Ergänzung Substitution

Es gilt entweder

- zu substituieren
- unb. Int. berechnen
- Grenzen getr. berechnen

auch z.B. $x = \ln(t)$ subst.

- Auf die Grenzen $g(x)$ anzuwenden & direkt zu rechnen
- Grenzen <u>nicht</u> zurück subst.

Bekannte Int.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Partialbruchzerlegung

$$f(x) \to \frac{p(x)}{q(x)}$$

Spezialfälle

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + c\,,$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c \quad \text{für } n \geq 2\,,$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\frac{x-a}{b} + c \quad \text{für } b > 0\,,$$

$$\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + c.$$

- man will $\frac{p(x)}{q(x)}$ auf einen dieser Sp.-Fälle zurückführen

① Grad Zähler ≥ Grad Nenner

↳ Polynomdivision → $p_0(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$ wobei Grad p_1 < Grad q

② Nullstellen des Nenners suchen

↳ $q(x)$ aufteilen in $c \cdot (x-b_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-b_r)^{k_r} \cdot q_1(x)^{l_1} \cdot \ldots \cdot q_s(x)^{l_s}$

$q_1, \ldots, q_s$ nich weiter aufteilbar & Form $(x-a_i)^2 + d_i^2$, $d_i > 0$

③ $\frac{p_1(x)}{q(x)}$ darstellen als Summe von Funktionen der Form:

$$\boxed{\frac{A_1}{x-b}, \frac{A_2}{(x-b)^2}, \ldots, \frac{A_k}{(x-b)^k}} \; \& \; \boxed{\frac{B_1x+C_1}{Q(x)}, \frac{B_2x+C_2}{Q(x)^2}, \ldots, \frac{B_lx+C_l}{Q(x)^l}}$$

$b \in \{b_1, \ldots, b_r\}$ $\qquad$ $Q \in \{q_1, \ldots, q_s\}$

A_i, B_i & C_i sind zu best.

④ $\int$ der einzelnen Partialbrüche berechnen

für Brüche mit Q^l & $l > 1$ rekursive Form ?

Partialbruchzerlegung

Schritt	Erklärung
$\int -\frac{15}{x^2+3x-4}\,dx$	Gegebene Aufgabenstellung
$\downarrow$	
$x^2+3x-4=0$	Nenner 0 setzen und x_1 & x_2 ausrechnen
$x_1 = 1$	
$x_2 = -4$	
$\downarrow$	
$\int \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}\,dx$	
$\int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}\,dx$	In unserem Beispiel
$\downarrow$	Bruch auf gemeinsamen Nenner bringen
$\int \frac{A\cdot(x+4)+B\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+4)}\,dx$	
$\downarrow$	
$\int \frac{A\cdot(x+4)+B\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+4)}\,dx = \int -\frac{15}{x^2+3x-4}\,dx$	Mit Originaler gleich setzen
$\downarrow$	Zähler vom Bruch ausrechnen und Gleichungssystem lösen
$5B = -15$	Koeffizientenvergleich
$B = -3$	
$-5A = -15$	
$A = 3$	
$\downarrow$	
$\int \frac{3}{x+4} - \frac{3}{x+1}\,dx$	A & B einsetzen
$\int \frac{3}{x+4}\,dx - \int \frac{3}{x+1}\,dx$	Integral mittels $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)$ $\to \int \frac{1}{x+4}\,dx = \ln(x+4)$ lösen
$3 \cdot \ln(x+4) - 3 \cdot \ln(x+1)$	

Integration Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$$ ① Konv. $R > 0$

$\downarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$$ ist Stammfunktion davon ② Nur auf $]-R, R[$ def | selber Konvergenzradius

Best. Int.

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (b^{n+1} - a^{n+1})$$

Potenzreihendarst. von $\ln(1+x)$ herleiten

Plan: ① $\ln(1+x)$ ableiten $(= f(x)')$

② $f(x)'$ als Potenzreihe darstellen

③ Potenzreihe Integrieren

① $\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x}$

② $\sum_{n=0}^{\infty} v^n$ (geometrische Reihe)

- konv. für $|v| < 1$ gegen $\frac{1}{1+v}$
- unser $\ln' = \frac{1}{1+x}$ also können wir es mit der geom. Reihe darstellen

2.2 Leibniz konv. auch $(-1)^n \cdot x^n$

③ Durch Int. erhält man $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^{n+1}$

- Diese Reihe auch Konv. $R = 1$
- Randpunkte separat Prüfen $(]-1, 1])$

- Daraus ergibt sich auch altern. harm. Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$

- Auch: Potenzreihendarst. von e^x int.-bar

Uneigentliche Integrale

Int.-Grenzen liegen im Unendlichen oder

Funktions hat an Integrationsgrenze Singularität

$\longrightarrow \infty$

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^{M} f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{a} f(x)\,dx}$$

konv. falls lim. existiert & endlich ist

Beispiele S. 134 ansehen

$\longrightarrow a \in \mathbb{R}$

$f:]a,b] \to \mathbb{R}$

f auf $[a+\varepsilon, b]$ int.-bar für $\varepsilon > 0$ & $\boxed{\varepsilon < b-a}$?

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

konv. falls lim. existiert & endlich ist

→ Als ein grundlegendes Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x) = x^{-\alpha}$. Die Stammfunktion ist bekanntlich:

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \ln|x| + c, & \text{falls } \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha} + c, & \text{falls } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

→ Wir betrachten zuerst das uneigentliche Integral mit der Singularität an der Stelle $x = 0$. Für $\alpha = 1$ gilt:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln(1) - \ln(\varepsilon)) = +\infty.$$

Somit divergiert dieses Integral. Für $\alpha \neq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{falls } \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{falls } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

• Werte ggf. getr. untersuchen

Das Integral konvergiert also für $\alpha < 1$ und divergiert für $\alpha \geq 1$.

→ Für das uneigentliche Integral von 1 bis ∞ erhalten wir im Falle $\alpha = 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M \to \infty} (\ln x)\Big|_1^M = \lim_{M \to \infty} \ln(M) = +\infty.$$

Somit divergiert dieses Integral. Für $\alpha \neq 1$ gilt:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^M = \lim_{M \to \infty} \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

Daraus folgt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases}$$

Das Integral konvergiert also für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$.

→ Wie bei der Konvergenz von Folgen und Reihen, spielt auch bei der Konvergenz von uneigentlichen Integralen das Vergleichskriterium eine wichtige Rolle.

Vergleichskriterium

$f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$

f, g auf $[a, M]$ int.-bar

if $|f(x)| \leq g(x) \; \forall x \in [a, +\infty[$

& $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konv.

$\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konv.

- gilt auch für $\int$ auf besch. Intervall mit Singularität
- $g(x) = x^{-\alpha}$ als Vergleichsfunktion

Beispiele anschauen (S. 135)