7.11

- U = Unterraum von $\mathbb{R}^n$
- B = Basis von U

$\Big\}$ Es gibt genau eine Linearkombination eines Vektor v aus U mit B anzugeben $(v = \lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_n b_n)$

7.12

Schreibt man v als Lin.-Komb. (7.12) so sind die λ die Koordinaten von v bzgl. B

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

- Basis = Menge = unsortiert ⇒ Basisvektoren als Spalten einer Matrix aufschreiben

↳ Basismatrix = $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = B$

7.14

$$[v]_B = B^{-1} \cdot v$$

Standardmäßig zur Basis der Einheitsvektoren $\left(u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{etc}\right)$

7.15

Man kann auch Abbildungsmatrizen $(= [f] = A)$ zu anderen Basen umschreiben:

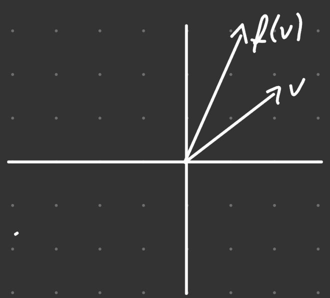
$[f]_B = [f(b^i)]_B = B^{-1} \cdot (f(b^i))$ } b^i: aus der i-ten Spalte der Basis in die Funktion eingesetzt 2
wird die i-te Spalte der neuen Abbild.-Matrix zu dieser Basis 0

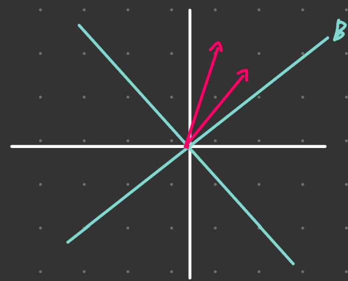
Bsp.:

Abbildungsmatrix $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ (zur Standardbasis)

$\downarrow$

$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (mit der Basis $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$)





Hier sieht man sofort, v wird zur Basis B um einen Faktor 2 gestreckt

① 7.18

Bsp: S. 208

$[f]_B = B^{-1}[f]B$ (Bew. siehe S. 204)

$$\underbrace{[f]_B \cdot [x]_B = [f(x)]_B}$$

$$B^{-1}[f]\underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I_n} \cdot x = B^{-1} \cdot [f] \cdot x = B^{-1} \cdot f(x) = [f(x)]_B$$

- v ist die Lösung des Lgs $[f]x = b$
- $[v]_B$ — " " — $[f]_B \cdot y = [b]_B$

②. Basen sind als Diagonalmatrix bevorzugt, da dies das rechnen vereinfacht

8.1 Diagonalisierbarkeit

$[f]$ bzw. A ist Diagonalisierbar wenn eine Basis existiert, sodass $B^{-1} \cdot A \cdot B$ eine Diagonalmatrix ist

8.2

$[f] = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$ ist eine Diag.-Matrix $\Leftrightarrow f(b^1) = \lambda_1 b^1, \dots, f(b^n) = \lambda_n b^n$ 2

$\Leftrightarrow A \cdot b^1 = \lambda_1 b^1, \dots, Ab^n = \lambda_n b^n \Leftrightarrow [f] =$ Diagonalisierbar 0

8.4 Eigenwerte Eigenvektoren

- Eigenwert "stellt ganze Matrix als Zahl dar"
- λ für das gilt $\boxed{A \cdot v = \lambda \cdot v}$ ist Eigenwert von A
- Das dazugehörige v ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ

Bsp.: S. 220

8.6

- λ ist Eigenwert von A wenn $(\lambda \cdot I_n - A)\underline{x} = 0_n$ eine nicht triv. Lösung hat
- $\underline{x}$ ist dabei Eigenvektor von A zu λ

Problem: λ & x Unbekannt

8.7

λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \operatorname{Kern}(\lambda I_n - A) \neq \{0_n\} \Leftrightarrow \underbrace{(\lambda I_n - A) \text{ ist nicht invertierbar}}$,

Es gibt ∞ viele Lösungen & die Lösungen sind die Eigenvektoren

8.8

- Quadratische Matrix ist invertierbar

$\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert der Matrix

8.9

$E_\lambda(A) := \operatorname{Kern}(\lambda I_n - A) =$ Menge aller Eigenvektoren $=$ Eigenraum von λ bzgl. A

Eigenwerte Bestimmen:

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = invertierbar wenn $ad - bc$ (= Determinante) $\neq 0$
- $(\lambda I_n - A)$ soll <u>nicht</u> inv. sein

$\Downarrow$

$\lambda I_n - A$ ausrechnen & Det auf 0 setzen

$\Downarrow$

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda I_n - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-6 & 10 \\ -2 & \lambda+3 \end{pmatrix} \Rightarrow Det = (\lambda-6)\cdot(\lambda+3) - (10 \cdot -2) = 0$

$\lambda^2 + 3\lambda - 6\lambda - 18 + 20 = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$

$\lambda = 1 \lor \lambda = 2$

---

8. 13 Minor

- $A = n \times n \Rightarrow A_{(i,j)} = (n-1) \times (n-1) = A$ mit i-ter Zeile & j-ter Spalte entfernt

z.B.:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

Determinante

- $\det(A^{1\times 1}) = a_{1,1}$

- $$\det(A^{\geq 2,\geq 2}) = \sum_{j=1}^{n} \overbrace{(-1)^{1+j}}^{\text{Alterniert, startet mit +}} \cdot \underbrace{a_{1,j}}_{\substack{\text{Zahl in}\\ \text{1. Zeile \&}\\ \text{j-ter Spalte}}} \cdot \underbrace{\det(A_{(1,j)})}_{\substack{\text{j-te Spalte \&}\\ \text{1. Zeile entfernt}\\ \text{bis 1x1 Matrix}}}$$

Bsp: S. 230

- Es gibt nur für 2x2 & 3x3 eine Allgemeine Formel

$2\times 2 = ad - bc$

3×3:

Die Formel für die Determinante einer 3x3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ lautet:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$
$$- a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$$