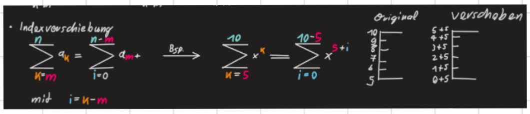
Induktion

- IA: ~ soll gelten
- Erstes Element zeigen
- IV: Man nehme an ~ gelte für ein beliebiges n
- IS: beide auf n+1 bringen

Good to know:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \cdot b + c_k \cdot d) = b \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + d \cdot \sum_{k=1}^{n} d_n$$



- Arithmetisch wachsend → um Konst. erhöht
- Geometrisch wachsend → um Faktor mult.

Generell

- $0{,}b_1 b_2 \dots b_k = \dfrac{b_1 b_2 \dots b_k}{\underbrace{99\dots9}_{k\text{-Mal}}}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ $\quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

- Beweis widerlegen
  ↳ ein Gegenbsp reicht

$e^x = (1+\frac{x}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

- Aussage = Falsch bew.
  ↳ Gegenteil annehmen & auf Widerspruch führen

$a \cdot b = 0$
↳ $a = 0 \vee b = 0$

$a \cdot b < 0$
↳ $a < 0 \oplus b < 0$

x	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	`	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	`	0

Ungleichungen

Wann Fallunterscheidung:
- Gerade Wurzeln
- Betrag ($<0 \Rightarrow -x$)
- Teilen / Mult. mit Unbekannte } Vorkurs Zusammenf. ggf. kürzen
- Nebenbedingung beachten

Beachten:

$-a < -b$ $(-a)^2 > (-b)^2$	$\log(b)/\ln(b)$ $b<1 \to$ drehen	$a < b$ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Pol. 2. Grades
Keine 0-Stelle ⇒ über/unter x-Achse
2 Lösungen → zw./außerhalb 0-Stellen
1 Lösung → rechts/links von 0-Stelle

Schranke Bsp. Beweis
$M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
$\inf(M) = 0$
gr. unt. Schr.
$b > 0$
$\frac{1}{b} < n \to \frac{1}{n} < b$

$\mathbb{C}$ $\quad a + bi \quad \frac{v}{w} = \frac{v \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$

$-\frac{b}{2a} \pm \frac{i}{2a} \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}$

$\varnothing = \begin{cases} \arccos\frac{a}{v} & b \geq 0 \\ -\arccos\frac{a}{v} & b < 0 \end{cases}$

Wichtige Formeln sin, cos, tan & cot

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
bzw.
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$
$\cos(x - \frac{\pi}{2})$

$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan$
$\cot(-x) = -\cot(x)$

Additionstheorem:
$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$
$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$

Doppelwinkelformel:
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

Wichtig für gewisse Integrationen:
$\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$

$\sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
(cos wegen arcsin auf $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ beschränkt und ist deshalb immer positiv)

$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$

$\sin(\arcsin(x)) = x$
$\cos(\arccos(x)) = x$

Folgen

Beschr.
$|a_n| \leq K$ ab $n > N$

Besch. Folge muss nicht konv.

Konv.
$|a_n - a| < \varepsilon$ ab $n > N$
↳ bei Bew. n mit N_ε ersetzen
• Erraten & nachweisen

I $\lim(a_n + b_n) = a + b$	II $a_n \cdot b_n = a \cdot b$	III $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
IV $\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$	V $\lvert a_n \rvert = \lvert a \rvert$	
n^2 heraus heben	n heraus → unter Wurzel n^2	
• 1 / + a − a	$a_n \leq b_n \to a \leq b$ (nur gr./kl. gl.)	

Sandwich-Kriterium

$a_n \to x \quad b_n \to x \Rightarrow$ if $a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow$
$\Rightarrow c_n \to x$ ab $n > \max(N_a, N_b, N_{a \leq c \leq b})$

Monotonie

Steigend: $a_{n+1} \geq a_n$ } $a_{n+1} - a_n$ immer > 0 str. mon. st.
Fallend: $a_{n+1} \leq a_n$ } $a_{n+1} - a_n$ immer < 0 str. mon. fal.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \longrightarrow$ monoton st.
↓
nur wenn Folgeglieder Positiv !

Besch. & mon. → konv.

1.) Sinnvolle Grenzwerte überlegen & Bew. durch Ind.
2.) Monotonie überprüfen
3.) Rek. Folge → Lösung = Grenzwert
(! evtl. auch lösbar wenn nicht konv. deshalb 1 & 2)

Bernoulli

$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a \quad \forall a \geq -1$

Cauchy-Konv.-Krit.

$|a_m - a_n| < \varepsilon$ Abst. 2 Glieder bleibt $< \varepsilon$

Teilfolgen

Index muss gr. werden & darf sich nicht wiederholen

$a_n \to a \Leftrightarrow$ Alle Teilfolgen $\to a$

Jede Besch. Folge min. 1 Konv. Teilfolge

Konv. Teilfolgen ggn. versch. Zahlen → Folge div.

Reihen

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum a_n$ konv. $\not\Leftarrow\!\!\Rightarrow a_n$ = Nullfolge

$\sum |a_n|$ konv. → abs. konv.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b$

$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Leibniz
a_n = mon. fal. 0-Folge ≥ 0
$\Rightarrow \sum (-1)^n \cdot a_n$ = konv.

$\sum |a_n|$ = besch. $\Rightarrow \sum |a_n|$ = abs. konv.

Cauchy-Krit. Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv if $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \;\; \forall \;\; n, m > N_\varepsilon$ & $n > m$

$|s_n - s_m|$

Quotientenkrit.

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$ & $q > 0 \longrightarrow$
$\to$ ab $n > N \Rightarrow \sum a_n$ = abs. konv.
$> 1 \Rightarrow$ div. $\quad = 1 \Rightarrow$ Keine Auss.

Wurzelkrit.

$\sqrt[n]{a_n}$ $\begin{cases} \leq 1 \to \sum a_n \text{ konv. abs.} \\ > 1 \to \sum a_n \text{ div.} \end{cases}$

Vergleichs/Majorantenkrit

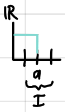
$|a_n| < b_n$ ab $n > N$

I $\sum b_n$ konv $\Rightarrow \sum a_n$ abs. konv.
II $\sum |a_n|$ div $\Rightarrow \sum b_n$ div.

alle kleiner konv = konv
alle größer div = div

Funktionen

$f: I \to \mathbb{R}$
$a \in I$



Sandwhich-Krit

$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \; \forall \delta > 0 \; (x \neq a)$

if $\lim_{x\to a} g \& h \to c \Rightarrow f(x) \to c$

Wichtige Formeln

$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to a^+} f(x)$
↳ + von rechts
↳ x bleibt >/< a

$\lim_{x\to a^+} = \lim_{x\to a^-} = c \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = c$

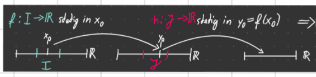
für manche $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- Polynome: $p(x) = p(a)$
- $\sin(x) = \sin(a)$
- $e^x = e^a$
- $\cos(x) = \cos(a)$

umso näher $x \to a$
desto näher $y \to c \Rightarrow$ Konv.
↳ $|x-a| < \delta$ & $|f(x) - c| < \varepsilon$

Stetigkeit von Funktionen

- stetig if $\lim_{x\to x_0} f(x) \to f(x_0)$
- stetig if stetig $\forall x_0 \in I$
- f & g stetig $\to f+g, \; f \cdot g, \; c \cdot f, \; \frac{f}{g} \; (g \neq 0)$ stetig

$f: I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 $\quad h: J \to \mathbb{R}$ stetig in $y_0 = f(x_0)$ $\quad \Rightarrow (h \circ f)(x) = h(f(x)) =$ stetig



- Auch f mit Sprung o.ä. evtl. trotzdem stetig in $\mathbb{D}$

Unstetig:

- Grenzwert gibts nicht
- Grenzw. gibts aber ist $\neq f(x_0)$

f auf I besch.
⇓
$|f(x)| \leq c \; \forall x \in I$
$\exists$ immer eine gr. Zahl

Stetigkeit fortsetzen

- $\lim x \to a^+ = x \to a^-$ aber $f(a)$ nicht def
→ neue Funk. mit a def

} nur if $x \to a^+ = x \to a^-$ & Grenzwert $\neq \pm\infty$ exist.

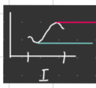
Nullstellentest:
$f(a) \cdot f(b) < 0$
→ min 1 Nullstelle

$\lim_{x\to a} f(x) = c \quad \lim_{x\to a} g(x) = d$

$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = c + d$
$f(x) \cdot g(x) = c \cdot d$
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d} \quad (d \neq 0)$

$\lim_{x\to a} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot c$

Min & max Funktionswerte



$\exists \delta \; \forall \; m \leq c \leq M \mid c = f(\delta)$

Näherungsverfahren 0-Stellen

I Folge $[a_n, b_n] \to$ 0-St. beliebig genau eingrenzt
II $a_0 = a$ & $b_0 = b$
III $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$
IV
- $c_n = 0$ ↓ 0-St. gef.
- $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$ ↓ $a_{n+1} = a_n \quad b_{n+1} = c_n$
- $f(c_n) \cdot f(b_n) < 0$ ↓ $a_{n+1} = c_n \quad b_{n+1} = b_n$

Selbstabbildung
$f(\bar{x}) = \bar{x} \to \bar{x}$
immer auf Winkelhalb.

Folgen & Reihen in $\mathbb{C}$

- Konv. if $\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$
↳ $Re(z_n) \to Re(z)$
& $Im(z_n) \to Im(z)$

- $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konv. if $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$

- Summe 2 konv. Reihen ⇒ konv

Majorantenkrit

gilt auch in $\mathbb{C}$

Quotienten- & Wurzelkrit

gilt auch in $\mathbb{C}$

e in $\mathbb{C}$

$e^0 = 1, \; e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \; e^{\bar{x}} = \overline{e^x}$

$|e^{ix}| = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = e^{ix} \cdot e^{-ix} = 1$ nur vielfache von i

$z = x + iy \to e^z = e^x \cdot e^{iy}$
$= e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$

Geometrische Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad |z| < 1 \to$ konv.

$z = e^{ix}$ auf Einh.-Kreis
e^x str. mon. st.
→ eingesch. auf i-Achse
ist e^{ix} periodisch

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Potenzreihen

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

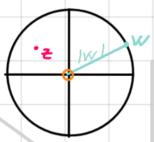
geg ges: alle | konv.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ } verallg. Polynom

$\lim \inf / \sup =$ kl./gr. Häufungspunkt

?

M = Menge konv. z
M = Kreis in $\mathbb{C}$, Int. in $\mathbb{R}$
$w \in M \to |z| < |w| \to z \in M$



$|z| < |w|$ $\quad B_{|w|}(0)$

Potenzreihe $= f: M \to \mathbb{C} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{und} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

R

- $\limsup = 0 \to R = \infty$
- $\limsup = \infty \to R = 0$
- sonst $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} (\sqrt[n]{|a_n|})}$

R = Konv. Radius

$\mathbb{C}$

M nach oben nicht beschr. $\to R = +\infty$

Fall I $R = 0 \to$ konv. nur if $z = 0$
Fall II $R \in \mathbb{R}, R > 0 \to B_R(0) \subset^* M$ $\quad$ * Teilmenge da für genau Radius keine Aussage
- $|z| < R$ konv. abs. $\quad$ - $|z| > R$ div. $\quad$ - $|z| = R$ keine Aussage

Fall III $R = +\infty$ alle z konv.

Bei Reellen Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\quad \mathbb{R}$

- konv. für $x \in]-R, R[$ $\quad$ - div für $|x| > R$ $\quad$ - $x = \pm R$ keine Aussage

Fehlt: · gr. Folgen konstruieren (4–5)

- ZF 7 → 5a. Rest. good to know Bsp.:
- ZF 8 → S.3 unten rechts

- Bew. $w \in M \Rightarrow |z| < |w| \Rightarrow z \in M$