогда по определению плотности мы победим. У нас был критерий плотности, который мы хотим применить. Что нам надо проверить для этого?

$$\forall E \in \mathbb{A}_n(G)\ \mu E \inf_E |\det\Phi'| \leqslant \mu\Phi(E) \leqslant \mu E \sup_E |\det\Phi'|$$

Здесь есть два неравенства. Мы не хотим доказывать оба. Мы хотим сказать, что если правое доказать для **любого** диффеоморфизма Φ, то из него будет следовать левое. Почему? Ну, применим правое к отображению Φ^{-1} и множеству $\Phi(E)$:

$$\mu\Phi^{-1}(\Phi(E)) \leqslant \mu\Phi(E) \sup_{y\in\Phi(E)} |\det{\Phi^{-1}}'(y)|$$

Левая штука — μE. С $\mu\Phi(E)$ делать нечего, а вот с тем, что после него — есть что.

$$\sup_{y\in\Phi(E)} |\det{\Phi^{-1}}'(y)| = \sup_{y\in\Phi(E)} \frac{1}{|\det\Phi'(\Phi^{-1}(y))|} = \sup_{x\in E} \frac{1}{|\det\Phi'(x)|} = \frac{1}{\inf\limits_{x\in E} |\det\Phi'(x)|}$$

Кажется, это то, что мы хотели.
Теперь наконец начнём доказывать правое неравенство, постепенно усложняя E.

1. Пусть $E = \Delta$ — кубическая ячейка, $\overline{\Delta} \subset G$. Докажем неравенство от противного. Пусть

   $$\mu\Phi(\Delta) > \mu\Delta \sup_\Delta |\det\Phi'|$$

   отсюда

   $$\exists C > \mu\Delta \sup_\Delta |\det\Phi'|\ \mu\Phi(\Delta) > C\mu\Delta$$

   Будем действовать методом половинного деления. Каждое ребро ячейки попилим пополам, получим 2^n ячеек. Хотя бы для одной из этих ячеек (обозначим её за Δ_1) будет верно $\mu\Phi(\Delta_1) > C\mu\Delta_1$. Иначе можно было бы сложить эти неравенства, воспользоваться аддитивностью меры и прийти к противоречию. Сделаем так ещё неограниченное количество раз.
   Получим последовательность вложенных ячеек $\Delta_k \supset \Delta_{k+1}$, для каждой выполнено неравенство $\mu\Phi(\Delta_k) > C\mu\Delta_k$, при этом $\operatorname{diam}\Delta_k \to 0$. Ну тогда, $\overline{\Delta_k}$ все имеют общую точку $x^0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\Delta_k} \subset \overline{\Delta}$.
   Теперь будем усложнять Φ))

(a) Рассмотрим случай $\Phi'(x^0) = I$. Тогда

$$\Phi(x) = \Phi(x^0) + (x - x^0) + o(x - x^0)$$

С точностью до двух сдвигов, Φ почти тождественный оператор:

$$\Theta(x) = \Phi(x) - \Phi(x^0) + x^0 = x + o(x - x^0)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём такое δ из определения $o(x - x^0)$, что

$$\forall x \in B(x^0; \delta)\ |\Theta(x) - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}|x - x^0|$$

Очень хорошо. Заметим, что в некотором номере N $\overline{\Delta_N} \subset B(x^0; \delta)$. Пусть $\overline{\Delta_N} = [a; a + r\mathbb{1}] \ni x^0$. Тогда

$$x \in \overline{\Delta_n} \Rightarrow |x - x^0| \leqslant r\sqrt{n} \Rightarrow |\Theta(x) - x| \leqslant \varepsilon r$$

Тогда

$$\forall j \in [1 : n]\ |\Theta_j(x) - x_j| \leqslant \varepsilon r$$

А это значит, что

$$a - \varepsilon r \leqslant x_j - \varepsilon r \leqslant \Theta_j(x) \leqslant x_j + \varepsilon r \leqslant a + (1 + \varepsilon)r$$

другими словами $\Theta(x) \in [a - \varepsilon r\mathbb{1}; a + (1 + \varepsilon)r\mathbb{1}]$. обозначим этот куб буквой Π. Тогда $\Theta(\Delta_N) \subset \Pi$. Тогда

$$\mu\Phi(\Delta_N) = \mu\Theta(\Delta_N) \leqslant \mu\Pi = (1 + 2\varepsilon)^n r^n = (1 + 2\varepsilon)^n \mu\Delta_N$$

И это уже почти противоречие. Но мы его не хотим, давайте сначала возьмём произвольное Φ, и там уже докопаемся до противоречия.

(b) Итак, пусть Φ произвольное. Пусть $S = (\Phi'(x^0))^{-1}$ (это линейный оператор, его производная в любой точке — он сам). Пусть $\Psi = S \circ \Phi$. Ну, хорошо

$$\Psi'(x^0) = \underbrace{S'(\Phi(x^0))}_{S} \Phi'(x^0) = S\Phi'(x^0) = I$$

Ψ подходит под наш предыдущий случай, а значит мы нашли для него N:

$$\mu\Psi(\Delta_N) \leqslant (1 + 2\varepsilon)^n \mu\Delta_N$$

При этом

$$\mu\Psi(\Delta_N) = \mu S(\Phi(\Delta_N)) = |\det S|\mu\Phi(\Delta_N) = \frac{1}{|\det \Phi'(x^0)|}\mu\Phi(\Delta_N)$$

Из двух этих утверждений

$$\mu\Phi(\Delta_N) \leqslant (1 + 2\varepsilon^n)|\det \Phi'(x^0)|\mu\Delta_N$$

А ещё мы знаем, что $C\mu\Delta_n \leqslant \mu\Phi(\Delta_n)$. А это уже капец:

$$C < (1 + 2\varepsilon)^n|\det \Phi'(x^0)| \longrightarrow C \leqslant |\det \Phi(x^0)|$$

А у нас по выбору C $C > \sup\limits_{\Delta}|\det \Phi'| \overset{|\det \Phi'|\text{непрерывно}}{=} \sup\limits_{\overline{\Delta}}|\det \Phi'| > |\det \Phi'(x^0)|$

2. Пусть $E = U$ открытое подмножество G. Открытое множество можно представить как счётное объединения ячеек:

$$U = \bigsqcup_k D_k$$

Где D_k — кубические ячейки, $\overline{D_k} \subset U$. Тогда

$$\mu\Phi(U) = \mu\Phi\left(\bigsqcup_k D_k\right) = \mu\bigsqcup_k \Phi(D_k) = \sum_k \mu\Phi(D_k) \leqslant \sum_k \mu D_k \sup_{D_k}|\det \Phi'| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k \mu D_k \sup_U |\det \Phi'| = \sup_U |\det \Phi'| \sum_k \mu D_k = \mu U \sup_U |\det \Phi'|$$

3. От открытого множества у произвольному $E \in \mathbb{A}_n(G)$. Тут будем пользоваться регулярностью меры Лебега:

$$\mu\Phi(E) = \inf_{\substack{V \text{ открыто} \\ \Phi(E)\subset V\subset\Phi(G)}} \mu V = \inf_{\substack{U \text{ открыто} \\ E\subset U\subset G}} \mu\Phi(U) \leqslant \inf_{\substack{U \text{ открыто} \\ E\subset U\subset G}} \left(\mu U \sup_U |\det\Phi'|\right)$$

Хочется доказать, что это равно $\mu E \sup_E |\det\Phi'|$. Мы знаем, что правая часть больше либо равна $\mu E \sup_E |\det\Phi'|$, а нам надо доказать, что меньше либо равно.
Если $\mu E = 0$, то неравенство очевидно (тогда $\mu\Phi(E) = 0$, гладкое отображение переводит множество меры ноль в множество меры ноль). Если $\mu E = +\infty$, no доказывать нечего. И если супремум $\sup_E |\det\Phi'|$ равен $+\infty$, то тоже (в правой части либо 0 (когда $\mu E = 0$), либо бесконечность; в обоих случаях доказывать нечего).
Далее считаем $\mu E, \sup_E |\det\Phi'| \in (0; +\infty)$. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\exists \text{октрытое } U, E \subset U \subset G, \mu U \leqslant \mu E + \varepsilon, \sup_U |\det\Phi'| \leqslant \sup_E |\det\Phi'| + \varepsilon$$

первое условие — регулярность меры Лебега, а второе вот:

$$x \in E\ \exists V_x \subset G\ \forall t \in V_x\ \ ||\det\Phi'(t)| - |\det\Phi'(x)|| \leqslant \varepsilon$$

Тогда

$$U = \bigcup_{x\in E} V_x$$

Такое U подходит под

$$\sup_U |\det\Phi'| \leqslant \sup_E |\det\Phi'| + \varepsilon$$

Если пересечь его с тем, которое в регулярности меры Лебега, то получится искомое U из утверждения выше. Тогда

$$\inf_{\substack{U \text{ открыто} \\ E\subset U\subset G}} \left(\mu U \sup_U |\det\Phi'|\right) \leqslant (\mu E + \varepsilon)\left(\sup_E |\det\Phi'| + \varepsilon\right)$$

Устремив ε к нулю, получим искомое.

□

Теорема 9 (Замена переменной в кратном интеграле)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто, Φ — диффеоморфизм на G, $E \in \mathbb{A}_n(G)$, $f \in S(\Phi(E))$. Тогда*

$$\int_{\Phi(E)} f\ \mathrm{d}\mu = \int_E (f\circ\Phi)|\det\Phi'|\ \mathrm{d}\mu$$

Интегралы существуют или не существуют одновременно, если существуют, то равны.
Также равенство пишется как

$$\int_{\Phi(E)} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_E (f\circ\Phi)(x)|\det\Phi'(x)|\ \mathrm{d}x$$

Доказательство. Возьмём теорему 6 и возьмём в ней

$$(X; \mathbb{A}; \mu) = (G; \mathbb{A}_n(G); \mu) \qquad (Y; \mathbb{B}; \nu) = (\Phi(G); \mathbb{A}_N(\Phi(G)); \mu) \qquad h = |\det\Phi'|$$

От нас хотят равенство

$$\forall B \in \mathbb{B}\ \Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A}, \nu B = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} \int h\ \mathrm{d}\mu$$

Ну, если $B = \Phi(E)$, то $\nu\Phi(E) = \int_E |\det\Phi'|\ \mathrm{d}\mu$. А это мы доказали в 8. □

Следствие 2.1. *В условии теоремы 9*

$$f \in L(\Phi(E)) \Leftrightarrow (f \circ \Phi)|\det \Phi'| \in L(E)$$

Следствие 2.2. *Пусть $G \subset H \subset \mathbb{R}^n$, G открыто. Пусть $\Phi\colon H \to \mathbb{R}^n$ и пусть $\Phi\big|_G$ — диффеоморфизм. И пусть ещё $\mu(H \setminus G) = \mu(\Phi(H) \setminus \Phi(G)) = 0$. $E \in \mathbb{A}_n(H)$, $f \in S(\Phi(E))$. Тогда верна формула замены переменной:*

$$\int_{\Phi(E)} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_E (f \circ \Phi)(x)|\det \Phi'(x)|\ \mathrm{d}x$$

Доказательство.

$$\int_{\Phi(E)} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_{\Phi(E\cap G)} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_{E\cap G} (f \circ \Phi)(x)|\det \Phi'(x)|\ \mathrm{d}x = \int_E (f \circ \Phi)(x)|\det \Phi'(x)|\ \mathrm{d}x$$

□

Замечание. Ослаблять условия теоремы 9 дальше трудно и больно. Но можно. Но туда мы лезть не будем. Для желающих есть книжка Эванса и Гариепи «Теория меры и тонкие свойства функций».

Замечание. А что у нас в $n = 1$, как это коррелирует с тем, что мы знаем?

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' \qquad \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$$

Почему модуль? На самом деле у нас и тут есть модуль? Потому что φ может как возрастать, так и убывать, и во втором случае у нас меняются местами пределы интегрирования. А в формуле 9 ориентации на E не задано.

Пример. Сдвиг и отражение.
$\Phi(x) = a \pm x$, $a \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, это диффеоморфизм и модуль якобиана равен единице. То есть

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(a \pm x)\ \mathrm{d}x$$

Пример. Полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.
$(x; y) = (r\cos\phi; r\sin\phi) = \Phi(r; \phi)$. Посчитаем якобиан:

$$\begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r$$

Это не равно нулю всюду, кроме начала координат. Где Φ — диффеоморфизм? По-разному можно отвечать, например, так: удалим из плоскости отрицательную часть вещественной оси. Тогда $G = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi)$, $\Phi(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x; 0) \mid x \leqslant 0\}$. Тогда Φ — диффеоморфизм. Очевидно, пренебрегать тем, что мы сделали, можно, там мера ноль.
Посчитаем следующий интеграл:

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$$

Это не берётся, но посчитать можно:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\ \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\ \mathrm{d}y\right) = \iint\limits_{(0;+\infty)^2} e^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\substack{x=r\cos\phi \\ y=r\sin\phi}}{=}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\ \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left.\frac{-e^{-r^2}}{2}\right|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Отсюда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Пример. Цилиндрические координаты: $(x; y; z) = (r\cos\phi; r\sin\phi; h) = \Phi(r; \phi; h)$. Тогда $\det\Phi' = r$, $G = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi) \times \mathbb{R}$, $\Phi(G) = \{(x; 0; z) \mid x \leqslant 0, z \in \mathbb{R}\}$.

Пример. Сферические координаты:

$$\begin{cases} \rho = r\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

(Обозначения могут быть другими.)
Тогда

$$(x; y; z) = (r\cos\phi\cos\psi; r\sin\phi\cos\psi; r\sin\psi) = \Phi(r; \phi; \psi)$$

Из написанного выше Φ можно представить как два полярных преобразования, а якобиан произведения равен произведению якобианов, т.е. $\det\Phi' = r\rho = r^2\cos\psi$.
Что покусать из пространства? Ну,

$$G = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Phi(G) = \{(x; 0; z) \mid x \leqslant 0, z \in \mathbb{R}\}$$

Пример. Сферические координаты в $\mathbb{R}^n$.
$x \in \mathbb{R}^n$, $r \in (0; +\infty)$, $\phi \in \mathbb{R}^{n-1}$. Тут тоже последовательные полярные замены:

$$\begin{cases} x_1 = \rho_1\cos\phi_1 \\ x_2 = \rho_1\sin\phi_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_1 = \rho_2\cos\phi_2 \\ x_3 = \rho_2\sin\phi_2 \end{cases} \qquad \cdots \qquad \begin{cases} \rho_{n-3} = \rho_{n-2}\cos\phi_{n-2} \\ x_{n-1} = \rho_{n-2}\sin\phi_{n-2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_{n-2} = r\cos\phi_{n-1} \\ x_n = r\sin\phi_{n-1} \end{cases}$$

Отсюда

$$\det\Phi' = \rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-2}r = r^{n-1}\cos^{n-2}\phi_{n-1}\cos^{n-1}\phi_{n-2}\cdots\cos^2\phi_3\cos\phi_2$$

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\phi_{n-1}\cos\phi_{n-2}\cdots\cos\phi_2\cos\phi_1 \\ x_2 = r\cos\phi_{n-1}\cos\phi_{n-2}\cdots\cos\phi_2\sin\phi_1 \\ x_3 = r\cos\phi_{n-1}\cos\phi_{n-2}\cdots\sin\phi_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = r\cos\phi_{n-1}\sin\phi_{n-2} \\ x_n = r\sin\phi_{n-1} \end{cases}$$

В качестве G можно берётся вот что:

$$G = (0; +\infty) \times (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)^{n-2}$$

Желающие узнать $\Phi(G)$, могут почитать учебник.

Мера и интеграл Лебега — Стилтьеса.

Определение 9. Пусть $\Delta = (\alpha; \beta) \subset \mathbb{R}$. Пусть $g\colon \Delta \to \mathbb{R}$ возрастает и непрерывна слева. Пусть $\mathbb{P}_\Delta$ — множество ячеек (полуинтервалов), содержащихся в Δ вместе с замыканием:

$$\mathbb{P}_\Delta = \{[a; b) \mid \alpha < a \leqslant b < \beta\}$$

(В случае $\Delta = \mathbb{R}$ $\mathbb{P}_\Delta = \mathbb{P}_1$.) Очевидно, $\mathbb{P}_\Delta$ — полукольцо.
Объём, порождённый функцией g — $V_g[a; b) = g(b) - g(a)$.

Свойство 9.1. *Очевидно, это объём.*

Свойство 9.2. *Объём, порождённый функцией — мера.*

Доказательство. См. доказательство для меры Лебега, но используя следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} V_g \left[a - \frac{1}{n}; b\right) = Vg[a;b) = \lim_{n\to\infty} V_g \left[a; b - \frac{1}{n}\right)$$

□

Определение 10. Стандартное продолжение V_g на некоторую σ-алгебру называется **мерой Стилтьеса — Лебега**, порождённой функцией g (и обозначается μ_g).
Сигма-алгебру, на которой определена эта мера, обозначают $\mathbb{A}_g$.

Замечание. Мера Лебега μ_1 является частным случаем меры Стилтьеса — Лебега при $g(x) = x$, $\Delta = \mathbb{R}$.

Свойство 10.1. *Мера одноточечного множества $\{a\}$ равна $g(a+) - g(a)$*

Доказательство.

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a; a + \frac{1}{n}\right)$$

По непрерывности меры

$$\mu_g\{a\} = \lim_{n\to\infty} \mu_g \left[a; a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} g\left(a + \frac{1}{n}\right) - g(a) = g(a+) - g(a)$$

□

Свойство 10.2. *Аналогично*

$$\mu_g[a;b] = g(b+) - g(a)$$
$$\mu_g(\alpha;b] = g(b+) - g(\alpha+)$$
$$\mu_g[a;\beta) = g(\beta-) - g(a)$$
$$\mu_g(\alpha;\beta) = g(\beta-) - g(\alpha+)$$

Замечание. Мера точки может быть положительной. Нулю она равна тогда и только тогда, когда g непрерывна в этой точке.

Свойство 10.3. *Мера Лебега — Стилтьеса σ-конечна. Конечна она тогда и только тогда, когда μ_g ограничена.*

Определение 11. Определим меру μ_g на промежутке произвольного типа.
Пусть $\Delta = \langle\alpha;\beta\rangle \subset \mathbb{R}$.
Если $\alpha \in \Delta$, то пусть $\widetilde{g}(x) = g(\alpha)$ при $x < \alpha$.
Если $\beta \in \Delta$, то не требуем непрерывности g слева в точке β, но положим

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \langle\alpha;\beta) \\ g(\beta-) & x = \beta \\ g(\beta) & x > \beta \end{cases}$$

После этого получим $\widetilde{g}$, заданное на открытом промежутке $\widetilde{\Delta} \supset \Delta$. При этом на нём $\widetilde{g}$ возрастает и непрерывно слева. Положим, что мера Лебега — Стилтьеса μ_g равна $\mu_{\widetilde{g}}\big|_{\mathbb{A}_{\widetilde{g}}(\Delta)}$.

Замечание. Также можно определить меру μ_g для функции g, которая возрастает на Δ, но не обязательно непрерывна слева. Тогда мы просто исправляем g в точках левого разрыва (кроме β).
Другой способ — просто определить меру Лебега — Стилтьеса как $\mu_g[a;b) = g(b-) - g(a-)$.

Замечание. У этих мер есть проблемы: $\mathbb{A}_g$ различны для разных g. А иногда хочется сложить две меры Лебега — Стилтьеса. Тогда их сужают на Борелевскую σ-алгебру (на ней они все определены т.к. определены на ячейках), получая меру Бореля — Стилтьеса (на самом деле бывает более широкая сигма-алгебра, но обычно хватает Борелевской).

Лемма 3. *Пусть Δ — промежуток в $\mathbb{R}$, есть мера ν, заданная на $\mathbb{B}_\Delta$, которая конечна на $\mathbb{P}_\Delta$ (ячейках, лежащих в Δ вместе с замыканием). Тогда существует такая $g \uparrow \Delta$, что $\nu = \mu_g\big|_{\mathbb{B}_\Delta}$.*

Доказательство. Пусть для определённости Δ открыт.
Пусть $x \in \Delta$. Определим g так:

$$g(x) = \begin{cases} \nu[x_0; x) & x \geqslant x_0 \\ -\nu[x; x_0) & x < x_0 \end{cases}$$

Возрастание g на Δ очевидно. Проверим непрерывность слева. Пусть для определённости $x > x_0$. Рассмотрим $u \in (x_0; x)$. Тогда

$$g(u) = \nu[x_0; u) \underset{u \to x-}{\longrightarrow} \nu[x_0; x) = g(x)$$

Если же $x \leqslant x_0$, возьмём $u < x$:

$$g(u) = -\nu[u; x_0) \underset{u \to x-}{\longrightarrow} -\nu[x; x_0) = g(x)$$

(Здесь мы используем конечность на отрезках.)
Осталось проверить, что ν и μ_g совпадают на ячейках. Рассмотрим $[a; b) \subset [a; b] \subset \Delta$. Тогда

$$\mu_g[a; b) = g(b) - g(a) = \begin{cases} \nu[x_0; b) - \nu[x_0; a) & x_0 \leqslant a < b \\ \nu[x_0; b) - (-\nu[a; x_0)) & a < x_0 < b = \nu[a; b) \\ -\nu[b; x_0) - (-\nu[a; x_0)) & a < b \leqslant x_0 \end{cases}$$

□

Определение 12. Интегралом Лебега — Стилтьеса называется никогда не догадаетесь что. Помимо стандартного обозначения $\int_E f \, \mathrm{d}\mu_g$ также пишут

$$\int_E f \, \mathrm{d}g \qquad \int_E f(x) \, \mathrm{d}g(x)$$

f называутся **интегрируемой функцией** (integrant), а g — **интегрирующей функцией** (integrand).

Утверждение. *Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, а $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$. Пусть $f \in S_{\mathbb{B}}(X)$. Тогда*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu\big|_{\mathbb{B}}$$

Доказательство. Частный случай замены переменной в интеграле, для $\Phi = \mathrm{id}_X$. □

Замечание. Дальше рассмотрим несколько частных случаев меры и интеграла Лебега — Стилтьеса.

Пример. Дискретная мера.
Введём

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

— тета-функцию Хевисайда. Очевидно, что

$$\mu_\theta E = \delta_0 E = \begin{cases} 1 & 0 \in E \\ 0 & 0 \notin E \end{cases}$$

А дальше рассмотрим $\{a_k\}$ — не более чем счётный набор точек из Δ, Δ открыт в $\mathbb{R}$, $\{h_k\} \subset (0; +\infty)$. (Дальше будем считать, что имеем счётный набор, конечный будет частным случаем (много нулей)). Пусть

$$\forall [a; b] \subset \Delta \sum_{k : a_k \in [a; b)} h_k < +\infty$$

Тогда возьмём $x \in \Delta, c \in \mathbb{R}$ и определим

$$g(x) = c + \sum_k h_k(\theta(x - a_k) - \theta(x_0 - a_k))$$

Заметим, что θ возрастает, а значит при фиксированном x все слагаемые одного знака. Поэтому сумма ряда есть в $\overline{\mathbb{R}}$. На самом деле эта сумма конечна.
Пусть $x \geqslant x_0$. Тогда, выкинув из суммы нулевые слагаемые, получим

$$c \leqslant g(x) = c + \sum_{k:a_k \in [x_0;x)} h_k < +\infty$$

В случае $x < x_0$ аналогично. А ещё g возрастает (т.к. это сумма ряда возрастающих функций).

Утверждение. g непрерывна везде, кроме a_k, а в a_k непрерывна только слева, а скачок равен h_k.

Доказательство. Докажем, что ряд в определении g сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в Δ.
Достаточно доказывать для $[a; x_0]$ и $[x_0; b]$ (остальные являют собой объединение или разность двух таких). Рассмотрим $[x_0; b]$, $[a; x_0]$ аналогично.
Рассмотрим $x \in [x_0; b]$. Заметим, что

$$h_k(\theta(x - a_k) - \theta(x_0 - a_k)) \leqslant h_k(\theta(b - a_k) - \theta(x_0 - a_k))$$

А ряд с тем, что справа, сходится (т.к. поточечно сходится $g(b)$), то есть g равномерно сходится по признаку Вейерштрасса.
Заметим, что все члены ряда непрерывны на $\Delta \setminus \{a_k\}_k$, а значит и сумма тоже. Также заметим, что если удалить из суммы k-тое слагаемое, то всё остальное будет непрерывным. А $h_k(\theta(x-a_k)-\theta(x_0-a_k))$ ведёт себя так, как нам хочется. □

Определение 13. Функция g такого вида, как в примере выше, называется **функцией скачков**.

Теорема 10 (Дискретная мера как мера Лебега — Стилтьеса)**.** *В условиях определения g, $\mathbb{A}_g = 2^\Delta$, μ_g — дискретная мера с нагрузками h_k в точках a_k.*

Доказательство. Если $[a; b] \subset \Delta$, то

$$\mu_g[a; b) = g(b) - g(a) = \sum_k h_k(\theta(b - a_k) - \theta(a - a_k)) = \sum_{k:a_k \in [a;b)} h_k$$

Кажется, это ровно определение дискретной меры. Обозначим её за $\nu[a; b)$. Кайф, две меры совпадают на ячейках. А значит совпадают на $\mathbb{A}_g$. (В книжке есть доказательство без теоремы о единственности стандартного продолжения меры.) Остаётся лишь доказать, что $\mathbb{A}_g = 2^\Delta$. Рассмотрим

$$H = \{a_1; a_2; \ldots\}$$

Это множество измеримо (как не более чем счётное). Значит и дополнение его измеримо. А $\mu_g(\Delta \setminus H) = 0$. А меры μ_g (как и любое стандартное продолжение) полна, а значит любое подмножество $\Delta \setminus H$ измеримо (и имеет меру ноль). Ну и всё, $A = (A \cap H) \cup (A \cap H^\complement)$, и первое измеримо как не более чем счётное, а второе как множество меры ноль. □

Замечание. Как мы видим, μ_g не зависит от x_0 и c. А значит, если ряд $\sum\limits_k h_k\theta(x - a_k)$ сходится для любого x, то $\sum\limits_k h_k\theta(x_0 - a_k)$ можно вынести в c.

Пример. $g(x) = \lfloor x \rfloor$ порождает считающую меру на $\mathbb{Z}$.

Замечание. Если $\alpha \in \Delta$ или $\beta \in \Delta$, то можно добавить нагрузки в этих точках.

Следствие 3.1.

$$\int_E f \, \mathrm{d}g = \sum_{k : a_k \in E} f(a_k) h_k$$

Замечание. Мы видим $\mathrm{d}g$. Очень хочется заменить это на $g'\mathrm{d}x$. В рассмотренном выше примере это не получится без обобщённых функций, но в некоторых примерах получится.

Замечание. Здесь и далее $\int\limits_a^b f$ — интеграл Лебега, $\int\limits_b^a f = -\int\limits_a^b f$.

Определение 14. Пусть Δ — промежуток в $\mathbb{R}$, $h\colon \Delta \to \overline{\mathbb{R}}$ называется **локально суммируемой** на Δ, еси она суммируема на любом отрезке в Δ. Обозначение: $L_{\mathrm{loc}}(\Delta)$.

Определение 15. Пусть Δ — промежуток в $\mathbb{R}$. $g\colon \Delta \to \mathbb{R}$ называется **локально абсолютно непрерывной** на Δ, если g представляется в виде $g(x) = \int_{x_0}^x h + \underbrace{\mathrm{const}}_{g(x_0)}$, где $x_0 \in \Delta$, h локально суммируема.

Обозначение $AC_{\mathrm{loc}}(\Delta)$.

Замечание. Далее мы будем опускать слово «локально» в этом термине.

Свойство 15.1. *Если h непрерывно в точке x, то g дифференцируема в ней и $g'(x) = h(x)$.*

Доказательство. См. доказательство теоремы Барроу. □

Свойство 15.2. *По теореме Барроу и формуле Ньютона — Лейбница*

$$C^{(1)}(\Delta) \subsetneqq AC_{\mathrm{loc}}(\Delta)$$

Доказательство. Включение строгое, если в качестве h взять θ. □

Свойство 15.3.

$$AC_{\mathrm{loc}}(\Delta) \subsetneqq C(\Delta)$$

Свойство 15.4. *Для включения см. теорему об абсолютной непрерывности интеграла из прошлого семестра.*
Включение строгое:

$$g(x) = \int_x^1 \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \qquad \Delta = [0; 1]$$

В $x = 0$ условно сходится (а значит функция g непрерывна), но абсолюно непрерывной она не будет т.к. единственный кандидат на роль h ($\frac{1}{t} \sin \frac{1}{t}$) не суммируемо.

Замечание. Более интересно то, что включение строгое, даже если рассматривать только возрастающие функции. Например, если взять Θ — канторову лестницу, то h по крайней мере в дополнительных канторовых промежутках была равна производной Θ, а значит почти везде была бы равна нулю.

Свойство 15.5. *Если $g \in AC_{\mathrm{loc}}(\Delta)$, то g дифференцируема в почти всех точках Δ, $g' \in L_{\mathrm{loc}}(\Delta)$ и $g' = h$ почти везде.*
Без доказательства.

Следствие 3.2. *Тогда*

$$g(x) = \int_{x_0}^x g' + g(x_0)$$

Утверждение. *Однако условие «g почти везде дифференцируема на Δ и $'g \in L_{\mathrm{loc}}(\Delta)$» не влечёт равенства*

$$g(x) = \int_{x_0}^x g' + g(x_0)$$

(и не влечёт абсолютной локальной непрерывности).

Доказательство. Канторова лестница. □

Замечание. Абсолютно локально непрерывные функции — в точности те функции, для которых верна формула Ньютона — Лейбница.

Утверждение. *Если g возрастает на $[a; b]$, то g дифференцируема почти везде на $[a; b]$. Тогда g' неотрицательно почти везде и*

$$\int\limits_a^b g' \leqslant g(b) - g(a)$$

Без доказательства.

Теорема 11 (Интеграл Лебега — Стилтьеса абсолютно локально непрерывной функции.)**.** *Пусть Δ — промежуток в $\mathbb{R}$, $h \in L_{\mathrm{loc}}(\Delta)$, $h \geqslant 0$,$x_0 \in \Delta$,*

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} h + g(x_0) \qquad x \in \Delta$$

Тогда

1. $\mathbb{A}_1(\Delta) \subset \mathbb{A}_g(\Delta)$.
2. *Если $E \in \mathbb{A}_1(\Delta)$, $f \in S(E)$, то $\int_E f \, \mathrm{d}g = \int_E fh$. Интегралы существуют или нет одновременно, если существуют, то равны.*

Доказательство. Пусть $\nu E = \int_E h$. Это мера на $\mathbb{A}_1(\Delta)$. Заметим, что тогда второе утверждение — замена переменной в интеграле. О'кей, заметим, что μ_g и ν равны нулю на одноточечном множестве, а значит можно считать Δ открытым.

Круть, заметим, что $\mu_g[a; b) = g(b) - g(a) = \int\limits_a^b h = \nu[a; b)$, то есть ν и μ_g совпадают на ячейках. А значит совпадают на $\mathbb{B}_\Delta$. А хочется, чтобы они совпадали на измеримых Лебегу множествах.
Хорошо, давайте дальше проверим, что ν и μ_g совпадают на множествах нулевой меры. Возьмём $e \subset \Delta : \mu_1 e = 0$. Его можно заключить в множестве типа G_δ с нулевой мерой, а на множестве типа G_δ ν и μ_g совпадают (и равны нулю). Тогда по полноте μ_g $e \in \mathbb{A}_g(\Delta)$.
Итого рассмотрев множество $E \in \mathbb{A}_1(\Delta)$, представим его как $A \cup e$, где $A \in \mathbb{B}_\Delta$, $\mu_1 e = 0$, получим, что любое такое E лежит в $\mathbb{A}_g(\Delta)$.
Осталось применить теорему 6 ($\Phi = \mathrm{id}_\Delta$). □

Следствие 3.1. *Если $g \in C^{(1)}(\Delta)$ и возрастает, то $\int_E f \, \mathrm{d}g = \int_E fg'$*

Замечание. Очень жаль, но наши два примера — это не все функции.

Определение 16. $g \colon \Delta \to \mathbb{R}$ называется **сингулярной**, если $g \equiv 0$ **или** g непрерывна, $g \neq \mathrm{const}$ и $g' = 0$ почти везде.

Пример. Канторова лестница.

Утверждение. *Пусть $g \colon \Delta \to \mathbb{R}$, возрастает и непрерывна слева (кроме, возможно, правого конца Δ). Тогда g единственным образом (с точностью до константы) представляется в виде*

$$g = g_{\mathrm{disc}} + g_{\mathrm{c}}$$

где первое — функция скачков, второе — непрерывная. При этом

$$g_{\mathrm{c}} = g_{\mathrm{ac}} + g_{\mathrm{sing}}$$

Где первое — абсолютно непрерывна, второе — сингулярна. При этом все эти g также возрастают и непрерывны слева (кроме, возможно, левого конца).
Что интересно, то же самое можно записать для мер Стелтьеса — Лебега (по крайней мере на $\mathbb{B}_\Delta$):

$$\mu_g = \mu_{g_{\mathrm{disc}}} + \mu_{g_{\mathrm{ac}}} + \mu_{g_{\mathrm{sing}}}$$

Определение 17. Интеграл Лебега — Стилтьеса функции произвольного знака.
Пусть $g = g_1 - g_2$, где g_1, g_2 возрастают. Пусть f, E — борелевские. Тогда положим

$$\int_E f \ \mathrm{d}g = \int_E f \ \mathrm{d}g_1 - \int_E f \ \mathrm{d}g_2$$

Если правая часть существует.

Свойство 17.1. *Нетрудно заметить, что этот интеграл не зависит от конкретного разбиения g на g_1 и g_2.*

Замечание. В частности, на отрезке можно интегрировать по функции ограниченной вариации.

Свойство 17.2. *Интеграл заведомо существует и конечен для борелевской ограниченной функции f.*

Свойство 17.3. *Для таких интегралов верна теорема 11.*

Теорема 12 (Интегрирование по частям в интеграле Лебега — Стилтьеса.)**.** *Пусть $f \in AC[a;b]$, $g \in V[a;b]$. Тогда*

$$\int_{[a;b]} f \ \mathrm{g} = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

Доказательство. Считаем, что g возрастает, (иначе представим в виде разности двух возрастающих) и непрерывна слева (кроме, может, b).

- Докажем сначала формулу в частном случае $f(a) = g(b) = 0$. Тогда

$$\int_{[a;b]} f \ \mathrm{d}g = \int_{[a;b]} \left(\int\limits_a^x f'(u) \ \mathrm{d}u \right) \ \mathrm{d}g(x)$$

Хочется воспользоваться теоремой Фубини. Тогда заметим, что $a \leqslant u \leqslant x \leqslant b$, то есть имеем треугольник. Чтобы менять порядок интегрирования, надо проверить суммируемость подынтегральной функции. Для этого ставим модуль $|f'(u)|$. Тогда изменить порядок интегрирования можно по Тонелли и получить $\int\limits_a^b |f'|g$, где первое суммируемо, второе ограничено, а значит интеграл небесконечен. То есть $f'(u)$ суммируема

$$\int_{[a;b]} f \ \mathrm{d}g = \int_{[a;b]} f'(u) \underbrace{\left(\int_{[u;b]} \mathrm{d}g(x) \right)}_{\mu_g[u;b] = g(b) - g(u) = -g(u)} \mathrm{d}u = -\int\limits_a^b f'g$$

Получили то, что хотели.

- Общий случай: рассмотрим $f - f(a)$ и $g - g(b)$. По доказанному,

$$\int_{[a;b]} f - f(a) \ \mathrm{d}(g - \cancel{g(b)}) = -\int\limits_a^b (f - \cancel{f(a)})'(g - g(b))$$

Тогда

$$\int_{[a;b]} f \ \mathrm{d}g - f(a) \int_{[a;b]} \mathrm{d}g = -\int\limits_a^b f'g + \int\limits_a^b f'g(b)$$

При этом $\int_{[a;b]} \mathrm{d}g$ мы уже считали, это $g(b) - g(a)$, а $\int\limits_a^b f' = f(b) - f(a)$ по формуле Ньютона — Лейбница ($f \in AC[a;b]$). Приведя подобные слагаемые, получим искомое.

□

Следствие 3.1 (Интегрирование по частям в интеграле Лебега)**.** *Если* $f, g \in AC[a;b]$, *то*

$$\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

Интегралы, зависящие от параметра.

Определение 18. Пусть $(X;\mathbb{A};\mu)$ — пространство с мерой, Y — множество (произвольное). И есть функция $f\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Пусть также

$$\forall y \in Y \;\; f(\bullet;y) \in L(X;\mu)$$

Тогда $I(y) = \int_X f(x;y)\ \mathrm{d}x$ называется **интегралом, зависящим от параметра**.

Замечание. Чтобы исследовать свойства интеграла с параметром, придётся вводить дополнительную структуру на Y. Например, если Y — метрическое пространство, можно ли перейти к пределу под знаком интеграла? Или есть ли непрерывность интеграла с параметром. Что можно сказать о дифференцируемости I и о её производной (тогда уже надо считать Y подмножеством $\mathbb{R}^n$). Можно ли интегрировать по y, если Y — пространство с мерой?
Впрочем, ответ на 4 вопросы мы знаем — см. теоремы Тонелли и Фубини. На остальные сейчас попытаемся ответить.

Теорема 13 (Предельный переход по параметру под знаком интеграла)**.** *Пусть* $(X;\mathbb{A};\mu)$ *— пространство с мерой,* $\tilde{Y}$ *— пространство с морой,* $Y \subset Y$. *Пусть* $f\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *и пусть*

$$\forall y \in Y \;\; f(\bullet;y) \in L(X;\mu)$$

Пусть y_0 *— предельная точка* Y, *при почти всех* $x \in X$ $f(x;y) \underset{y \to y_0}{\to} g(x)$.
Пусть

$$\exists \Phi \in L(X;\mu)\ \exists V_{y_0}\ \text{при почти всех}\ x \in X\ \forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y\ |f(x;y)| \leqslant \Phi(x)$$

Тогда

$$\lim_{y \to y_0} \int_X f(x;y)\ \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \lim_{y \to y_0} f(x;y)\ \mathrm{d}\mu(x)$$

Определение 19. Условие

$$\exists \Phi \in L(X;\mu)\ \exists V_{y_0}\ \text{при почти всех}\ x \in X\ \forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y\ |f(x;y)| \leqslant \Phi(x)$$

называется **локальным условием Лебега** в точке y_0.

Доказательство. Возьмём последовательность точек $y_n \in Y \setminus \{y_0\}$, $y_n \to y_0$. Тогда начиная с некоторого y_N все $y_{n>N} \in V_{y_0}$ из локального условия Лебега.
Введём последовательность функций $f_n(x) = f(x;y_n)$. Тогда при почти всех $x \in X$ $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} g(x)$.
Кроме того в силу локального условия Лебега для почти всех $x \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leqslant \Phi(x)$
То теореме Лебега о мажорируемой сходимости $g \in L(X;\mu)$, и

$$\int_X f_n(x)\ \mathrm{d}\mu(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_X g(x)\ \mathrm{d}\mu(x)$$

□

Замечание. Не исключён случай, когда y_0 — бесконечно удалённая точка или $\pm\infty$, если $\tilde{Y} = \mathbb{R}$.

Замечание. Квантор $\forall$ и «для почти всех» в общем случае менять нельзя. «Почти всех x $\forall y$» сильнее, чем «$\forall y$ для почти всех x». Но для данной теоремы более слабое условие также работает (без изменения доказательства).

Замечание. Интересный факт: мы имели равномерную сходимость для рядов. А эта теорема в некотором смысле оперирует с равномерной сходимостью для семейств функций (f можно рассматривать как семейство функций $f_y(x)$).

Определение 20. Пусть X — множество, $\tilde{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subset \tilde{Y}$, y_0 — передельная точка Y, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $g\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Тогда говорят, что **семейство функций** $\{f(\bullet; y)\}_{y \in Y}$ **сходится** к g **равномерно** на X при $y \to y_0$, если

$$\sup_{x \in X} |f(x; y) - g(x)| \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0$$

Записывается привычным образом $f(x; y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g(x)$

Следствие 3.1 (Предельный переход по параметру при условии равномерной сходимости)**.** *Пусть* $(X; \mathbb{A}; \mu)$ *— пространство с мерой,* μ *конечна.*
$\tilde{Y}$ *— метрическое пространство,* $Y \subset Y$*,* y_0 *— предельная точка* Y*.*
Пусть $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$*,* $f(x; y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g(x)$ *на* X *и пусть*

$$\forall y \in Y \;\; f(\bullet; y) \in L(X; \mu)$$

Тогда $g \in L(X; \mu)$

$$\lim_{y \to y_0} \int_X f(x; y) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \lim_{y \to y_0} f(x; y) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

Доказательство. Возьмём последовательность $y_n \in Y \setminus \{y_0\}$, $y_n \to y_0$. Введём $f_n(x) = f(x; y_n)$. Тогда f_n равномерно стремится к g на X.
Возьмём $\varepsilon = 1$ и получим N такое что $\forall n > N \; \forall x \in X \; |f_n(x) - g(x)| < 1$.
Отсюда $|g(x)| < |f_N(x)| + 1$, обе части $\in L(X; \mu)$, значит $g \in L(X; \mu)$. Тогда

$$|f_n(x)| \leqslant 1 + |g(x)|$$

Если обозначит правую часть за Φ, можно будет применить теорему Лебега. □

Пример. Условие конечности меры существенно. На множестве бесконечной меры равномерная сходимость не работает:
$X = [0; +\infty)$, $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0;n]}$. Тогда интеграл каждой f_n равен 1, что не стремится к нулю.

Следствие 3.2 (Непрерывность интеграла по параметру в точке)**.** *Пусть* $(X; \mathbb{A}; \mu)$ *— пространство с мерой.*
Пусть Y *— метрическое пространство,* $y_0 \in Y$*.*
Пусть $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ *и пусть*

$$\forall y \in Y \;\; f(\bullet; y) \in L(X; \mu)$$

Пусть для почти всех $x \in X$ $f(x; \bullet)$ *непрерывна в* y_0 *и пусть* f *удовлетворяет локальному условию Лебега нв* y_0*. Тогда* $\int_X f(x; y) \,\mathrm{d}\mu(x)$ *непрерывно в* y_0*.*

Доказательство. Если y_0 — изолированная точка Y, ничего доказывать не надо, иначе она предельная. Возьмём $g(x) = f(x; y_0)$. Всё. □

Следствие 3.3. *Если условие следствия 3.2 верно для любой точки* $y_0 \in Y$*, то*

$$\int_X f(x; y) \,\mathrm{d}\mu(x) \in C(Y)$$

Замечание. Полезное напоминание: если $f \in C(X \times Y)$, то $\forall x \in X \; f(x; \bullet) \in C(Y)$ и $\forall y \in Y \; f(\bullet; y) \in C(X)$.

Теорема 14 (Непрерывность интеграла по параметру на множестве)**.** *Пусть X, Y — метрические пространства, X компактно, μ — конечная борелевская мера на X, $f \in C(X \times Y)$. Тогда*

$$\int_X f(x; y)\ \mathrm{d}\mu(x) \in C(Y)$$

Доказательство. Из комментария выше

$$\forall y \in Y\ f(\bullet; y) \in C(X)$$

Также X — компакт, следовательно $f(\bullet; y)$ ограничена на X. μ — борелевская, значит $f(\bullet; y)$ измерима. $\mu X < +\infty$, а значит $f(\bullet; x) \in L(X; \mu)$. Отлично, теперь интеграл $\int_X f(x; y)\ \mathrm{d}\mu(x)$ корректно определён. Ну что ж, осталось проверить локальное условие Лебега в каждой точке $y_0 \in Y$. Давайте докажем, что

$$\exists V_{y_0}\ f \text{ ограничена на } X \times V_{y_0}$$

(мажоранта будет константой).
Ну, давайте докажем от противного. Тогда в частности $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in X, y_n \in B(y_0; \frac{1}{n})\ |f(x_n; y_n)| > n$. y_n стремится к y_0, а из x_n можно выделить сходящуюся (к x_0) подпоследовательность x_{n_k} (в силу секвенциальной компактности). Но подождите. $|f(x_{n_k}; y_{n_k})| > n_k \to \infty$. А левая часть стремится к $|f(x_0; y_0)|$. □

Замечание. В частности, теорема верна для меры Лебега.

Следствие 3.1. *Если $[a; b], \langle c; d\rangle \subset \mathbb{R}$, $f \in C([a; b] \times \langle c; d\rangle)$, то $\int_X f(x; y)\ \mathrm{d}x \in C\langle c; d\rangle$.*

Пример. Локальное условие Лебега в следствии 3.2 и компактность X в теореме 14 существенны. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$,

$$f(x; y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ \frac{1}{1+\left(x+\frac{1}{|y|}\right)^2} & y \neq 0 \end{cases}$$

Верно ли, что $f \in C(\mathbb{R}^2)$? Если $y_0 \neq 0$, то в точке $(x_0; y_0)$ всё понятно. Что с $y = 0$? Ну, рассмотрим $(x_0; 0)$ в окрестности $|xy| < \frac{1}{2}$. Тогда

$$0 \leqslant f(x; y) \leqslant \frac{y^2}{y^2 + (x|y| + 1)^2} \leqslant 4y^2 \underset{(x;y)\to(x_0;0)}{\longrightarrow} 0$$

Обозначим

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x; y)\ \mathrm{d}x$$

Очевидно, $I(0) = 0$. А если $y \neq 0$, то

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \left(x + \frac{1}{|y|}\right)^2}\ \mathrm{d}x$$

От y эта штука не зависит никак, потому что сдвиг. А значит y можно выкинуть, и получить, что $I(y) = \pi$. Ой. Разрыв в нуле.

Теорема 15 (Дифференцируемость интеграла по параметру)**.** *Пусть $Y = \langle c; d\rangle \subset \mathbb{R}$, $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, $\forall y \in Y\ f(\bullet; y) \in L(X; \mu)$, при почти всех $x \in X$ $f(x; \bullet)$ дифференцируемо на Y. Пусть $y_0 \in Y$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ удовлетворяет локальному условию Лебега. Тогда*

$$\exists \left(\int_X f(x; y)\ \mathrm{d}\mu(x)\right)'_y\bigg|_{y=y_0} = \int_X f'_y(x; y_0)\ \mathrm{d}\mu(x)$$

Доказательство. Производную будем искать по определению. Возьмём $h \neq 0$, $y_0 + h \in Y$. Рассмотрим

$$F(x;h) = \frac{f(x;y_0+h) - f(x;y_0)}{h}$$

Из дифференцируемости $f(x;\bullet)$ почти везде, при почти всех x $F(x;h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'_y(x;y_0)$. Пусть

$$I(y) = \int_X f(x;y)\mathrm{d}\mu(x)$$

Тогда

$$\frac{I(y_0+h) - I(y_0)}{h} = \int_X F(x;h)\ \mathrm{d}\mu(x)$$

Очень хочется сделать переход под знаком интеграла. Чтобы так было можно сделать по теореме 13, надо проверить локальное условие Лебега для F в точке h. По теореме Лагранжа

$$\exists \theta \in (0;1)\ F(x;h) = f'_y(x;y+\theta h)$$

Какое-то условие Лебега нам дано ($f'_y \in L_{\mathrm{loc}}$ в y_0). Запишем его подробно:

$$\exists \Phi \in L(X;\mu)\ \exists V_{y_0} \text{ для почти всех } x \in X\ \forall y \in \dot{V}_{y_0} \cap Y\ |f'_y(x;y)| \leqslant \Phi(x)$$

Понятно, что

$$\exists \delta > 0\ \forall h \in (-\delta;\delta) \setminus \{0\}\ y_0 + \theta h \in \dot{V}_{y_0} \cap Y$$

Тогда

$$|F(x;h)| = |f'(x;y_0+\theta h)| \leqslant \Phi(x)$$

□

Следствие 3.1. *Если X — компакт, μ — конечная борелевская мера на X, $Y = \langle c; d\rangle \subset \mathbb{R}$, $f, f'_y \in C(X \times Y)$. Тогда*

$$\int_X f(x;y)\ \mathrm{d}\mu(x) \in C^{(1)}(Y)$$

и для любой $y_0 \in Y$ верно правило Лейбница.

Доказательство. Надо проверить, локальное условие Лебега для производной. Для любой y_0 возьмём

$$\delta > 0\ [y_0-\delta; y_0+\delta] \cap \langle c;d\rangle = [\alpha;\beta] \text{ ограничено}$$

Тогда $f'_y \in C(X \times [\alpha;\beta])$, а значит f'_y ограничена на $X \times [\alpha;\beta]$ (мажоранта — постоянная). По теореме 15 $I'(y_0)$ равно тому, чему хочется, а 14. □

Пример. Условие Лебега в теореме 15 и компактность в следствии 1 существенны.
Пусть $X = (0;1]$, $Y = [0;+\infty)$, $f(x;y) = \ln(x^2+y^2)$. Тогда

$$I(y) = \int_0^1 \ln(x^2+y^2)\ \mathrm{d}x \overset{y\neq 0}{=} x\ln(x^2+y^2)\Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x =$$
$$= \ln(1+y^2) - 2 + 2y^2\frac{1}{y}\tan^{-1}\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^1 = \ln(1+y^2) - 2 + 2y\tan^{-1}\frac{1}{y}$$

А при $y = 0$ это просто -2.
Теперь давайте считать производную в нуле (где нарушено правило Лейбница)

$$I'(0) = I'_+(0) = 0 - 0 + \pi$$

Но

$$\int_0^1 \left(\ln(x^2+y^2)\right)'_y\Big|_{y=0}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 0\ \mathrm{d}x = 0$$

Интеграл комплекснозначной функции.

Определение 21. Пусть $(X; \mathbb{A}; \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathbb{A}$, $f\colon E \to \mathbb{C}$ (или даже $\overline{\mathbb{C}}$). Пусть $f = u + \mathbf{i}v$.
f называется **измеримой** на E, если u и v измеримы на E.
f называется **измеримой** на E, если u и v измеримы на E.
Положим

$$\int_E f \ \mathrm{d}\mu = \int_E u \ \mathrm{d}\mu + \mathbf{i}\int_E v \ \mathrm{d}\mu$$

если правая часть имеет смысл.

Свойство 21.1. *Очевидно.*

$$\int_E \overline{f} \ \mathrm{d}\mu = \overline{\int_E \overline{f} \ \mathrm{d}\mu}$$

Свойство 21.2. *Арифметические свойства интеграла переносятся очевидно.*

Лемма 4. *Пусть $f = u + \mathbf{i}v$, $f \in S(E)$. Тогда*

1. $|f| \in S(E)$.
2. *Суммируемость f и $|f|$ равносильны.*
3. $$\left|\int_E f \ \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f| \ \mathrm{d}\mu$$

Доказательство.

1. $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$. А правая часть $\in S(E)$ по арифметическим действиям с измеримыми функциями.
2. Из
$$|u|, |v| \leqslant |f| \leqslant |u| + |v|$$
Отсюда всё понятно.
3. Если $\int_E f \ \mathrm{d}\mu = 0$ или ∞, то всё понятно. Иначе
$$\int_E f \ \mathrm{d}\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$
Тогда пусть
$$z = \frac{\left|\int_E f \ \mathrm{d}\mu\right|}{\int_E f \ \mathrm{d}\mu}$$
Понятно, что $|z| = 1$. Тогда
$$\left|\int_E f \ \mathrm{d}\mu\right| = z\int_E f \ \mathrm{d}\mu = \int_E zf \ \mathrm{d}\mu$$
При этом левая штука $\in \mathbb{R}$, а значит правая — тоже. Отсюда
$$\left|\int_E f \ \mathrm{d}\mu\right| = \Re\int_E zf \ \mathrm{d}\mu = \int_E \Re zf \ \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E |zf| \ \mathrm{d}\mu = \int_E |f| \ \mathrm{d}\mu$$

□

Свойство 21.3. *Из леммы переносятся теоремы Фубини, Лебега о мажорируемой сходимости и все теоремы этого параграфа. При дифференцируемость сейчас разберёмся.*

Теорема 16 (Голоморфность интеграла по параметру)**.** *Пусть $(X;\mathbb{A};\mu)$ — пространство с мерой, $Y \subset \mathbb{C}$, $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$,*

$$\forall y \in Y \;\; f(\bullet; y) \in L(X;\mu)$$

$$\text{При почти всех } \forall x \in X \;\; f(x;\bullet) \in \mathcal{A}(Y)$$

И пусть ещё

$$\forall y_0 \in Y \;\; f'_y \in L_{\text{loc}} \text{ в точке } y_0$$

тогда $I \in \mathcal{A}(Y)$ и верно правило Лейбница.

Доказательство. Единственное отличие доказательства от доказательства 15 в том, что

$$|F(x;h)| \leqslant |f'_y(x;y_0+\theta h)|$$

Этого нам хватит, так как нам нужна мажоранта. □

Пример. Пусть Γ замкнуто в $\mathbb{C}$. Пусть μ — борелевская мера на Γ. Пусть $G = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, $h \in L(\Gamma;\mu)$. Пусть

$$F(z) = \int_\Gamma \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\mu(\zeta), \qquad z \in G$$

тогда $F \in \mathcal{A}(G)$ и

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \forall z \in G \;\; F^{(n)}(z) = n! \int_\Gamma \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\mu(\zeta)$$

Почему?
Пусть $z_0 \in \Gamma$. Пусть $2\sigma = \rho(z_0;\Gamma) > 0$. Если $|z - z_0| < \sigma$, а $\zeta \in \Gamma$, то $|\zeta - z| \geqslant \sigma$. Тогда

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\right| = n!\frac{|h(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} \leqslant \underbrace{\frac{n!}{\sigma^{n+1}}|h(\zeta)|}_{\in L(\Gamma;\mu)}$$

Значит можно дифференцировать сколько угодно раз.

Примеры вычисления интегралов.

Пример.

$$I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} \qquad n \in \mathbb{Z}_+$$

А давайте введём вот такую штуку:

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y + x^2}$$

Это мы считать умеем. А зачем? В потому что если продифференцировать это по y n раз, то получится то, что мы хотели (только с точностью до знака и факториала):

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{1}{y+x^2} = \frac{(-1)^n n!}{(y+x^2)^{n+1}}$$

Хорошо, а почему можно дифференцировать под знаком интеграла? Пусть $V_{y_0} = \left(\frac{y_0}{2}; +\infty\right)$. Тогда

$$\forall y \in V_{y_0} \; \forall x \in [0;+\infty) \;\; \left|\frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{1}{y+x^2}\right| \leqslant \frac{n!}{\left(\frac{y_0}{2} + x^2\right)^{n+1}} = \Phi_{y_0}(x)$$

Где $\Phi_{y_0} \in L[0;+\infty)$. Ну, о'кей. Давайте считать $I(y)$.

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \tan^{\text{-}1} \frac{x}{\sqrt{y}}\Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}$$

Тогда
$$I^{(n)}(y)=\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2}}{y^{n+1/2}}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+1}y^{n+1/2}}\pi$$
Тогда
$$I_n=\frac{(-1)^n}{n!}I^{(n)}(1)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$$
Пример. Давайте возьмём интеграл из предыдущего примера, и начнём делать с ним тёмную магию
$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$$
Давайте сделаем замену $x=\frac{t}{\sqrt{n+1}}$. Тогда
$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\frac{t^2}{n+1})^{n+1}}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\sqrt{n+1}$$
И теперь давайте устремим n у бесконечности. В правой части по формуле Валлиса $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. А в левой части получится замечательный предел, и мы получим интеграл Пуассона:
$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
Остаётся только понять, почему можно переходить к пределу под знаком интеграла. Ну, заметим, что
$$f_n(t)=\left(1+\frac{t^2}{n+1}\right)^{-n-1}$$
убывает по n. А тогда
$$0\leqslant f_n(t)\leqslant f_0(t)=\frac{1}{1+t^2}$$
Где $f_0\in L([0;+\infty))$.

Замечание. Поговорим о несобственных интегралах.

А что о них говорить-то? А то, что у нас были несобственные интегралы в смысле Римана (это предельчик), но тут у нас интеграл по множеству, и никто не заставляет множество иметь конечную меру. Надо как-то связать несобственный интеграл Римана и интеграл по множеству.

Определение 22. Пусть $a\in\mathbb{R}$, $f\colon[a;+\infty)\to\mathbb{R}$, и $\forall A\in(a;+\infty)\ \exists(L)\int\limits_a^A f$. Тогда положим
$$\int\limits_a^{\to+\infty}f=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f$$

Лемма 5. *Если существует* $(L)\int\limits_a^{+\infty}f$, *то существует* $\int\limits_a^{\to+\infty}f$, *равный собственному лебеговому интегралу.*

Доказательство. Достаточно доказать для $f\geqslant 0$ (иначе рассмотреть f_+ и f_-, а потом $\Re f$ и $\Im f$). В таком случае оба интеграла существуют в $[0;+\infty]$.

Рассмотрим $f_n=f\cdot\chi_{[a;n]}$, где $n>a$. Тогда f_n возрастают (по n) и стремятся к f. Тогда с одной стороны
$$\int\limits_a^n f=(L)=\int\limits_a^{+\infty}f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\text{Леви}}(L)\int\limits_a^{+\infty}f$$
С другой стороны по определению несобственного интеграла левая часть стремится к несобственному интегралу. $\square$

Утверждение. $\int\limits_a^{\to+\infty} f$ *сходится абсолютно тогда и только тогда, когда* $f \in L[a;+\infty)$.

Доказательство. Если f суммируема, то и модуль тоже. Поэтому несобственный интеграл сходится абсолютно. Аналогично обратное. ☐

Пример.

- $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$ можно рассматривать как Лебегов интеграл или как сходящийся несобственный.
- $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = +\infty$ можно рассматривать как Лебегов интеграл или как расходящийся несобственный.
- $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ можно рассматривать как сходящийся несобственный, но не как Лебегов.

Замечание. Аналогично определяются несобственные интегралы для других типов промежутков или даже для многомерных интегралов. Как, например, можно трактовать такое?

$$\iint\limits_{\to\mathbb{R}^2} f$$

Ну, рассматривать $\{G_k\}$ открытые, $G_k \subset G_{k+1}$, и объединение их всех — $\mathbb{R}^2$.
Так вот это не даст нам ничего нового. Почему? Докажем, что условно сходящихся интегралов не бывает. Почему? Ну, потому что если такой бывает, то у нас разошлись интегралы f_+ и f_-. Тогда мы можем взять места, где f положительно, взять их столько, чтобы в интеграле получилось > 1 и соединить эти области перемычками. Потом сделаем то же с отрицательными частями так, чтобы они в сумме с положительными давали < -2. И так далее. Получим, что предела f нет.
В итоге рассматривают только какие-то специфичные G_n. Типа предел по квадратам или по кому-нибудь ещё.

Замечание. Есть много замечательных теорем о хороших свойствах несобственных интегралов, их можно прочитать в Фихтенгольце или где-нибудь ещё, а мы расскажем только одну лемму.

Лемма 6. *Пусть* $a \in \mathbb{R}$, $f \in C[a;+\infty)$, $\int\limits_a^{+\infty} f$ *сходится. Введём*

$$I(y) = \int\limits_a^{\to+\infty} e^{-yx} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Тогда $I \in C[0;+\infty)$.

Доказательство. Докажем сначала, что интеграл сходится. Попутно оценим остаток. Рассмотрим $A > a$ и проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_A^{\to+\infty} e^{-yx} f(x)\ \mathrm{d}x = \underbrace{e^{-yx}(F(x) - F(A))\Big|_{X=A}^{+\infty}}_{0} + \int\limits_a^{\to+\infty} y \underbrace{e^{-yx}}_{\text{интеграл сходится}} \underbrace{(F(x) - F(A))}_{\text{ограничена}}\ \mathrm{d}x$$

Теперь докажем непрерывность интеграла в точке $y_0 \geqslant 0$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$ и подберём

$$A > a \ \left|\int\limits_A^{+\infty} f\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\left|\int\limits_A^{\to+\infty} e^{-yx} f(x)\ \mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_a^{\to+\infty} y e^{-yx} \underbrace{(F(x) - F(A))}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{3}}\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} e^{-Ay} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

То есть $I_A(y) = \int\limits_a^A e^{-yx} f(x)\ \mathrm{d}x$ непрерывна. Остаётся рассмотреть такое $\delta > 0$, что $\forall y \geqslant 0 : |y - y_0| < \delta\ |I_A(y) - I_A(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, тогда

$$|I(y) - I(y_0)| \leqslant |I(y) - I_A(y)| + |I_A(y) - I_A(y_0)| + |I_A(y_0) - I(y_0)| < \varepsilon$$

$\square$

Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$$

Введём множитель сходимости и составим функцию I:

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$$

Лемма говорит нам, что $I \in C[0; +\infty)$. Давайте что-нибудь сделаем с x в знаменателе. Например, возьмём $I'(y)$. Хочется, чтобы это равнялось

$$-\int\limits_0^{+\infty} \cancel{x} e^{-xy} \frac{\sin x}{\cancel{x}}\ \mathrm{d}x$$

Надо у производной предъявить суммируемую мажоранту, чтобы доказать возможность дифференцирования под знаком интеграла. Мы можем сделать это только при $y_0 > 0$, взять $V_{y_0} = \left(\frac{y_0}{;} + \infty\right)$, а тогда

$$\left|-e^{-xy} \sin x\right| \leqslant e^{-\frac{y_0}{2} x}$$

А штука справа суммируема на $[0; \infty)$. Ну, хорошо,

$$I'(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\ \mathrm{d}x = \cos x e^{-yx}\Big|_0^{+\infty} + y \int\limits_{x=0}^{+\infty} e^{-yx} \cos x\ \mathrm{d}x = -1 + y \left[\sin x e^{-xy}\right]_{x=0}^{+\infty} + y^2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\ \mathrm{d}x = -1 - y^2 I'(y)$$

Отсюда $I'(y) = \frac{-1}{1+y^2}$, а $I(y) = C - \tan^{-1} y$. Причём из-за непрерывности I в нуле последняя формула верна также при $y = 0$, а не только при $y > 0$.
Ну, всё хорошо. Давайте найдём C. Мы знаем, к чему должно стремится $I(y)$ при $y \to +\infty$. К нулю (см. на мажоранту). Арктангенс бесконечности — $\pi/2$, а значит $C = \pi/2$. Отсюда $I(0) = \frac{\pi}{2}$.

Пример. **Интегралы Френеля**.

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\ \mathrm{d}x \qquad \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\ \mathrm{d}x$$

Мы уже обсуждали, что они сходятся, это следует из замены $t = x^2$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$$

А правое явно сходится про Дирихле.
Хочется ввести тут тоже какой-нибудь множитель. Для этого воспользуемся интегралом Эйлера — Пуассона:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Сделаем замену $x = u\sqrt{t}$:

$$\sqrt{t}\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\ \mathrm{d}u$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\ \mathrm{d}u$$

Очень хорошо, подставим это в наш интеграл, который мы имели:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\ \mathrm{d}u\sin t\ \mathrm{d}t$$

Хочется поменять порядок интегрирования. Получится то, что мы делали в предыдыщем примере ($I(u^2)$):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\sin t\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Осталось обосновать перемену порядка интегрирования. Ни теорема Фубини, ни теорема Тонелли нам тут не помогут, так что будет делать что-то руками.
Пусть $y > 0$, рассмотрим

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-yt}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t(u^2+y)}\ \mathrm{d}u\sin t\ \mathrm{d}t$$

И тут уже можно менять порядок интегрирования, потому что

$$\left|e^{-t(u^2+y)}\sin t\right| \leqslant e^{-t(u^2+y)}$$

А штука справа суммируема:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}e^{-ty}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ty}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t < +\infty$$

Дальше достаточно устремить y к нулю. Проще всего это сделать так. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-yt}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(u^2+y)^2}$$

Если в нём устремить y к нулю, получится то, что нам хочется. В левой части получится $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ по лемме, в правой части — $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$ по теореме Лебега.
С косинусом аналогично и, как ни странно, получается тот же результат $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Гамма-функция.

Лемма 7. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$, $p \in \mathbb{C}$, $\Re p > 0$. *Пусть*

$$h(x) = x^{p-1}e^{-x}|\ln x|^{\alpha} \qquad x > 0$$

Тогда $h \in L(0; +\infty)$.

Доказательство. Надо проверять сходимость на $+\infty$ и в нуле.
Для начала избавимся от комплексных чисел тут

$$x^{p-1} = x^{\Re p-1} e^{\mathbf{i}\Im p \ln x}$$

Модуль $e^{\mathbf{i}\Im p \ln x}$ равен одному.
А дальше число вещественная задача, в которой доказать суммируемость мы можем из второго семестра. $\square$

Определение 23.

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x \qquad \Re p > 0$$

Γ называется **гамма-функцией Эйлера**.

Свойство 23.1. $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Доказательство. Первое объявляется очевидным, второе сводится к интегралу Эйлера — Пуассона:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \overset{x=t^2}{=} 2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

$\square$

Свойство 23.2 (Формула приведения)**.**

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

Доказательство.

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-x} \, \mathrm{d}x = -x^p e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + p \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x = 0 + p\Gamma(p)$$

$\square$

Свойство 23.3. *Если $n \in \mathbb{Z}_+$, то $\Gamma(n+1) = n!$, а $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n}$.*

Следствие 7.1.

$$\mu_n B(a; n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n$$

Следствие 7.2.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}$$

Замечание. По формуле приведения гамма-функция распространяется на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Свойство 23.4.

$$\Gamma \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-)$$

И $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall p : \Re p > 0\ \Gamma^{(n)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^n x \, \mathrm{d}x$

Доказательство. Докажем, что можно дифференцировать в любой точке $\Re p_0 > 0$. Пусть $p_0 = \sigma_0 + \mathbf{i}\tau_0$. Пусть

$$V_{p_0} = \left\{ p \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{\sigma_0}{2} < \Re p < 2\sigma_0 \right\}$$

Тогда при $p \in V_{p_0}$, $x > 0$

$$\left| x^{p-1} e^{-x} \ln^n x \right| \leqslant \max\left\{ x^{\frac{\sigma_0}{2}-1}; x^{2\sigma_0-1} \right\} e^{-x} |\ln x|^n = \Phi(x) \in L(0; +\infty)$$

Отсюда $\Gamma \in \mathcal{A}\{p \in \mathbb{C} | \Re p > 0\}$. А дальше формула приведения. $\square$

Свойство 23.5.

$$\Gamma(p) \sim \frac{1}{p} \qquad p \to 0$$

Доказательство. $\Gamma(1) = 1$, а $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$. $\square$

Замечание. То есть это полюс кратности один. Вычет равен единице.

Свойство 23.6.

$$\Gamma(-n) \sim \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{p+n} \qquad p \to -n$$

Доказательство.

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+n+1)}{p(p+1)\cdots(p+n)}$$

$\square$

Свойство 23.7. *Несложно заметить,*

$$\Gamma(p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Свойство 23.8. *Из формулы для производных*

$$\Gamma''(p) > 0 \qquad p > 0$$

Отсюда Γ *строго выпукла вниз на* $(0; +\infty)$*, а* Γ' *— строго возрастает.*

Следствие 7.3. *Из строгого возрастания* Γ' *и* $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$ *следует, что на* $(1; 2)$ *есть ровно один ноль функции* Γ' *по теореме Ролля.*

Замечание. Отсюда и из формул приведения понятно, какой у гамма-функции график.

Определение 24. Пусть $\Re p > 0$, $\Re q > 0$. Тогда

$$B(p; q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, \mathrm{d}x$$

называется **бета-функцией Эйлера**.

Свойство 24.1. *Очевидно,* B *голоморфна по каждой переменной.*

Свойство 24.2. *Очевидно,*

$$B(p; q) = B(q; p)$$

Свойство 24.3. *По замене* $x = \frac{t}{1+t}$*,*

$$B(p; q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, \mathrm{d}t$$

Свойство 24.4.

$$B(p; q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Доказательство. Поскольку голоморфность позволяет нам проверять не все точки, рассмотрим не $\Re p > 0$, а $p > 0$.
Пусть $p > 0$, $t > 0$, $x = ty$. Тогда

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int\limits_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-ty}\, \mathrm{d}y$$

Теперь подставим сюда $p+q$ в качестве p и $1+t$ в качестве t:

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^p} = \int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\ \mathrm{d}y$$

Умножим это на t^{p-1} и проинтегрируем от 0 до бесконечности. Слева получится $\Gamma(p+q)B(p;q)$. А что справа?

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}e^{-ty}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}t$$

Подынтегральная функция неотрицательна, а значит можно сменить порядок интегрирования по теореме 3.

$$\int\limits_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-ty}\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}y$$

Внутренний интеграл мы где-то видели, это $\frac{\Gamma(p)}{y^p}$. Тогда y^p сократится, останется $\Gamma(p)\Gamma(q)$. □

Свойство 24.5 (Формула удвоения Лежандра)**.**

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$$

Доказательство. Перепишем формулу так:

$$\underbrace{\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}}_{B(p;p)} = \frac{1}{2^{2p-1}}\underbrace{\frac{\Gamma(p)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}}_{B(\frac{1}{2};p)}$$

Возьмём левую часть, запишем по определению:

$$B(p;p) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\ \mathrm{d}x = 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{p-1}\ \mathrm{d}x = 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{p-1}\ \mathrm{d}x \overset{\frac{1}{2}-x=\frac{\sqrt{t}}{2}}{=}$$

$$= 2^{1-2-2p+2}\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\ \mathrm{d}t = 2^{1-2p}B\left(\frac{1}{2};p\right)$$

□

Свойство 24.6 (Формула Эйлера — Гаусса)**.**

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^p}{\prod\limits_{k=0}^{n}(p+k)}$$

Доказательство. • Для начала пусть $p>0$.

Пусть $e^{-x}=t$. Тогда

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^1(-\ln t)^{p-1}\ \mathrm{d}t$$

А ещё мы знаем, что $-\ln t = \lim\limits_{n\to\infty} n(1-t^{\frac{1}{n}})$. Подставим это в выражения для Γ-функции.

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty}(n(1-t^{\frac{1}{n}}))^{p-1}\ \mathrm{d}t$$

Хочется сделать предельный переход под знаком интеграла. Докажем, что $n(1-t^{1/n})$ возрастает по n. Пусть $\alpha = \frac{1}{n}$, $\frac{1-t^\alpha}{\alpha}$ убывает (т.к. производная этого выражения по α равна $\frac{-\alpha t^\alpha \ln t - 1 + t^\alpha}{\alpha^2}$, что меньше нуля при $t \in (0;1)$). Почему меньше нуля? Ну, числитель равен $t^\alpha(\ln t^{-\alpha} - t^{-\alpha} + 1)$, первый множитель больше 1, второй меньше нуля.
Очень хорошо. Мы возводим что-то возрастающее (по n) в степень $p-1$. Если $p > 1$ возрастание поменяется и работает теорема Леви, а если $p < 1$, работает теорема Лебега (мажоранта — то, что получается при $p = 1$).
Итого мы поменяли предел и интеграл местами:

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} n^{p-1}\int\limits_0^1 (1-t^{\frac{1}{n}})^{p-1}\,\mathrm{d}t \overset{t=s^n}{=} \lim_{n\to\infty} n^{p-1}\int\limits_0^1 s^{n-1}(1-s)^{p-1}\,\mathrm{d}s =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{p-1}B(n;p) = \lim_{n\to\infty} n^{p-1}\frac{\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma n + p} = \lim_{n\to\infty} n^{p-1}\frac{(n-1)!}{(n+p-1)\cdots p}$$

Если умножить это на дробь $\frac{n}{n+p}$, которая стремится к 1, получится искомая формула.

- А что при остальных p? Во-первых, все выкладки верны при $\Re p > 0$. Если $\Re p = \sigma$, то комплексное число было важно только когда мы возводили $n(1-t^{1/n})$ в степень $p-1$. Ну,

$$\left|\Big(n(1-t^{1/n})\Big)^{p-1}\right| = \left|n(1-t^{1/n})\right|^{\sigma-1} \leqslant \begin{cases}(-\ln t)^{\sigma-1} & \sigma \geqslant 0\\ (1-t)^{\sigma-1} & \sigma < 0\end{cases}$$

  То есть Лебег работает всегда.

- Теперь давайте разбираться с остальными p. Пусть

$$R(p) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^p}{\prod\limits_{k=0}^{n}(p+k)}$$

  Что будет, если подставить сюда $p+1$? Будет

$$R(p+1) = p\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^p}{\prod\limits_{k=0}^{n}(p+k)}\frac{n}{n+p+1}$$

  При этом правая дробь не меняет предел, а значит R удовлетворяет тому же соотношению, что и Γ.

□

Свойство 24.7 (Формула дополнения)**.**

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(p+k)\prod\limits_{k=0}^{n}(1-p+k)}{(n!)^2n^pn^{1-p}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} p\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{p+k}{k}\right)\cancelto{1}{\frac{n+1-p}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k-p}{k}\right) = p\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right) = \frac{\sin\pi p}{\pi}$$

□

Замечание. Существует обратный способ: честно доказать эту формулу и из неё доказать разложение синуса в бесконечное произведение. Чтобы честно доказать формулу дополнения, можно сделать так:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p;1-p)\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

А интеграл можно взять вычетами или как-нибудь ещё.

Следствие 7.4. *Γ-функция не имеет нулей.*

Следствие 7.5.

$$\frac{1}{\Gamma} \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$$

Эта функция имеет нули первой кратности в точках $0, -1, -2, \ldots$.

Замечание. Хочется разложить $\frac{1}{\Gamma}$ в бесконечное произведение. И это можно, одна из теорем Вейерштрасса утверждает, что целая функция раскладывается по нулям.
Что интересно, так это происходящее, если нулей нет. Тогда функция является экспонентой целой функции.

Свойство 24.8 (Бесконечное произведение Вейерштрасса)**.**

$$\frac{1}{\Gamma(p)} = p\lim_{n\to\infty} n^{-p}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{p}{k}\right) = p\lim_{n\to\infty} e^{p\left(-\ln n + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{p}{k}\right)e^{-\frac{p}{k}}\right)$$

Вот теперь можно уже взять этот предел и получить вместо суммы $C_Э$, в бесконечное произведение будет сходится:

$$\frac{1}{\Gamma(p)} = e^{pC_Э}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{p}{k}\right)e^{-\frac{p}{k}}\right)$$

Замечание. Произведение сходится тривиально, $\left(1+\frac{p}{k}\right)e^{-\frac{p}{k}} = \left(1+\frac{p}{k}\right)\left(1-\frac{p}{k}+O(\frac{p}{k})\right) = 1+O(\frac{p}{k})$.

Замечание. В общем виде для произвольных целых функций бывает нужно умножать на многочлен от $\frac{p}{k}$.

1 Интегрирование на многообразиях.

Разбиение единицы.

Лемма 1. *Всякое открытое G в пространстве $\mathbb{R}^n$ представляется в виде объединения*

$$G = \bigcup_{\substack{x\in\mathbb{Q}^n\\ r\in\mathbb{Q}\\ B(x;r)\subset G}} B(x;r)$$

Очевидно.

Теорема 1 (Теорема Линделёфа)**.** *Из любого открытого покрытия множества $M \subset \mathbb{R}^n$ можно извлечь не более чем счётное подпокрытие.*

Замечание. Открытость трактовать можно как в $\mathbb{R}^n$, так и в M (понятно, почему это не важно).

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — открытое покрытие M. Давайте для простоты считать, что $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha = M$.
Рассмотрим всевозможные рациональные шары, которые содержатся хотя бы в одном U_α.

$$\{B(x;r) \mid x\in\mathbb{Q}^n, r\in\mathbb{Q}, \exists\alpha\in A\ B(x;r)\subset U_\alpha\}$$

Их не более чем счётное множество, перенумеруем их как B_j. Пусть $B_j \subset U_{\alpha_j}$. Несложно заметить, что α_j не более чем счётно. Теперь применим лемму:

$$\forall \alpha \in A\ U_\alpha = \bigcup_{j:B_j \subset U_\alpha} B_j \subset \bigcup_j U_{\alpha_j}$$

А тогда и $M \subset \bigcup\limits_j U_{\alpha_j}$, U_{α_j} — искомое подпокрытие. □

Лемма 2 (Лемма Лебега о компакте). *Пусть $(X;\rho)$ — метрическое пространство, $\mathcal{K} \subset X$ — компакт, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — открытое покрытие $\mathcal{K}$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $E \subset X$, диаметр которого меньше ε и пересекающееся с $\mathcal{K}$ существует $\alpha \in A$ $E \subset U_\alpha$.*

Доказательство. Пусть это не верно. Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Существует набор таких E_n, что они удовлетворяют указанным свойствам, но не существует α. Из непустоты $E_n \cap \mathcal{K}$ в нём существует x_n. Из компактности $\mathcal{K}$ из x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность (пусть она сходится к $x_0 \in \mathcal{K}$). Заметим, что $\exists \alpha_0 \in A\ x_0 \in U_{\alpha_0}$. А значит, поскольку U_α открыты,

$$\exists \delta > 0\ B(x_0;\delta) \subset U_{\alpha_0}$$

Но начиная с определённого k $\rho(x_{n_k};x_0) < \frac{\delta}{2}$ и $\frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}$.
Ну, круто. Рассмотрим $y \in E_{n_k}$. Для неё

$$\rho(x_{n_k};y) \leqslant \operatorname{diam} E_{n_k} < \frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}$$

А отсюда

$$\rho(y;x_0) \leqslant \rho(y;x_{n_k}) + \rho(x_{n_k};x_0) < \delta$$

Это противоречие, так как E_{n_k} покрывается U_{α_0}. □

Определение 1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon G \to \mathbb{V}$, V — векторное пространство, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. **Носителем функции** f называется

$$\operatorname{supp} f = \mathrm{Closure}_G\, G(f \neq 0)$$

Функция с компактным носителем (в G) называется **финитной** в G.

Теорема 2 (Разбиение единицы). *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — открытое покрытие K. Тогда существует конечный набор функций $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ со следующими свойствами:*

1. $\forall j \in [1:N]\ \psi_j \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n \to [0;1])$.
2. $\forall j \in [1:N]\ \exists \alpha_j \in A\ \operatorname{supp} \psi_j \subset U_\alpha$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \sum\limits_{j=1}^N \psi_j(x) \leqslant 1$.
4. $\forall x \in \mathbb{K}\ \sum\limits_{j=1}^N \psi_j(x) = 1$.

Определение 2. Набор таких функций ψ_j называют **разбиением единицы** на K, подчинённое покрытию U_α.

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь такую функцию:

$$\tau(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{(t+1)^2}} & t \in (-1;1) \\ 0 & |t| \geqslant 1 \end{cases}$$

Она равна нулю везде, кроме $(-1;1)$, а на $(-1;1)$ — не равна, причём $\tau(0)=1$. Также τ бесконечно гладкая на $\mathbb{R}$, её носитель — $[-1;1]$. Теперь возьмём

$$\widetilde{\tau}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\tau(t-l)$$

Она также бесконечно дифференцируема, но нигде не равна нулю (а также 1-периодична). Теперь возьмём

$$\theta=\frac{\tau}{\widetilde{\tau}}$$

Она имеет тот же носитель, что и τ, также бесконечно дифференцируема и больше нуля на $(-1;1)$. А $\widetilde{\theta}\equiv 1$.
Положим $h>0$ (ещё потом скажем, какое конкретно), $m\in\mathbb{Z}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$. Пусть

$$\theta_m(x)=\prod_{i=1}^{n}\theta\left(\frac{x_i}{h}-m_i\right)$$

Разумеется, θ_m бесконечно гладкие на $\mathbb{R}^n$, а

$$\theta_m(x)>0\Leftrightarrow\forall i\in[1:n]\ x_i\in(hm_i-h;hm_i+h)$$

Другими словами, точка x попадает в куб $(hm-h\mathbb{1};hm+h\mathbb{1})$. Замыкание этого куба — носитель θ_m. Ребро этого куба равно $2h$, а диагональ — $2h\sqrt{n}$. Несложно догадаться, что

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\theta_m(x)\equiv 1$$

Вспомним о том, что у нас есть компакт и покрытие. Зафиксируем $\varepsilon>0$ из леммы Лебега. И теперь мы, наконец, скажем, что такое h. $h<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$.
Компакт ограничен, поэтому $\operatorname{supp}\theta_m\cap K\neq\varnothing$ лишь для конечного количества m. Перенумеруем наши θ_m одним индексом, они и будут искомыми ψ_j. Тогда второе свойство будет верно по лемме Лебега, третье и четвёртое свойства, очевидно, верны. □

Следствие 2.1 (О гладком спуске)**.** *Пусть K — компакт, G — открыто, $K\subset G\subset\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\exists\psi\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n\to[0;1])\ \operatorname{supp}\psi\subset G,\psi\Big|_K=1$$

Доказательство. Возьмём в качестве открытого покрытия $\{G\}$, получим ψ_j и сложим их. □

Теорема 3 (Равносильность существования локального и глобального гладкого продолжения)**.** *Пусть $E\subset\mathbb{R}^k$, $f\colon E\to\mathbb{R}^n$, $r\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$,*

$$\forall\alpha\in E\ \exists U_\alpha\text{ — окрестность }\alpha\ \exists\Phi_\alpha\in C^{(r)}(U_\alpha\to\mathbb{R}^n)\ \Phi_\alpha\equiv f\text{ на }U_\alpha\cap E$$

Пусть $U=\bigcup\limits_{\alpha\in E}U_\alpha$. Тогда

$$\exists\Phi\in C^{(r)}(U\to\mathbb{R}^n)\ \Phi\equiv f\text{ на }E$$

Без доказательства.

Гладкие многообразия в евклидовом пространстве.

Определение 3. Пусть $k\in\mathbb{N}$. Тогда **стандартный куб** — это $(-1;1)^k$, а **стандартный полукуб** при $k\geqslant 2$ — $(-1;0]\times(-1;1)^k$. В $\mathbb{R}^1$ стандартный полукуба будет два: $(-1;0]$ и $[0;1)$.
Эти двое — **стандартный области**, обычно они обозначаются Π_k.

Замечание. Далее «окрестность» понимается в широком смысле.
Относительная окрестность будет обозначаться так: V_x^M (окрестность $x\in\mathbb{R}^n$ в $M\subset\mathbb{R}^n$).

Определение 4. Пусть $n, k \in \mathbb{R}^n$, $k \leqslant n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ открыто. $f \in C^{(j)}(G \to \mathbb{R}^n)$ называется **регулярным**, если

$$\forall u \in G \ \operatorname{rank} f'(u) = k$$

Определение 5. Пусть $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $E \subset \mathbb{R}^k$. Говорят, что $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $C^{(r)}(E)$, если существует r-гладкое продолжение f на открытое множество, содержащее E.
Аналогично определяется **регулярное** отображение на E и **регулярное r-гладкое отображение** на E.

Утверждение. *В определении регулярности достаточно потребовать, чтобы ранг матрицы якоби продолжения был равен k только в точках множества E.*

Доказательство. У каждой точки E подберём окрестность, где минор матрицы Якоби отличен от нуля (за счёт непрерывности компонент матрицы Якоби). Объединив все окрестности, получим искомое. $\square$

Определение 6. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется **r-гладким k-мерным многообразием**, если $\forall x \in M\ \exists V_x^M\ \exists \varphi\colon \Pi_k \to V_x^M$ — регулярный гомеоморфизм класса $C^{(r)}$ такой что $\varphi(\mathbb{0}) = x$.
Множество таких многообразий в $\mathbb{R}^n$ обозначается $\mathbb{M}_{kn}^{(r)}$.

Определение 7. V_x^M называется **стандартной окрестностью** x или **районом действия карты**, φ — **локальной параметризацией**, φ^{-1} — **картой**, $(u_1; \ldots; u_k) \in \Pi_k$.
Набор карт, районы действия которых покрывают M, называют **атласом** M.

Определение 8. При $r = 0$ регулярность не требуется. Тогда M называется **топологическим многообразием**.

Замечание. В определении Π_k можно заменить на $\mathbb{R}^k$ или $(+\infty; 0] \times \mathbb{R}^{k-1}$ (для $k \geqslant 2$) // $(-\infty; 0]$ или $[0; +\infty)$ для $k = 1$. Для этого достаточно провести замену при помощи тангенса.

Определение 9. Если V_x^M является образом куба при параметризации, то x называется **внутренней точкой** M, а если полукуба — то **краевой точкой** M. Множество краевых точек M называется **краем** M и обозначается ∂M.

Замечание. Не следует путать край и границу. В этом параграфе если нам пригодится граница, мы обозначим её $\operatorname{Fr} M$.

Утверждение. *Определение краевой и внутренней точки не зависит от параметризации.*
Доказательство для гладких многообразий последует позже, для топологических — без доказательства.

Утверждение. *Пусть Π — полукуб, $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(r)}$, $x^0 \in \partial M$, $\varphi\colon M \to V_{x^0}^M$ — параметризация,*

$$P_0 = \{u \in \Pi \mid u_1 = 0\}$$

Тогда

$$\varphi(P_0) = V_{x^0}^M \cap \partial M \qquad \varphi(\Pi \setminus P_0) = V_{x^0}^M \cap (M \setminus \partial M)$$

Доказательство. У $u \in P_0$ есть полукубическая окрестность (в Π). Её образ — какая-то окрестности $\varphi(u)$ (т.к. φ — гомеоморфизм). То есть получим $V_{x^0}^M \cap \partial M$. $\square$

Определение 10. Одномерное многообразие называется **кривой**. А если $n = k - 1$, то многообразие называется **поверхностью** или **гиперповерхностью**. При $n = 3, k = 2$ многообразие называется **классической поверхностью**.

Определение 11. Множество E в метрическом пространстве называется **дискретным**, если ни одна точка E не является предельной.

Определение 12. Дискретный набор точек пространства $\mathbb{R}^n$ называется **нульмерным многообразием**. По определению считаем, что нульмерное многообразие принадлежит $C^{(\infty)}$ и не имеет края.

Пример. Открытое $G \subset \mathbb{R}^n$, тогда $G \in \mathbb{M}_{nn}^{(\infty)}$, без края. Потому что у любой точки есть кубическая окрестность.

Пример. Пусть $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n$ — r-гладкий регулярный ($\gamma' \neq 0$ нигде) простой незамкнутый путь, γ^* — его носитель. Тогда $\gamma^* \in \mathbb{M}_{1n}^{(r)}$, $\partial\gamma^* = \{\gamma(a); \gamma(b)\}$. Локальные параметризации — сужения γ.

Пример. Пусть G — открытое подмножество $\mathbb{R}^k$, $\varphi \in C^{(r)}(G \to \mathbb{R}^n)$ — гомеоморфизм G и $\varphi(G)$ и пусть $\forall u \in G\ \operatorname{rank}\varphi'(u) = k$. Тогда $\varphi(G) \in \mathbb{M}_{kn}^{(r)}$, граница пуста. Локальные параметризации — сужения φ.

Пример. Частный случай предудущего — $(u; f(u))$ для отображения $f \in C^{(r)}(G \to \mathbb{R}^n)$.

Пример. Пусть $f \in C^{(r)}((a;b) \to (0;+\infty))$,

$$M = \left\{(x;y;z) \;\middle|\; {\scriptstyle y^2+z^2=f^2(x) \atop a<x<b}\right\}$$

Край пуст.

Пример. Сфера в $\mathbb{R}^n$ — бесконечно гладкое $n-1$-мерное многообразие без края. Можно явно предъявить параметризацию — сферические координаты.

Пример. Цилиндр $\mathbb{S}^{l-1}(R) \times \mathbb{R}^{n-l}$.

Теорема 4 (Задание многообразия системой уравнений)**.** *Пусть $F \in C^{(r)}(G \to \mathbb{R}^m)$, $G \subset \mathbb{R}^{k+m}$ открыто. M — множество нулей F. $\forall (x;y) \in M\ \operatorname{rank} F'(x;y) = m$. Тогда $M \in \mathbb{M}_{k,k+m}^{(r)}$ и не имеет края.*

Доказательство. Возьмём $(x^0;y^0) \in M$ и проверим искомое. Не умаляя общности будем считать, что $F'_y(x^0;y^0)$. Это значит, что мы в точности находимся в условиях теоремы о неявном отображении. Что она нам даёт? Что существуют окрестности такие что... В качестве окрестности x^0 возьмём кубическую, а в качестве окрестности y^0 — шаровую. Тогда теорема даёт нам

$$\exists a,b > 0\ \forall x \in P = (x^0 - a\mathbb{1}; x^0 + a\mathbb{1})\ \exists! y \in B = B_m(y^0;b)\ F(x;y) = \mathbb{0}$$

Также теорема утверждает, что если мы обозначим $y = f(x)$, то $f \in C^{(r)}(P)$. Возьмём $\varphi(u) = (x^0 + au; f(x^0+au)), u \in \Pi(-1;1)^k$. Проверим, что это параметризация. Ну, $\varphi \in C^{(r)}(\Pi)$ очевидно. $\varphi(\Pi) = (P \times B) \cap M = V^M_{x^0;y^0}$ — действительно окрестность в M. Понятно, что φ обратимо и $\varphi^{-1}(x;y) = \frac{x-x^0}{a}$ непрерывно, а значит это гомеоморфизм. Также понятно, что оно регулярно (из первой её компоненты, матрица которой — aE). □

Определение 13. Пусть у нас есть такая ситуация. $M \in \mathbb{M}_{kn}^{(r)}$, U и V — стандартные окрестности в M, $U \cap V = W \neq \varnothing$.
Пусть φ, ψ — локальные параметризации U и V, $W_1 = \varphi^{-1}(W)$, $W_2 = \psi^{-1}(W)$, $L = \psi^{-1} \circ \psi\colon W_1 \to W_2$. Тогда L называется **переходом от параметризации φ к параметризации ψ**.

Теорема 5 (Регулярность перехода)**.** *В условии определения $L \in C^{(r)}(W_1)$ и регулярно.*

Доказательство. Возьмём $u^0 \in W_1$, $x^0 = \varphi(u^0)$, $v^0 = L(u^0)$. Пусть Π и Π' — кубы или полукубы, содержащие в себе φ и ψ. Рассмотрим $\psi\colon \Pi' \to V$, $\operatorname{rank}\psi'(v^0) = k$. Пусть для определённости ненулевой минор образую производные первых k координатный функций ψ.
Введём такое обозначение: пусть $x = (x_1;\ldots;x_n)$, тогда $\overline{x} = (x_1;\ldots;x_k)$, $\overline{\overline{x}} = (x_{k+1};\ldots;x_n)$. Тогда $x = (\overline{x};\overline{\overline{x}})$. Также поступим с φ и ψ:

$$\varphi = (\overline{\varphi};\overline{\overline{\varphi}}) \qquad \psi = (\overline{\psi};\overline{\overline{\psi}})$$

Заметим, что в условии таких определений $\det\varphi'(v^0) \neq 0$. Тогда мы находимся в условии теоремы об обратном отображении. По ней

$$\exists \Delta_{v^0} \text{ — окрестность } v^0 \text{ в } \mathbb{R}^k$$

$$\exists D_{\overline{x^0}} \text{ — окрестность } v^0 \text{ в } \mathbb{R}^k\ \overline{\psi}\colon \Delta_{v^0} \to D_{\overline{x^0}} \text{ — биекция}$$

При этом $\overline{\psi}^{-1} \in C^{(r)}(D_{\overline{x^0}} \to \Delta_{v^0})$.
Положим $G^M_{x^0} = \psi(\Delta_{v^0} \cap \Pi')$. Заметим, что $G^M_{x^0} \subset V$ и $\forall x \in G^M_{x^0}$ $v = \psi^{-1}(x) \in \Delta_{v^0}$. А в таком случае $\overline{\psi}(v) = \overline{x} \in D_{\overline{x^0}}$, то есть $v = \overline{\psi}^{-1}(\overline{x})$.
Ещё докажем, что $G^M_{x^0}$ — окрестность x^0 в M. Оно тривиально содержит x^0, проверим открытость. Ну, что ж. Δ_{v^0} открыто в $\mathbb{R}^k$, а значит $\Delta_{v^0} \cap \Pi'$ открыто в Π'. Тогда $G^M_{x^0} = \psi(\Delta_{v^0} \cap \Pi')$ открыто в V, а V открыто в M.
Ну, хорошо. Заметим, что φ непрерывна в u^0, поэтому существует B_{u^0} — такая окрестность u^0 в $\mathbb{R}^k$, что $\varphi(B_{u^0} \cap W_1) \subset G^M_{x^0}$ и $\overline{\varphi}(B_{u^0}) \subset D_{\overline{x^0}}$.
Для чего нам вся эта пурга? Чтобы жить в k-мерном пространстве. Давайте докажем, что

$$\forall u \in B_{u^0} \cap W_1 \; L(u) = \overline{\psi}^{-1}(\overline{\varphi}(u))$$

Ну, что ж, если $u \in B_{u^0} \cap W_1$, то $x \in G^M_{x^0}$, а $\overline{x} \in D_{\overline{x^0}}$. Тогда $v = \psi^{-1}(x) \in \Delta_{v^0}$, а значит $v = \overline{\psi}^{-1}(\overline{x})$.
Чудно, давайте избавляться от лишних условий. Давайте скажем, что $\overline{\psi}^{-1}(\psi(u))$ имеет смысл ещё и на B_{u^0} так как $\overline{\psi}(u) \in D_{x^0}$. Тогда можно определить $\Phi_{u_0} \in C^{(r)}(B_{u^0} \to \mathbb{R}^k)$, $\Phi_{u^0} = L$ на $B_{u^0} \cap W_1$, $\Phi_{u^0} = \overline{\psi} \circ \overline{\varphi}$.
Аналогично $\exists B_{v^0}$ и $\Psi_{v_0} \in C^{(r)}(B_{v^0} \to \mathbb{R}^k)$ и все остальные хорошие свойства. При этом получается, что $L^{-1} \circ L$ — тождественная функция в окрестности u^0, а значит, поскольку якобианы обратных функций противоположны, ни один из них не ноль, отсюда регулярность.
Что мы в итоге доказали? Что у каждой точки u^0 есть окрестность, в которой всё хорошо. Если сослаться на теорему 3, то будет всё хорошо, либо придётся жить с локальным определением. $\square$