- $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$ für alle Polynome
- $\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$
- $\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$
- $\lim_{x\to a} e^x = e^a$

Satz 3.2 Sandwhich-Kriterium

$f, g, h : I \to \mathbb{R}$ so gelte in einer δ-Umgebung von $a \in I$

$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall\ x \in (a-\delta, a+\delta), \delta > 0 \ (x \neq a)$

dann folgt: if $\lim_{x\to a} g(x)$ & $h(x)$ konv. ggn. $c \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)$ konv. ggn. c

$\Downarrow$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0 \quad \& \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

Bogenmaß-Berechnung S. 70

3.2 Stetigkeit von Funktionen

- Funktion ist stetig if $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f: I \to \mathbb{R}$ ist Stetig auf I wenn es für alle $x_0 \in I$ stetig ist

Satz 3.3

- if $f \& g: I \to \mathbb{R}$ stetig in $I \Rightarrow$

  $f+g, \; c \cdot f, \; f \cdot g$ $\quad (c \in \mathbb{R})$

  sind auch stetig
- Auch $\frac{f}{g}$ stetig if $g(x) \neq 0$

Satz 3.4

$f: I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 $\quad$ $h: J \to \mathbb{R}$ stetig in $y_0 = f(x_0)$ $\quad \Rightarrow (h \circ f)(x) = h(f(x)) =$ stetig

Stetige Funktionen in ganz $\mathbb{R}$

- $f(x) = c$
- alle Polynome
- $\frac{p(x)}{q(x)}$ für alle Polynome mit $q=0$

Unstetigkeit

Funktion ist in 2 Fällen unstetig:

- Grenzwert existiert nicht
- Grenzwert existiert, ist aber $\neq f(x_0)$

- Auch Funktionen mit Sprung o.ä. sind evtl. stetig; ist eine Funktion z.B. $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ und hat bei 0 einen Sprung, so ist diese trotzdem stetig (in ihrem Definitionsbereich)

Stetigkeit fortsetzen

- $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$ aber $f(a)$ nicht def., so kann man eine neue Funktion def., welche für a einen Wert besitzt

Bsp.: $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+3) = 4$$ (denn für alle $x \neq 1$ kann man $(x-1)$ kürzen)

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases}}$$

- Stetigkeit ist nur fortsetzbar wenn:

  $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$ & Es gibt einen Grenzwert $\neq \pm\infty$

Good to know Beispiel:

(h) Man bestimme alle Werte des Parameters a, für die die Funktion

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 + ax, & \text{falls } x \leq 2 \\ x^2 + 3, & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}$ ist. Für alle $x \neq 2$ ist diese Funktion offensichtlich stetig. Es gilt

$$\lim_{x \to 2-} f_a(x) = 1 + 2a \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 2+} f_a(x) = 7.$$

Damit der Grenzwert von f für x gegen 2 existiert, müssen das linksseitige und das rechtsseitige Grenzwerte übereinstimmen. Daraus folgt $a = 3$. Dann gilt:

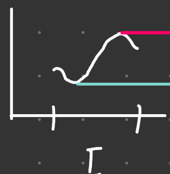
$$\lim_{x \to 2} f_3(x) = 7 = f_3(2).$$

Somit ist die Funktion $f_3(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Satz 3.5

$I = [a,b]$ $\quad f: I \to \mathbb{R}$, stetig in I

- f ist auf I beschränkt $\Rightarrow |f(x)| \leq C \quad \forall x \in I$
- Es gibt einen minimalen & einen maximalen Funktionswert



$M = \max f(x) = f(x_{max})$

$m = \min f(x) = f(x_{min})$

- $m \leq c \leq M \Rightarrow \forall c$ gibt es ein ξ sodass $c = f(\xi)$ (d.h. zwischen m & M muss f stetig sein)

Bsp.: S. 70

Satz 3.6 Nullstellentest

$I = [a,b]$ $\quad f: I \to \mathbb{R}$

Haben $f(a)$ & $f(b)$ versch. Vorzeichen $(f(a) \cdot f(b) < 0)$ gibt es min. eine 0-Stelle

$\Downarrow$

jedes Polynom mit ungeradem Grad min. eine Reelle Nullstelle

Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung

$f: [a, b]$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$

① Konstruiere eine Folge $[a_n, b_n]$ die die Nullstelle beliebig genau eingrenzt

② Man setze $a_0 = a$ & $b_0 = b$

③ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

if $c_n = 0$

$\Downarrow$

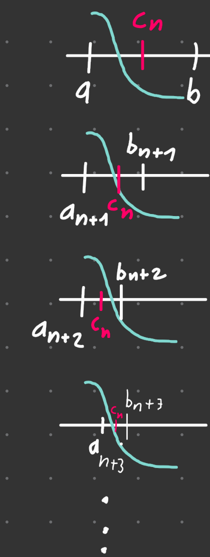
0-Stelle gefunden

if $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$

$a_{n+1} = a_n$ & $b_{n+1} = c_n$

if $f(c_n) \cdot f(b_n) < 0$

$a_{n+1} = c_n$ $b_{n+1} = b_n$



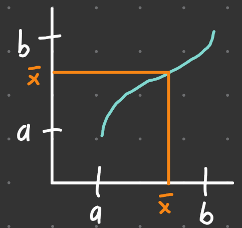
Satz 3.7 Selbstabbildung

$f:[a,b]\to[a,b]$

$\Downarrow$

Es gibt einen Punkt $\bar{x}$ der sich abbildet

$\bar{x}$ liegt auf der Winkelhalbierenden



4 Folgen & Reihen in $\mathbb{C}$

Folgen in $\mathbb{C}$ bilden $\mathbb{N}_0$ (bzw. $\mathbb{N}$) auf $\mathbb{C}$ ab

Folge in $\mathbb{C}$ konv. if $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n - z| = 0$

Folge z_n konv gegen z if $Re(z_n)\to Re(z)$ & $Im(z_n)\to Im(z)$

4.2 Reihen in $\mathbb{C}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konv. if $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$ konv. $\Rightarrow$ $|a_n|$ in $\mathbb{C} = \sqrt{a^2+b^2} = \in \mathbb{R}$