Integral

bestimmtes Int.	unbest. Int.
$\int_a^b$	$\int$

un

$[a,b] \to Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ → Zerlegung des Intervalls

- Bei Treppenfunktionen ist $\int$ die Summe der Rechtecke der Treppen

---

Ober- & Untersumme

- Beliebige (beschränkte) Funktion $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$

I $f(x)$ zerlegen $\longrightarrow [x_{i-1}, x_i]$

II Minimalwert $m = \phi_i$ & Maximalwert $M = \psi$ zw. x_{i-1} & x_i finden

III $\overbrace{\text{Obersumme}}^{O_Z} = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ & $\overbrace{\text{Untersumme}}^{U_Z} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_{i-1} \cdot x_i)$ $\forall$ Zerlegungselemente finden

un

- Funktionsfläche zwsch. O_Z

(Riemann)-Integral

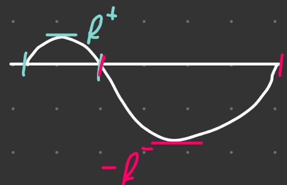
$$U_z = O_z = \int_a^b f(x)\,dx$$

- $\exists$ besch. $f(x)$ welche nicht Integrierbar

- $f(x)$ ist Integrierbar if:
  - f stetig oder
  - f monoton

  $\}$ umgek. nicht

if $f(x)$ int.-bar $\Rightarrow$ Positivteil $f^+(x) = \max(f(x), 0) \geq 0$ &
Negativteil $f^-(x) = -\min(f(x), 0) \geq 0$
int.-bar



if $f(x)$ int.-bar $\Rightarrow$ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist int.-bar

$\Leftrightarrow$ $c \in [a,b]$ über $[a,c]$ & $[c,b]$ int.-bar

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Fallunterscheidung (vermeiden)

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Integral bleibt gleich wenn $f(x)$ an endlich vielen Stellen geändert wird

Mittelwertsatz

Bew. auch?

$f(x)$ stetig; $g(x)$ int.-bar

$\exists\, \xi$ sodass

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,dx$$

? Spezialfall

Stammfunktion

F ist diff.-bar

F Stammfunktion von $f(x)$ if:

$F'(x) = f(x)$ aka. $F(x) = \int f(x)\,dx$

aka.

Menge aller Stammfunktionen = unb. $\int$

& somit <u>nicht eindeutig</u>

Hauptsatz Diff.- & Int.-Rechnung Teil 1

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt \quad x \in [a,b]$ = Stammf. von $f(x)$

Bew.: Int. Abl. & originales $f(x)$ erh.

Kennt man eine Stammfunktion (F) so kann man direkt das best. Int. berechnen

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

↳ $F(b) - F(a) = \int_{\boxed{a}}^{\boxed{b}} f(x)\,dx - \int_{\boxed{a}}^{\boxed{a}} f(x)\,dx = \int_{\boxed{a}}^{\boxed{b}} f(x)\,dx$

---

gebunde Variable abänderbar $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy = \ldots$

geb. Var. <u>NICHT</u> außerhalb des Int. verwenden

Integrationsmethoden

Partielles Int.

$$\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$$

Rollenverteilung bei doppeltem anwenden beibehalten

- **L**og
- **I**nv. trig. (arcsin, etc.)
- **A**lg. (x^2, $3x^5$, etc.)
- **T**rig. (sin, cos, etc.)
- **E**xponential

Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g(x)' \, dx = F(g(x)) + c$$

bzw. $\int \sim\sim\sim \, dx \rightarrow u = \sim \rightarrow \int \sim\, u \, dx$

$\rightarrow dx = \frac{du}{u'} \rightarrow \int \sim \, u \, \frac{du}{u'}$

Bsp.:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \quad u = 1+e^x \quad u' = e^x \quad dx = \frac{du}{u'}$$

$\downarrow$

$$\int \frac{\cancel{e^x}}{u} \cdot \frac{du}{\cancel{e^x}} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(u) = \ln(1+e^x)$$

Bsp$_2$.:

$$\int_1^2 \frac{1}{3x+2}\,dx$$

$(3x+2)' = 3$ soll sich kürzen also erzeugen wir 3

$y = g(x) = 3x+2$

$$\int_1^2 \frac{1}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \int_5^8 \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{3}\ln(y)\Big|_5^8$$

Hä?