Лабораторная работа - 1.

$f(x) = x^2 + x - 1, \quad [1; 4]$.

1. Построить верхнюю и нижнюю суммы Дарбу. (n частей).
и огр. сверху (4) и снизу (1)

$f(x)$ - возрастает на $[1, 4]$, следовательно, если мы разобъем $[1, 4]$ на n частей:

$x: 1, 1+\frac{3}{n}, 1+\frac{6}{n}, 1+\frac{9}{n}, \dots, 1+\frac{3(k-1)}{n}, \dots, 1+\frac{3n}{n}, k \in \mathbb{N}$,

то для $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $f(x_{i-1}) = \inf\limits_{x \in \Delta_i} f(x)$,

$f(x_i) = \sup\limits_{x \in \Delta_i} f(x)$.

Тогда, нижняя сумма Дарбу:

$$s(x) = \frac{3}{n}\left(1 + \left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{3}{n}\right) - 1\right) + \dots + \left(\left(1+\frac{3(k-1)}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{3(k-1)}{n}\right) - 1 + \dots +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\left(1+\frac{3(n-1)}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{3(n-1)}{n}\right) - 1\right)\right) =$$

$$\frac{3}{n}\left(1 + \left(1 + \frac{6}{n} + \frac{3^2}{n^2} + \frac{3}{n}\right) + \left(1 + \frac{12}{n} + \frac{6^2}{n^2} + \frac{6}{n}\right) + \dots\right) =$$

$$\frac{3}{n}\left(\underset{\uparrow \atop 1}{n} + \underset{\uparrow \atop \left(\frac{6}{n}+\frac{3}{n}\right)+\left(\frac{12}{n}+\frac{6}{n}\right)+\dots}{\frac{\frac{18}{n} + \frac{9}{n}(n-2)}{2}}(n-1) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{3i}{n}\right)^2\right).$$

А верхняя:

$$S(x) = \frac{3}{n}\left(n + \frac{\frac{18}{n} + \frac{9}{n}(n-1)}{2} \cdot n + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n}\right)^2\right).$$

Например, для $n=5$: нижняя $= 20.28$

верхняя $= 31.08$

2. Проверить критерий Римана.

$f(x)$ - интегрируема на отрезке

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{\Delta_i \to 0} (S(\tau) - s(\tau)) = 0$$

Заметим, что $S(\tau)$ и $s(\tau)$ отличаются на один элемент, следовательно,

$$S(\tau) - s(\tau) = \frac{3}{n}\left(\frac{9n}{n} + \frac{9n}{n}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n}\left(\frac{9n}{n} + \frac{9n}{n}\right) = \frac{54}{n} = 0.$$

Также, док-ть интегрируемость этой функции можно через колебание $f(x)$ на отрезке, т. е. $\omega_i(f) = M_i - m_i$,

$$\lim_{\substack{n \to \infty, \\ \Delta x_i \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i\right) = 0.$$

3. Возьмем $S(\tau)$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3}{n}\left(n + \frac{\frac{18}{n} + \frac{9}{n}(n-1)}{2} \cdot n + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n}\right)^2\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n}\left(4n + \frac{\frac{18}{n} + \frac{9}{n}(n-1)}{2} \cdot n\right) =$$

$$= 3 \lim_{n \to \infty}\left(\frac{9}{2n} + \frac{17}{2}\right) = \frac{51}{2}.$$

4. $$\int_1^4 (x^2 + x - 1)\,dx = F(x)\Big|_1^4 = F(4) - F(1)$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x. \Rightarrow F(x)\Big|_1^4 = \frac{76}{3} + \frac{1}{6} = \frac{51}{2}.$$