Reihen in $\mathbb{C}$

- Summe von 2 konv. Reihen = konv
- if Reihe abs. konv $\Rightarrow$ Reihe normal konv.
- Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. $\rightarrow$ a_n = Nullfolge (umgekehrt gilt nicht)

Majorantenkriterium

a_n = Folge in $\mathbb{C}$, b_n = Folge in $\mathbb{R}$

if ($|a_n| \leq b_n$ ab $n \geq N$) & ($\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ = konv) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ = abs. konv.

Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1$$

Quotientenkriterium

$q \in \mathbb{R}$ sodass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \;\forall\; n > N$ so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abs. konv.

$\hookrightarrow$ if $> 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \text{div.}$

- Analog gibt es für $\mathbb{C}$ auch das Wurzelkriterium

Komplexe Exponentialfunktion

- $e^x = \exp(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\Downarrow$

in $\mathbb{C}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

- es gilt: $e^0 = 1$, $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$

- für $x \in \mathbb{R}$: $|e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1$ (gilt nur mit Vielfachen von i)

$\|$

$\Downarrow$

Komplexe Zahlen der Form $z = e^{ix}$ liegen auf dem Einheitskreis

$\Downarrow$

da im Einheitskreis $\cos = x$ & $\sin = y$

$\Downarrow$

$\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$ & $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$

$\Downarrow$

$z = r \cdot e^{i\phi}$ mit $r = |z|$ & $\phi = \arg(z)$

$\Downarrow$

$z = x + iy = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$

$\Downarrow$

e^{x} ist streng monoton steigend, aber komplexe exp.-Funktion eingeschränkt auf i-Achse ist mit e^{ix} $\forall x \in \mathbb{R}$ periodisch

★ Reihenfolg beliebig wechseln nur möglich, da abs. konv.

→ Aus der Formel von Euler kann man auch Reihendarstellungen für $\sin x$ und $\cos x$ herleiten. Dafür setzt man $z = ix$ in die Exponentialreihe und sortiert die Summanden nach dem Real- und dem Imaginärteil:

$\mathrm{Re}(e^{ix})$
$\mathrm{Im}(e^{ix})$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\cos} + \underbrace{i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{+i\cdot\sin}, \quad ★$$

da

$$\underbrace{i^{2k} = (-1)^k}_{\text{gerade}} \quad \text{und} \quad \underbrace{i^{2k+1} = (-1)^k i}_{\text{ungerade}}$$

gilt. Daraus erhält man:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

und

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots .$$

→ Beide Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies kann man mit Hilfe des Majorantenkriteriums beweisen, wenn man die Sinus- bzw. die Kosinusreihe mit der Exponentialreihe vergleicht.

Potenzreihen

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ gegeben gesucht: alle z sodass konvergent

$a_n \in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$
z_0 = Zentrum

- zunächst Zentrum $z_0 = 0$
- Menge M = alle z für die konvergent

$$M = \{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \text{ konvergiert} \}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ = Verallgemeinerung Polynom

- M im Wesentlichen eine Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ oder intervall in $\mathbb{R}$

- sei $w \in M$; wir wollen zeigen: alle z mit $|z| < |w|$ auch $\in M$

$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot w^n$ konv. $\Rightarrow a_n \cdot w^n$ = Nullfolge $\Rightarrow$ beschränkt $\Rightarrow \underline{\exists K : |a_n||w_n| \leq K \;\forall n \in N}$

für z:

$$|a_n||z|^n = |a_n||z|^n \cdot \overbrace{1}^{1 \text{ als } \frac{|w|^n}{|w|^n}} = \underbrace{|a_n||w|^n}_{\leq K} \cdot \underbrace{\left(\frac{|z|}{|w|}\right)^n}_{q^n} \leq K \cdot q^n$$

siehe Seite davor

& da $|z| < |w| \Rightarrow \overbrace{\frac{|z|}{|w|}}^{q} < 1$

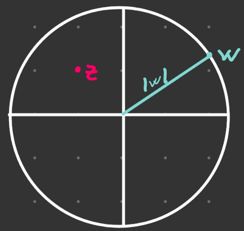
$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = \text{abs. konv.} \Rightarrow z \in M$$

- Auf die Menge M ist die Potenzreihe eine Funktion:

$$f: M \to \mathbb{C}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$



$|w| < |z|$ $\quad$ $B_{|w|}(0)$ = Kreisscheibe mit Radius $|w|$ & Mittelpunkt 0

Konv.-Radius $= R = \sup\{|z| \mid z \in M\}$

(ist M nicht nach oben besch. ist ist $R = \sup(\sim) = +\infty$)

Satz 4.1

Fall I $R = 0 \rightarrow$ konv. nur if $z = 0$

Fall II $R \in \mathbb{R}, R > 0 \Rightarrow B_R(0) \subset^* M$ $\quad$ * Teilmenge da für genau Radius keine Aussage

- $|z| < R$ konv. abs. $\quad$ • $|z| > R$ div. $\quad$ • $|z| = R$ keine Aussage

Fall III $R = +\infty$ $\quad$ alle z konv.

Bei Reellen Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

- konv. für $x \in]-R, R[$ $\quad$ • div für $|x| > R$ $\quad$ • $x = \pm R$ keine Aussage

Wie berechnet man den Konvergenzradius R

→ Existiert einer der folgenden Grenzwerten, so lässt sich der Konvergenzradius direkt berechnen. Es gilt:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{und} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

- Gibt es diese Grenzwerte nicht so brauchen wir:

– limes inferior

$\liminf_{n\to\infty} a_n =$ kleinster Häufungspunkt von a_n

– limes superior

$\limsup_{n\to\infty} a_n =$ größter Häufungspunkt von a_n

- Häufungspunkt = Grenzwert einer Teilfolge
- ist a_n konv. $\Rightarrow$ liminf = limsup = Grenzwert

Achtung: NICHT kleinsten ~~oder~~ größten Wert der Folge, sondern kleinsten und größten Häufungspunkt

Satz 4.2

- $\limsup = 0 \longrightarrow R = \infty$
- $\limsup = \infty \rightarrow R = 0$
- sonst $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)}$

R