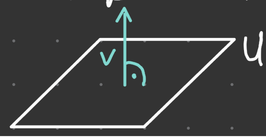
Vektor orth. zu Unterraum

$v \perp U$ if $v \perp u \;\forall u \in U$



11.18

$U \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ (Bew. S. 340)

- $U^\perp$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$
- $U \cap U^\perp = \{0_n\}$
- $U = lin\{v_1, \dots, v_k\}$

$v \in U^\perp \Leftrightarrow \langle v, v_1\rangle = \dots = \langle v, v_k\rangle = 0$
(v orth. zu allen Vektoren in U)

Orth. Komplement ($U^\perp$)

Menge aller Vektoren die $\perp$ zu U

11.20

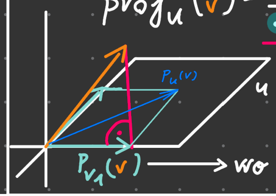
$v - pr_U(v) \in U^\perp$

Orth. Projektion

geht nur wenn U schon orth.

$U \to$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$
$\{v_1, \dots, v_k\} \to$ orth. Basis von U
$v \to$ irgendein Vektor $\mathbb{R}^n$

$$proj_U(v) = \frac{\langle v_1, v\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1 + \dots + \frac{\langle v_k, v\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle} \cdot v_k$$

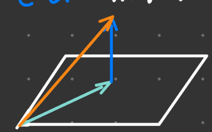


$P_{v_1}(v) \longrightarrow$ wo v_1, sodass res. Vektor $\perp$ zu v

11.21 Orth. Zerlegung

$\left.\begin{array}{l} U \to \text{Unterraum} \\ v \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \exists$ eindeutige Vektoren $u \in U$ & $u' \in U^\perp$ mit $v = u + u'$

Bemerkung?



11.22

$(U^\perp)^\perp = U$

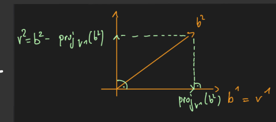
$\dim(U) + \dim(U^\perp) = n$

a.k.a. man kann so viele b wie U nicht hat

Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

$U \to$ Unterraum

$b_1, \dots, b_k \to$ beliebige Basis



$$\left.\begin{aligned} v_1 &= b_1 \\ v_2 &= b_2 - P_{v_1}(b_2) - P_{v_2}(b_2) \\ &\vdots \\ v_k &= b_k - P_{v_k}(b_k) - \dots - P_{v_1}(b_k) \end{aligned}\right\}$$

bildet orth. Basis von U

ggf. anschl. norm.

geom. VFH wie viele versch. EW es gibt?

Orthogonal diagonalisierbar

ist eine Matrix A if $\exists$ eine Matrix Q sodass $Q^T \cdot A \cdot Q$ eine Diag.-Matrix ist (wenn A mit orth. Matrix diag.-bar)

A symm. $\Leftrightarrow$ A orth. diag.-bar

A symm $\Rightarrow \chi_A$ zerf. über $\mathbb{R}$

EV zu versch. EW sind lin. un.

EV zu versch. EW einer symm. Matrix $\Rightarrow \perp$

ONB aus EV

I Basen $\forall$ ER finden

II Jede für sich mit Gram Schmidt orthoNORMalisieren (versch. EW haben orth. EV)

III Alle Basen zu ONB zusammen nehmen