LISTA 3 - Espaços Vetoriais

Questão 1: Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Definamos a soma e a multiplicação por escalar em $\mathbb{R}$ por

$$u \oplus v = uv$$

$$\alpha \odot u = \alpha + u$$

. Verifique se $\mathbb{R}$ é ou não um espaço vetorial em relação a essas operações.

Questão 2: Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Defina a soma e a multiplicação por escalar por

$$u \oplus v = u - v$$

$$\alpha \odot u = \alpha u$$

, respectivamente. Verifique se $\mathbb{R}$ é ou não um espaço vetorial em relação a essas operações.

Questão 3: Seja $\mathbb{V}$ o conjunto de todos os pares ordenados de números reais. Definamos a adição e a multiplicação por escalar em $\mathbb{V}$ por

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$\alpha \odot (x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$$

$\mathbb{V}$ é um espaço vetorial com estas operações? Justifique.

Questão 4: Determine quais dos conjuntos $\mathbb{W}$ abaixo são subespaços vetoriais (Justifique).

a) $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 1\}$
b) $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$
c) $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 + x_2\}$
d) $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 \text{ ou } x_3 = x_2\}$

Questão 5: O conjunto $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ e } 2x + y = 0\}$ com as operações usuais é espaço vetorial?

Questão 6: O conjunto $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ e } 2x + y = 0\}$ com as operações usuais de $\mathbb{R}^3$ é espaço vetorial?

Questão 7: Considere os conjuntos $\mathbb{W}_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u = (0,0,0) + t(1,2,3), \forall t \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{W}_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u = (1,1,1) + t(1,1,1), \forall t \in \mathbb{R}\}$. O conjunto $\mathbb{W} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$? Interprete o conjunto $\mathbb{W}$ geometricamente.

Questão 8: Quais dos subconjuntos do $\mathbb{R}^2$, com as operações usuais, são subespaços vetoriais?

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$.
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$.
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$.

Questão 9: Seja $A = \{(1,1,-2,4), (1,1,-1,2), (1,4,-4,8)\} \subset \mathbb{R}^4$.

a) Determine o subespaço S gerado por A, ou seja,

$$S = span\{(1,1,-2,4), (1,1,-1,2), (1,4,-4,8)\}.$$

b) O vetor $(2,1,-1,2)$ pertence a S?

c) O vetor $(0,0,1,1)$ pertence a S?

Questão 10: Seja $\mathbb{W} = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid AX = \overline{0}\}$, para cada matriz A abaixo, encontre um conjunto de geradores para o espaço $\mathbb{W}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Questão 11: Em cada item, determine se o espaço gerado pelo conjunto de indicados é o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

a) $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,0,1)$.

b) $v_1 = (2,1,-2), v_2 = (3,2,-2)$ e $v_3 = (2,2,0)$.

Questão 12: Em cada item, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

a) O vetor $(2,6,6)$ pertence ao espaço gerado pelo conjunto de vetores $(-1,2,3)$ e $(3,4,2)$.

b) O vetor $(-9,-2,5)$ pertence ao espaço gerado conjunto de vetores $(-1,2,3)$ e $(3,4,2)$.

Questão 13: Quais dos seguintes vetores é combinação linear de conjunto formado pelos vetores $v_1 = (5,-3,1)$, $v_2 = (0,4,3)$ e $v_3 = (-10,18,7)$?

a) $(10,-2,5)$ b) $(10,2,8)$ c) $(-2,-1,1)$ d) $(-1,2,3)$

Questão 14: Os vetores $v_1 = (5,-3,1)$, $v_2 = (0,4,3)$ e $v_3 = (-10,18,7)$ formam um conjunto LD ou L.I.? Caso sejam LD, escreva um deles como combinação linear dos outros.

Questão 15: Determine se os conjuntos de vetores abaixo são linearmente dependentes ou linearmente independentes. Justifique.

a) $S = \{(2,0),(1,0)\}$

b) $S = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,2,2)\}$

Questão 16: Para quais valores de λ o conjunto de vetores $\{(3,1,0),(\lambda^2+2,2,0)\}$ é LD?

Questão 17: Suponha que $\{v_1,v_2,v_3\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^n$. Responda se $\{w_1,w_2,w_3\}$ é linearmente dependente ou independente nos seguintes casos:

a) $w_1 = v_1+v_2, w_2 = v_1+v_3$ e $w_3 = v_2+v_3$;

b) $w_1 = v_1, w_2 = v_1+v_3$ e $w_3 = v_1+v_2+v_3$.

Questão 18: Se os vetores não nulos u, v e w formam um conjunto LD, então w é uma combinação linear de u e v?

Questão 19: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Encontre os valores de λ tais que o sistema linear homogêneo $(A-\lambda I_n)X = \overline{0}$ tem solução não trivial e, para estes valores de λ, encontre uma base para o espaço solução.

Questão 20: Sejam $v_1 = (4, 2, -3)$, $v_2 = (2, 1, -2)$ e $v_3 = (-2, -1, 0)$

a) Os vetores v_1 , v_2 e v_3 formam um conjunto LI ou LD?

b) Os vetores v_1 e v_2 formam um conjunto LI ou LD?.

c) Qual a dimensão do subespaço gerado por v_1 , v_2 e v_3, ou seja, do conjunto das combinações de v_1 , v_2 e v_3.

d) Descreva geometricamente o subespaço gerado por v_1 , v_2 e v_3

Questão 21: Dados $v_1 = (2, 1, 3)$ e $v_2 = (2, 6, 4)$:

a) Os vetores v_1 e v_2 geram o $\mathbb{R}^3$? Justifique.

b) Seja v_3 um terceiro vetor do $\mathbb{R}^3$. Quais as condições sobre v_3 para que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$?

c) Encontre um vetor v_3 que complete junto com v_1 e v_2 uma base do $\mathbb{R}^3$.

Questão 22: Dê exemplos de:

a) Três vetores: v_1, v_2 e v_3, sendo $\{v_1\}$ L.I., $\{v_2, v_3\}$ L.I., v_2 e v_3 não são múltiplos de v_1 e $\{v_1, v_2, v_3\}$ LD.

b) Quatro vetores: v_1, v_2, v_3 e v_4 , sendo $\{v_1, v_2\}$ L.I., $\{v_3, v_4\}$ L.I., v_3 e v_4 não são combinação linear de v_1 e v_2 e $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ LD.

Questão 23: Quais são as coordenadas de $x = (1, 0, 0)$ em relação à base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}?$$

Questão 24: Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{W}_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - w = 0\}$ e $\mathbb{W}_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + w = 0\}$.

a) Determine $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$.

b) Exiba uma base para $\mathbb{W}_1 \cap W_2$.

c) Determine $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$.

d) $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ é soma direta? Justifique.

e) $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \mathbb{R}^4$? Justifique.

Questão 25: Sejam $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\mathcal{B}_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$ e $\mathcal{B}_3 = \{(2, 0), (0, 2)\}$ bases ordenadas do $\mathbb{R}^2$.

a) Ache as matrizes mudança de base:

i) $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_1}$ ii) $[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}}$ iii) $[I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}}$ iv) $[I]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}}$

b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação à base:

i) $\mathcal{B}$ ii) $\mathcal{B}_1$ iii) $\mathcal{B}_2$ iv) $\mathcal{B}_3$

c) As coordenadas de um vetor v em relação a base $\mathcal{B}_1$ são dadas por

$$[v]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quais são as coordenadas de v em relação à base:

i) $\mathcal{B}$ ii) $\mathcal{B}_2$ iii) $\mathcal{B}_3$

⇒ *Espaços não* $\mathbb{R}^n$

Questão 26: Considere $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Definamos a adição e a multiplicação por escalar por

$$(a+bi) \oplus (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$\alpha \odot (a+bi) = \alpha a + \alpha bi$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que $\mathbb{C}$, com estas operações, é um espaço vetorial.

Questão 27: Mostre que o espaço $\mathbb{P}_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ dos polinômios reais de grau menor ou igual a 3 é um espaço vetorial real, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar.

Questão 28: Para cada um dos espaços vetoriais abaixo, com operações usuais, descreva o vetor nulo.

a) $\mathbb{M}_{3\times 2}$ b) $\mathbb{P}_3$ c) $C[a,b]$

Questão 29: Determine quais dos conjuntos $\mathbb{W}$ abaixo são subespaços vetoriais (Justifique).

a) $\mathbb{W}$ é o conjunto de todas as matrizes 2×2 diagonais.
b) $\mathbb{W}$ é o conjunto de todas as matrizes 2×2 triangulares.
c) $\mathbb{W}$ é o conjunto de todas as matrizes 2×2 simétricas.
d) $\mathbb{W} = \{p \in \mathbb{P}_4 \mid p$ possui grau igual a 3$\}$
e) $\mathbb{W}$ é o conjunto de polinômios de grau até 4 tal que $p(0) = 0$.
f) $\mathbb{W} \subset C[-1,1]$ tal que as funções em $\mathbb{W}$ satisfazem $f(-1) = f(1)$

Questão 30: Considere o $\mathbb{W}$ conjunto das matrizes A de ordem 2 de modo que $Az = 0$, com $z = [1 \quad 1]^\top$. $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial? Explique.

Questão 31: Em cada item, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

a) $\{2, t^2, t, 2t+3\}$ gera $\mathbb{P}_2$.
b) $\{1, t^2, t^2 - 2\}$ gera $\mathbb{P}_2$.

Questão 32: Determine se os conjuntos de vetores abaixo são linearmente dependentes ou linearmente independentes. Justifique.

a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
b) $S = \{p_1, p_2, p_3\} \subseteq \mathbb{P}_4$ onde $p_1(x) = x^3 - 5x^2 + 1$, $p_2(x) = 2x^4 + 5x - 6$ e $p_3(x) = x^2 - 5x + 2$

Questão 33: Os polinômios $p(x) = x^3 - 5x^2 + 1$, $q(x) = 2x^4 + 5x - 6$ e $r(x) = x^2 - 5x + 2$ do $\mathbb{P}_4$ formam um conjunto linearmente independente.

Questão 34: Obtenha uma base e consequentemente determine a dimensão de cada um dos subespaços de $\mathbb{M}_{3\times 3}$ abaixo descritos:

a) matrizes com traço igual a zero.
b) matrizes que têm a primeira e a última linhas iguais.

c) matrizes em que os elementos da segunda linha é igual aos elementos da terceira coluna.

d) matrizes das quais a soma dos elementos da primeira linha é igual à soma dos elementos da segunda coluna.

Questão 35: Seja $\mathbb{V}$ o espaço das matrizes reais de ordem 2, e $\mathbb{W}$ o subespaço gerado por

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma base e a dimensão de W.

Questão 36: Seja $\mathbb{V}$ o espaço das matrizes reais de ordem 2, e $\mathbb{W}$ o subespaço gerado por

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma base e a dimensão de $\mathbb{W}$.

Questão 37: Mostre que os polinômios 1, $x-1$ e x^2-3x+1 formam uma base de $\mathbb{P}_2$. Exprima o polinômio $2x^2-5x+6$ como combinação linear dos elementos dessa base.

Respostas

1. Não é espaço vetorial, $A4$ não se verifica.

2. Não é espaço vetorial, $A1$ não se verifica.

3. Não

4.

a) Não b) Sim c) Sim d) Não

5. Sim pois $\mathbb{W}$ é o conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo.

6. Sim pois é intersecção de subespaços vetoriais: $\mathbb{W} = \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ onde $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ são planos que passam pela origem (portanto são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$).

7. Sim pois é soma de subespaços vetoriais: $\mathbb{W} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ onde $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ são retas que passam pela origem (portanto são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$). Geometricamente, $\mathbb{W}$ será um plano.

8a. Não é subespaço, por não ser fechado para a multiplicação por escalar.

8b. Não é subespaço, por não ser fechado para a multiplicação por escalar.

8c. É subespaço.

9.

a) $S = \{(x, y, z, -2z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

b) Sim.

c) Não.

11.

a) Sim b) Não

12.

a) F b) V

13.

a) Sim b) Sim c) Não d) Não

14. Sim. $v_3 = -2v_1 + 3v_3$

15.

a) LD b) LI

16. $\lambda = \pm 2$

17.

a) LI b) LI

18. Não necessariamente, o que temos é que algum deles será combinação linear dos demais. Por exemplo $u = (1, 0, 0)$, $v = (2, 0, 0)$ e $w = (0, 1, 0)$ são LD, mas w não é CL de u e v.

19. $\lambda = 1$, solução geral do SLH: $\{(\alpha, -2\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$, base $B = \{(1, -2, 1)\}$

20.

a) LD

b) LI

c) 2

d) Plano que passa pela origem e é paralelo aos vetores v_1 e v_2, isto é, plano dado por $x - 2y = 0$.

21.

a) Não b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ LI c) Por exemplo, $v_3 = (0, 0, 1)$

23. $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

24a. $\mathbb{W}_1 \cap W_2 = \{(0, 0, z, z) | z \in \mathbb{R}\}$.

24b. $\mathbb{B} = \{(0, 0, 1, 1)\}$.

24c. .

24d. Não, a interseção não é apenas o vetor nulo.

24e. Sim.

25a.

i) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

25b.

i) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

25c.

i) $\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

28.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $p(t) = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3 = 0$

c) $f(x) = 0$

29.

a) Sim
b) Não
c) Sim
d) Não
e) Sim
f) Sim

30. $\mathbb{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & -b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço de $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

31.

a) V
b) F

32.

a) LI
b) LI

33. Sim.

34.

a) dim $S = 8$
b) dim $S = 6$
c) dim $S = 6$
d) dim $S = 8$

36. dim $\mathbb{W} = 2$.

37. $2x^2 - 5x + 6 = 5 \cdot 1 + 1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (x^2 - 3x + 1)$.