Sandwich-Theorem

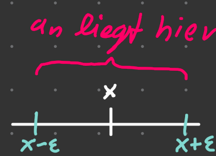
$\xrightarrow{*}$ = konvergiert gegen

- $a_n \xrightarrow{*} x$ & $b_n \xrightarrow{*} x \Longrightarrow c \to x$ if $a_n \leq c_n \leq b_n$ $\quad n > N$

Beweis:

$|x-a_n| < \varepsilon \quad \forall \; n > N_1$

$|x-b_n| < \varepsilon \quad \forall \; n > N_2$



$x-\varepsilon < a_n < x+\varepsilon$

$x-\varepsilon \quad b_n < x+\varepsilon$

wählt man $N_\varepsilon = \max(N, N_1, N_2)$ so gilt für alle $n > N_\varepsilon$

$x-\varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < x+\varepsilon \quad \forall \; n > N_\varepsilon$

größere Folgen konstruieren:

$a_n = \frac{n}{2^n} \qquad 2^n \geq n^2$ ab $n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2} \quad | \cdot n \Rightarrow \frac{n}{2^n} \leq \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} \Rightarrow \frac{}{2^n} \leq \frac{1}{n}$

2 Beispiele S. 48

Note$_{16}$: Man kann Folgen NICHT ableiten um zu sehen wie schnell sie wachsen. Ableiten gilt nur für Funktionen, nicht für Folgen

---

- Monoton steigend: $a_{n+1} \geq a_n \ \forall \ \in \mathbb{N}$
- Monoton fallend: $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton steigend/fallend: $>$ / $<$ (im Gegensatz zu $\geq$ / $\leq$

Auf Monotonie überprüfen:

① • Ist $a_{n+1} - a_n$ immer $> 0 \longrightarrow$ streng monoton steigend
immer $< 0 \longrightarrow$ – " – fallend

② • $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow$ Folge ist monoton steigend
(nur wenn Folgeglieder immer positiv)

Note$_{17}$: Hier wird die Änderungsrate berechnet. = Bei ① z.B. die Folge wird immer um 5 größer.
Bei ② z.B. die Folge wird immer um das 1,2-Fache größe

Note$_{18}$: Ist eine Folge beschränkt & monoton, so muss diese konvergieren

N_{18} Bsp. S. 50-51

2 Beispiele S. 50

Vorgehensweise:

① (Sinnvolle) Grenzwerte überlegen & Beweisen (Induktion)

② Monotonie mittels oben genannter Wege untersuchen

③ Ist die Folge begrenzt monoton, ist sie konvergent

④ Bei rekursiven Folgen der Form $a_{n+1} = f(a)$ kommen nur Lösungen der Gleichung als Konvergenzwert in Frage. Bsp. S. 51

Note$_{19}$: Achtung! Gleichung kann auch lösbar sein obwohl Folge nicht konvergent; deshalb ① bis ③.

Note$_2$: Bernoulli-Ungleichung: $(1+a)^n \geq 1+n\cdot a$ if $a \geq -1$

- e (Euler'sche Zahl) definiert als $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (Beweis siehe S. 52)

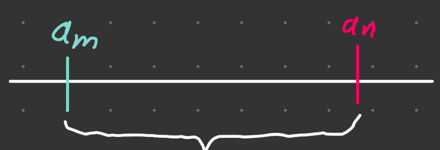
- $e = \left(1 + \frac{v}{n}\right)^n$ mit $\lim\limits_{n \to \infty}$ & $v \in \mathbb{N}$ (Beweis S. 53)

- $e^v = \exp(v)$

Cauchy-Konvergenzkriterium & Teilfolgen

CKK: Folge konvergiert wenn $|a_m - a_n|$ beliebig klein wird.

- aka. wenn sich für jedes ε (egal wie klein) 2 Glieder einer Folge finden lassen, deren Abstand $< \varepsilon$ ist & ab diesen Gliedern auch $< \varepsilon$ bleibt, so ist die Folge konvergent



Abstand ($|a_m - a_n|$) ist & bleibt $< \varepsilon$

Teilfolgen:

- Einige Glieder der Folge werden weggelassen

  d.h. es wird aus a_n z.B. nur a_1, a_5, a_{17}, a_{38}, etc. verwendet, wobei der Index der verwendeten a immer größer werden muss. Also z.B. a_1, a_2, a_3 ist erlaubt; $a_1, a_{\underline{3}}, a_{\underline{2}}$ nicht.

- Ein Häufungspunkt von a_n ist ein Konvergenzpunkt einer Teilfolge von a_n ($= a_{n_k}$)
- Es kann mehrere Häufungspunkte geben

Bsp.: $a_n = (-1)^n$ hat 2 Häufungspunkte: -1 & 1

- $a_n \xrightarrow{*} a$ if alle Teilfolgen von $a_n \xrightarrow{*} a$
- Konv. Teilfolgen gegen verschiedene Zahlen ist a_n divergent
- Satz von Bolzano-Weierstraß: jede besch. Folge hat min. eine konv. Teilfolge

  → Bsp.: 2.9 S. 55

Unendliche Reihen & Konvergenzkriterien

k-tes Glied von a_n

- s_n ist die Summe der ersten n Glieder einer Folge $\longrightarrow s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
- s_n wird Reihe genannt

Konvergiert $\lim_{n \to \infty} s_n$ gegen eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ so ist es eine konvergente Reihe

Bsp.: $a_n = n$ $(a_1 = 1, a_2 = 2, \text{etc.})$

weitere Beispiele: S.56 - S.57

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n \Rightarrow s_1 = 1, \underset{\substack{\downarrow \\ 1+2}}{s_2} = 3, \underset{\substack{\downarrow \\ 1+2+3}}{s_3} = 6, \text{etc.}$$