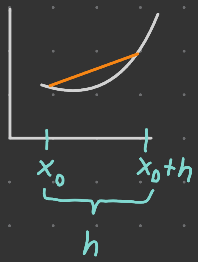
Ableitung



$y = mx + b$

$$m = \frac{\text{rise}}{\text{run}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$\downarrow$

$\lim\limits_{h \to 0}$ ist die Ableitung im Punkt x_0

- $f(x)$ ist diffbar. if $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ exists

ist $f(x)$ auf $\mathbb{D}$ diffbar. $\Leftrightarrow$ $f(x)$ auf Definitionsmen $\mathbb{D}$

Satz 5.1

$f(x)$ diffbar. in $x_0 \in \mathbb{D} \Rightarrow f(x)$ stetig in x_0

Bew. S. 93

$y = mx + b$

$$\underbrace{g(x)}_{y} = \underbrace{f'(x_0)}_{m}\,\underbrace{(x - x_0)}_{x} + \underbrace{f(x_0)}_{b}$$ ⟵ Tangentengleichung im Punkt x_0

- Approximiert $f(x)$ im Punkt x_0 am besten, da die St. schneller konv. als n

Satz 5.2

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g(x_0)$$

Bew. Siehe S. 94

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \longrightarrow (x^{-n}) = -n\,x^{-n-1} \rightarrow$ auch mit Exp. $\in \mathbb{Q}$ mit $x > 0$

Ableitung von Potenzreihen

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \longrightarrow f(x)$ ist auf $(-\mathbb{R}, +\mathbb{R})$ stetig & diffbar.

$\downarrow$

$f(x)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$

Startindex 1 → Erstes Element = $a_0 \to a_0' = 0 \to$ Startwert 0 weggelassen

$\downarrow$

$(e^x)' = e^x \quad (\sin(x))' = \cos(x) \quad (\cos(x))' = -\sin(x) \quad (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Bew. S. 96

Kettenregel

$(g \circ f)'(x_0) = g(f(x))' \cdot f(x)' \longrightarrow$ Äußere Abl. · Innere Abl.

Erkl. S. 96

$\downarrow$

$f_3(f_2(f_1(x)))' \cdot f_2(f_1(x))' \cdot f_1(x)'$ etc.

$f(x)$ an der Stelle x = Abl. an der St. x

$x \to f(x)'$ = Abl. Funktion (meist auch mit Abl. bez.)

- Funktion = stetig diffbar $\Leftrightarrow$ Abl. auf Intervall originaler Funktion stetig

auch stetig auf I

- Es gibt ggf. die zweite, dritte, ... Abl.

- Ist f & ihre Abl. bis Stufe n stetig $\Rightarrow$ f ist n mal diffbar
  - Menge aller n mal stetig diffbaren f auf I = $C^n(I)$

Extremstellen & Mittelwertssatz

geg.: $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Globales Maximum $\quad f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D$

Lokales Maximum $\quad f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \longrightarrow$ lok. max. if $\exists\, \varepsilon > 0$

- Min. gleich
- Mehrere globale & lokale Extremst. möglich (mehrere globale nur wenn Wert gleich)

Satz 5.5

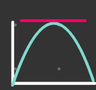
$I = [a,b] \qquad f: I \to \mathbb{R}$ (diff.bar auf $]a,b[$)

if $x_0 \in\,]a,b[$ lok. Extremst. $\Rightarrow f(x_0)' = 0$
$\not\Leftarrow$

Bew. S. 99

Abl. Links

Abl. Rechts



Abl. Extrema

- $\forall x \mid f'(x)=0 \to$ Stationärer Punkt

Min./Max. suchen

$f: I=[a,b] \to \mathbb{R}$

Folgende Möglichkeiten für Extrema

a.) Randpunkte von I

b.) Punkte wo f nicht diffbar (siehe Beitrag)

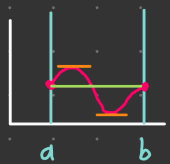
c.) Stationäre Punkte

Bsp. S. 100

Satz von Rolle

$f: [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ $\quad f$ = stetig & diffbar in $]a,b[$

wenn $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, x_0 \in]a,b[\mid f'(x_0) = 0$



$f(a) = f(b)$

$\exists\, x$ so dass $f(x)' = 0$

$\Downarrow$

Mittelwertsatz

a & b verb. = Sekante bzw. Verb. zw. $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$

$\exists$ Tangente die zu Sekante Parallel