

Sandwich-Theorem

$\xrightarrow{*} = \text{konvergiert gegen}$

$$\cdot a_n \xrightarrow{*} x \text{ \& } b_n \xrightarrow{*} x \implies \underline{c \rightarrow x \text{ if } a_n \leq c_n \leq b_n \quad n > \underline{N}}$$

Beweis:

$$|x - a_n| < \varepsilon \quad \forall n > \underline{N_1}$$

$$|x - b_n| < \varepsilon \quad \forall n > \underline{N_2}$$

a_n liegt hier

$$\underline{x - \varepsilon} < a_n < \underline{x + \varepsilon}$$



$$x - \varepsilon < b_n < x + \varepsilon$$

wählt man $\underline{N_\varepsilon = \max(N_1, N_2)}$ so gilt für alle $n > N_\varepsilon$

$$x - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < x + \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon$$

Größere Folgen konstruieren:

$$a_n = \frac{n}{2^n} \quad 2^n \geq n^2 \text{ ab } n \geq 4 \implies \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2} \quad | \cdot n \implies \frac{n}{2^n} \leq \frac{\cancel{n}}{n^2} \implies \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$$

Note₁₆: Man kann Folgen NICHT ableiten um zu sehen wie schnell sie wachsen. Ableiten gilt nur für Funktionen, nicht für Folgen

- Monoton steigend: $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Monoton fallend: $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton steigend/fallend: $>/<$ (im Gegensatz zu \geq/\leq)

Auf Monotonie überprüfen:

① • Ist $a_{n+1} - a_n$ immer $> 0 \rightarrow$ streng monoton steigend
immer $< 0 \rightarrow$ „ „ „ fallend

② • $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow$ Folge ist monoton steigend
(nur wenn Folgeglieder immer positiv)

Note₁₇: Hier wird die Änderungsrate berechnet. =
Bei ① z.B. die Folge wird
immer um 5 größer.
Bei ② z.B. die Folge wird
immer um das 1,2-Fache größer.

Note₁₈: Ist eine Folge beschränkt & monoton,
so muss diese konvergieren

N₁₈ Bsp. S. 50-51
2 Beispiele S. 50

Vorgehensweise:

- ① (Sinnvolle Grenzwerte überlegen & Beweisen (Induktion))
- ② Monotonie mittels oben genannter Wege untersuchen
- ③ Ist die Folge begrenzt monoton, ist sie konvergent
- ④ Bei rekursiven Folgen der Form $a_{n+1} = f(a)$ kommen nur Lösungen der Gleichung als Konvergenzwert in Frage. Bsp. 5.51

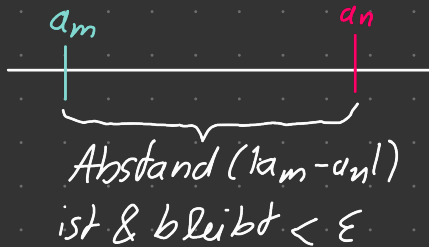
Note₁: Achtung! Gleichung kann auch lösbar sein obwohl Folge nicht konvergent; deshalb ① bis ③.

Note₂: Bernoulli-Ungleichung: $(1+a)^n \geq 1+n \cdot a$ if $a \geq -1$

- e (Euler'sche Zahl) definiert als $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (Beweis siehe S.52)
- $e = \left(1 + \frac{v}{n}\right)^n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty}$ & $v \in \mathbb{N}$ (Beweis S.53)
- $e^v = \exp(v)$

Cauchy-Konvergenzkriterium & Teilfolgen

- CKK: Folge konvergiert wenn $|a_m - a_n|$ beliebig klein wird.
- ana. wenn sich für jedes ε (egal wie klein) 2 Glieder einer Folge finden lassen, deren Abstand $< \varepsilon$ ist & ab diesen Gliedern auch $< \varepsilon$ bleibt, so ist die Folge konvergent



Teilfolgen:

- Einige Glieder der Folge werden weggelassen

d.h. es wird aus a_n z.B. nur $a_1, a_5, a_{17}, a_{38}, \dots$ verwendet, wobei der Index der verwendeten a immer größer werden muss. Also z.B.

a_1, a_2, a_3 ist erlaubt; a_1, a_3, a_2 nicht.

- Ein Häufungspunkt von a_n ist ein Konvergenzpunkt einer Teilfolge von $a_n (= a_{n_k})$
- Es kann mehrere Häufungspunkte geben

Bsp.: $a_n = (-1)^n$ hat 2 Häufungspunkte: -1 & 1

- $a_n \xrightarrow{*} a$ iF alle Teilfolgen von $a_n \xrightarrow{*} a$
- Konv. Teilfolgen gegen verschiedene Zahlen ist a_n divergent
- Satz von Bolzano-Weierstraß: jede besch. Folge hat min. eine konv. Teilfolge

↳ Bsp.: 2.9 S. 55

Unendliche Reihen & Konvergenzkriterien

- s_n ist die Summe der ersten n Glieder einer Folge $\rightarrow s_n = \sum_{k=1}^n a_k$
- s_n wird Reihe genannt

n -tes Glied von a_n



Konvergiert $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ gegen eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ so ist es eine konvergente Reihe

Bsp.: $a_n = n$ ($a_1 = 1, a_2 = 2, \text{etc.}$)

weitere Beispiele: S. 56-57

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \Rightarrow s_1 = 1, s_2 = 3, s_3 = 6, \text{etc.}$$

\downarrow \downarrow

$1+2$ $1+2+3$