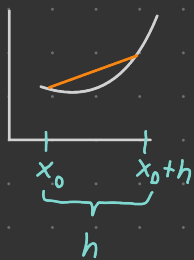


Ableitung



$$y = mx + b$$

$$m = \frac{\text{rise}}{\text{run}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

↓
 $\lim_{h \rightarrow 0}$ ist die Ableitung im Punkt x_0

• $f(x)$ ist diffbar. if $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ exists

Ist $f(x)$ auf \mathbb{D} diffbar. $\Leftrightarrow f(x)$ auf Definitionsbereich \mathbb{D}

Satz 5.1

$f(x)$ diffbar. in $x_0 \in \mathbb{D} \Rightarrow f(x)$ stetig in x_0

Bew. S. 93

$$y = mx + b$$

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \leftarrow \text{Tangentengleichung im Punkt } x_0$$

- Approximiert $f(x)$ im Punkt x_0 am besten, da die St. schneller wachst als h

Satz 5.2

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Bew. Siehe 5.94

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \longrightarrow (x^{-n})' = -n x^{-n-1} \longrightarrow \text{auch mit } \exp. \in \mathbb{Q} \text{ mit } x > 0$$

Ableitung von Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \longrightarrow f(x) \text{ ist auf } (-R, +R) \text{ stetig \& diffbar.}$$

↓

$$f(x)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

Startindex 1 → Erstes Element = $a_0 \rightarrow a_0' = 0 \rightarrow$ Startwert 0 weggelassen

↓

$$(e^x)' = e^x \quad (\sin(x))' = \cos(x) \quad (\cos(x))' = -\sin(x) \quad (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Bew. S. 96

Kettenregel

$$(g \circ f)'(x_0) = g(f(x))' \cdot f(x)' \longrightarrow \text{Äußere Abl.} \cdot \text{Innere Abl.} \quad \text{Evid. S. 96}$$

↓

$$f_3(f_2(f_1(x)))' \cdot f_2(f_1(x))' \cdot f_1(x)' \text{ etc.}$$

$f(x)$ an der Stelle $x = \text{Abl. an der St. } x$

$x \rightarrow f(x)' = \text{Abl. Funktion (meist auch mit Abl. bez.)}$

- Funktion = stetig diffbar \Leftrightarrow Abl. auf Intervall originaler Funktion stetig



- Es gibt ggf. die zweite, dritte, ... Abl.

- Ist f & ihre Abl. bis Stufe n stetig $\Rightarrow f$ ist n mal diffbar

- Menge aller n mal stetig diffbaren f auf $I = C^n(I)$

Extremstellen & Mittelwertsatz

geg.: $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Globales Maximum $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D$

Lokales Maximum $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \longrightarrow \text{lok. max. if } \exists \varepsilon > 0$

• Min. gleich

• Mehrere globale & lokale Extremst. möglich (mehrere globale nur wenn Wert gleich)

Satz 5.5

$I = [a, b]$ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (diff. bar auf $]a, b[$)

if $x_0 \in]a, b[$ lok. Extremst. $\Rightarrow f(x_0)' = 0$

Bew. S. 99



Abl. Links



Abl. Rechts



Abl. Extrema

• $\forall x \mid f'(x) = 0 \rightarrow$ stationärer Punkt

Min./Max. suchen

$$f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Folgende Möglichkeiten für Extrema

a.) Randpunkte von I

b.) Punkte wo f nicht diff'bar (siehe Betrag)

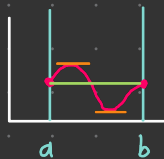
c.) Stationäre Punkte

Bsp. S. 100

Satz von Rolle

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ f = stetig & diffbar in $]a, b[$

wenn $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in]a, b[\mid f'(x_0) = 0$



$$f(a) = f(b)$$

$\exists x$ so dass $f'(x) = 0$



Mittelwertsatz



a & b verb. = Secante bzw. Verb. zw. $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$

\exists Tangente die zu Secante parallel