1 Rechentechniken

$\mathbb{N}$ => Natürliche Zahlen = 1,2,3,...

$\mathbb{N}_0$ => Natürliche Zahlen = 0,1,2,3,...

$\mathbb{Z}$ => Ganze Zahlen = -1,0,1,...

$\mathbb{Q}$ => Rationale Zahlen = Brüche

$\mathbb{R}$ => Reelle Zahlen = π, $sqrt(2)$, etc.

Für ungerade n:

$x = \sqrt[n]{a}$ falls $a \geq 0$

$x = -\sqrt[n]{-a}$ falls $a < 0$ --> weil eine negative Zahl ungerade mal mit sich selbst multipliziert kann eine negative Zahl ergeben. Bei geraden n geht dies nicht weil -x*-x = positiv

Für gerade n & a > 0:

$x_1 = \sqrt[n]{a}$

$x_2 = -\sqrt[n]{a}$

a = 0 --> x = 0

Für gerade n & a < 0 --> keine reelle Lösung

Logarithmen

$log_b(a)$ gibt an, welche Potenz man zur Basis b rechnen muss, damit a resultiert

Bsp:

$log_b(a) = x$ => $b^x = a$

$log_b(1) = 0$

$log_b(b) = 1$

$b^{log_b(a)} = a$ --> wenn man zur Basis b die Potenz rechnet, die zur Basis b genommen a ergibt, so bekommt man a

$log_b(b^a) = a$ --> welche Potenz muss man zur Basis b rechnen, damit b sich b^a ergibt

Logarithmus Rechenregeln

$$log_b(ac) = log_b(a) + log_b(c)$$
$$log_b(\frac{a}{c}) = log_b(a) - log_b(c)$$
$$log_b(a^c) = c \cdot log_b(a)$$

$$log_{b_2}(a) = \frac{log_{b_1}(a)}{log_{b_1}(b2)}$$

Bsp:

$$log_2 5(a) = \frac{ln(a)}{ln(25)}$$

(Beweis: siehe Skript Seite 2, 1.2)

Summen- & Produktzeichen

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n$$
$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Gelegentlich braucht man auch die *leere Summe* bzw. das *leere Produkt* und meint damit, dass die obere Grenze kleiner ist als die untere. Man definiert die leere Summe als 0 und das leere Produkt als 1, z. B.

$$\sum_{k=1}^{0} a_k = 0 \quad \text{und} \quad \prod_{k=2}^{-1} b_k = 1.$$

(Siehe Skript Seite 4)

Formeln:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$
$$\downarrow$$

Gaußsche Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & falls\ q \neq 1 \\ n+1, & falls\ q = 1 \end{cases}$$

$\downarrow$
Geometrische Summenformel

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^i \cdot b^{n-i}$$

$\downarrow$
Binomialformel
Bsp:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2 Sprechweisen & Symbole

Negation:

¬ --> Nicht

A	$\neg A$
0	1
1	0

Und:

∧ --> Und
$A \wedge B$ ist wahr wenn beide wahr sind

A	**B**	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Oder:

$\vee$ --> Oder

$A \vee B$ ist wahr wenn mindestens eines wahr sind

A	**B**	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implikation:

$A \Rightarrow B$ --> A impliziert B

$A \Rightarrow B$ ist wahr, wenn beide Aussagen wahr sind oder A falsch ist
Wenn A stimmt MUSS auch B stimmen
Kann man auch schreiben als $(\neg A) \vee B$

A	**B**	$(\neg A)$	$A \Rightarrow B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

$A \Rightarrow B \neq B \Rightarrow A$

Kontraposition:
$\neg B \Rightarrow \neg A$

(Beweis: siehe Skript Seite 6, letzte Zeile)

Äquivalenz:

Genau dann wenn A gilt, gilt auch B
$A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ --> $A \Leftrightarrow B$
Ist wahr wenn beide gleich sind

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Quantoren:

Quantor	Bedeutung
$\forall$	für alle
$\exists$	es gibt mindestens 1
$\exists_1$	es gibt genau 1
$\nexists$	es gibt kein
:	sodass

Beispiel:
$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists \ n \in \mathbb{N} : n > x$
Für alle x in Reellen Zahlen gibt es mindestens ein n in Natürlichen Zahlen sodass n größer x

Mengen

Symbol	Anwendung	Bedeutung
$\in$	$a \in A$	a ist ein Element der Menge A
$\notin$	$b \notin A$	b ist kein Element der Menge A
$\subset$	$A \subset B$	A ist Teilmenge von B ($a \in A \Rightarrow a \in B$)
$\not\subset$	$A \not\subset B$	A ist keine Teilmenge von B ($\exists a \in A : a \not\subset B$)
$\subseteq$	$A \subseteq B$	A ist echte Teilmenge von B ($A \subset B \wedge (\exists b \in B : b \nexists A)$) --> B hat min. 1 Element, das A nicht hat
=	A = B	Es gilt: $A \subset B \wedge B \subset A$
$\cup$	$A \cup B$	$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ bzw. Alle Elemente A & Alle Elemente aus B & Alle Elemente aus der

Symbol	Anwendung	Bedeutung
		Schnittmenge von A & B
$\cap$	$A \cap B$	$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ bzw. Alle Elemente die A & B gemeinsam haben (Schnittmenge)
$\setminus$	$A \setminus B$	$\{x \in A \mid x \notin B\}$ bzw. Alle Elemente von A, ohne die Elemente die in auch in B vorkommen
$C_A(B)$	$C_A(B)$	Das Komplemente von B in A ($C_A(B) = A \setminus B$)
$\mid \ \mid$	$\lvert A \rvert$	Mächtigkeit/Kardinalität = Anzahl der Elemente in der Menge A
$\times$	$A \times B$	$\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ Kartesisches Produkt von A und B
$\emptyset$	$\emptyset$	Leere Menge

3 Vektoren in der Ebene & im Raum

Für folgende erklärungen wird angenommen:

$$a = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

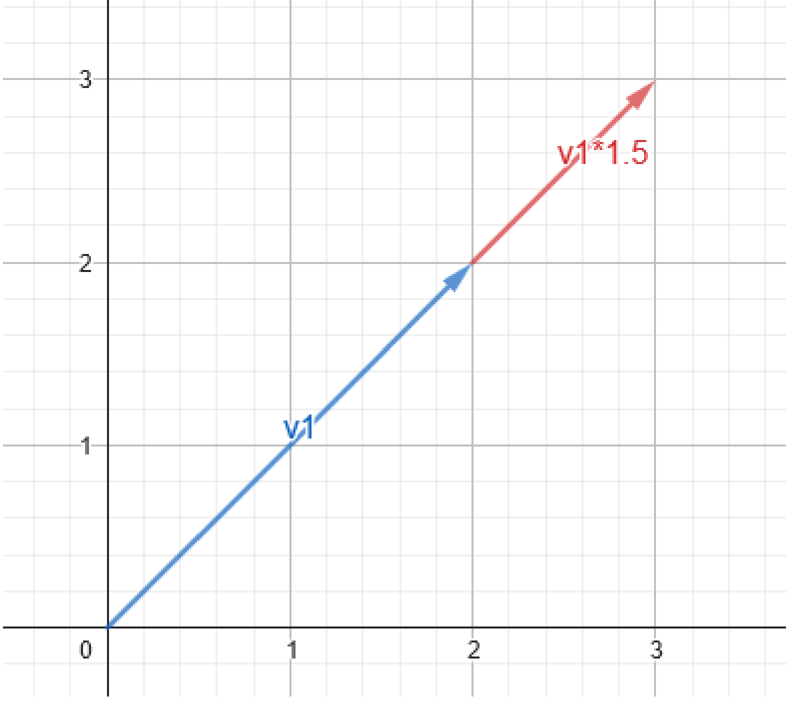
Addition

$$a + b = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

Skalieren

Ein Skalar ist eine Zahl mit der ein Vektor multipliziert werden kann

$$s \cdot a = \begin{pmatrix} s \cdot x_1 \\ s \cdot y_1 \\ s \cdot z_1 \end{pmatrix}$$

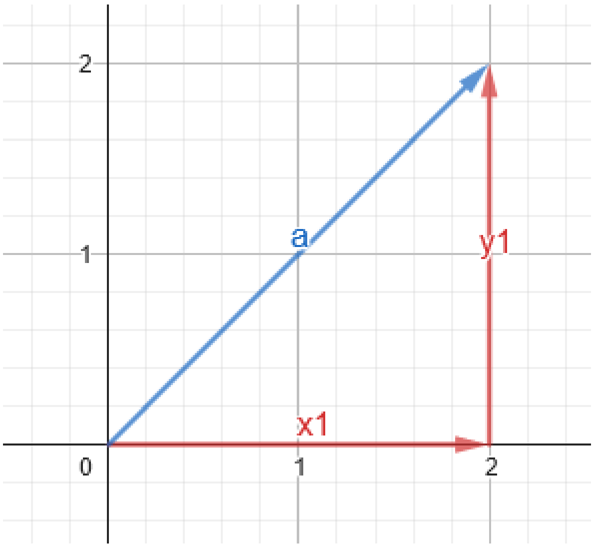


Skalarprodukt

$$\langle a,b\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Länge eines Vektors

Die Länge eines Vektors resultiert aus dem Skalarprodukt mit sich selbst und wird norm genannt



(Länge a)^2 = ${x_1}^2 + {y_1}^2$

$$||a|| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Skalar Recheneigenschaften

Linearität: $\langle s \cdot a, b \rangle = s \cdot \langle a, b \rangle$
Symmetrie: $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
Distributivität: $\langle a + c, b \rangle = \langle a, b \rangle + \langle c, b \rangle$

Normieren

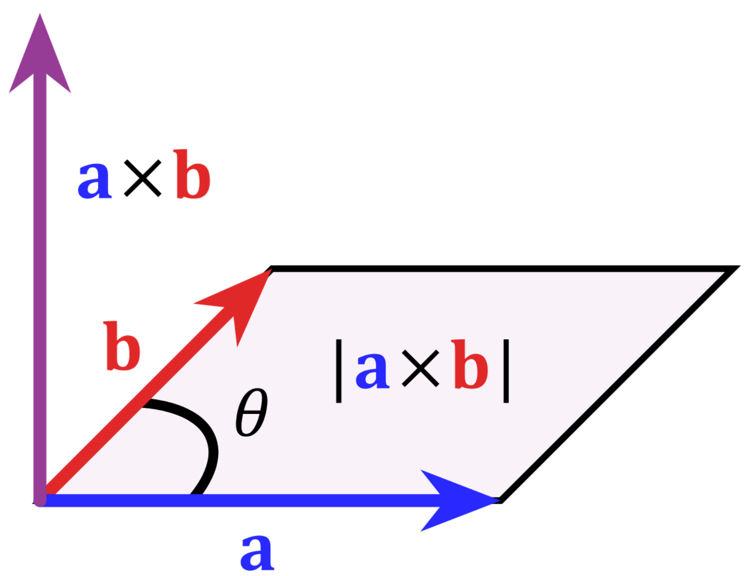
Ein Vektor gilt als normiert wenn seine Länge 1 ist
Man kann einen beliebigen Vektor wie folgt normieren:
$\frac{1}{||a||} \cdot a = \frac{a}{||a||}$

Orthogonalität

2 Vektoren stehen zu einander orthogonal (senkrecht) wenn ihr skalarprodukt 0 ergibt

Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt gibt einen Vektor, der zu den beiden anderen Vektoren orthogonal steht



Das Kreuzprodukt wird wiefolgt berechnet

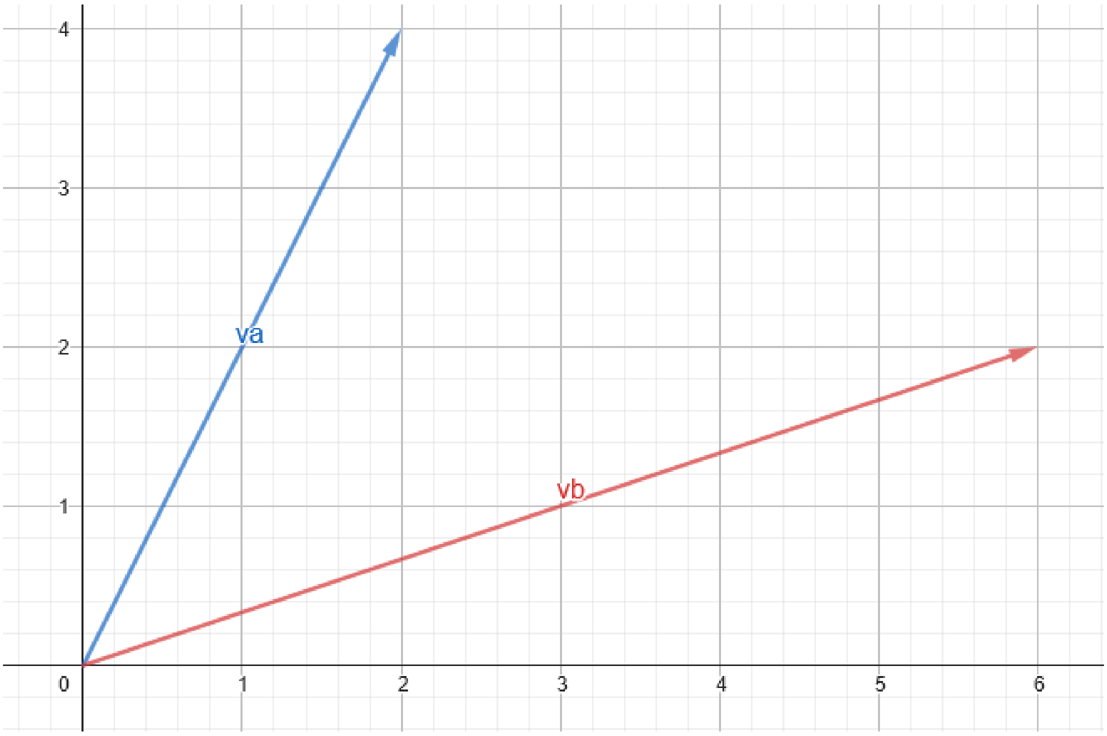
$$\vec{a}\,x\,\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 * b_3 - a_3 * b_2 \\ a_3 * b_1 - a_1 * b_3 \\ a_1 * b_2 - a_2 * b_1 \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt für $n = a \times b$

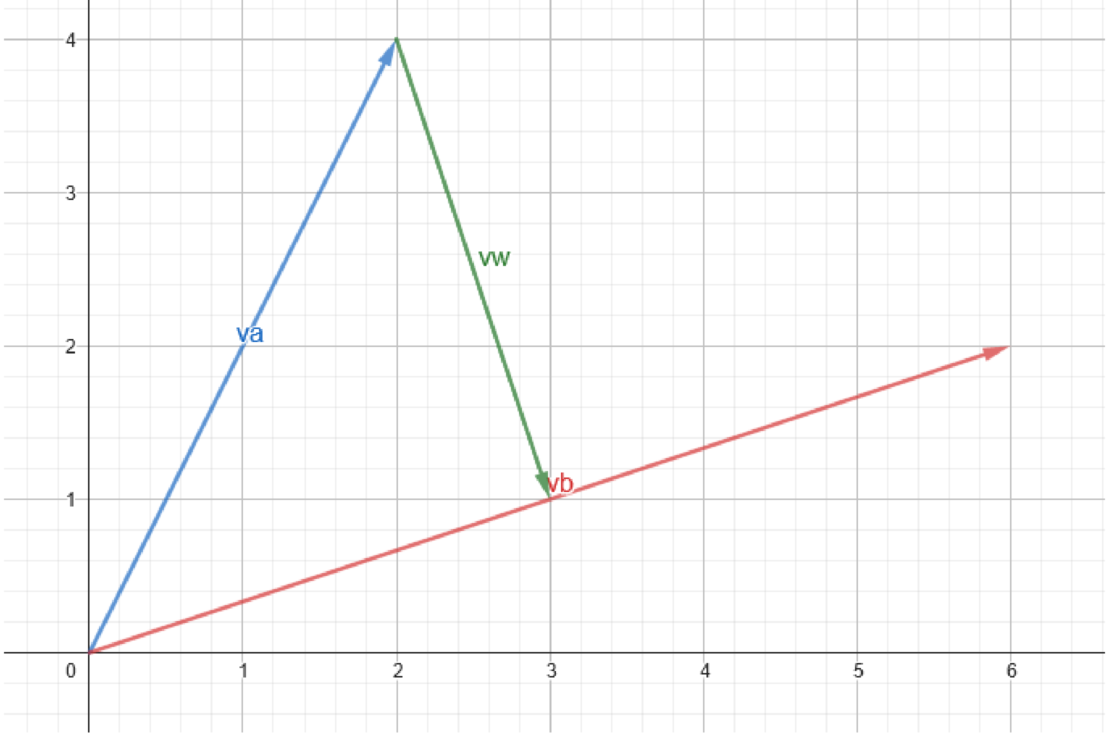
$\langle n, a \rangle = \langle n, b \rangle = 0$

Orthogonale Zerlegung

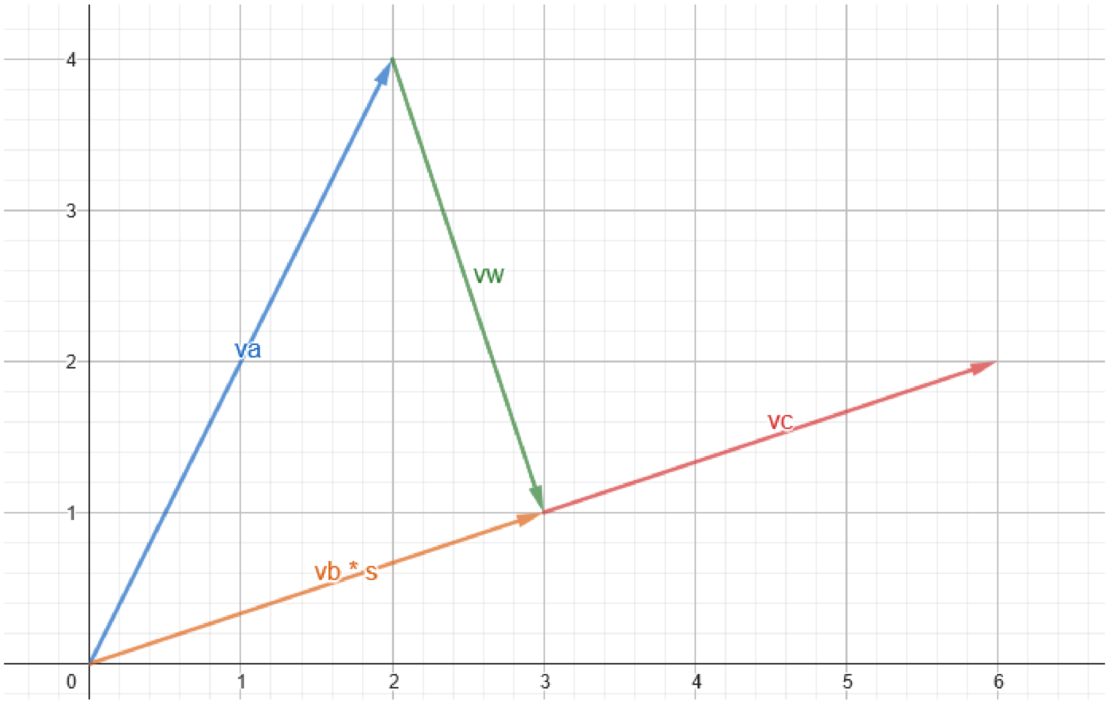
Gegeben seien 2 Vektoren (v_a & $v_b \neq 0$)



man möchte nun einen Vektor w finden, welcher dafür sorgt, dass mit v_a und v_b ein rechter winkel gebildet wird (wiefolgt)



Da v_b aber evtl zu lang ist muss er ggf. mit einem s skaliert werden



Da v_b und v_w orthogonal zueinander sind muss gelten $\langle v_b, v_w \rangle = 0$

Des weiteren muss gelten:

$v_b \cdot s + v_w = v_a$

oder umgeformt:

$v_w = v_a - s \cdot v_b$

setzt man dies nun in $\langle v_b, v_w \rangle = 0$ so erhält man:

$\langle v_b, v_a - s \cdot v_b \rangle = 0$

mit Hilfe von den vorher genannten Skalar Recheneigenschaften kann man dies umwandeln in:

$\langle v_b, v_a \rangle - s \cdot \langle v_b, v_b \rangle = 0$

unter Beachtung von $v_b \neq 0$ löst man auf s auf:
$s = \frac{\langle v_b, v_a \rangle}{\langle v_b, v_b \rangle}$

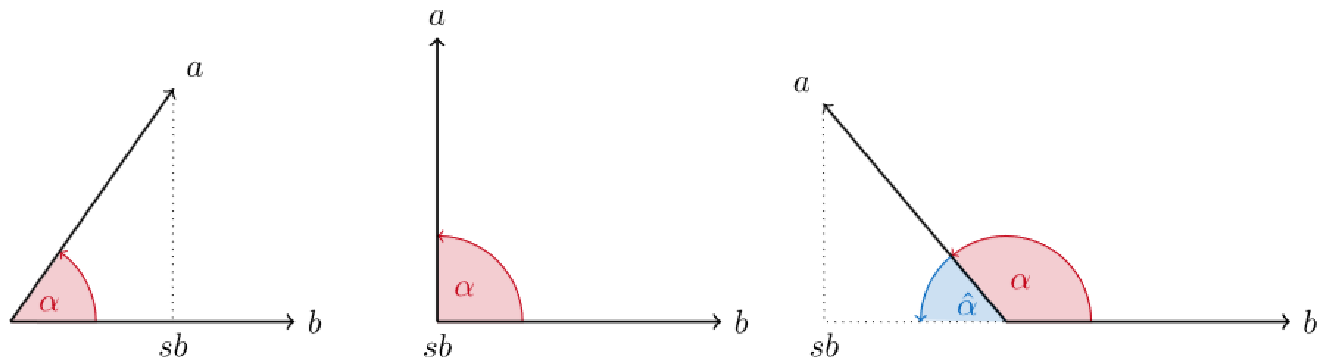
setzt man nun $s = \frac{\langle v_b, v_a \rangle}{\langle v_b, v_b \rangle}$ ein in $v_w = v_a - s \cdot v_b$ so erhält man:

$$v_w = v_a - \frac{\langle v_b, v_a \rangle}{\langle v_b, v_b \rangle} \cdot v_b$$

Winkel zwischen 2 Vektoren

Um den Winkel zwischen 2 Vektoren zu finden, greift man auf das Prinzip der orthogonalen Zerlegung zurück

Hier gibt es für den Skalar s von v_b 3 Möglichkeiten:



$s > 0$, $s = 0$ und $s < 0$
Ist $s = 0$ so stehen die vektoren senkrecht zueinander

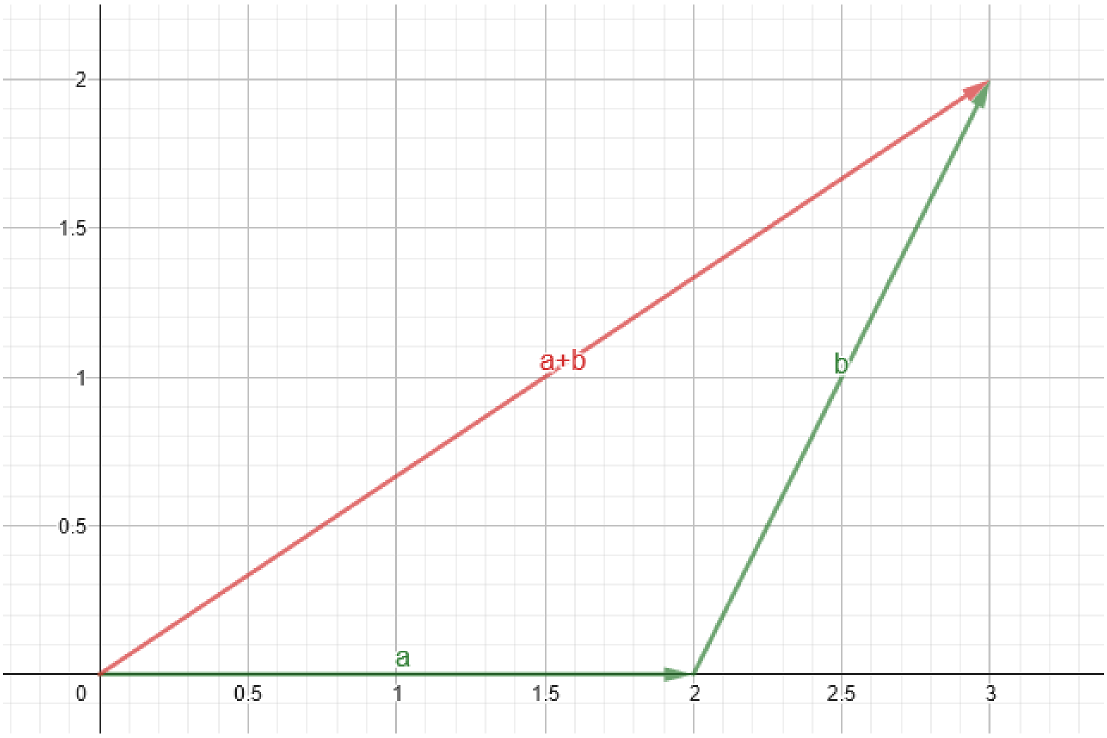
Die Formel zum berechnen des winkels zwischen 2 Vektoren lautet:

$$cos(\alpha) = \frac{\langle a, b \rangle}{||a|| \cdot ||b||}$$

(Beweis: siehe Skript Seite 17)

Außerdem gilt:
$||a + b||^2 = ||a||^2 + 2||a||||b|| + ||b||^2$
sowie:

$||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$
Dies gilt, da die Hypothenuse immer die längste seite eines Quadrates ist



4 Rechentechniken 2

Lösen von Ungleichungen

Rechenregeln

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- $a < b$ und $c > 0 \Rightarrow ca < cb$
- $a < b$ und $c < 0 \Rightarrow ca > cb$
- $a < b$ und $c < d \Rightarrow a + c < b + d$
- $0 < a < b$ und $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$
- Für $a, b > 0$ gilt:
    - $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$
    - $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

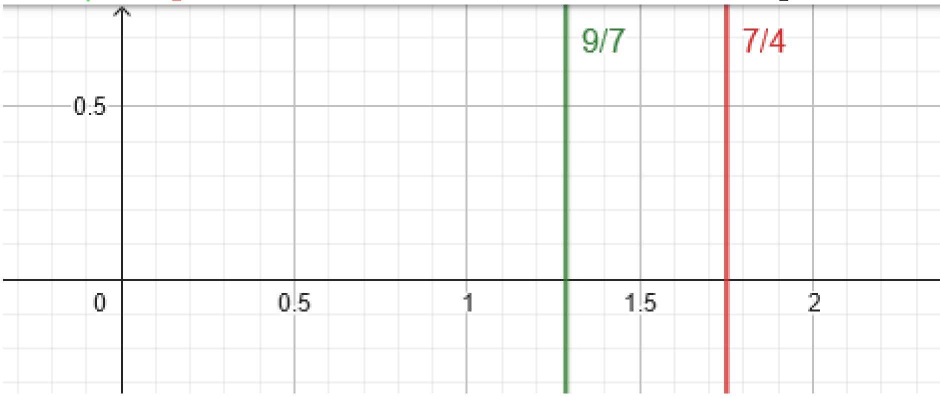
Kurz:
Für Ungleichungen gelten die selben Rechenregeln wie für Gleichungen, multipliziert oder dividiert man jedoch mit einer negativen Zahl bzw. nimmt man log_c mit 0 < c < 1, so muss man das ungleichzeichen drehen (aus < wird > und umgekehrt).

Fallunterscheidung

Teilt man durch eine Unbekannte muss eine Fallunterscheidung getätigt werden für Unbekannte $\geq$ 0 und für Unbekannte < 0

Beispiel:
$\frac{2-3x}{4x-7} < 1$

a.) $4x - 7 \geq 0 (x > \frac{7}{4})$
$2 - 3x < 4x - 7 \Rightarrow 9 < 7x \Rightarrow \frac{9}{7} < x$
Da $\frac{9}{7}$ < $\frac{7}{4}$ gilt die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1 =]\frac{7}{4}, \infty[$



b.) $4x - 7 < 0 (x < \frac{7}{4})$
$2 - 3x > 4x - 7 \Rightarrow 9 > 7x \Rightarrow \frac{9}{7} > x$
Also gilt
$\mathbb{L}_2 =] - \infty, \frac{9}{7}[$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =] - \infty, \frac{9}{7}[\ \cup \ ]\frac{7}{4}, \infty[$

Generell ist die Fallunterscheidung meist sehr umständlich, weshalb es Sinn macht, sie so lange wie möglich hinaus zu zögern, oder (falls möglich) ganz zu umgehen

Fallunterscheidungstabelle

$\frac{2-3x}{4x-7} < 1$ | -1
$\frac{9-7x}{4x-7} < 0$
Dieser Term kann nur negativ sein wenn der Zähler und Nenner verschiedene Vorzeichen haben $(+ \cdot + = +$ und $- \cdot - = +)$.
Also: $9 - 7x < 0$ oder $4x - 7 < 0$ (aber nicht beide)

Nun kann eine Tabelle der beiden Terme erstellt werden, und wann sich ihre Vorzeichen unterscheiden

	$x <$	$\frac{9}{7}$	$< x <$	$\frac{7}{4}$	$< x$
$9 - 7x$	+	0	-	-	-
$4x - 7$	-	-	-	0	+
	✅	🟠 (Nur wenn $\leq$ 0)	❌ (Gleiche Vorzeichen)	❌ (Nenner 0)	✅

$\mathbb{L} =]-\infty, \frac{9}{7}[\ \cup\ ]\frac{7}{4}, \infty[$

Betrag

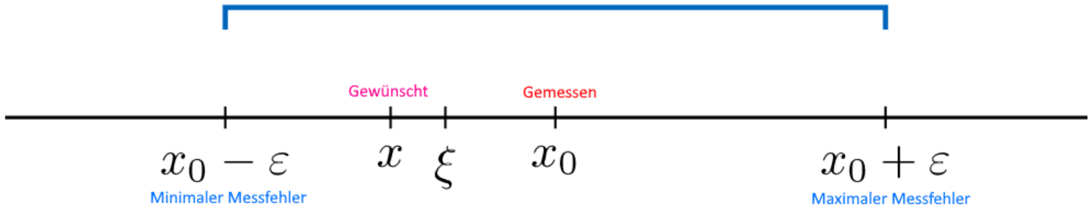
$|x|$ = x falls $x \geq 0$
$|x|$ = -x falls $x < 0$
Kurz: Betrag macht aus negativer Zahl eine Positive Zahl

Abschätzen von Fehlern

Wird noch genauer in Analysis 1 besprochen.
$|f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi)| \cdot |x - x_0|$

Wobei:

- x der zu messende Punkt ist,
- x_0 der Punkt den man (durch Fehler) tatsächlich misst
- $f(x)$ bzw. $f(x_0)$ der Mess-(bzw. Funktions-)wert an der entsprechenden Stelle
- ξ liegt zwischen x und x_0
- ε ist unsere maximale "ungenauigkeit" (d.h.)



Unser Ziel ist es nun einen Maximalwert M von $|f'(y)|$ für $y \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ zu bestimmen (wie sehr der Y-Wert (das Ergebnis der Messung) maximal vom gewünschten Wert abweicht)

Durch Abschätzung haben wir eine Schranke für den Messfehler gefunden:
$|f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi)| \cdot |x - x_0| \leq M \cdot |x - x_0| \leq M \cdot \varepsilon$
Sei $f(x) = \alpha e^{\beta x}$ mit $\alpha, \beta \geq 0$ so gilt
$f'(x) = \alpha\beta e^{\beta x}$
also folgt:
$|f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi)| \cdot |x - x_0| = |\alpha\beta e^{\beta\xi}| \cdot |x - x_0| \leq \max\limits_{y \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} |\alpha\beta e^{\beta y}| \cdot |x - x_0|$

Weiß man z.B. dass $x_0 = 2$ und $\varepsilon = 1$ so muss M von $|\alpha\beta e^{\beta y}|$ zwischen $[1, 3]$ berechnen:

$$M = \max_{y \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} |\alpha\beta e^{\beta y}| = \max_{y \in [1,3]} |\alpha\beta e^{\beta y}| = \alpha\beta e^{3\beta}$$

Durch $\varepsilon = 1$ folgt somit:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M\varepsilon = \alpha\beta e^{3\beta}$$

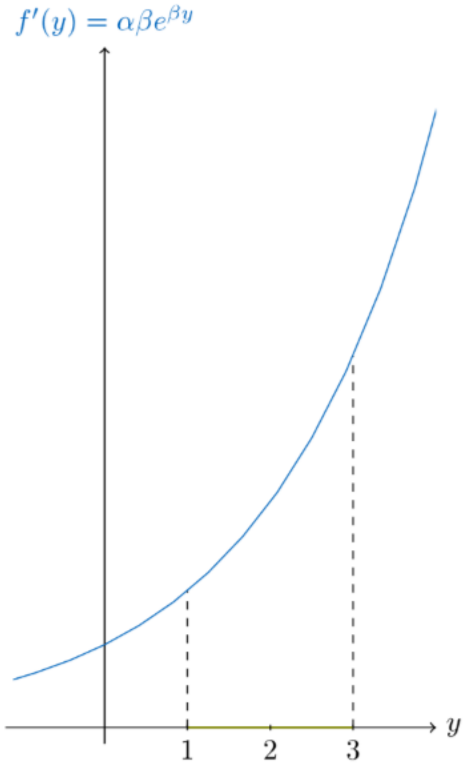


Abbildung 4.7 Im grün markierten Intervall müsste man im Beispiel $|\alpha\beta e^{\beta y}|$ abschätzen.

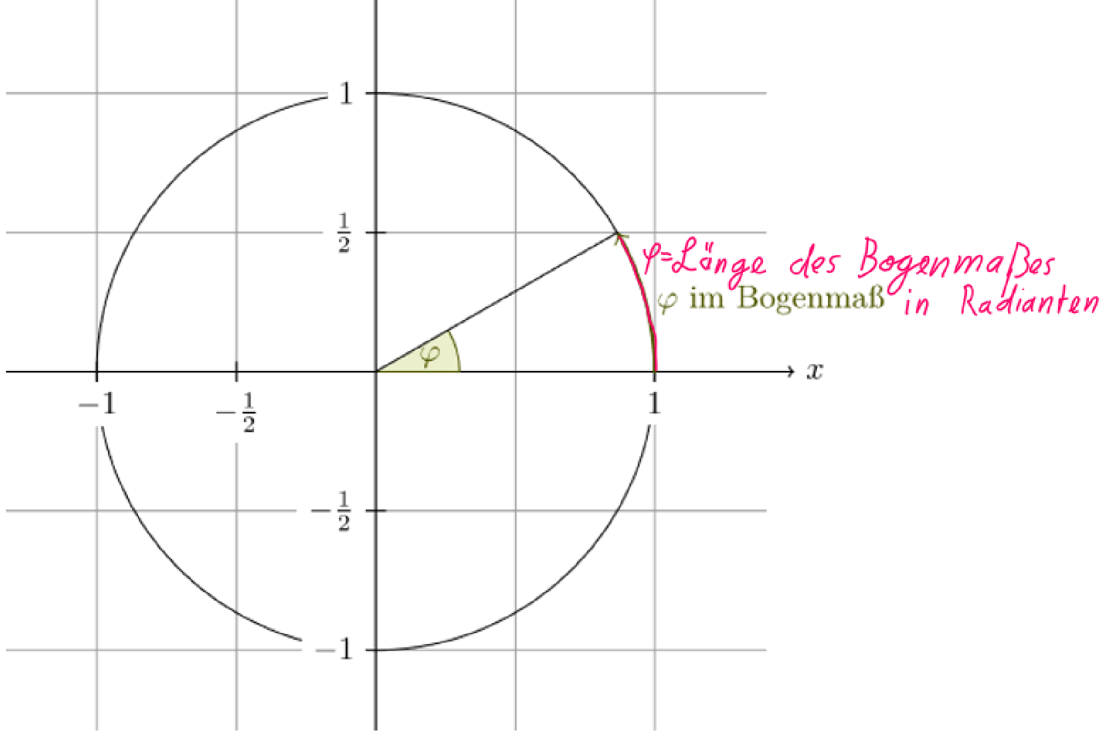
5 Trigonometrische Funktionen

Einheitskreis

Betrachten wir einen Kreis mit Radius 1, so ist:

- Die Fläche π
- Der Umfang 2π

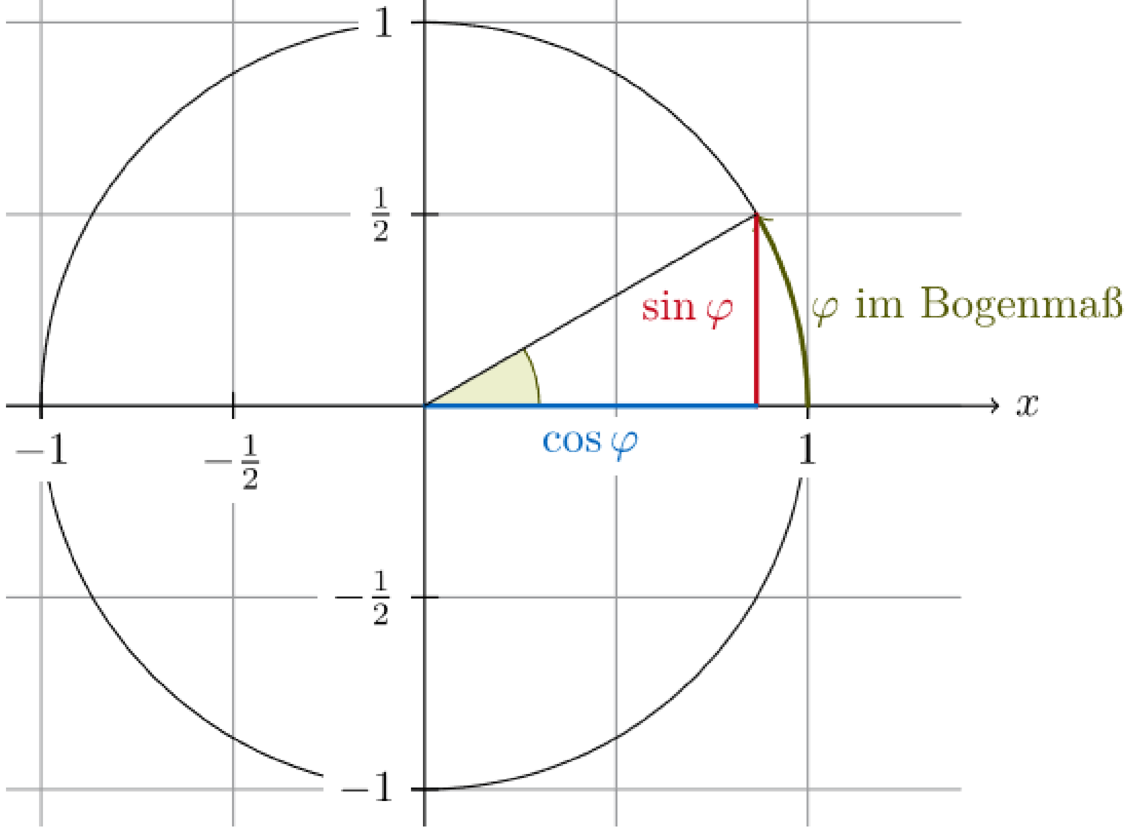
Im Gegensatz zu Grad lässt sich der Winkel auch mit dem Bogenmaß als Vielfaches von π in Radianten schreiben



Sinus & Kosinus

Hat man einen Winkel im Bogenmaß (z.B. $\frac{pi}{4}$) so wird beim Kreis an diesem Ort ein Punkt gesetzt und mit einer Linie zum Mittelpunkt verbunden.
Mit dieser Linie wird nun ein Rechtwinkliges Dreieck gebildet wobei:

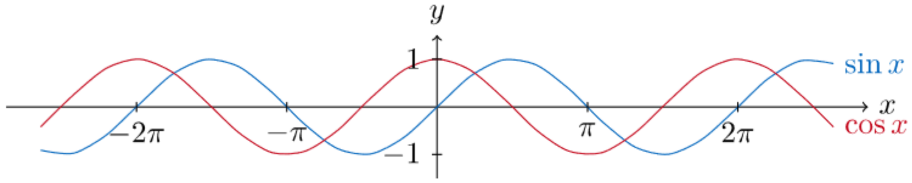
- $\cos(\phi)$ die X-Koordinate und
- $\sin(\phi)$ die Y-Koordinate
  darstellen



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Winkel	0	30	45	60	90	180	270

Sin & Cos Eigenschaften:

- 2π-Periodizität
  - $\sin(x + k2\pi) = sin(x)$
  - $cos(x + k2\pi) = cos(x)$
- 0-Stellen
  - $sin(k\pi) = 0$ und $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$



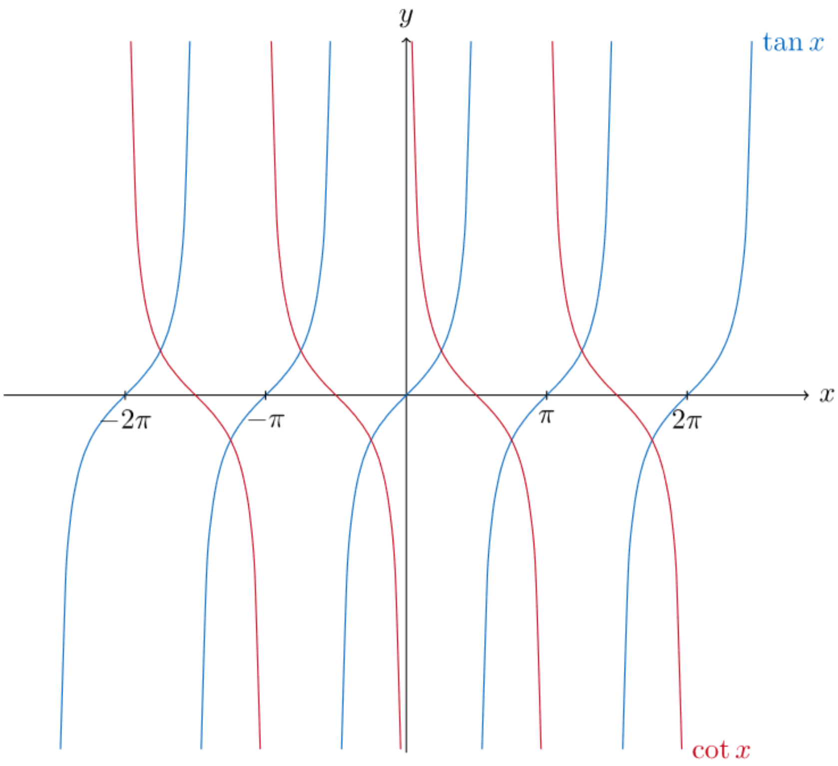
Tan & Cotan

$tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

tan ist definiert als $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ und liefert ein Ergebnis $\mathbb{R}$

$\cot := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
$\cot$ ist definiert als $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{R}$ und liefert als Ergebnis $\mathbb{R}$

$\tan$ und $\cot$ sind im Definitionsbereich durch das teilen von $\sin$ und $\cos$ eingeschränkt, wo diese 0 wären.



$\tan$ und $\cot$ haben folgende Eigenschaften:

- π-Periodizität
  - $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$
  - $\cot(x + k\pi) = \cot(x)$
- 0-Stellen
  - $\tan(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$
  - $\cot(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$

Umkehrfunktionen

Die Umkehrfunktionen werden mit arc bezeichnet ($\arccos \arcsin \arctan$)und bezeichnen die Funktionen mit denen man durch den Y-Wert, den X-Wert der entsprechenden normalen Funktion berechnet.

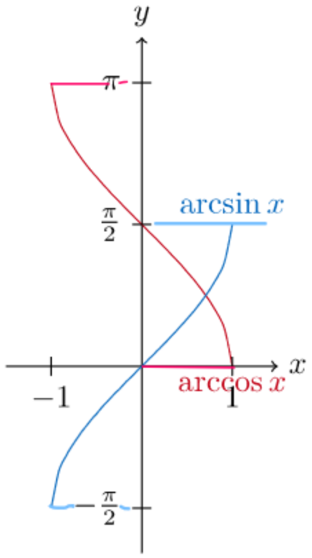
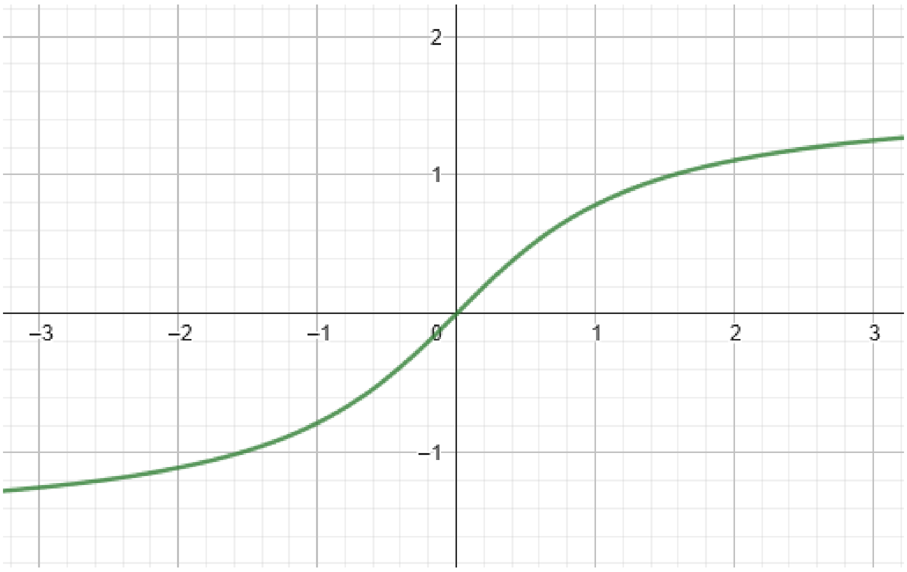


Abbildung 5.5 Die Arkusfunktionen arcsin und arccos



arctan

$$\arctan\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ y \mapsto \text{das } x \text{ mit } \tan x = y \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{arccot}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to (0, \pi) \\ y \mapsto \text{das } x \text{ mit } \cot x = y \end{cases}$$

Wichtige Formeln:

Wichtige Formeln $\sin, \cos, \tan$ **&** $\cot$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

bzw.

$sin(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x)$

$cos(x - \frac{\pi}{2})$

Additionstheorem:

$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$

$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$

Doppelwinkelformel:

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

Wichtig für gewisse Integrationen:

$\cos(x) = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$

$\sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$

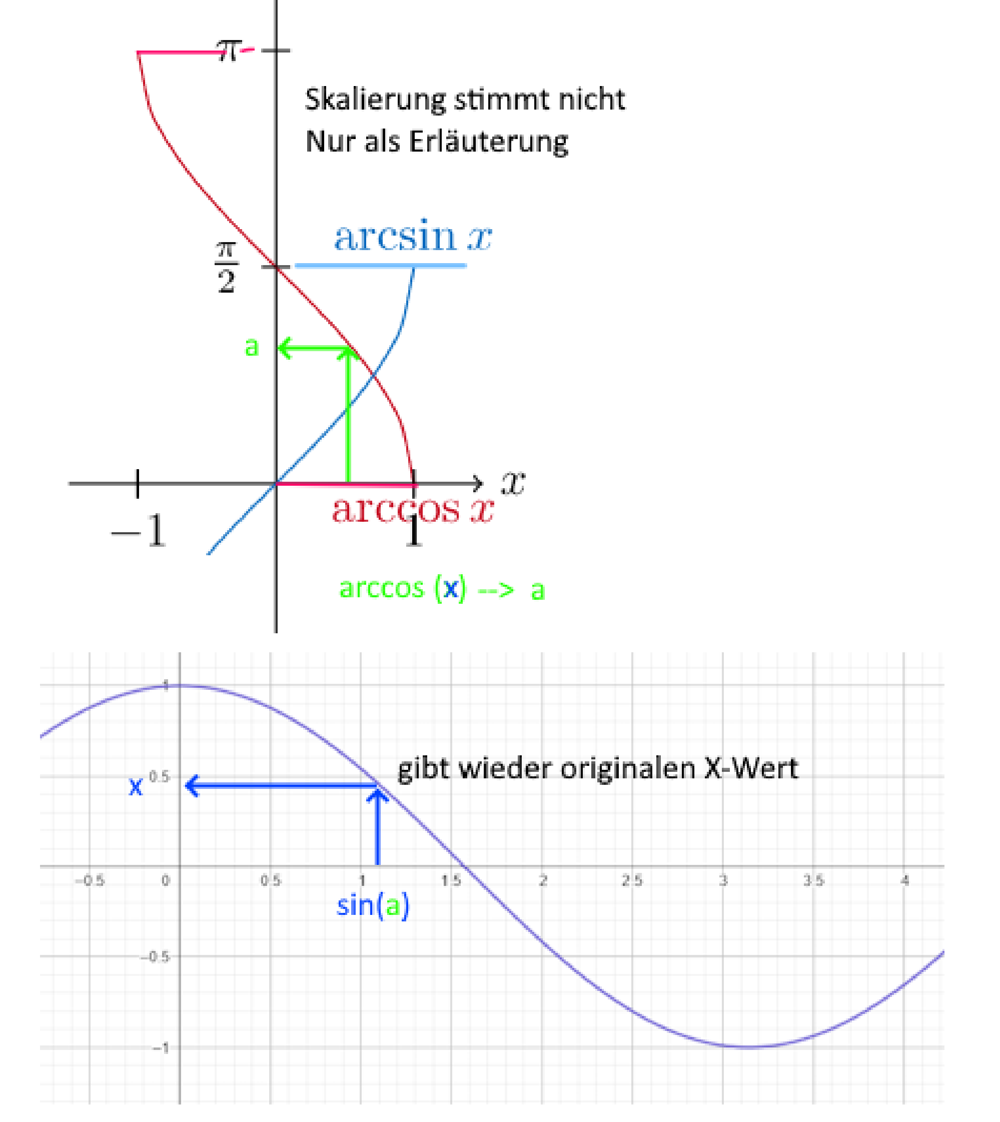
$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

($\cos$ wegen $\arcsin$ auf $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ beschränkt und ist deshalb immer positiv)

$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$

$\sin(\arcsin(x)) = x$

$\cos(\arccos(x)) = x$



6 & 7 Matritzen I & II

Die Menge aller reellen $m \times n$-Matritzen bezeichnet man mit $\mathbb{R}^{m \times n}$
Hierbei gilt Zeile $\times$ Spalte

Addition

Bei der Addition von Vektoren addiert man die korrispondierenden Zeilen und Spalten miteinander
Sprich:
Zeile A1 Spalte A1 + Zeile B1 Spalte B1 = Zeile C1 Spalte C1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -9 & -10 \\ -11 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren mit Skalar

Das Multiplizieren einer Zahl funktioniert, indem man jede Zahl der Matrix mit dem Skalar multipliziert

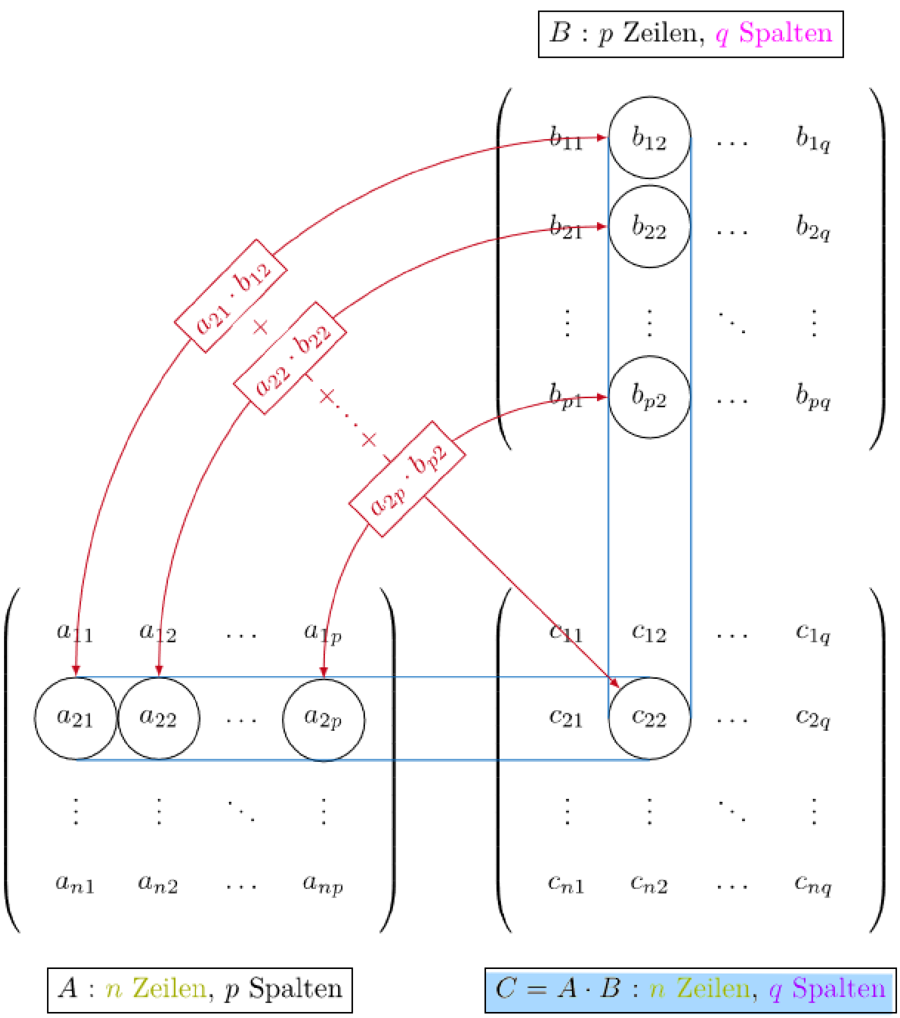
$$7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \\ 35 & 42 \end{pmatrix}$$

Des weiteren gilt

$$c(A + B) = cA + cB$$

Multiplizieren von Matritzen

Um Zwei vektoren miteinander zu multiplizieren muss gelten:
$A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $B \in \mathbb{R}^{p\ \times q}$
So müssen die Spaltenanzahl der ersten Matrix und die Zeilenanzahl der zweiten übereinstimmen
Die resultierende Matrix wird dabei wie folgt berechnet:



WICHTIG:
$A \times B \neq B \times A$

Das neutrale Element

Eine Matrix welche als Diagonale 1 und alle anderen stellen 0 hat, wird angegeben als I_n und heißt Einheitsmatrix, wobei n die Zeilen- und Spaltenanzahl darstellt.
Bsp.:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix welche mit I_n multipliziert wird, verändert sich NICHT
$A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \times I_3 = A$

Das Inverse einer Matrix A ist die Matrix mit der A multipliziert die Einheitsmatrix ergibt
$A \times A^{-1} = I_n$
Es gibt NICHT für alle matritzen eine inverse
Das Inverse einer Matrix kann (durch anwenden der Regeln aus dem Lösen eines LGS) wie folgt bestimmt werden (falls vorhanden)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot -5$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot -4$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot -4$$

$$\Downarrow$$

$$\cdot -3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 15 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot -2$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Hier startet man zuerst mit der Matrix links und der Einheitsmatrix rechts. Das ziel ist es links die Einheitsmatrix zu erhalten. Ist dies vollbracht, so steht rechts das inverse der originalen Matrix

Transponieren von Matritzen

Matritzen werden Transponiert indem Zeilen und Reihen vertauscht werden

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Diverses

Matritzen (ungleich 0) welche für die gilt A^n = 0 (also die mit einer beliebigen Potenz n Null ergeben) nennt man Nilpotent

Für $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times A$ ==> Spiegelt Zeilen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ==> Spiegelt Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

$A \times B \neq B \times A$
$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

Fibonacci Zahlen Formel

Erklärung gewünscht, ich habs nicht wirklich verstanden tbh

Lineare (Un-)Abhängigkeit

Abhängig

Vektoren $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ sind linear abhängig voneinander wenn es Zahlen $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \neq 0$ gibt, sodass
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$
oder anders, wenn sich $mindestens$ ein Vektor durch andere abbilden lässt $(v_1 = \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3)$

Unabhängig

Eine Menge von Vektoren ist linear unabhängig, wenn es keine solchen Zahlen (außer 0) gibt.
In $\mathbb{R}^n$ gibt es maximal n linear unabhängige Vektoren.
Bsp.: in $\mathbb{R}^2$ gibt es maximal 2 linear unabhängige Vektoren, weil man einen dritten dann immer durch die 2 anderen abbilden kann

Lineare gleichungssysteme (LGS)

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Kann geschrieben werden als

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Kann geschrieben werden als

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & b_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & b_n \end{array}\right)$$

Nicht lösbar falls irgendwo eine Zeile $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0|1)$
weil $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$ muss 0 sein

LGS liefern entweder keine, $genau$ eine oder undendlich viele Lösungen. Andere Fälle können nicht auftreten.

Jedes LGS kann durch folgende Aktionen auf Zeilen-Stufen-Form gebracht werden

- *Vertauschen zweier Zeilen,*
- *Multiplikation einer Zeile mit einem* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- *Addition des* λ*-fachen (mit* $\lambda \in \mathbb{R}$*) einer Zeile zu einer anderen Zeile*

Bsp.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \cdot -2 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \cdot -3 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \text{vertauschen}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{array}\right)$$

Zeilen-Stufen-Form erreicht

Des weiteren kann man nun mit der Rückwärtssubstitution fortfahren, sodass (nach möglichkeit) in jeder Zeile, links eine 1 steht, und in der entsprechenden Spalte, in der Zeile über den einsen, Nullen. Rechts von den Einsern stehen dann nur mehr Nullen. Dies erreicht man durch die gleiche anwendung der Regeln wie oben.

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & * & 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Am Ende erhält man eine Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & 15.5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

x_1 und x_3 sind hier $\neq 1$, deshalb sind dies unsere Freien Variablen
Man hätte sich vorher schon erschließen können, dass es 2 freie Variablen gibt, da man ein Gleichungssystem mit 5 unbekannten betrachtet aber nur 3 Zeilen hat, die ungleich 0 sind.

die einzelnen zeilen können nun aufgeschrieben werden als
$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 15.5$
... etc.

wir schreiben nun $x_1 = s$ und $x_3 = t$ (wir erinnern uns, dies sind unsere spalten $\neq 1$) wir haben also
$x_1 = s, \quad x_2 = 15.5 + 2t, \quad x_3 = t, \quad x_4 = -0.5, \quad x_5 = -3.$

Abb. a

wir können dies nun als vektoren aufschreiben

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 15.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Betrachten wir hier z.B. die zweite Zeile, so erhalten wir $15.5 + s \cdot 0 + t \cdot 2$. Dies stellt nun genau die Lösung für x_2 dar (siehe Abb. a)

Diverses zu LGS

Rang beschreibt die Anzahl der von 0 verschiedenen Zeilen (in Zeilen-Stufen-Form)
Hierbei gibt es Rang$A$ (Matrix) und Rang$(A|b)$ (erweiterte Matrix)

- LGS ist lösbar wenn Rang$A =$ Rang$(A|b)$
- Es gibt $n-$Rang$A$ freie Variablen, wobei n gleich der Spaltenanzahl von A
  - (Erklärung, hat man bspw. ein LGS mit 5 unbekannten, so werden 5 Gleichungen benötigt, welche neue informationen liefern. n gibt an wie viele unbekannte man hat, und der Rang gibt an wie viele Gleichungen einem neue Informationen liefern)
- Der Kern einer Matrix A beschreibt die Menge aller Vektoren, die rechts an die Matrix A multipliziert den Nullvektor ergeben:
  - Kern$A$ $=\{x \in \mathbb{R}^n | A \cdot x = 0\}$
  - Bsp.:
    - Für 2 Vektoren $x, y \in$ Kern A und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
      $A(x + \lambda y) = Ax + \lambda Ay = 0 + 0 = 0$
      Somit liegen $x + \lambda y$ im Kern von A.
- Die Menge von Vektoren, welche im Kern von A sind, sind Teil eines Untervektorraums.
  - Es gilt auch:

- $x, y \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x + \lambda y \in U$
  Wobei U für Untervektorraum steht
- Die maximale Menge von linear unabhängigen Vektoren aus dem Untervektorraum heißt Basis von U ==> Die Basis spannt den Untervektorraum auf, sprich, alle möglichen Vektoren können durch die addition von anderen vektoren dargestellt werden.
- Die Anzahl der in dieser Basis enthaltenen Vektoren nennt man Dimension von U
  - Falls die Basis eines Untervektorraums nur aus dem Nullvektor besteht, so gilt $dim\ U = 0$
- Es gilt auch:
  - dim Kern $A = n-$Rang$A$ bzw.
  - dim Kern $A =$ Anzahl freier Variablen des LGS $Ax = 0$

Aber wie bestimmt man die Basis des Kerns, also eine maximale linear unabhängige Teilmenge von Vektoren im Kern von A? Das geht einfach: Wir lösen einfach das zugehörige LGS $Ax = 0$ und setzen in der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \text{Kern}\, A$ nacheinander jeweils eine der freien Variablen auf 1 und die anderen auf 0. Dadurch erhält man $n - \text{Rang}\, A$ viele Vektoren. Diese sind eine Basis von Kern A.

Eine Basis des Kerns von A bestehend aus 2 Vektoren ist somit gegeben durch

$$\left\{ (1,0,0,0,0)^T, (0,2,1,0,0)^T \right\}.$$

8 Rechentechniken III

- Grad ist die Höchste Hochzahl eines Polynoms wobei die Zahl $\neq 0$
- Konstante Polynome => $p(x) = a_0$ ($deg\ p = 0$)
  - Wenn Konstantes Polynom mit $a_0 = 0$ ==> Nullpolynom ($deg\ 0 = -\infty$)

Satz 8.1. *Sei p ein Polynom mit Grad $\deg p$. Es gelten folgende Aussagen:*

$\deg p = -\infty$: *Dann gilt $p(x) = 0$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist Nullstelle von p.*

$\deg p = 0$: *Dann gilt $p(x) = a_0 \neq 0$ und p besitzt keine Nullstellen.*

$\deg p = 1$: *Dann gilt $p(x) = a_1 x + a_0$ mit $a_1 \neq 0$ und $x_0 = -\frac{a_0}{a_1}$ ist die einzige Nullstelle von p.*

$\deg p = 2$: *Dann gilt $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit $a_2 \neq 0$. Betrachte $\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0$. Es gilt:*

- *Falls $\Delta = 0$ existiert eine (doppelte) Nullstelle $x_{1/2} = -\frac{a_1}{2a_2}$ von p.*

- *Falls* $\Delta < 0$ *existiert keine Nullstelle von* p.
- *Falls* $\Delta > 0$ *existieren zwei verschiedene Nullstellen*

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \quad \textit{und} \quad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

  von p.

  Für $deg\ p = 3$ und $deg\ p = 4$ gibt es Formeln, aber diese sind zu kompliziert. Für $deg\ p \geq 5$ gibt es keine Formeln

Polynomdivision

Ein Polynom p kann durch ausklammern einer Nullstelle und einem Polynom dessen grad 1 kleiner ist als der von p geschrieben werden

$$p(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; p(x) = (x-a)q(x)$$

$deg\ q = deg\ p - 1$

q lässt sich mit hilfe einer Polynomdivision feststellen
Hierbei wird ein polynom ($p(x) = x^3 - x^2 - x - 2$) durch eine Nullstelle ($p(2) = 0$) des Polynoms geteilt

$$\begin{array}{l}
(x^3 - x^2 - x - 2) : (x-2) = x^2 + x + 1 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\quad x^2 - x - 2 \\
\quad \underline{-(x^2 - 2x)} \\
\qquad x - 2 \\
\qquad \underline{-(x-2)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

User q lautet also $x^2 + x + 1$

Polynomdivision mit Rest

- Für 2 Polynome (f und g) gibt es Polynome (q und r (=Rest)) sodass
  - $f = g \cdot q + r$ wobei $deg\ r < deg\ g$
  - Sprich Grad vom Rest muss kleiner sein als Grad von g, ansonsten ist q nicht maximal, oder in anderen Worten, es ist

noch nicht vollständig ausdividiert

- Ein Polynom vom Grad n ($n \neq -\infty$) hat höchstens n Nullstellen

❌✅❌✅

- Mit $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = x + 2$ erhalten wir wegen

$$
\begin{array}{l}
(x^2 - 1) : (x + 2) = x - 2 \\
\underline{-(x^2 + 2x)} \\
\quad -2x - 1 \\
\quad \underline{-(-2x - 4)} \\
\qquad 3
\end{array}
$$

die Darstellung $f(x) = g(x)(x - 2) + 3$. Es folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 2} = x - 2 + \frac{3}{x + 2}.$$

- Mit $f(x) = 4x^5 + 6x^3 + x + 2$ und $g(x) = x^2 + x + 1$ erhalten wir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x^5 + 6x^3 + x + 2}{x^2 + x + 1} = 4x^3 - 4x^2 + 6x - 2 + \frac{-3x + 4}{x^2 + x + 1}.$$

❌✅❌✅

Faktorisierung

- Faktorisieren beschreibt das zerlegen von Polynome in möglichst kleine Einzelteile ($p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r$).
- Möglichst fein bedeutet hier, dass sich die einzelnen Polynome (p_1, p_2, etc.) nicht weiter als Produkt von echten Polynomen schreiben lassen
  - $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
  - $x - 1$ ist eine Nullstelle und $x^2 + x + 1$ hat keine reelle Nullstelle mehr
- NUR lineare und ^{2} Polynome ohne 0-Stellen sind Primpolynome
  - Sprich: alle anderen außer die eben genannten lassen sich weiter zerlegen

Möglichst kleine Zerlegung finden:

- (Wenn möglich) Nullstelle erraten oder bestimmen (Nullstelle immer faktorisierbar)
- Ggf. Nullstellen per polynomdivision wegdividieren
- Da ungerade polynome immer eine Nullstelle besitzen, mache man im Fall $Grad\ \ n \geq 4$ den Ansatz

  $$p(x) = (a_{\boxed{r}} x^{\boxed{r}} + \cdots + a_0)(b_{\boxed{s}} x^{\boxed{s}} + \cdots + b_0) \quad \text{mit} \quad \boxed{r+s=n}$$

  mit Koeffizientenvergleich
- Bsp.:
- $x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a+c)x^3 + (ac + d + b)x^2 + (ad + bc)x + bd.$
- Mit Koeffizientenvergleich gleichungssystem aufstellen:

  $$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ ac + b + d &= 0, \\ ad + bc &= 0, \\ bd &= 1. \end{aligned}$$
-
- Erste umstellen => $c = -a$
- $c = -1$ in vorletzte einsetzen und umstellen => $a(d-b) = 0$
  - Daraus folgt $a = 0 \lor d - b = 0$ ==> $d = b$
- Fall 1: $a = 0$:
  - ==> c auch 0 ==> Zweite Gleichung: $d = -b$
    ==> Letzte Gleichung: $-b^2 = 1$ (nicht möglich)
- Fall 2: $b = d$:
  - Letzte Gleichung: $b^2 = 1$ ==> $b = d = \pm 1$
  - Fall 2.1: $b = d = -1$
    - Zweite Gleichung: $-a^2 = 2$ (nicht möglich)
  - Fall 2.2: $b = d = 1$
    - $a^2 = 2$ ==> $a = \pm\sqrt{2}$
    - $c = -a = \pm\sqrt{2}$
- Finale Gleichung:

- $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$
  ist eine möglichst feine Zerlegung

Partialbruchzerlegung

- Eine schwierige polynomdivision wird (meist um sie einfacher zu Integrieren) in einfachere Bruchteile zerlegt
- Partialbruchzerlegung nur möglich, wenn Zählergrad < Nennergrad und der Nenner möglichst fein zerlegt ist

$$\frac{b(x)}{q(x)}=\frac{p_1(x)}{(q_1(x))^{\alpha_1}}+\frac{p_2(x)}{(q_2(x))^{\alpha_2}}+\cdots+\frac{p_r(x)}{(q_r(x))^{\alpha_r}},$$

- *wobei die Polynome* $p_1, p_2, \ldots, p_r$ *alle einen Grad kleiner oder gleich* 1 *haben.*

Ansatz:
Man nehme als Beispiel den Bruch

$$\frac{x}{(x-a)^3(x-b)}$$

Faktoren im Nenner müssen so oft beachtet werden, wie die Potenz angibt

$$\frac{}{(x-a)}+\frac{}{(x-a)^2}+\frac{}{(x-a)^3}+\frac{}{(x-b)}$$

Kommt im Nenner ein linearer Term (z.B. $x-a$) vor, so kommt in den Zähler eine Variable (z.B. A)

$$\frac{A}{x-a}$$

Steht im Nenner ein quadratischer Term (^{2}), so kommt in den Zähler ein linearer Term mit Variablen(z.B. $Bx+C$)

$$\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Beispiel:

$$\frac{x^4+2x^3+3x^2+4}{(x-a)^2(x^2+1)(x^2+x+1)^2}$$

Wird zu:

$$\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}+\frac{Ex+F}{(x^2+x+1)}+\frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^2}$$

Die Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ bestimmt man, indem man den zerlegten Bruch auf einen Nenner bringt und mit dem originalen Zähler vergleicht. So erhält man ein immer ein LGS welches lösbar sein muss

Beispiel:

$$\frac{2x^4+x^3+4x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

$$\begin{aligned}2x^4+x^3+4x^2+1 &= A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+1)+(Dx+E)(x-1)\\ &= (A+B)x^4+(C-B)x^3+(2A+B-C+D)x^2\\ &\quad +(C-B-D+E)x+(A-C-E).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{A+B} &= 2\\ \boxed{C-B} &= 1\\ \boxed{2A+B-C+D} &= 4\\ C-B-D+E &= 0\\ A-C-E &= 1\end{aligned}$$

Wir lösen das LGS mit einer Matrix:

Wir bringen die Koeffizientenmatrix mit elementaren Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&0&0&2\\0&-1&1&0&0&1\\2&1&-1&1&0&4\\0&-1&1&-1&1&0\\1&0&-1&0&-1&1\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&3\\0&1&-1&0&0&-1\\0&0&-2&1&0&-1\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{array}\right).$$

Also gilt

$$A=2,\ B=0,\ C=1,\ D=1,\ E=0.$$

Damit haben wir die Partialbruchzerlegung gefunden, sie lautet:

$$\frac{2x^4+x^3+4x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{2}{(x-1)}+\frac{1}{(x^2+1)}+\frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

9 Differentiation & Integrale

Ableiten

Das Ableiten (Differentieren) beschreibt das ausrechnen der Steigung einer Funktion

Einfache Regeln

$(e^x)' = e^x$

$x' = 1$

$k^x = \ln(k) \cdot k^x$

$k' = 0$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$\ln(x)' = \frac{1}{x}$

Komplexere Regeln

$(sin(x)' = cos(x)$ | $cos(x)' = -sin(x)$

$(f(x) * g(x))' = f(x)' * g(x) + g(x)' * f(x)$

$(f(x) \pm g(x))' = f(x)' \pm g(x)'$ | $(c * f(x))' = c * f(x)'$

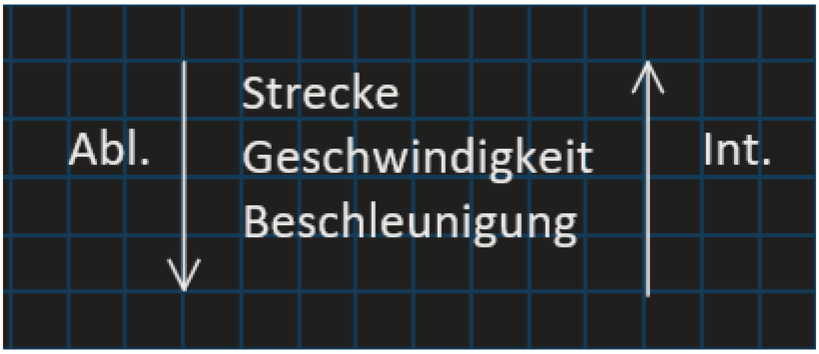
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)' * g(x) - f(x) * g(x)'}{g(x)^2}$

$\left(e^{\ln(x)}\right)' = e^{\ln(x)} \cdot \ln(x)' = x \cdot \ln(x)' = 1$

Good to know

$K^x = K^x \cdot ln(k)$
$ln(nx) = \frac{1}{x}$
$ln(x^n) = \frac{n}{x}$

$ln(n^x) = ln(n)$
$ln(x)^n = \frac{n * ln(x)^{n-1}}{x}$



Weiter gilt

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \begin{cases} 1 + \tan^2 x, \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

$$\cot' x = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Integrieren

Das Integrieren ist die Umkehrung der Ableitung und findet die Fläche unter einer Funktion zwischen zwei Punkten, bzw. Allgemein

Regeln

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int 1 \; dx = x + C$

$\int 1 + 2x \; dx = \int 1 \; dx + \int 2x \; dx = x + x^2 + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = ln(x) + c$

Substitution

$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$
$u = 1 + e^x$
$u' = e^x \rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

Man Kann auch statt z.B. $2x = u$ schreiben $x = 2u$
dx wird dann berechnet durch $dx = u' \cdot du$

Good to know

$\int sin(nx)dx = -\frac{1}{n} \cdot cos(nx)$
$\int n^x dx = \frac{n^x}{ln(n)}$
$\int ln(x)dx = x \cdot (ln(x) - 1)$

Partielles integrieren

$\int f(x)' \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g(x)'$

Wird mehrmals partiell integriert und die Rollenverteilung nicht beibehalten, so kürzt sich meistens alles weg, da dann ja die Integration und Ableitung aus dem ersten Mal partiell integrieren wieder umgekehrt wird. Kann nützlich sein, ist es aber meistens nicht

(Noch) nicht relevant, aber gut zu wissen

Länge einer Kurve

$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt[2]{1 + y'^2}\, dx$

Rotationskörper

Mantel

$2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt[2]{1+y'^2}\ dx$

Volumen

$\pi \cdot \int_a^b f(x)^2\ dx$

Mittelwert

Periodischer Mittelwert

$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t)\ dx$

Nicht periodischer Mittelwert

$\frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(t)\ dx$

Weiters:

- *Logarithmische Integration:*

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \int \frac{1}{g(x)} g'(x)\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| = \ln|g(x)| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

10 Extremstellen

R^1

Im 2 Dimensionalen Ruam bzw. mit einer Variable ($f(x)$) werden Maxima und Minima wie folgt bestimmt

(i) Bestimme f' und f''.

(ii) Bestimme die Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von f'.

(iii) Bestimme die Vorzeichen von $f''(a_i)$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(iv) Entscheide, ob a_i Stelle eines lokalen Maximums oder lokalen Minimums ist:

- Falls $f''(a_i) > 0$: a_i ist Stelle eines lokalen Minimums.
- Falls $f''(a_i) < 0$: a_i ist Stelle eines lokalen Maximums.
- Falls $f''(a_i) = 0$: keine Aussage.

(v) Bestimme die Werte $f(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

(vi) Bestimme die Werte $f(a)$ und $f(b)$ der Funktion f an den Rändern a und b des Intervalls $[a, b]$.

(vii) Entscheide, wo in $\{a, b, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ das globale Maximum und das globale Minimum liegt.

Übliche Fehler beinhalten:

- Bei f' werden nicht alle Nullstellen bestimmt
- Es wird vergessen Randpunkte zu untersuchen
- Rechenfehler

R^2

f_x --> Erste Ableitung nach x
f_y --> Erste Ableitung nach y
f_{xx} --> Zweite Ableitung, beides mal nach x
f_{xy} --> Zweite Ableitung, zuerst nach x, dann nach y
etc.

Im 3 Dimensionalen Raum bzw. mit zwei Variablen (f(x)) werden Maxima und Minima wie folgt bestimmt

(i) Bestimme $f_x,\ f_y,\ f_{xx},\ f_{xy},\ f_{yx},\ f_{yy}$.

(ii) Bestimme die Stellen $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ mit

$$f_x(a_i, b_i) = 0 \quad \wedge \quad f_y(a_i, b_i) = 0.$$

(iii) Bestimme die Vorzeichen von

$$H(a_i, b_i) := f_{xx}(a_i, b_i) f_{yy}(a_i, b_i) - f_{xy}(a_i, b_i) f_{yx}(a_i, b_i)$$

und

$$S(a_i, b_i) := f_{xx}(a_i, b_i) + f_{yy}(a_i, b_i)$$

für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(iv) Unterscheide vier Fälle (Gilt nur in $\mathbb{R}^2$!!):

- Falls $H(a_i, b_i) > 0$ und $S(a_i, b_i) > 0$ gilt, so liegt in (a_i, b_i) ein lokales Minimum vor.
- Falls $H(a_i, b_i) > 0$ und $S(a_i, b_i) < 0$ gilt, so liegt in (a_i, b_i) ein lokales Maximum vor.
- Falls $H(a_i, b_i) < 0$ gilt, so liegt in (a_i, b_i) weder Minimum noch Maximum vor.
- Falls $H(a_i, b_i) = 0$ gilt, so ist keine Aussage möglich.

(v) Bestimme die Werte $f(a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \dots n$.

(vi) Bestimme die Extrema auf den vier Rändern; betrachte dazu die vier Funktionen

- $f(a, y) : [c, d] \to \mathbb{R}$,
- $f(b, y) : [c, d] \to \mathbb{R}$,
- $f(x, c) : [a, b] \to \mathbb{R}$,
- $f(x, d) : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(vii) Bestimme die Werte in den Ecken (a, c), (b, c), (a, d) und (b, d).

(viii) Entscheide, wo das globale Maximum und das globale Minimum liegt.

11 Probleme aus der Ingeneursmathematik

Integrale

Falls $x^2 + px + q$ mit $p^2 - 4q < 0$

- $$\int \frac{dx}{(x-a)} = \ln|x-a| + c$$
- $$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + c$$
- $$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \frac{B}{2} \ln\left(x^2+px+q\right) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} + c$$

Falls $m \geq 2$

- $$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + c$$
- $$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{2x+p}{(m-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{m-1}} + \frac{2(2m-3)}{(m-1)(4q-p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} + c$$
- $$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} dx = -\frac{B}{2(m-1)(x^2+px+q)^{m-1}} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} + c$$

Man bestimme ein Integral mit polynomen wie folgt:

(i) Falls $\deg A \geq \deg Q$, so führe eine Polynomdivision durch

$$\frac{A(x)}{Q(x)} = P(x) + \frac{B(x)}{Q(x)}$$

mit $\deg B < \deg Q$.

(ii) Man zerlege das Polynom Q in weiter unzerlegbare Faktoren:

$$Q(x) = (x - a_1)^{r_1} \cdots (x - a_n)^{r_n} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}.$$

Hierbei gilt $p_i^2 - 4q_i < 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$.

(iii) Man führe eine Partialbruchzerlegung von $\frac{B(x)}{Q(x)}$ durch:

$$\frac{B(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{(x - a_1)} + \cdots + \frac{P_l(x)}{(x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}}.$$

Hierbei gilt $\deg P_i \leq 1$ für alle $i = 1, 2, \ldots, l$.

(iv) Man integriere die einzelnen *Summanden* mit den bekannten Formeln:

$$\int \frac{A(x)}{Q(x)}\, dx = \int P(x)\, dx + \int \frac{P_1(x)}{(x - a_1)}\, dx + \cdots + \int \frac{P_l(x)}{(x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}}\, dx.$$

Differentialgleichung

Differentialgleichungen beschreiben eine Funktion, welche das Verhältnis zwischen der Funktion und ihrer Ableitung beschreibt:

$$y' = x * y$$

Sie werden (bei separierbaren Differentailgleichungen) wie folgt gelöst

(i) Schreibe $y' = \frac{dy}{dx}$ und erhalte so

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

(ii) Schaffe alles, was mit x zu tun hat, auf eine Seite der Gleichung und alles, was mit y zu tun hat, auf die andere:

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx.$$

(iii) Integriere beidseits:

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx.$$

(iv) Die Integrationskonstanten c_l und c_r, die man auf der linken und der rechten Seite erhält, schafft man nach rechts und setzt $c = c_r - c_l$:

$$G(y) = F(x) + c.$$

(v) Löse die Gleichung $G(y) = F(x) + c$ nach $y = y(x)$ auf, für jedes $c \in \mathbb{R}$ hat man dann eine Lösung der Differentialgleichung.

Mit Anfangsbedingungen, kann, durch das Einsetzen des Anfangswertes als y, C berechnet werden.

Komplexe Zahlen

$i = \sqrt{-1}$

bzw.

$i^2 = -1$

i ist Imaginär

i bildet zusammen mit Reellen Zahlen die Komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$) wie folgt:

$$a + ib$$

Es gibt für jede komplexe (z) Zahl ($\neq 0$) eine Inverse (w), sodass $z \cdot w = 1$

(Beweis: siehe Skript Seite 12, 12.2)

Komplexe Konjugation

$z = x + i \cdot y$

$\bar{z} = x - i \cdot y$

Betrag

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Mitternachtsformel

Die „Mitternachtsformel“ für

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ liefert die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die Formel funktioniert auch für komplexe Zahlen $a, b, c \in \mathbb{C}$, wie man sich durch quadratisches Ergänzen überlegen kann. Um sie anzuwenden, müssen wir aber wissen, was die Wurzel aus der komplexen Zahl $b^2 - 4ac$ ist. Hier hilft die folgenden Formel weiter, die man einfach durch Quadrieren bestätigt:

Satz 12.5. *Es sei $z = p + qi \in \mathbb{C}$. Die beiden Lösungen $w_{1,2} \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^2 = z$ lauten im Fall $q \geq 0$*

$$w_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{p + \sqrt{p^2 + q^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 + q^2}}{2}}\, i \right).$$

Im Fall $q < 0$ gilt

$$w_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{p + \sqrt{p^2 + q^2}}{2}} - \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 + q^2}}{2}}\, i \right).$$

Beweis. Wir zeigen $w_{1,2}^2 = z$. Im Fall $q \geq 0$ gilt mit $(x + yi)^2 = \boxed{x^2} - \boxed{y^2} + \boxed{2ixy}$

$x^2 + 2ixy + (yi)^2 =$

$$w_{1,2}^2 = \left(\sqrt{\frac{p + \sqrt{p^2 + q^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 + q^2}}{2}}\, i \right)^2$$

heben sich auf

x^2 $\qquad$ y^2 $\qquad$ $2ixy$

$$= \frac{p + \sqrt{p^2 + q^2}}{2} - \frac{-p + \sqrt{p^2 + q^2}}{2} + 2i\sqrt{\frac{(p + \sqrt{p^2 + q^2})(-p + \sqrt{p^2 + q^2})}{4}}$$

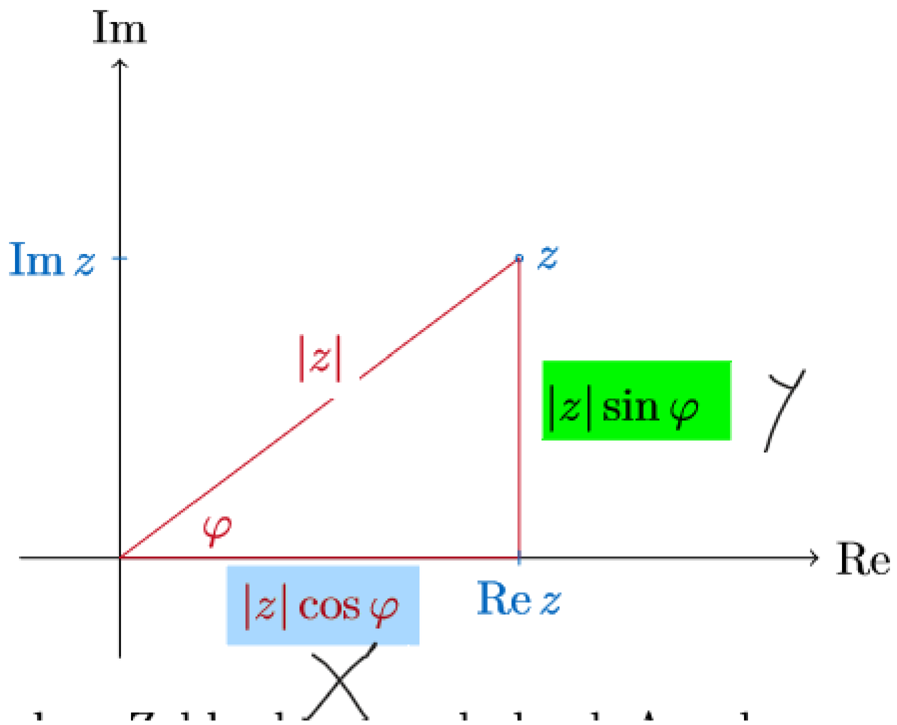
$$= p + \cancel{2}i\sqrt{\frac{\cancel{p^2} + q^2 \cancel{- p^2}}{\cancel{4}}} = p + |q|i = p + qi.$$

$\frac{p}{2} \Uparrow \frac{-p}{2}$ $\quad$ } bin. Formel

Der Fall $q < 0$ kann analog mit der Formel $(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$ behandelt werden. $\square$

Alternative Schreibweisen

Sei $z = x + y \cdot i$



So kann man auch schreiben

$$z = |z| \cos\varphi + i|z| \sin\varphi.$$

Um Phi auszurechnen:

$$r = |z| \qquad und \qquad \varphi = \arg z = \begin{cases} +\arccos\frac{x}{r}, & für\ y \geq 0 \\ -\arccos\frac{x}{r}, & für\ y < 0 \end{cases}$$

Wir haben unser $z \in \mathbb{C}$ praktischerweise zwischen $-\pi$ und π definiert, da $\arccos$ Werte zwischen $-\pi$ und π liefert. Hätte man sein z zwischen 0 und 2π definiert, so müsste man an stelle von $\pm$ ggf. π addieren.

So erhählt man z.B. $z = 6 \cdot \cos(\phi) + 6 \cdot i \cdot \sin(\phi)$
Man kann nun schreiben anstelle von $\cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi)$ schreiben:

$$exp(i \cdot \phi)$$

da diese Werte aber auf dem Einheitskreis liegen (und daher immer 1 lang sind) müssen sie mit der Länge von z multipliziert werden, es folgt also:

$$z = |z| \cdot exp(i \cdot \phi)$$

Man nennt dies Polardarstellung

Polardarstellung Rechenregeln

$(exp(z))^n = exp(z \cdot n)$

Gut zu wissen:

Ist eine Zahl z.B. zwischen $-\pi$ und π definiert, und man erhält als Lösung beispielsweise $\frac{-57 \cdot \pi}{4}$ so kann man dies aufteilen und solange 2π abziehen, bis man eine Zahl erhält, die im Definitionsbereich liegt:
$\frac{-57 \cdot \pi}{4} => -\frac{pi}{4}$

Harmonische Schwingungen

Harmonische Schwingungen werden angegeben mit
$Amplitude \cdot \cos{(Frequenz \cdot Zeit + Verschiebung)}$
bzw.
$A \cdot \cos{(\omega t + \phi)}$
Wobei:
$Frequenz = \frac{\omega}{2\pi}$
Wenn ω groß ==> Viele Schwingungen