Induktion

- IA: ~ soll gelten
- Erstes Element zeigen
- IV: Man nehme an ~ gelte für ein beliebiges n
- IS: beide auf n+1 bringen

Good to know:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \cdot b + c_k \cdot d) = b \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + d \cdot \sum_{k=1}^{n} d_n$$

- Indexverschiebung

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n-m} a_{m+i} \xrightarrow{\text{Bsp.}} \sum_{k=5}^{10} x^k = \sum_{i=0}^{10-5} x^{5+i}$$

mit $i = k - m$

Original: 10, 9, 8, 7, 6, 5 — verschoben: 5+5, 4+5, 3+5, 2+5, 1+5, 0+5

- Arithmetisch wachsend → um Konst. erhöht
- Geometrisch wachsend → um Faktor mult.

Generell

- $0,b_1b_2\ldots b_k = \dfrac{b_1b_2\ldots b_k}{\underbrace{99\ldots9}_{k\text{-Mal}}}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ $\quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

- Beweis widerlegen
  ↳ ein Gegenbsp reicht

$e^x = (1+\frac{x}{n})^n$

- Aussage = Falsch bew.
  ↳ Gegenteil annehmen & auf Widerspruch führen

$a \cdot b = 0$
↳ $a = 0 \vee b = 0$

$a \cdot b < 0$
↳ $a < 0 \oplus b < 0$

x	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	`	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	`	0

Ungleichungen

Wann Fallunterscheidung:

- Gerade Wurzeln
- Betrag ($<0 \Rightarrow -x$)
- Teilen/Mult. mit Unbekannte } Vorkurs Zusammenf. ggf. kürzen
- Nebenbedingung beachten

Beachten:

$-a < -b$ $(-a)^2 > (-b)^2$	$\log(b)/\ln(b)$ $b<1 \to$ drehen	$a < b$ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Pol. 2. Grades

Keine 0-Stelle → über/unter x-Achse

2 Lösungen → zw./außerhalb 0-Stellen

1 Lösung → rechts/links von 0-Stelle

Schranke Bsp. Beweis

$M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\inf(M) = 0$

gr. unt. Schr.

$b > 0$

$\frac{1}{b} < n \to \frac{1}{n} < b$

$\mathbb{C}$ $\quad a+bi \quad \frac{v}{w} = \frac{v \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$

$-\frac{b}{2a} \pm \frac{i}{2a} \cdot \sqrt{b^2-4ac}$

$\varnothing = \begin{cases} \arccos\frac{a}{v} & b \geq 0 \\ -\arccos\frac{a}{v} & b < 0 \end{cases}$

Wichtige Formeln sin, cos, tan & cot

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

bzw.

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

$\cos(x - \frac{\pi}{2})$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan$

$\cot(-x) = -\cot(x)$

Additionstheorem:

$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$

$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$

Doppelwinkelformel:

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

Wichtig für gewisse Integrationen:

$\cos(x) = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$

$\sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

(cos wegen arcsin auf $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ beschränkt und ist deshalb immer positiv)

$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$

$\sin(\arcsin(x)) = x$

$\cos(\arccos(x)) = x$

Folgen

Beschr.

$|a_n| \leq K$ ab $n > N$

Besch. Folge muss nicht konv.

Konv.

$|a_n - a| < \varepsilon$ ab $n > N$

↳ bei Bew. n mit N_ε ersetzen

- Erraten & nachweisen

I $\lim(a_n+b_n) = a+b$	II $a_n \cdot b_n = a \cdot b$	III $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
IV $\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$	V $\lvert a_n \rvert = \lvert a \rvert$	

n^2 heraus heben | n heraus → unter Wurzel n^2

- 1 / +a −a | $a_n \leq b_n \to a \leq b$ (nur gr./kl. gl.)

Sandwich-Kriterium

$a_n \to x \quad b_n \to x \Rightarrow$ if $a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow c_n \to x$ ab $n > \max(N_a, N_b, N_{a \leq c \leq b})$

Monotonie

steigend: $a_{n+1} \geq a_n$ } $a_{n+1} - a_n$ immer > 0 str. mon. st.

fallend: $a_{n+1} \leq a_n$ } $a_{n+1} - a_n$ immer < 0 str. mon. fal.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \longrightarrow$ monoton st.

↓ nur wenn Folgeglieder Positiv !

Besch. & mon. → konv.

1.) Sinnvolle Grenzwerte überlegen & Bew. durch Ind.

2.) Monotonie überprüfen

3.) Rek. Folge → Lösung = Grenzwert

(! evtl. auch lösbar wenn nicht konv. deshalb 1 & 2)

Bernoulli

$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a \ \forall a \geq -1$

Cauchy-Konv.-Krit.

$|a_m - a_n| < \varepsilon$ Abst. 2 Glieder bleibt $< \varepsilon$

Teilfolgen

Index muss gr. werden & darf sich nicht Wiederholen

$a_n \to a \Leftrightarrow$ Alle Teilfolgen $\to a$

Jede Besch. Folge min. 1 konv. Teilfolge

Reihen

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum a_n$ konv. $\not\Leftarrow\Rightarrow a_n$ = Nullfolge

$\sum |a_n|$ konv. → abs. konv.

Konv. Teilfolgen ggn. versch. Zahlen → Folge div.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b$

$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Leibniz a_n = mon. fal. 0-Folge ≥ 0 $\Rightarrow \sum(-1)^n \cdot a_n$ = konv.

$\sum |a_n|$ = besch. $\Rightarrow \sum |a_n|$ = abs. konv.

Cauchy-Krit. Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv ist $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon \ \forall \ n, m > N_\varepsilon \ \& \ n > m$

$|s_n - s_m|$

Quotientenkrit.

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \ \& \ q > 0 \longrightarrow$

$\to$ ab $n > N \Rightarrow \sum a_n$ = abs. konv.

$> 1 \Rightarrow$ div. $\quad = 1 \Rightarrow$ Keine Auss.

Wurzelkrit.

$\sqrt[n]{a_n} \begin{cases} \leq 1 \to \sum a_n \text{ konv. abs.} \\ > 1 \to \sum a_n \text{ div.} \end{cases}$

Vergleichs/Majorantenkrit.

$|a_n| < b_n$ ab $n > N$

I $\sum b_n$ konv $\Rightarrow \sum a_n$ abs. konv.

II $\sum |a_n|$ div $\Rightarrow \sum b_n$ div.

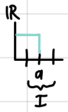
alle kleiner konv = konv

alle größer div = div

Funktionen

$f: I \to \mathbb{R}$

$a \in I$



$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

↳ + von rechts

↳ x bleibt >/< a

$\lim\limits_{x \to a^+} = \lim\limits_{x \to a^-} = c \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

für manche $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

umso näher $x \to a$

desto näher $y \to c \Rightarrow$ konv.

↳ $|x-a| < \delta$ & $|f(x)-c| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = d$

$\lim\limits_{x \to a} (f(x)+g(x)) = c+d$

$f(x) \cdot g(x) = c \cdot d$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d} \quad (d \neq 0)$

$\lim\limits_{x \to a} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot c$

Fehlt: gr. Folgen konstruieren (4-5)