# 算法与数据结构体系课程

liuyubobobo

# 堆和优先队列

# 优先队列基础

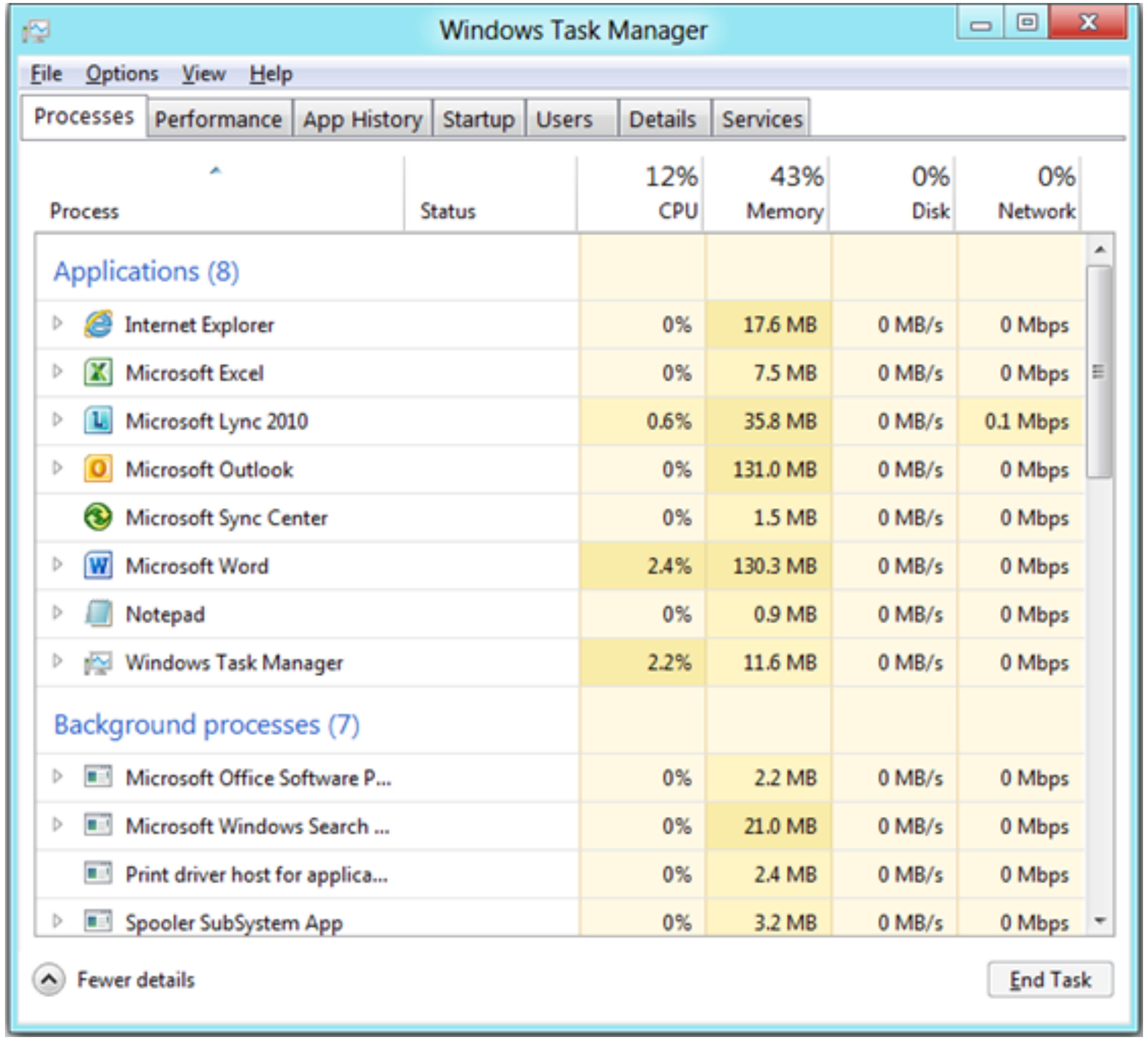
# 什么是优先队列?

普通队列：先进先出；后进后出

优先队列：出队顺序和入队顺序无关；和优先级相关

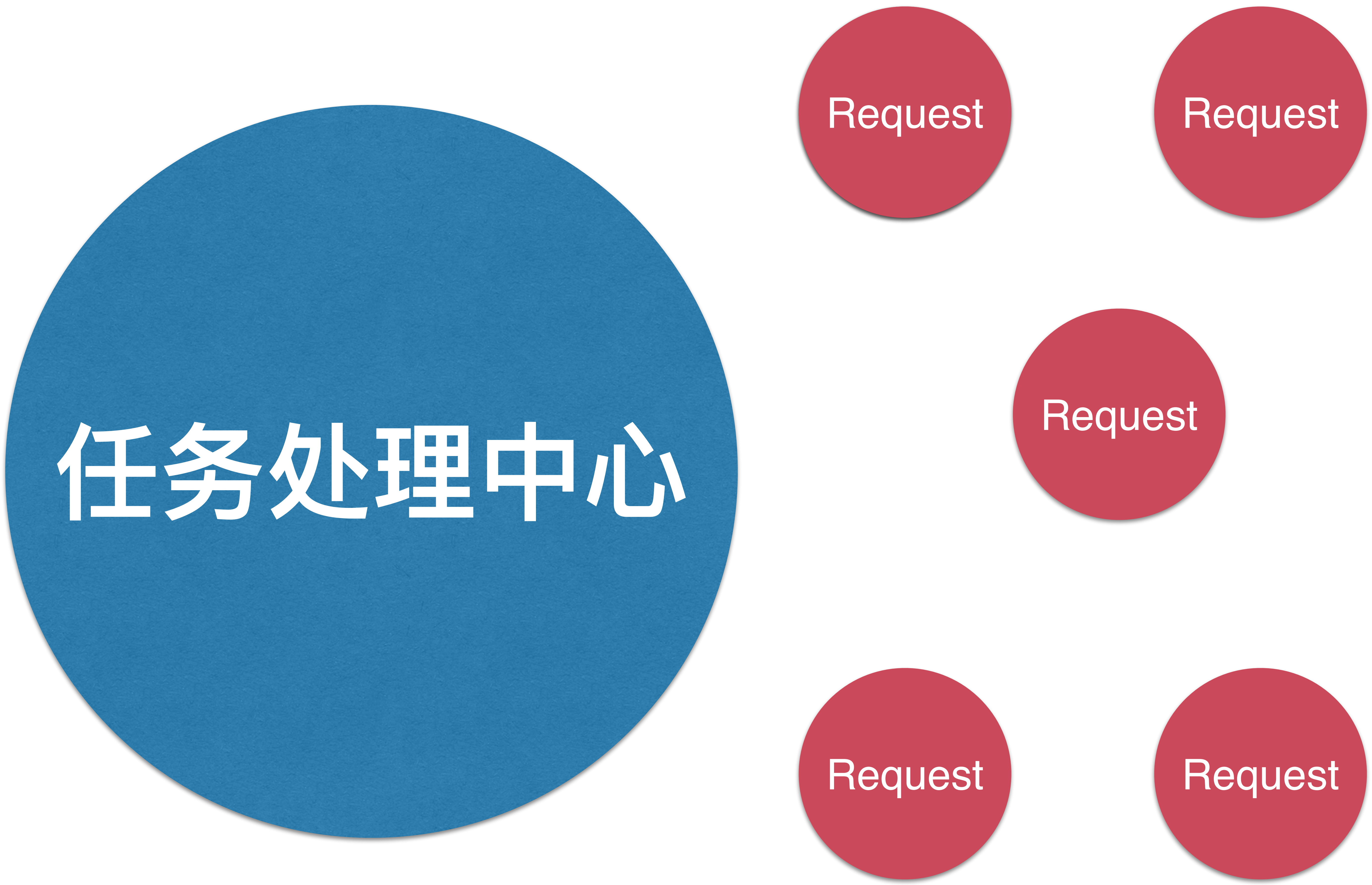
# 为什么使用优先队列?

动态选择优先级最高的任务执行

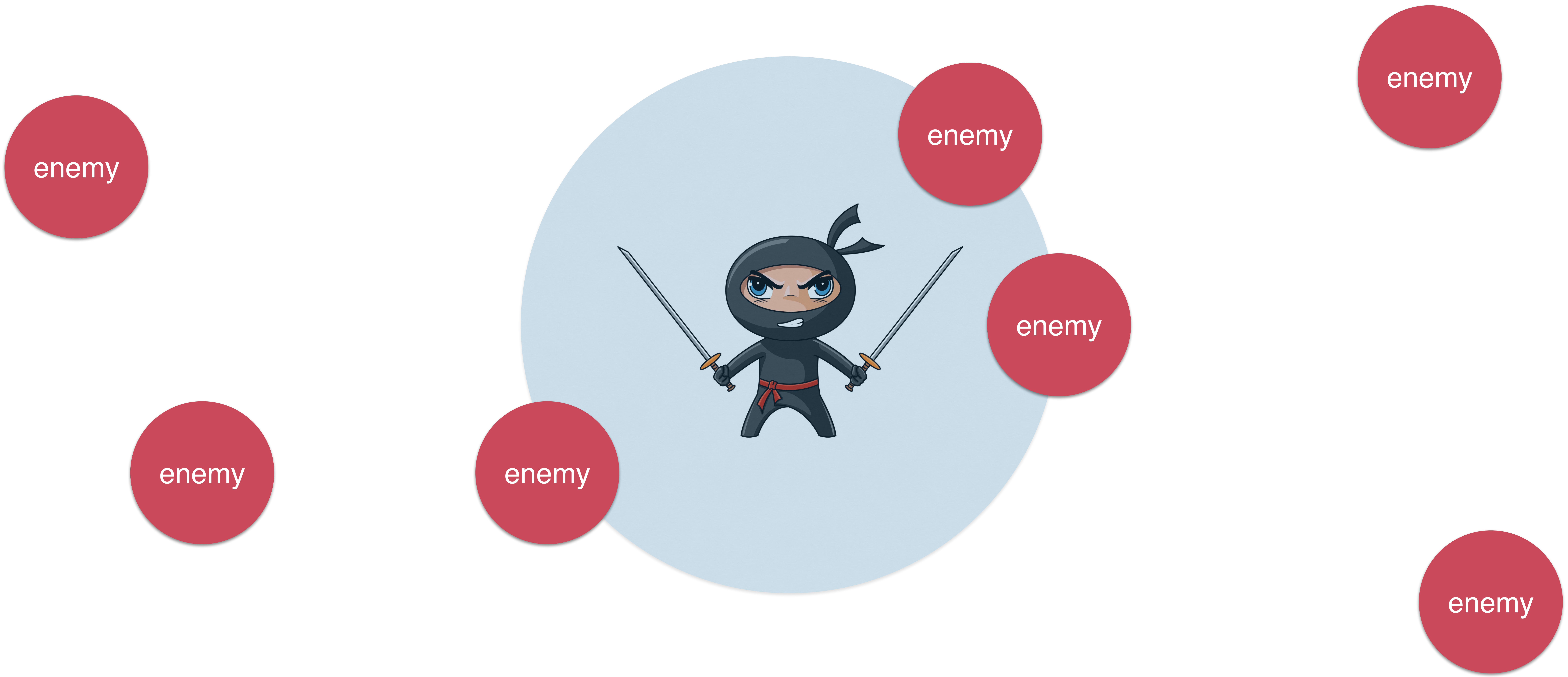


# 为什么使用优先队列?

关键词：动态



# 为什么使用优先队列?



# 优先队列

Interface Queue<E> ← - - - - - - PriorityQueue<E>

implement

- void enqueue(E)
- E dequeue()
- E getFront()
- int getSize()
- boolean isEmpty()

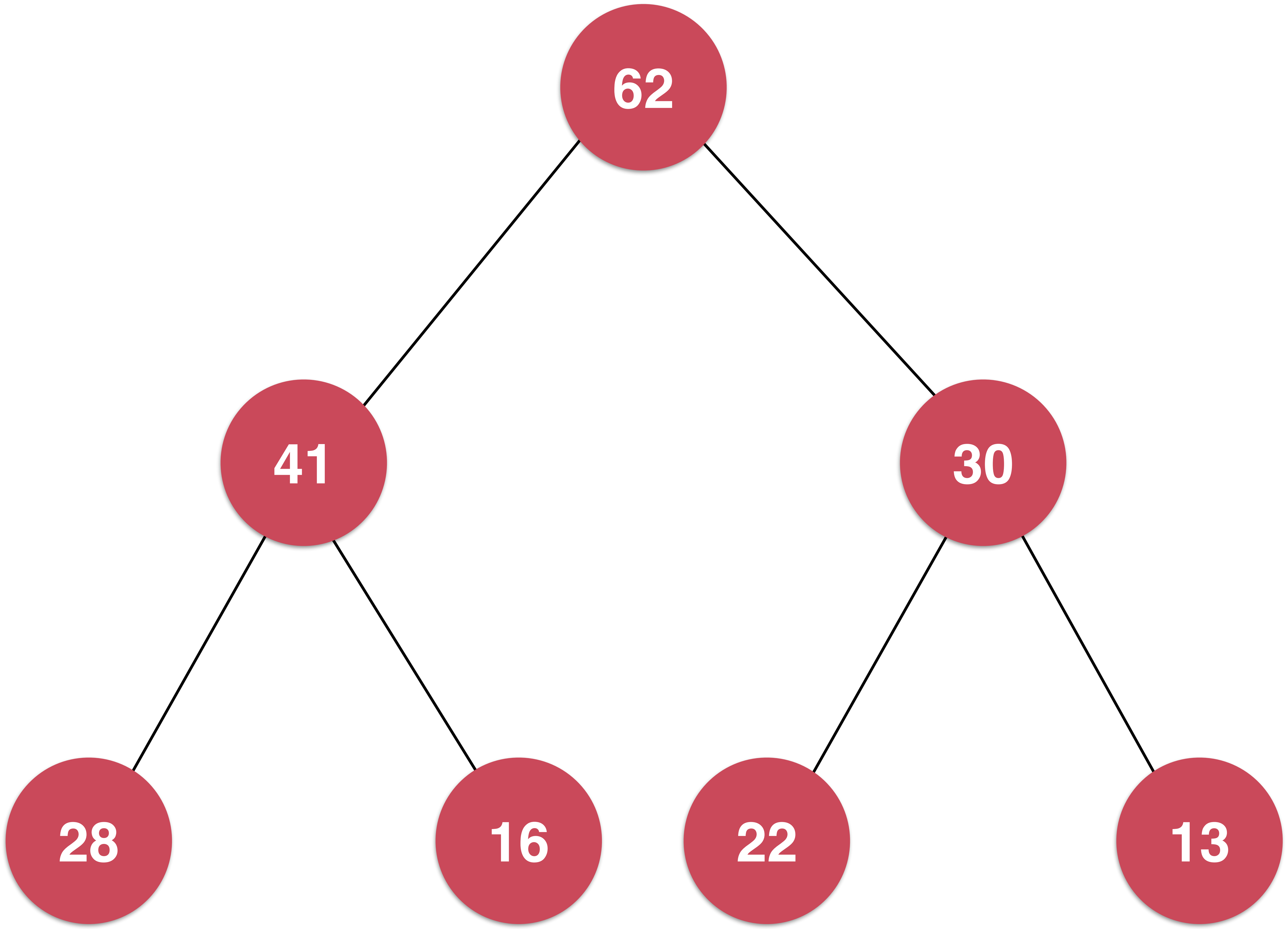
可以使用不同的底层实现

# 优先队列

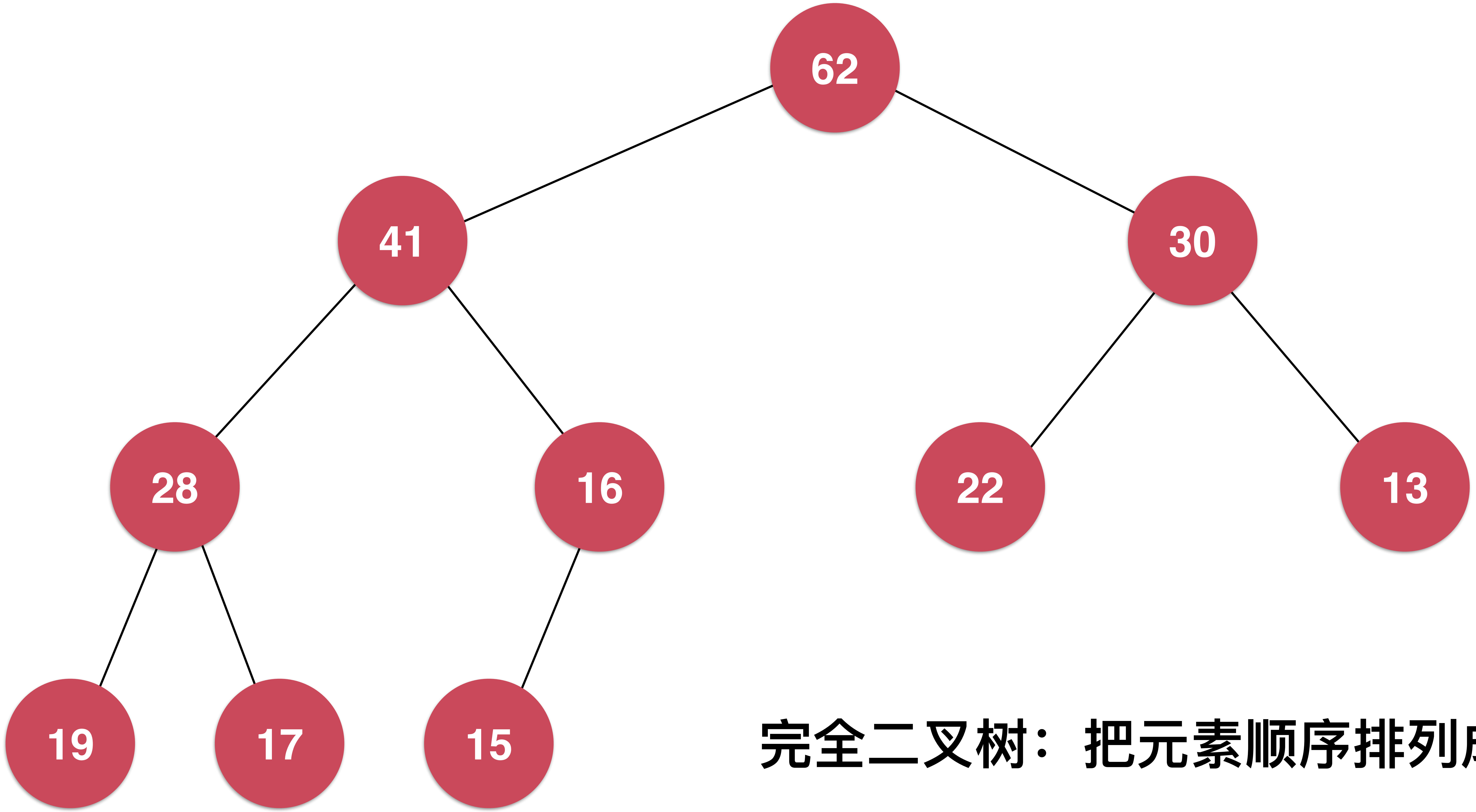
| | 入队 | 出队（拿出最大元素） |
|---|---|---|
| 普通线性结构 | O(1) | O(n) |
| 顺序线性结构 | O(n) | O(1) |
| 堆 | O(logn) | O(logn) |

# 堆的基本结构

# 二叉堆 Binary Heap

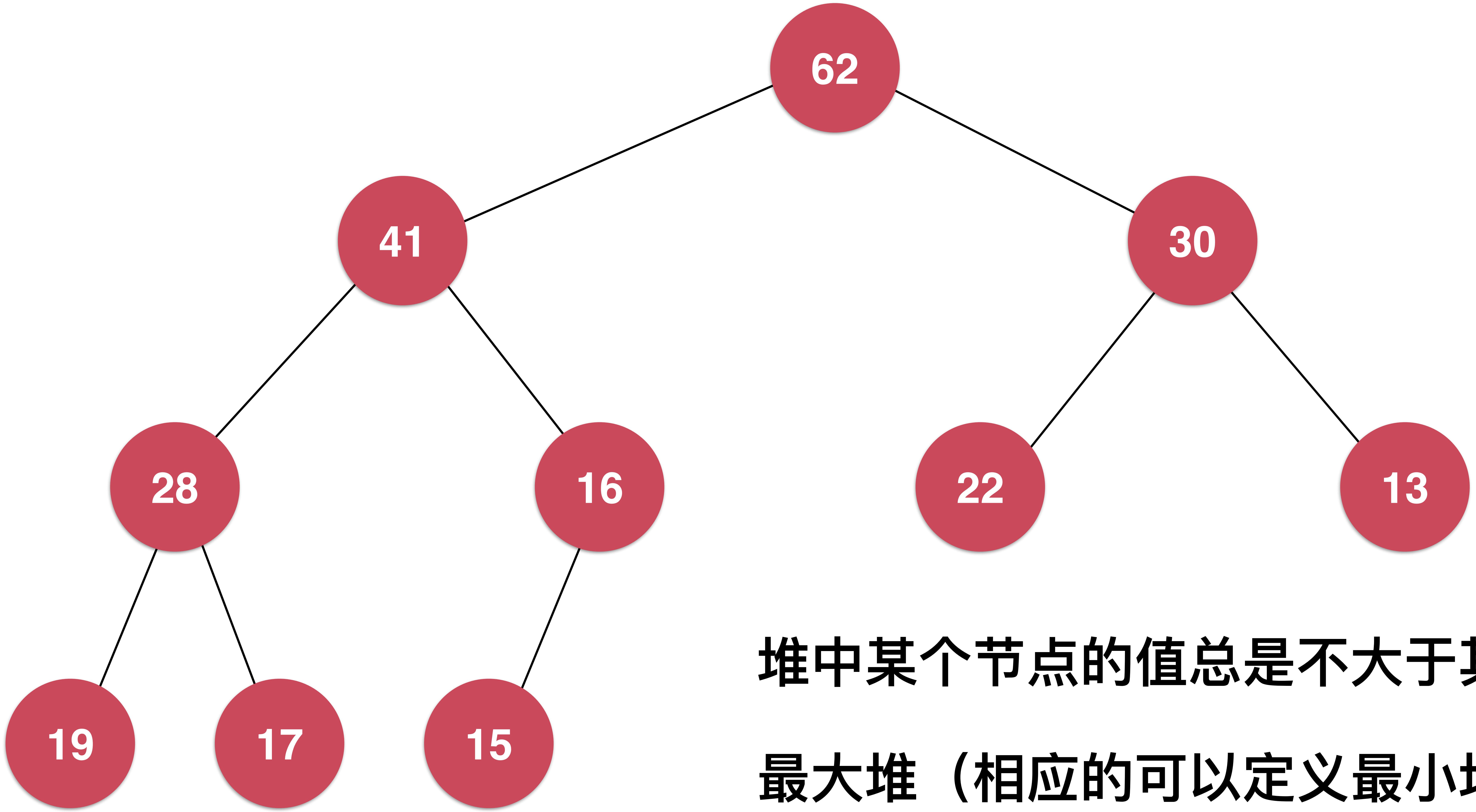


# 二叉堆是一棵完全二叉树




完全二叉树：把元素顺序排列成树的形状

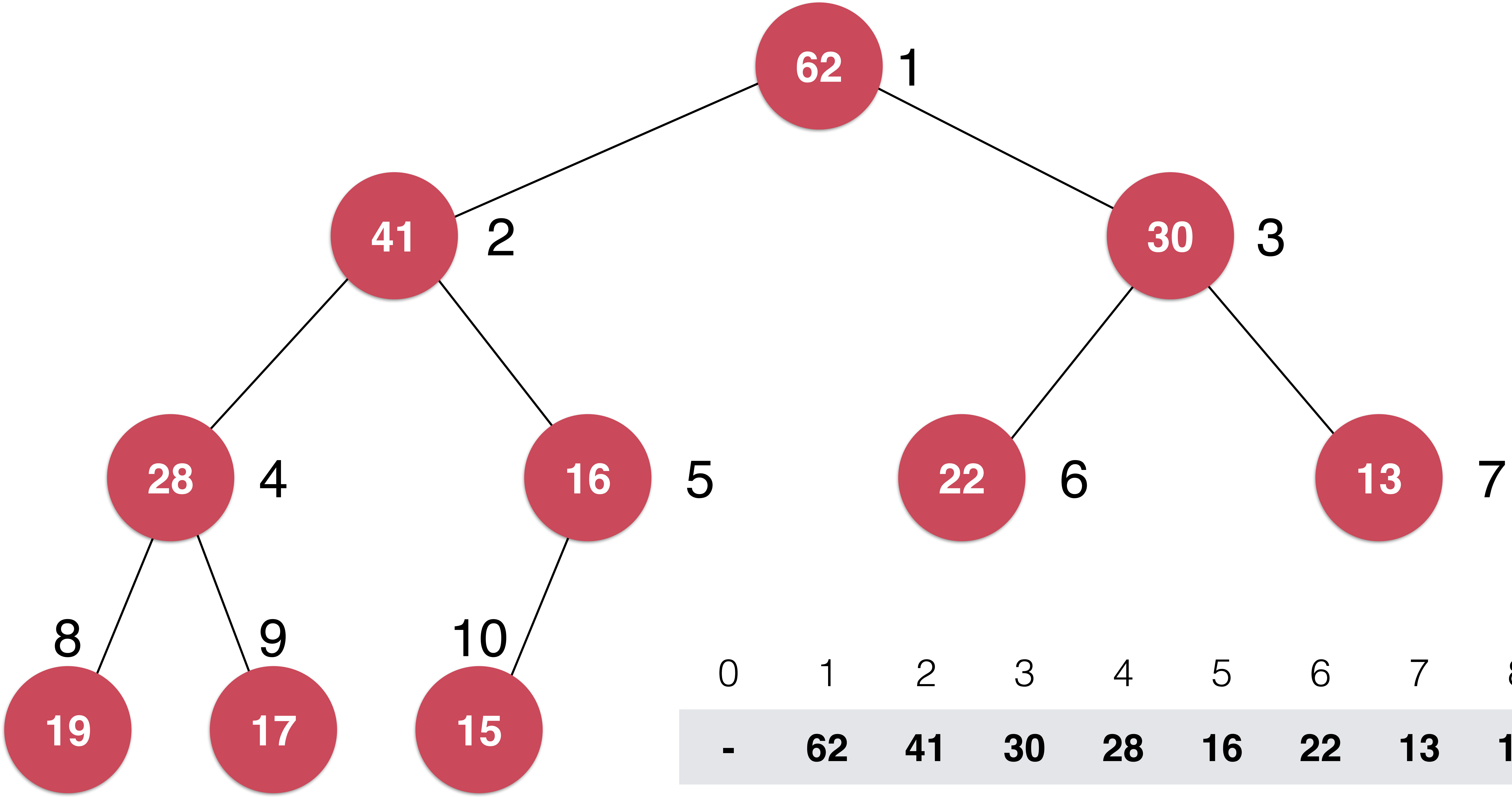
# 二叉堆的性质




堆中某个节点的值总是不大于其父节点的值

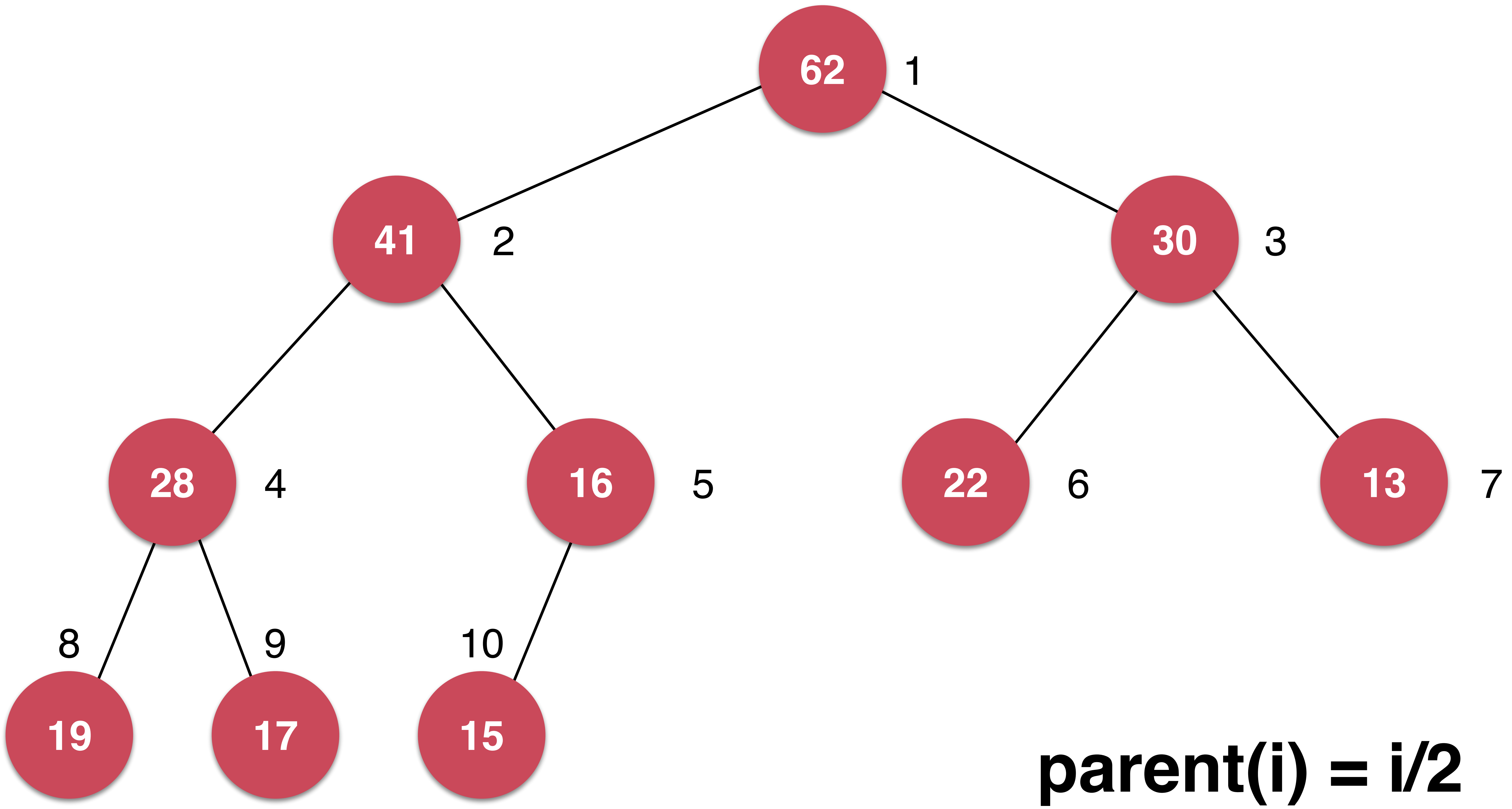
最大堆（相应的可以定义最小堆）

# 最大堆




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **-** | **62** | **41** | **30** | **28** | **16** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** |

# 用数组存储二叉堆

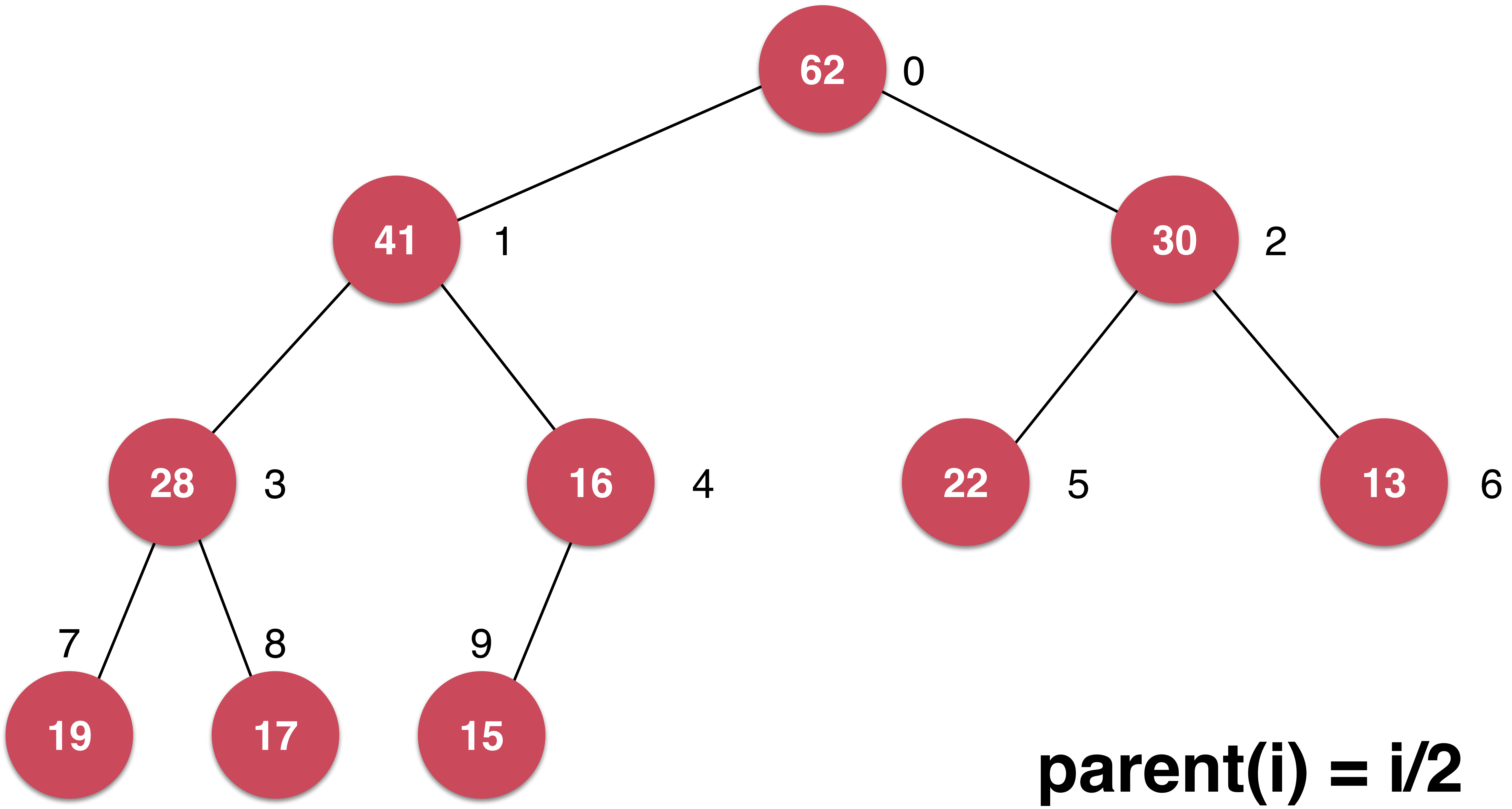



| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **-** | **62** | **41** | **30** | **28** | **16** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** |

**parent(i) = i/2**

**left child (i) = 2*i**
**right child (i) = 2*i + 1**

# 用数组存储二叉堆

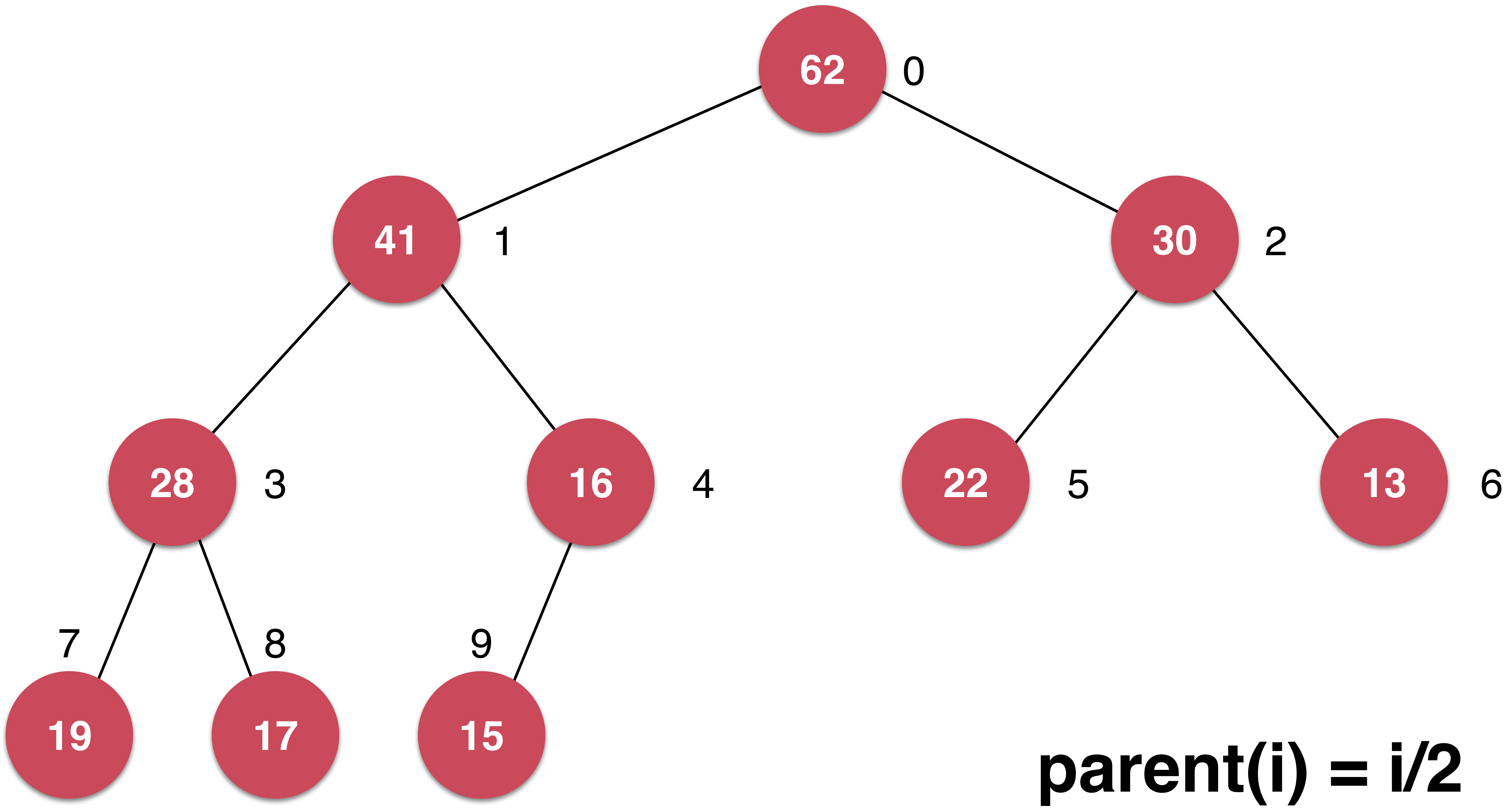



| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **41** | **30** | **28** | **16** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** |

**parent(i) = i/2**

**left child (i) = 2*i**
**right child (i) = 2*i + 1**

# 用数组存储二叉堆

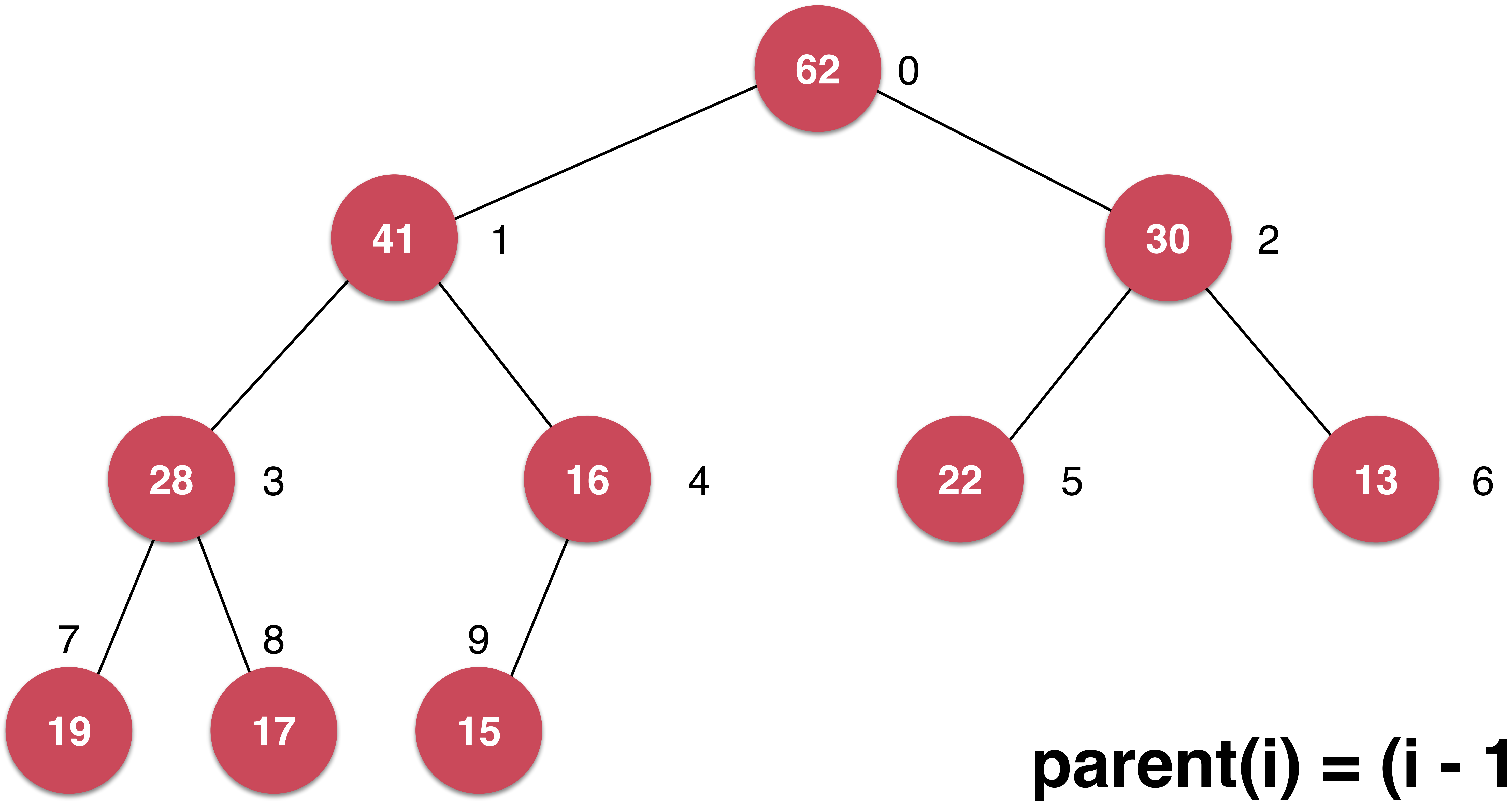



| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **41** | **30** | **28** | **16** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** |

**parent(i) = i/2**

**left child (i) = 2*i**
**right child (i) = 2*i + 1**

# 用数组存储二叉堆




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **41** | **30** | **28** | **16** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** |

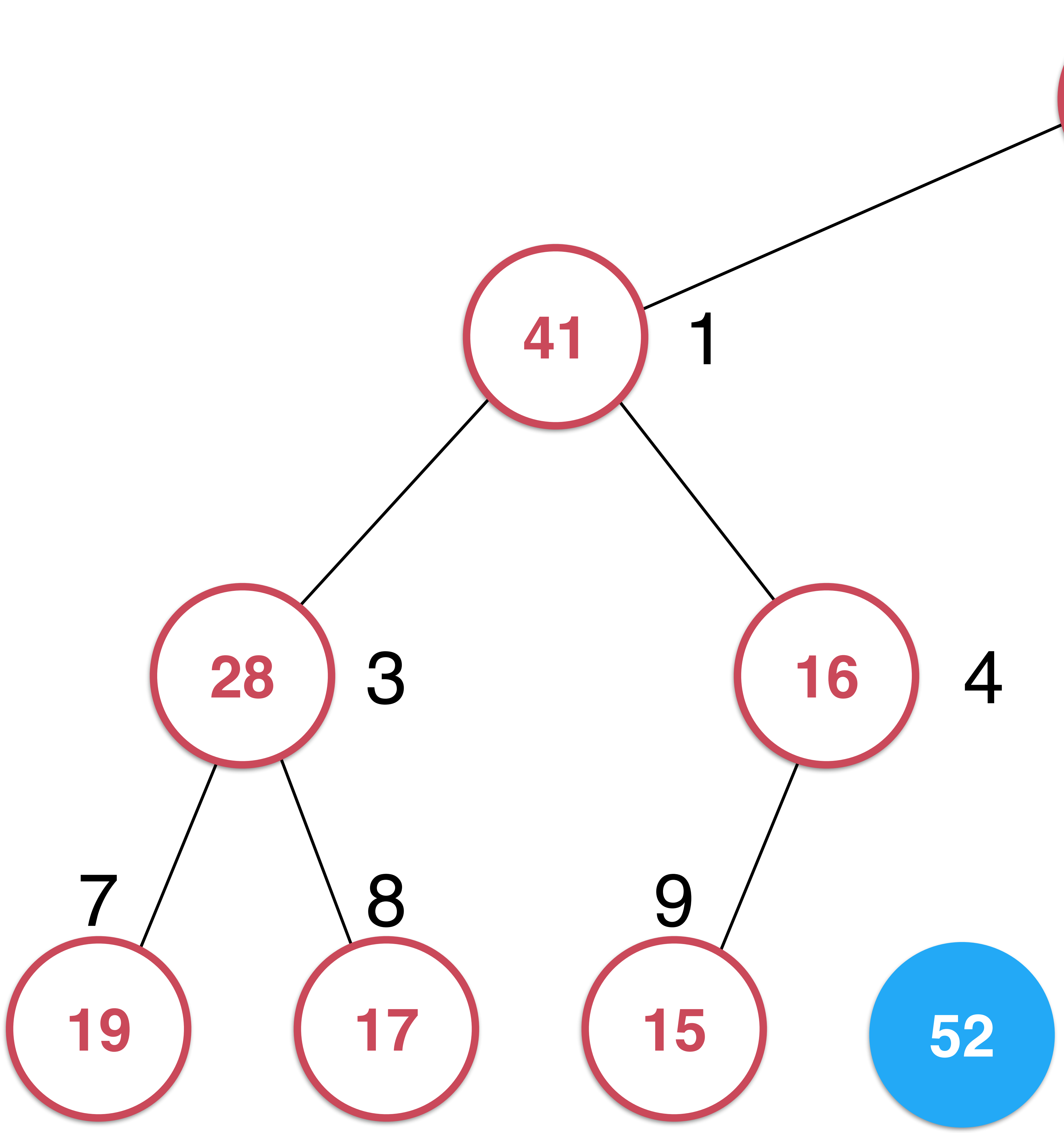
**parent(i) = (i - 1)/2**

**left child (i) = 2*i + 1**
**right child (i) = 2*i + 2**

# 实践： 堆的基本框架

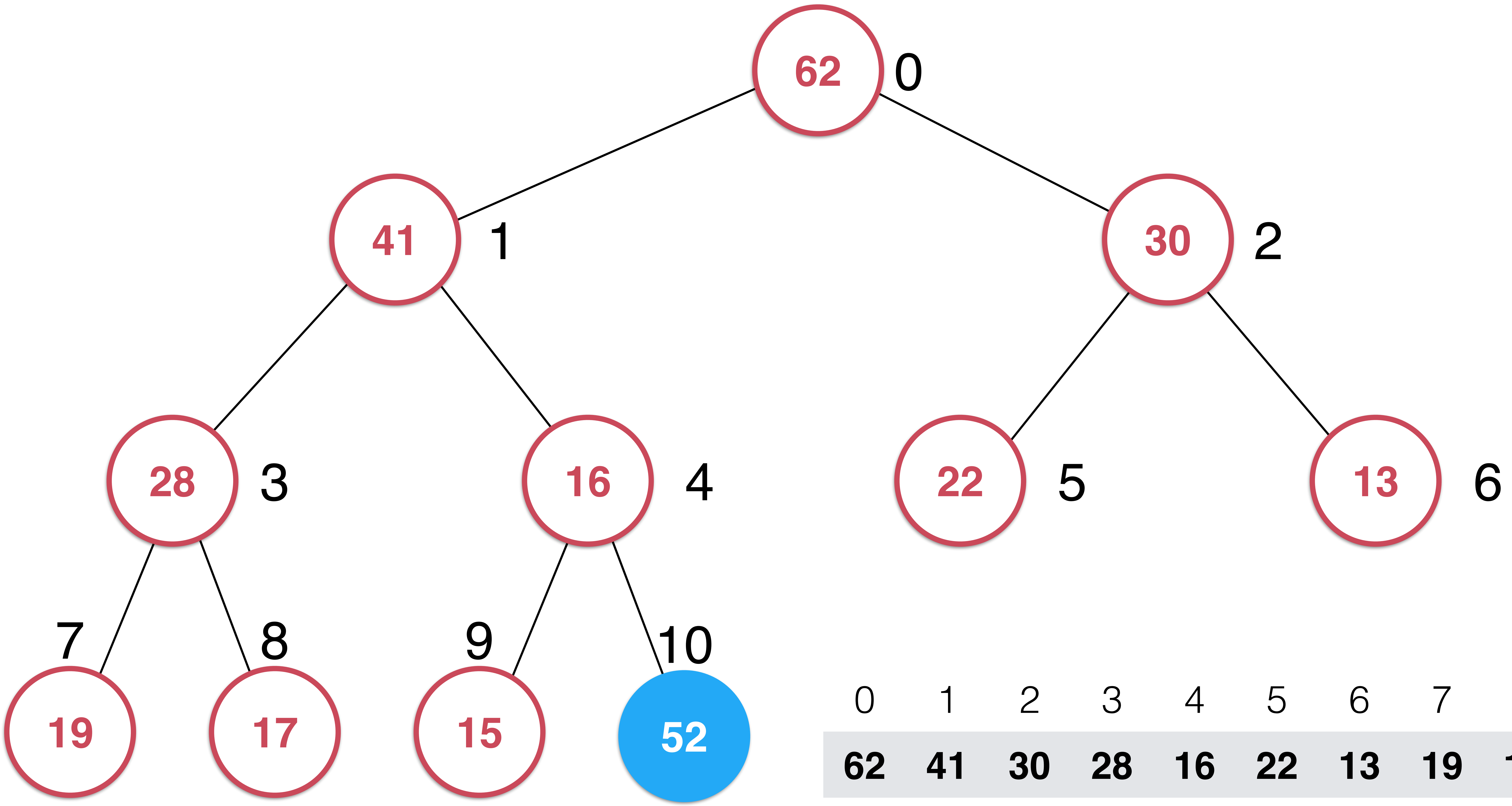
# 向堆中添加元素和Sift Up

# Sift Up



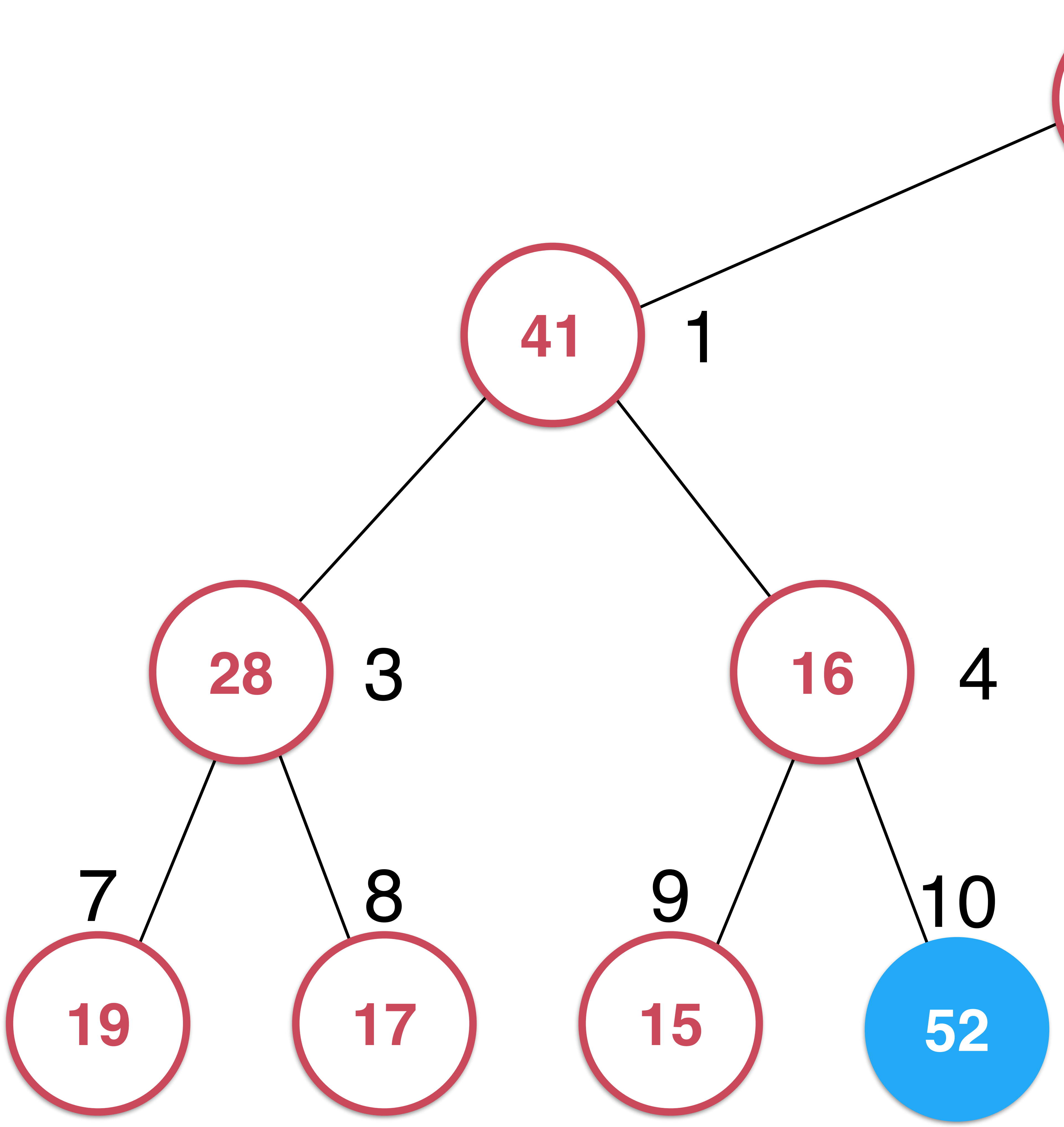

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **41** | **30** | **28** | **16** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** | **-** |

# Sift Up



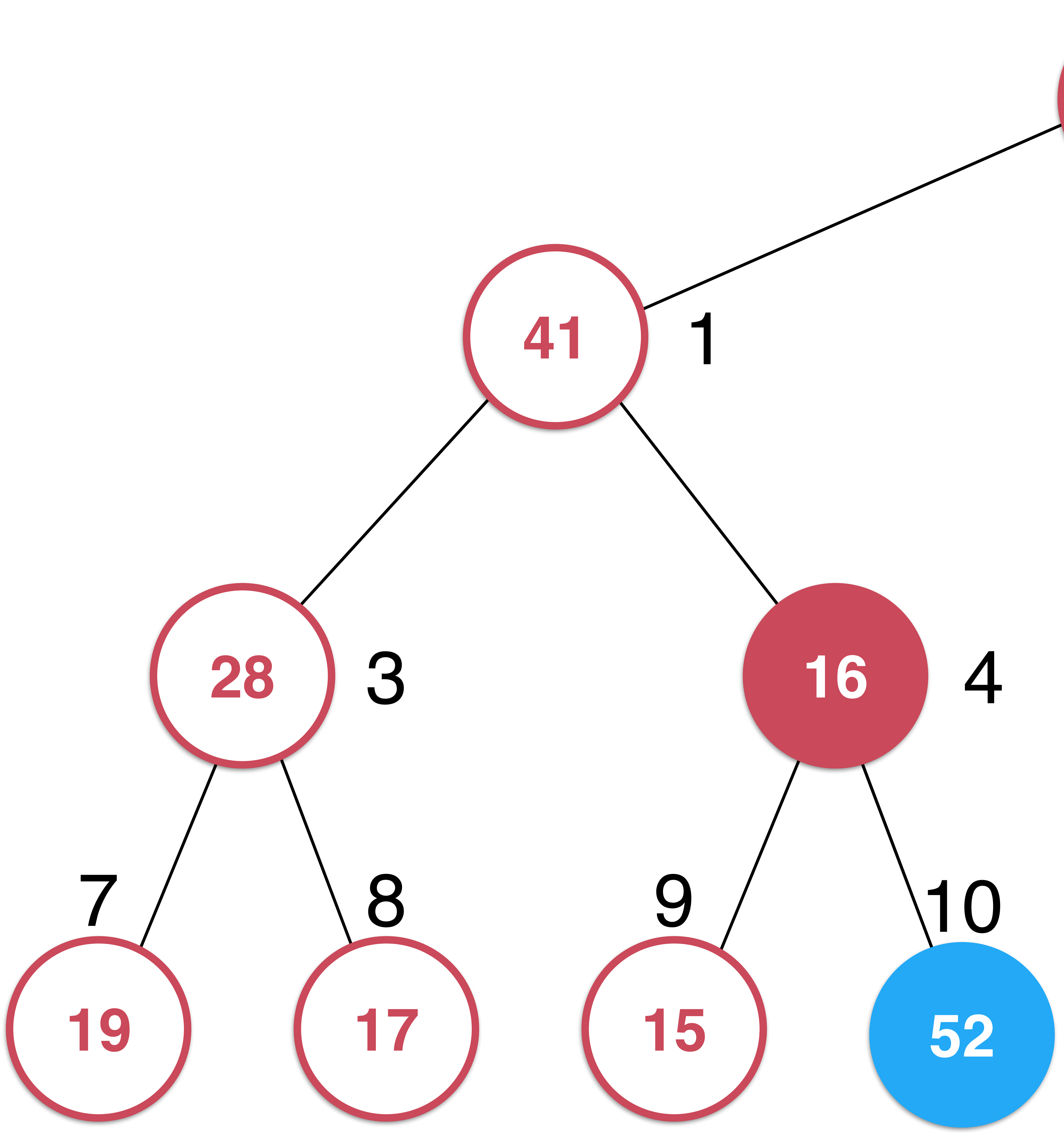

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **41** | **30** | **28** | **16** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** | **-** |

# Sift Up



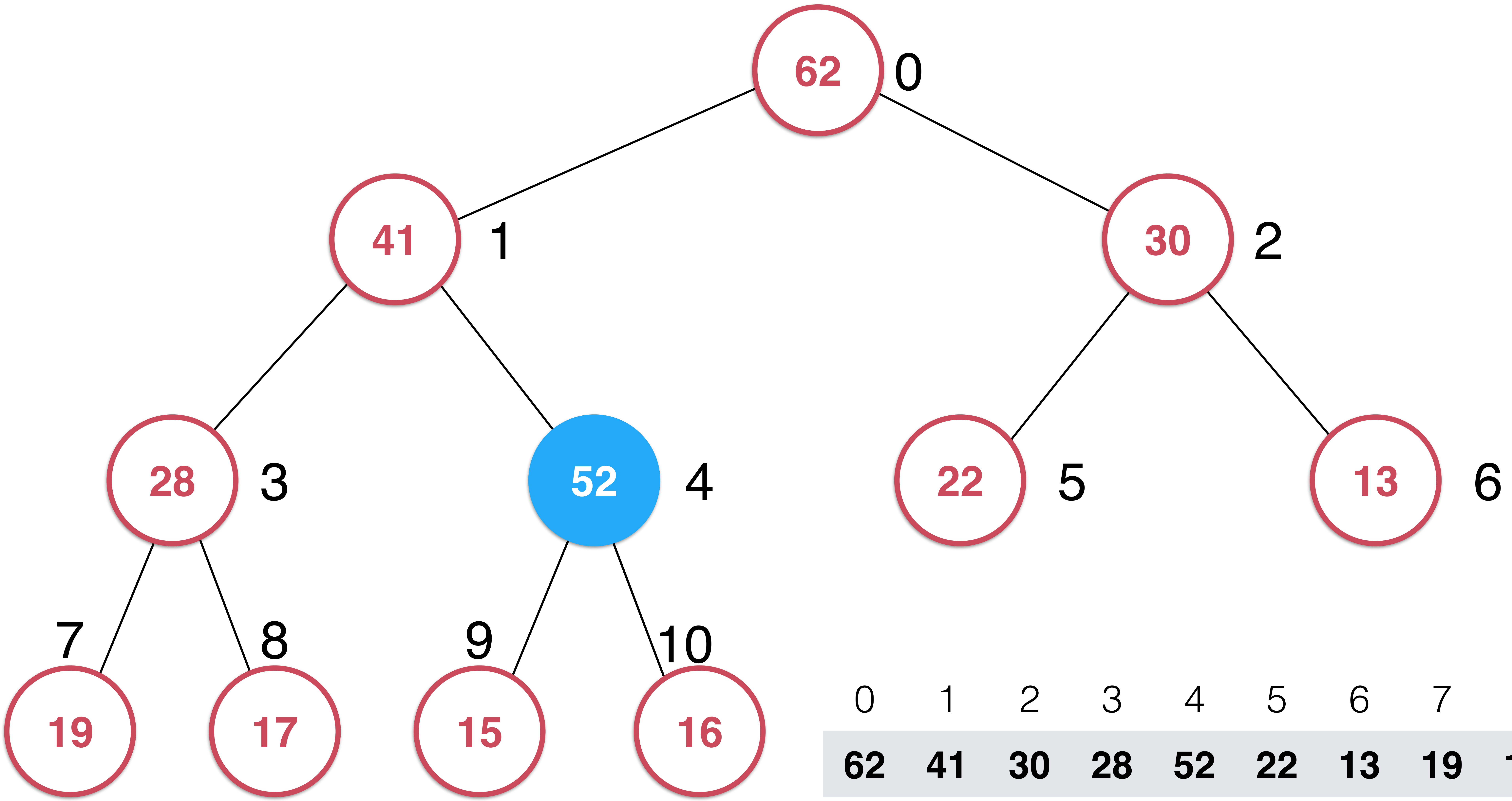

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **41** | **30** | **28** | **16** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** | **52** |

# Sift Up



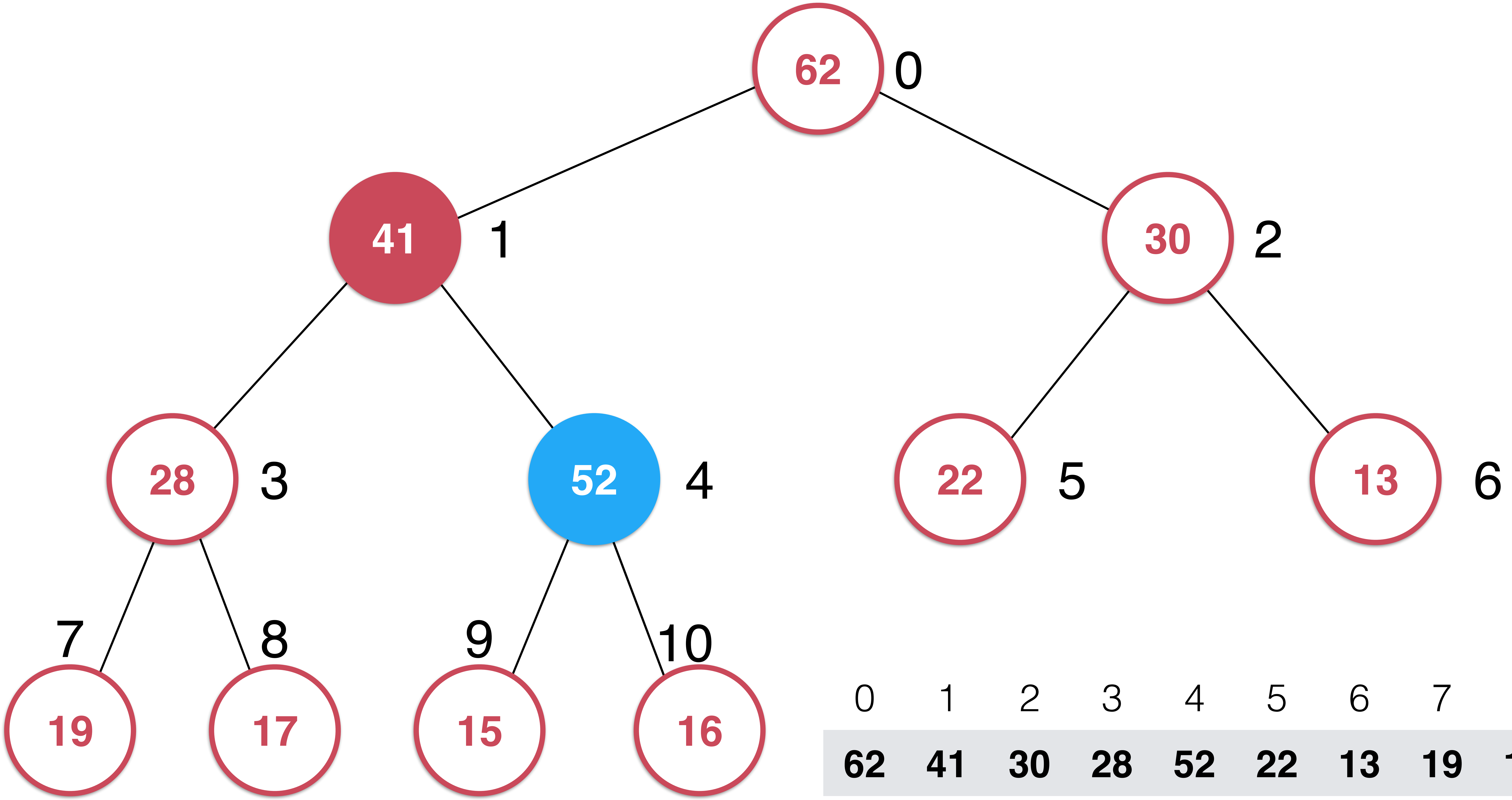

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **41** | **30** | **28** | **16** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** | **52** |

# Sift Up



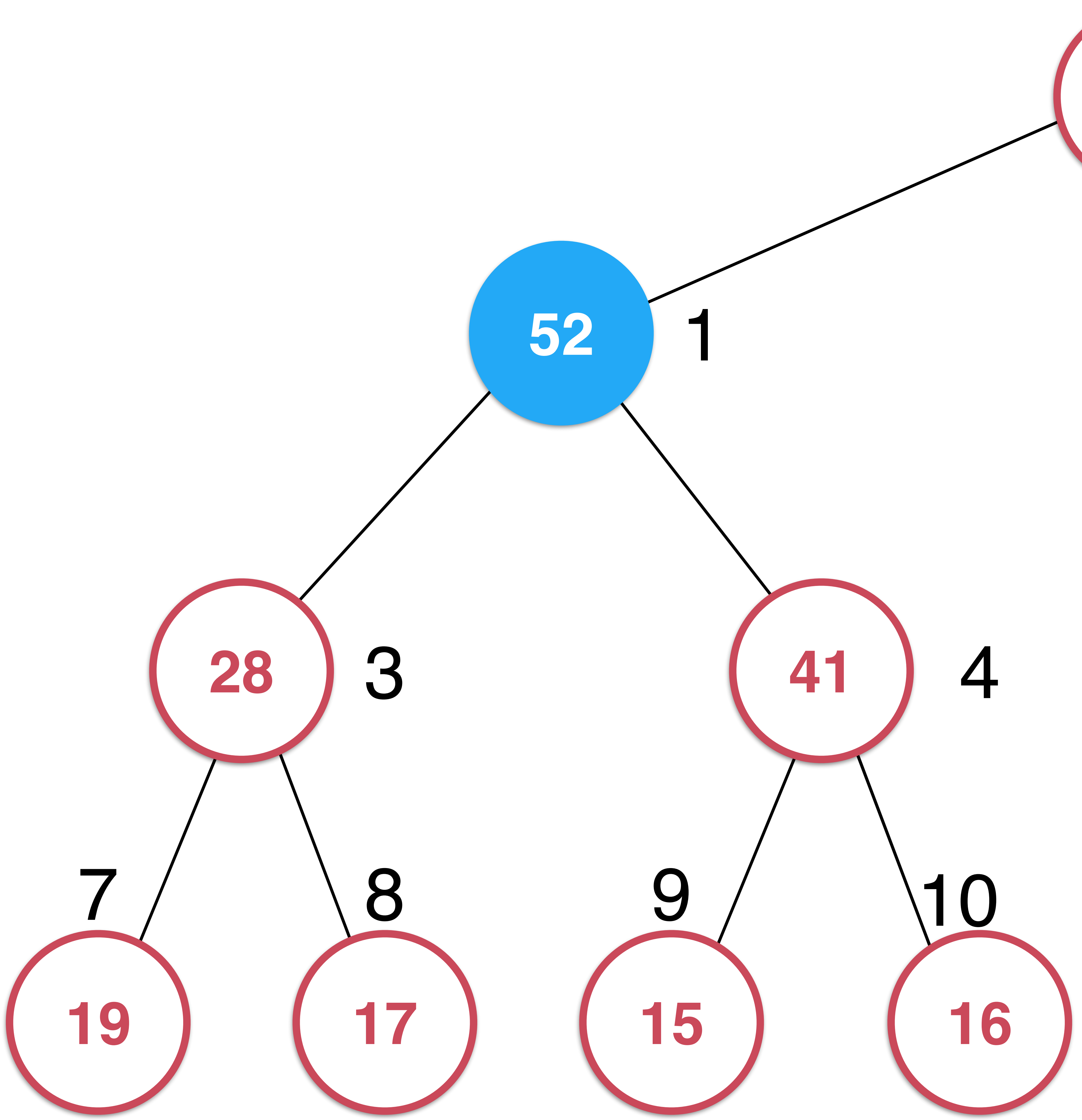

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **41** | **30** | **28** | **52** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** | **16** |

# Sift Up



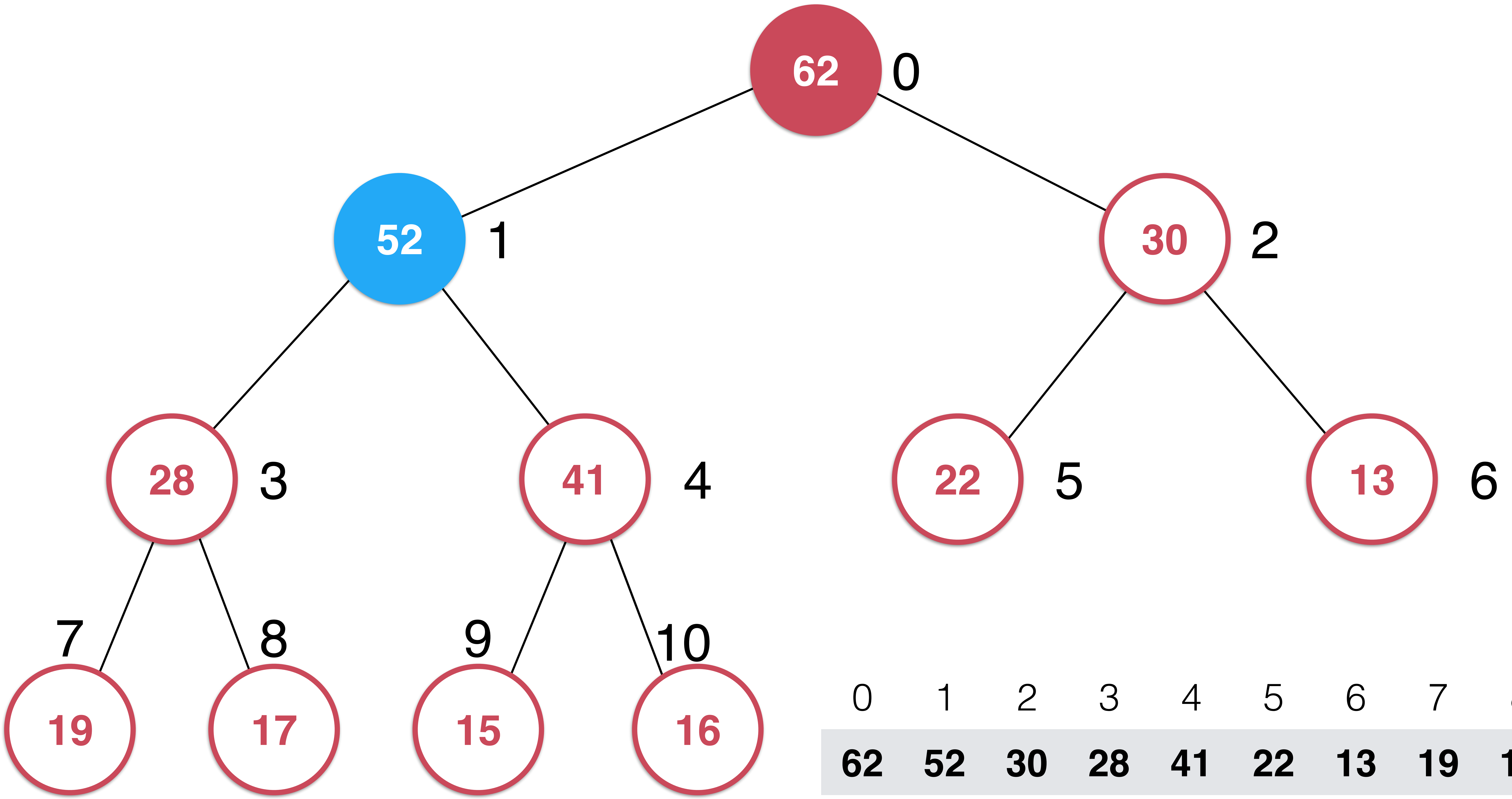

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **41** | **30** | **28** | **52** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** | **16** |

# Sift Up



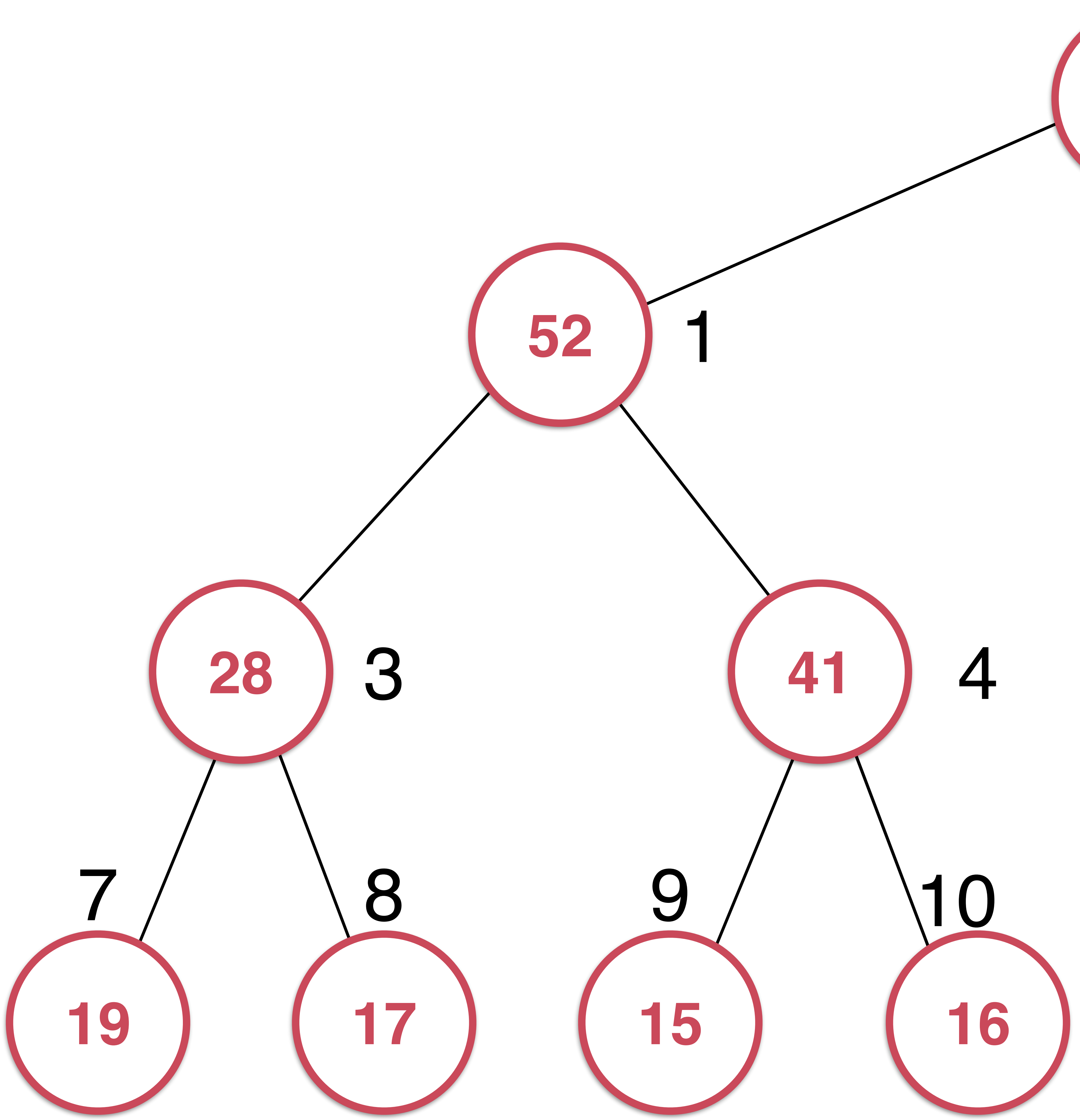

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **52** | **30** | **28** | **41** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** | **16** |

# Sift Up




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **52** | **30** | **28** | **41** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** | **16** |

# Sift Up

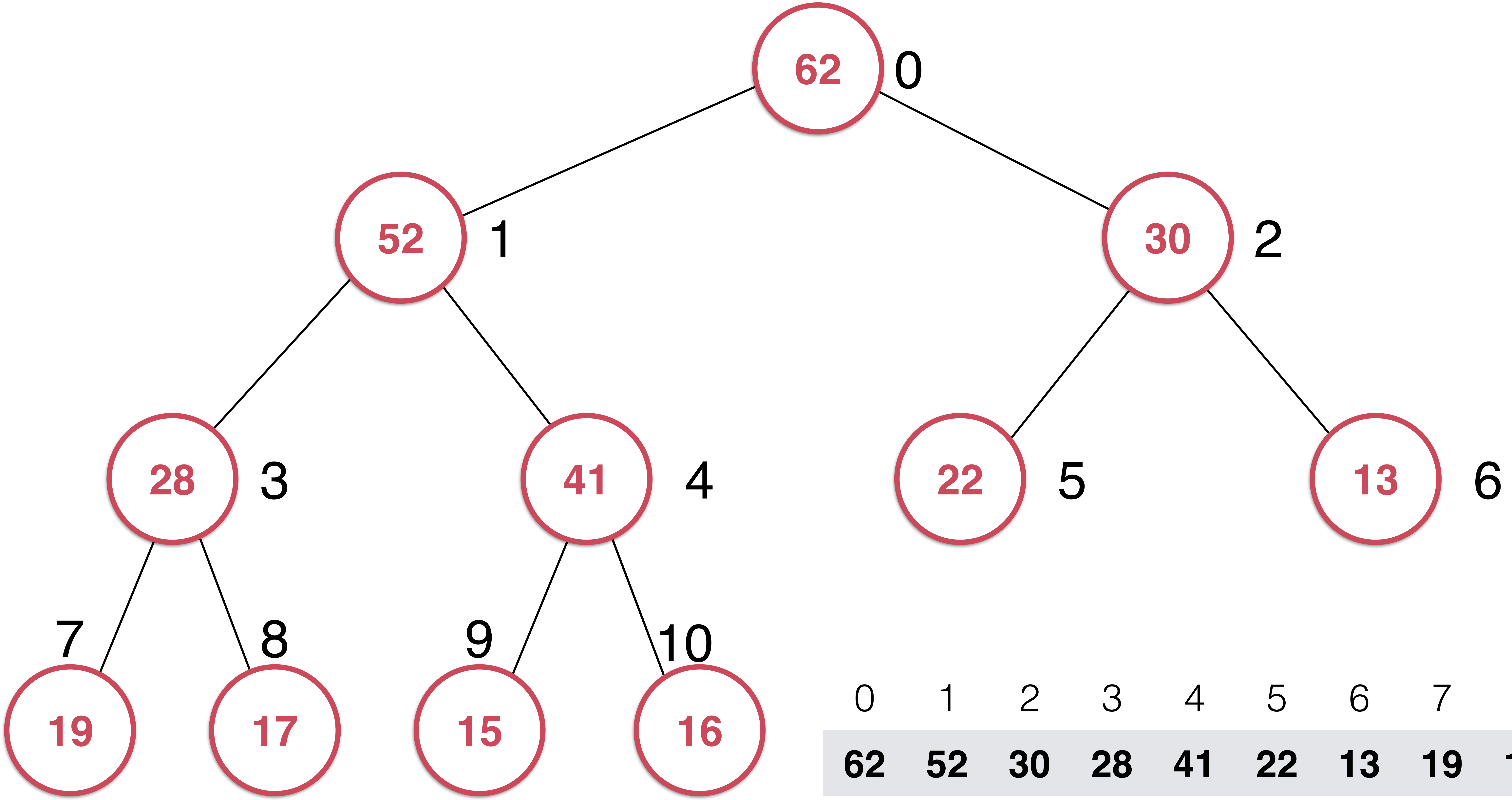



| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **52** | **30** | **28** | **41** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** | **16** |

# 实践： Sift Up 和 add

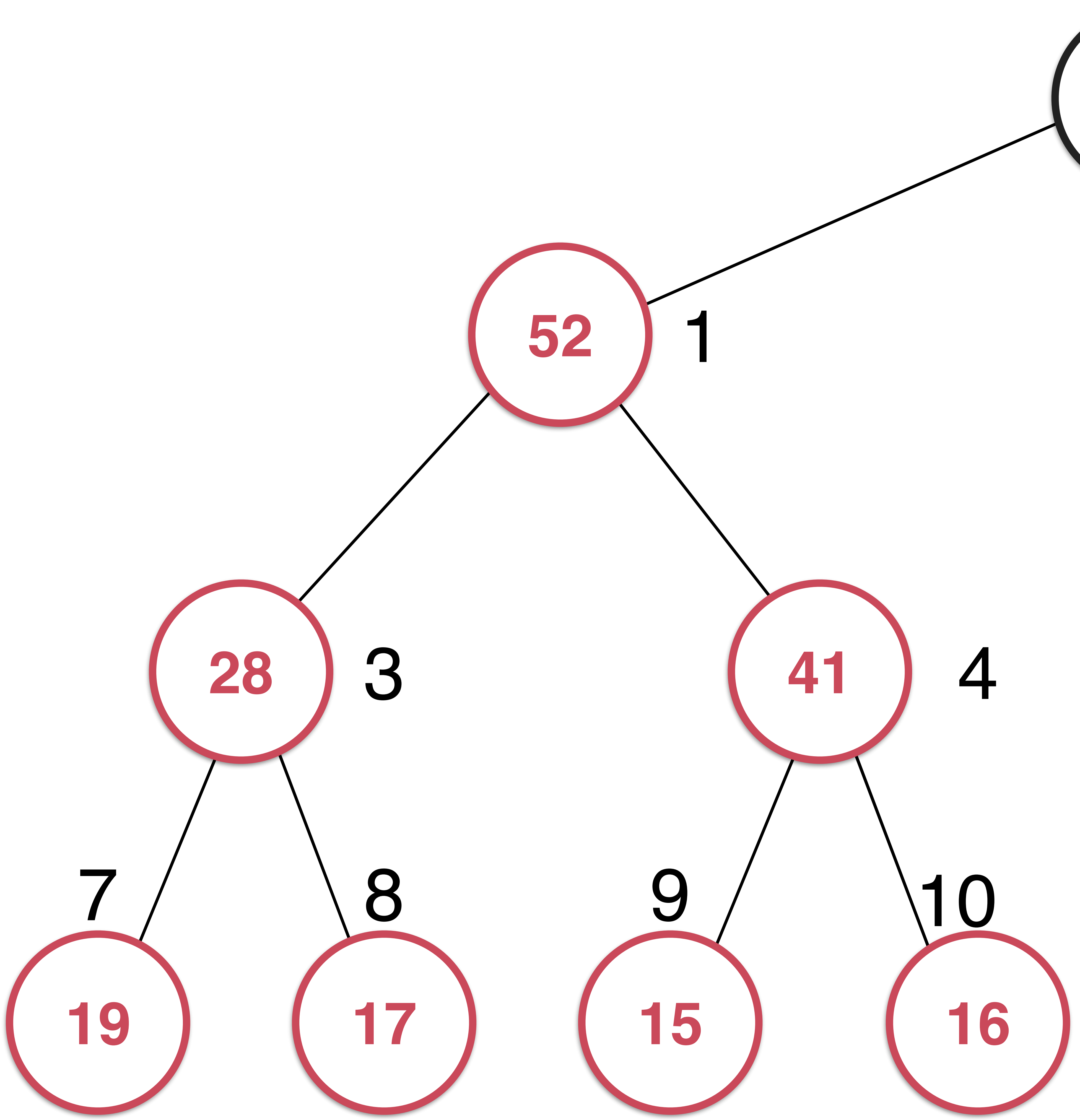
# 取出堆中的最大元素和Sift Down

# Sift Down



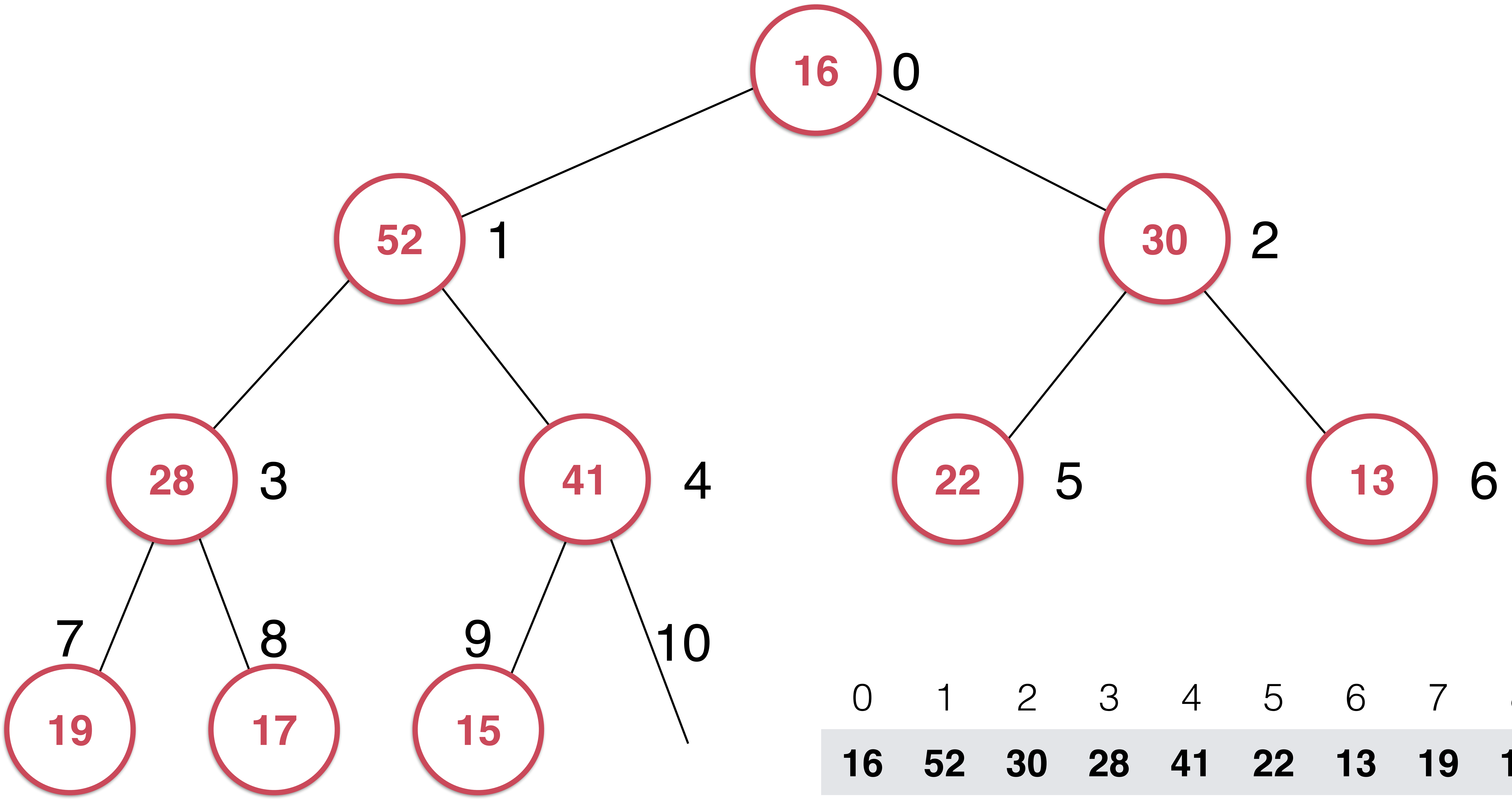

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **52** | **30** | **28** | **41** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** | **16** |

# Sift Down



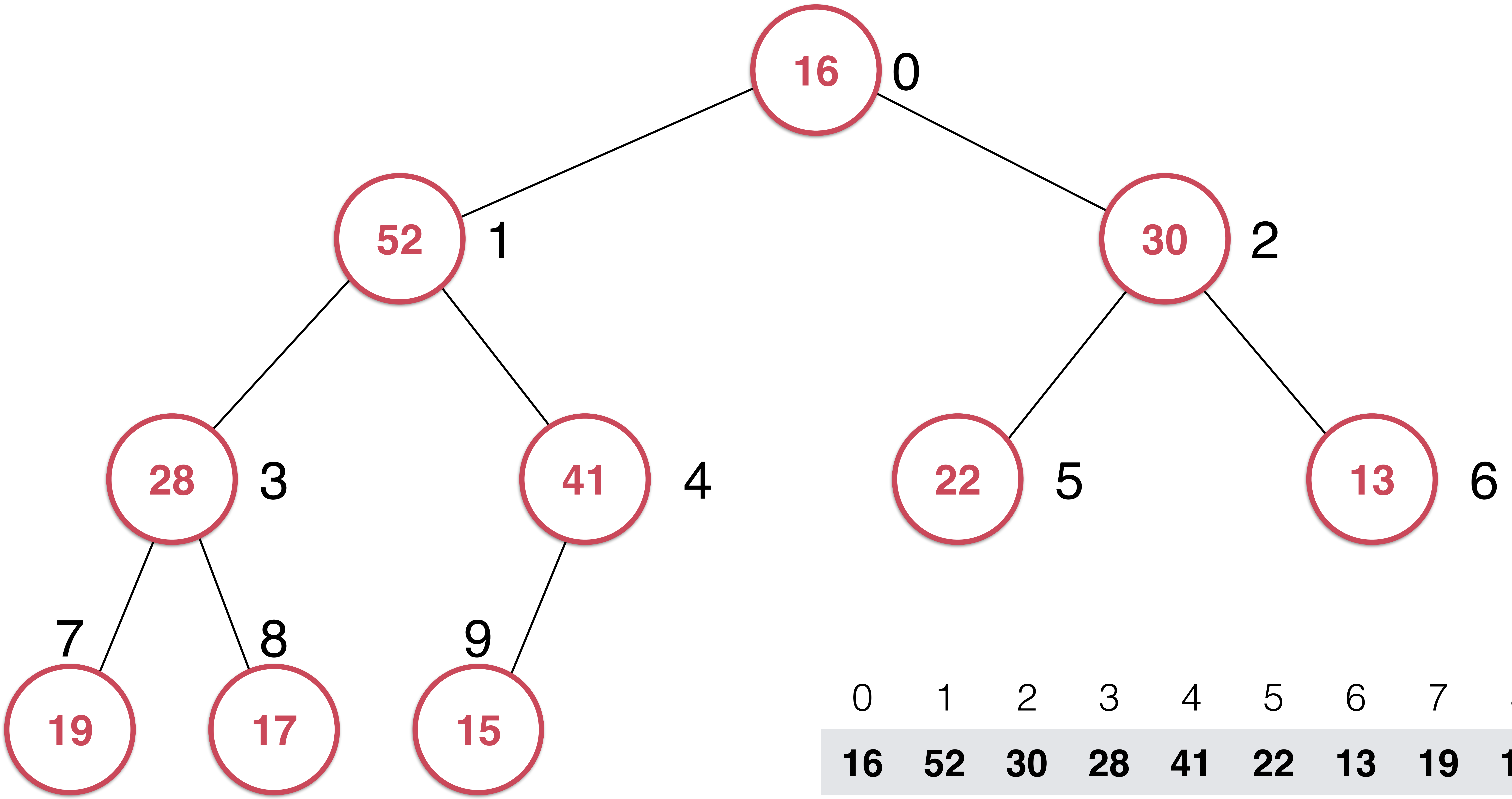

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **52** | **30** | **28** | **41** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** | **16** |

# Sift Down



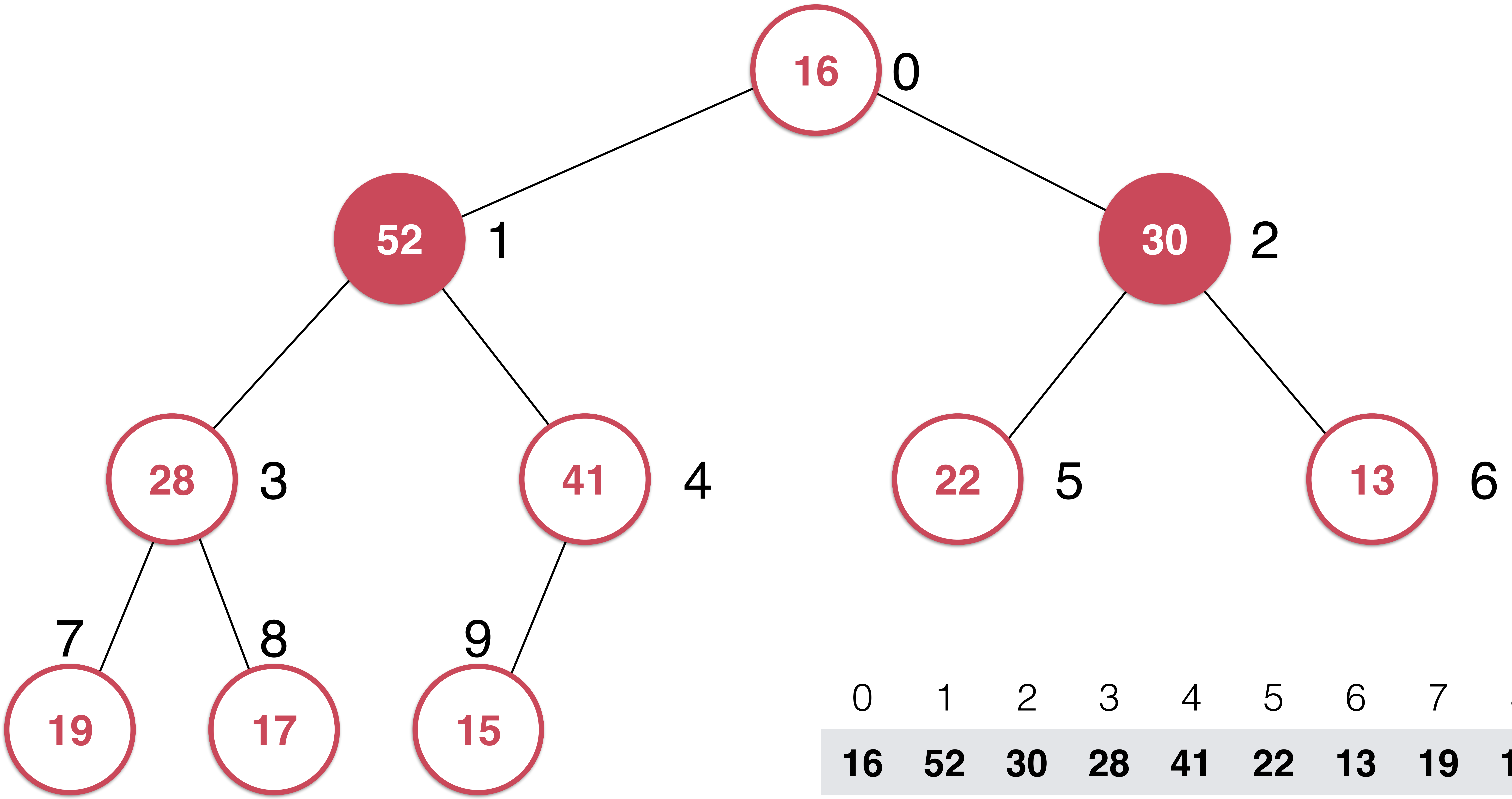

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **16** | **52** | **30** | **28** | **41** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** | **16** |

# Sift Down



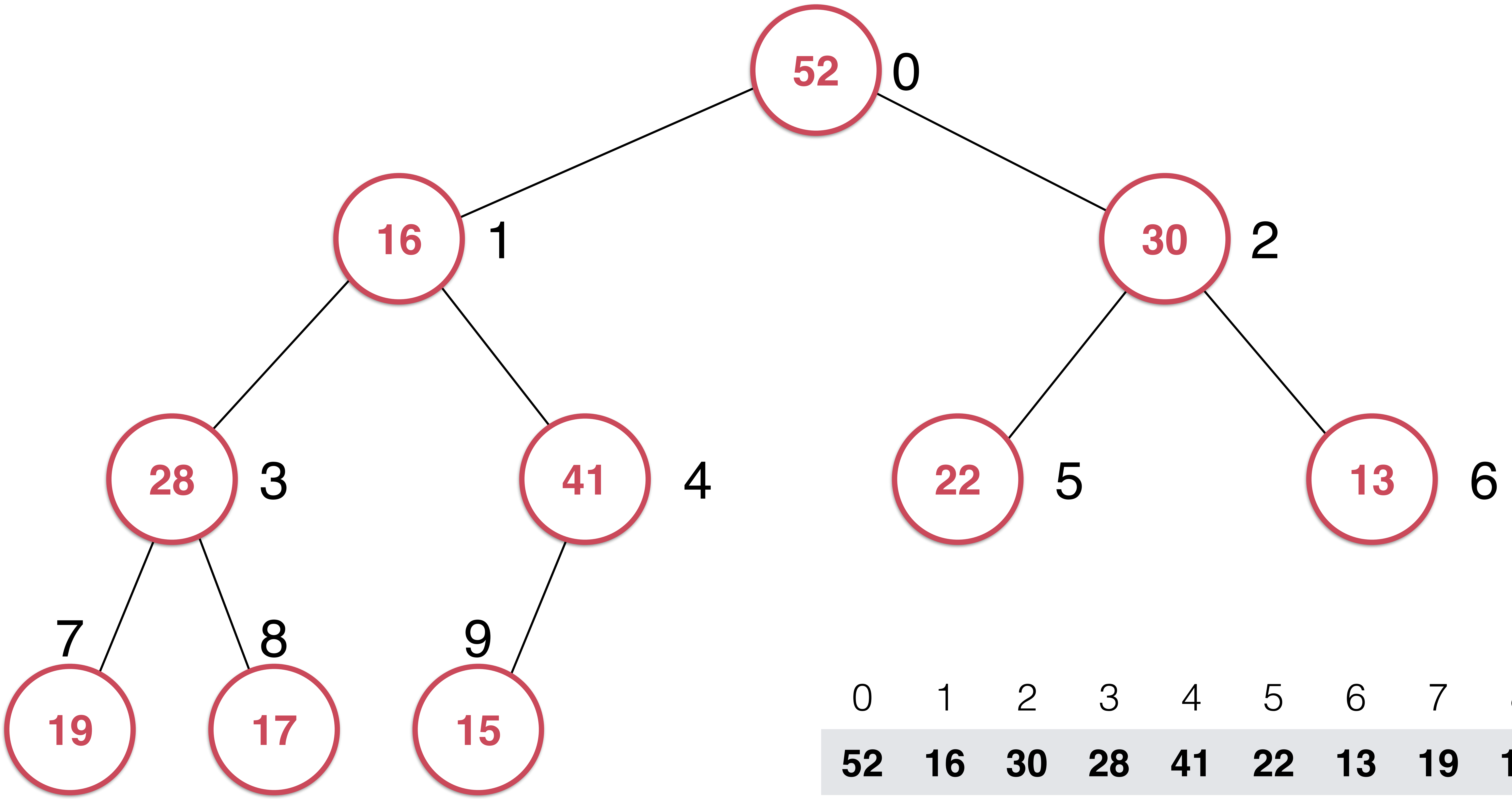

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **16** | **52** | **30** | **28** | **41** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** |

# Sift Down



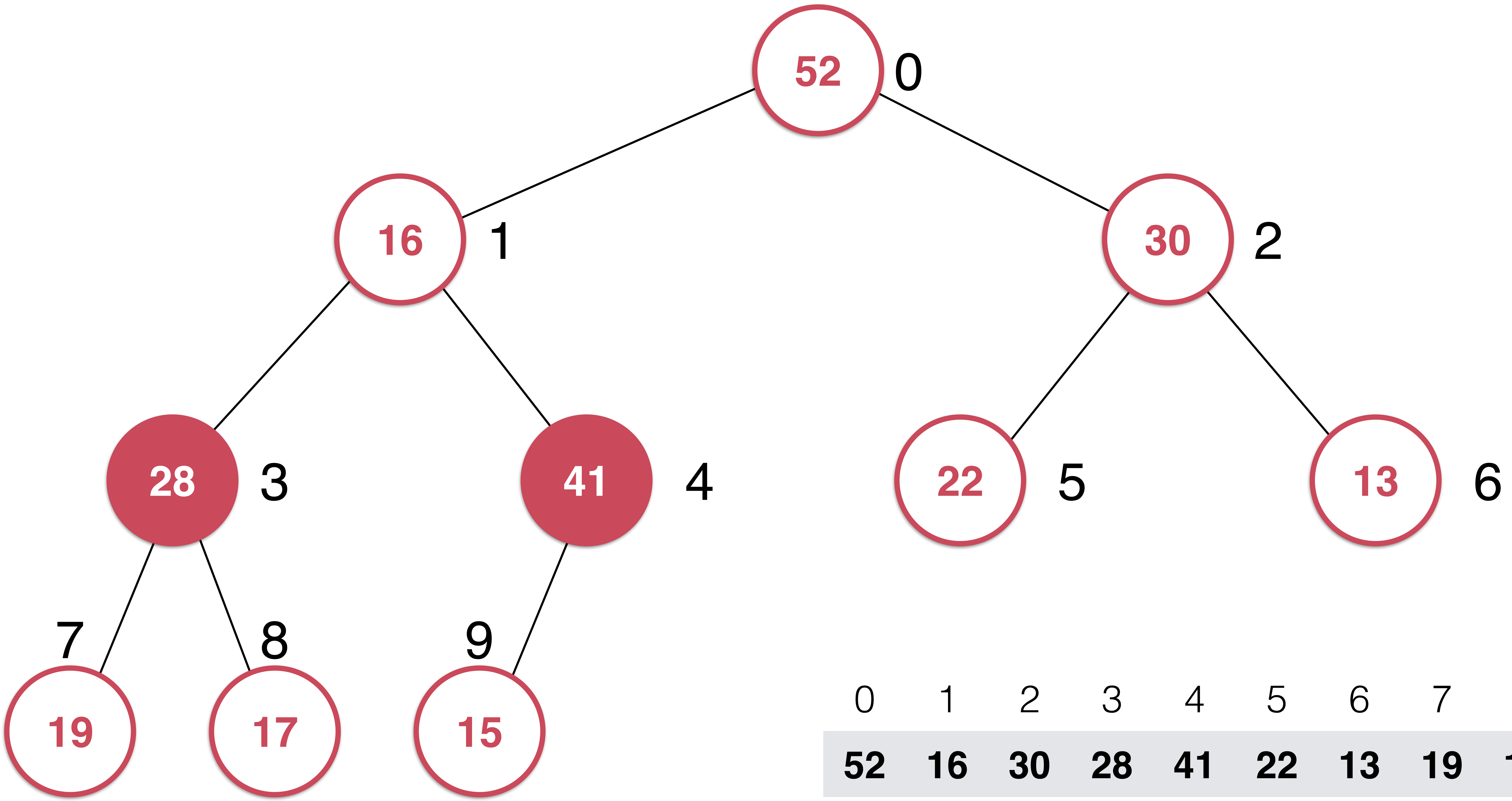

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **16** | **52** | **30** | **28** | **41** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** |

# Sift Down



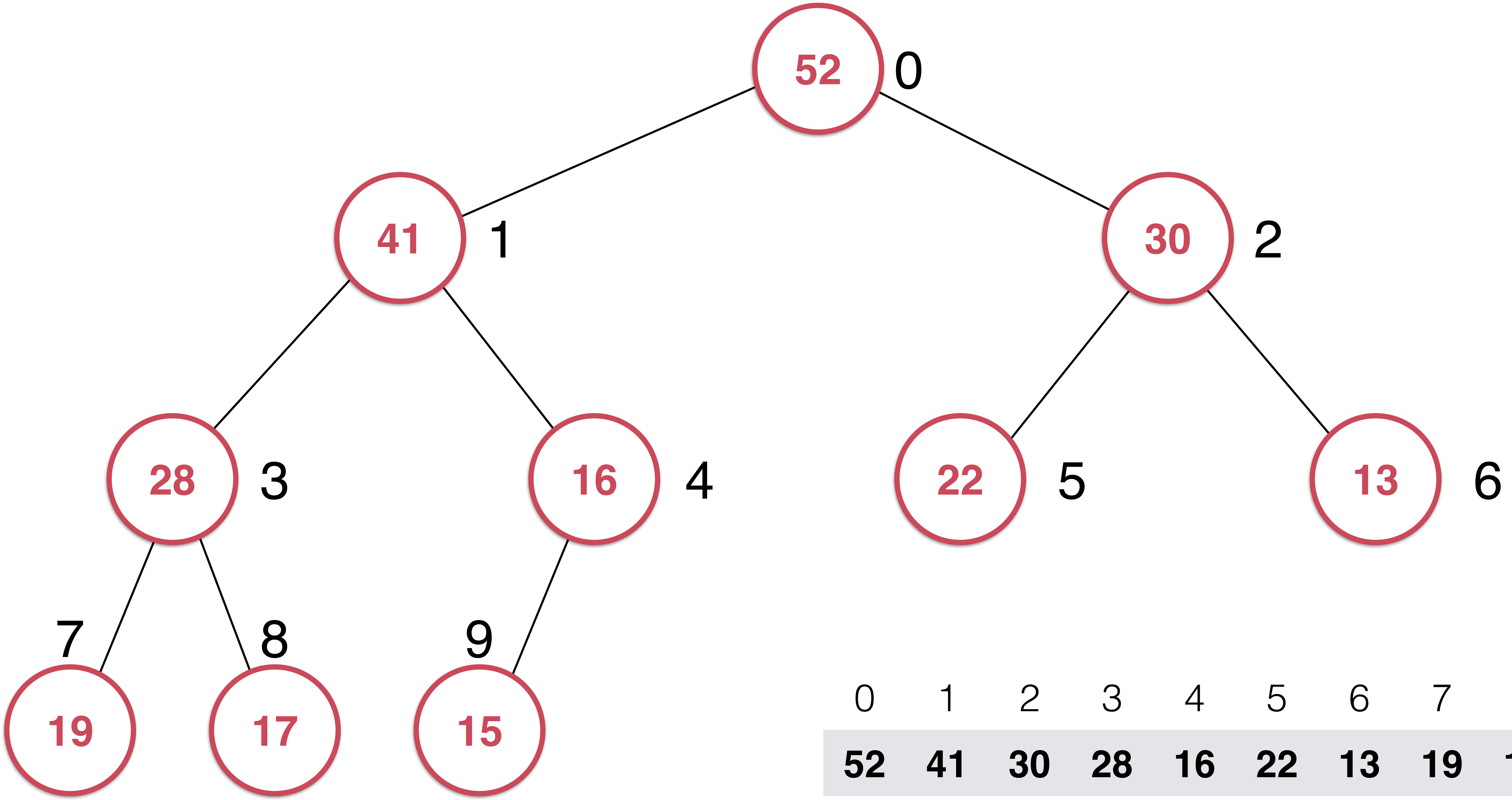

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **52** | **16** | **30** | **28** | **41** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** |

# Sift Down



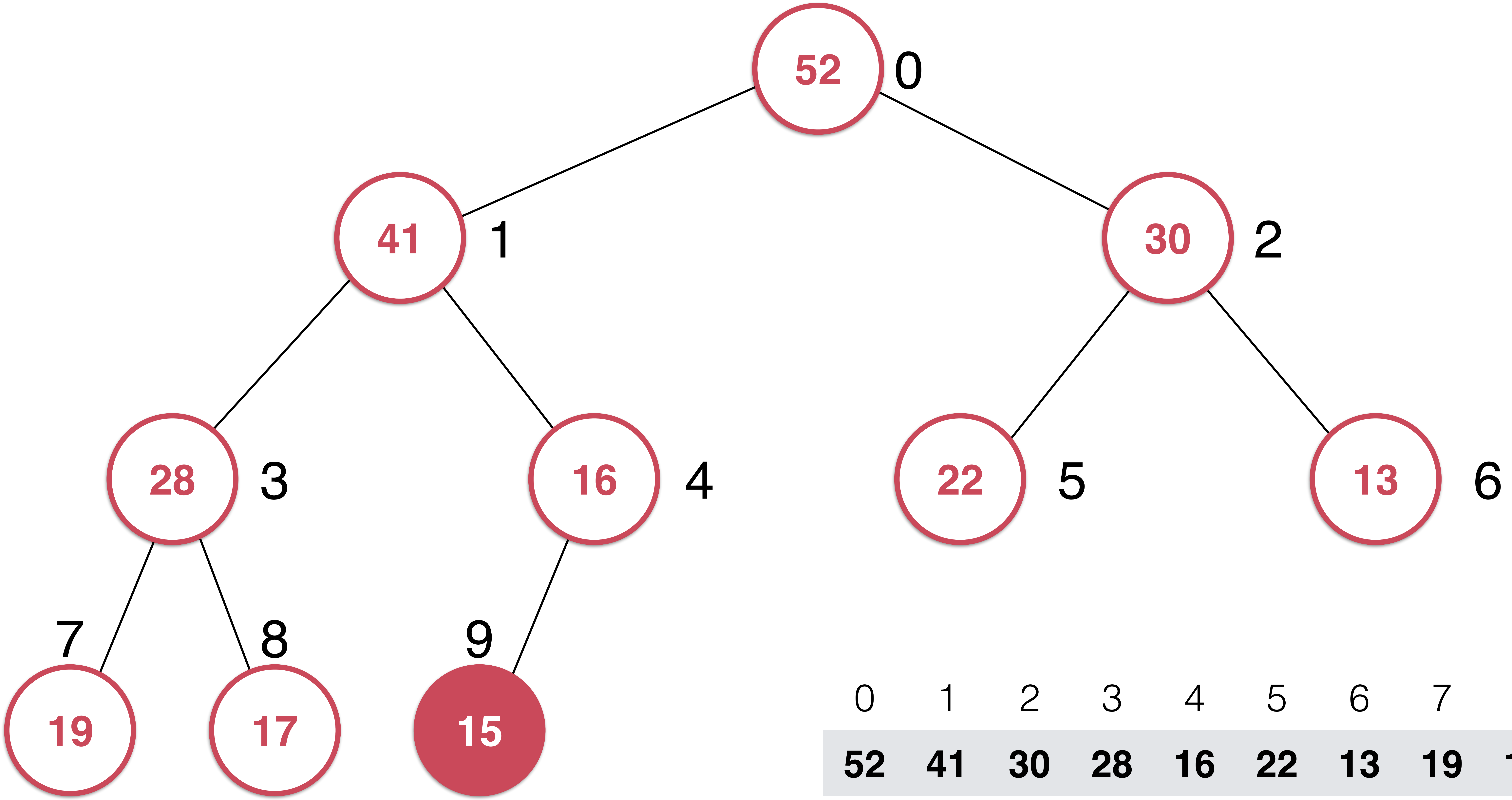

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **52** | **16** | **30** | **28** | **41** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** |

# Sift Down



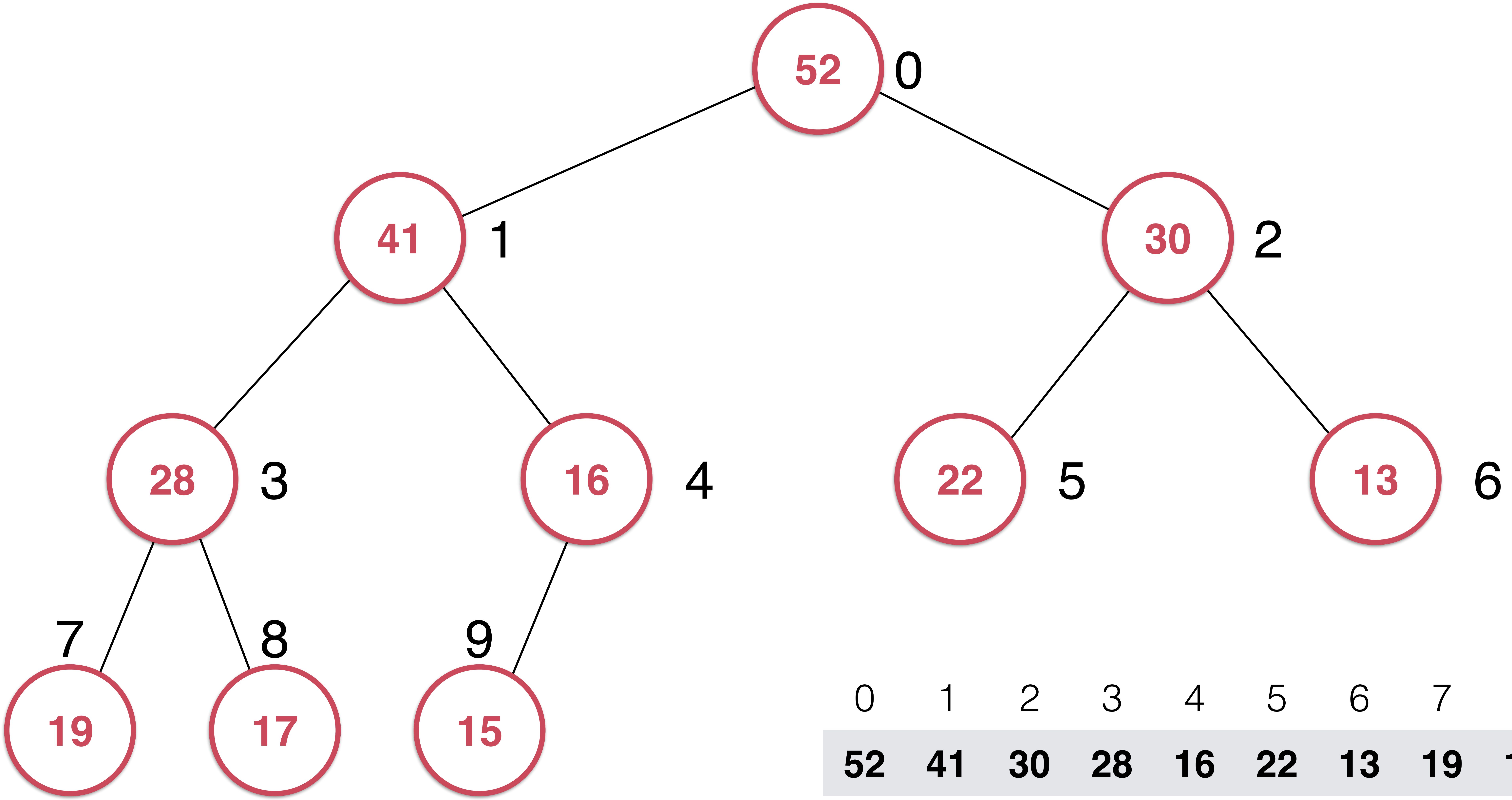

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **52** | **41** | **30** | **28** | **16** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** |

# Sift Down




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **52** | **41** | **30** | **28** | **16** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** |

# Sift Down

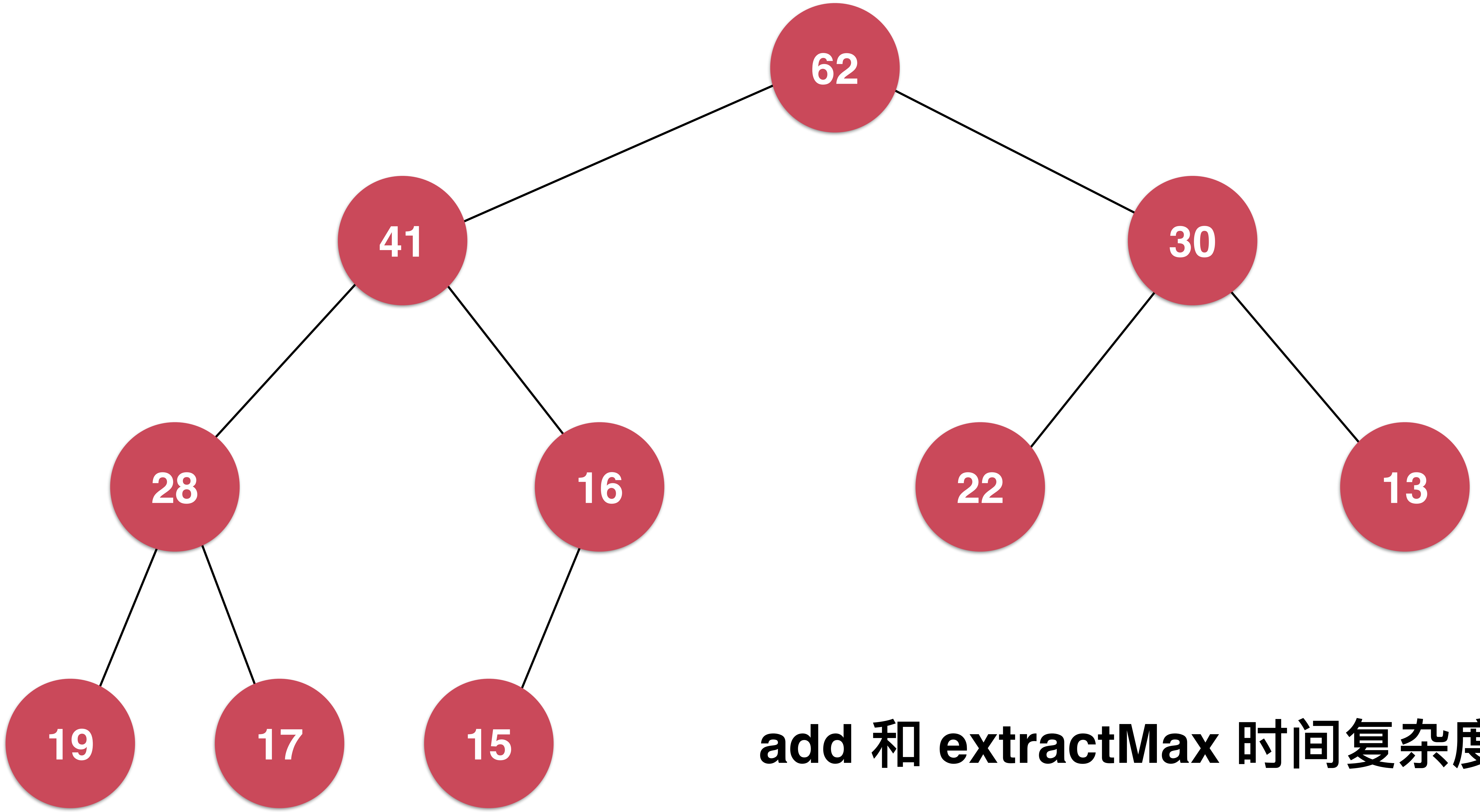



| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **52** | **41** | **30** | **28** | **16** | **22** | **13** | **19** | **17** | **15** |

# 实践：Sift Down 和 extractMax

# 实践： 测试堆

# 堆的时间复杂度分析




add 和 extractMax 时间复杂度都是 O(logn)

# 最简单的堆排序

# 实践：最简单的堆排序

# Heapify 和 replace

# replace

replace：取出最大元素后，放入一个新元素

实现：可以先extractMax，再add，两次O(logn)的操作

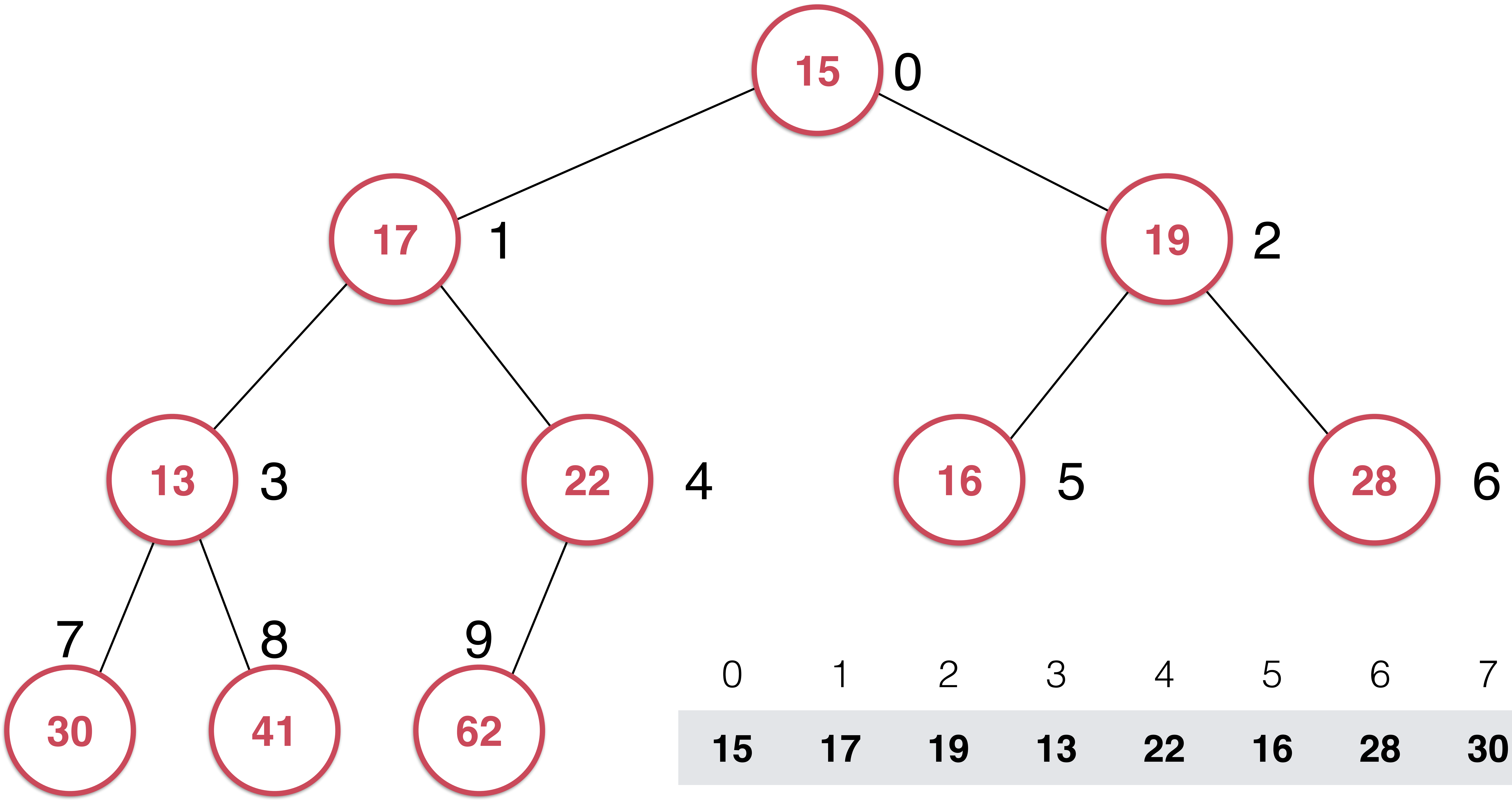
实现：可以直接将堆顶元素替换以后Sift Down，一次O(logn)的操作

# 实践：replace

# heapify

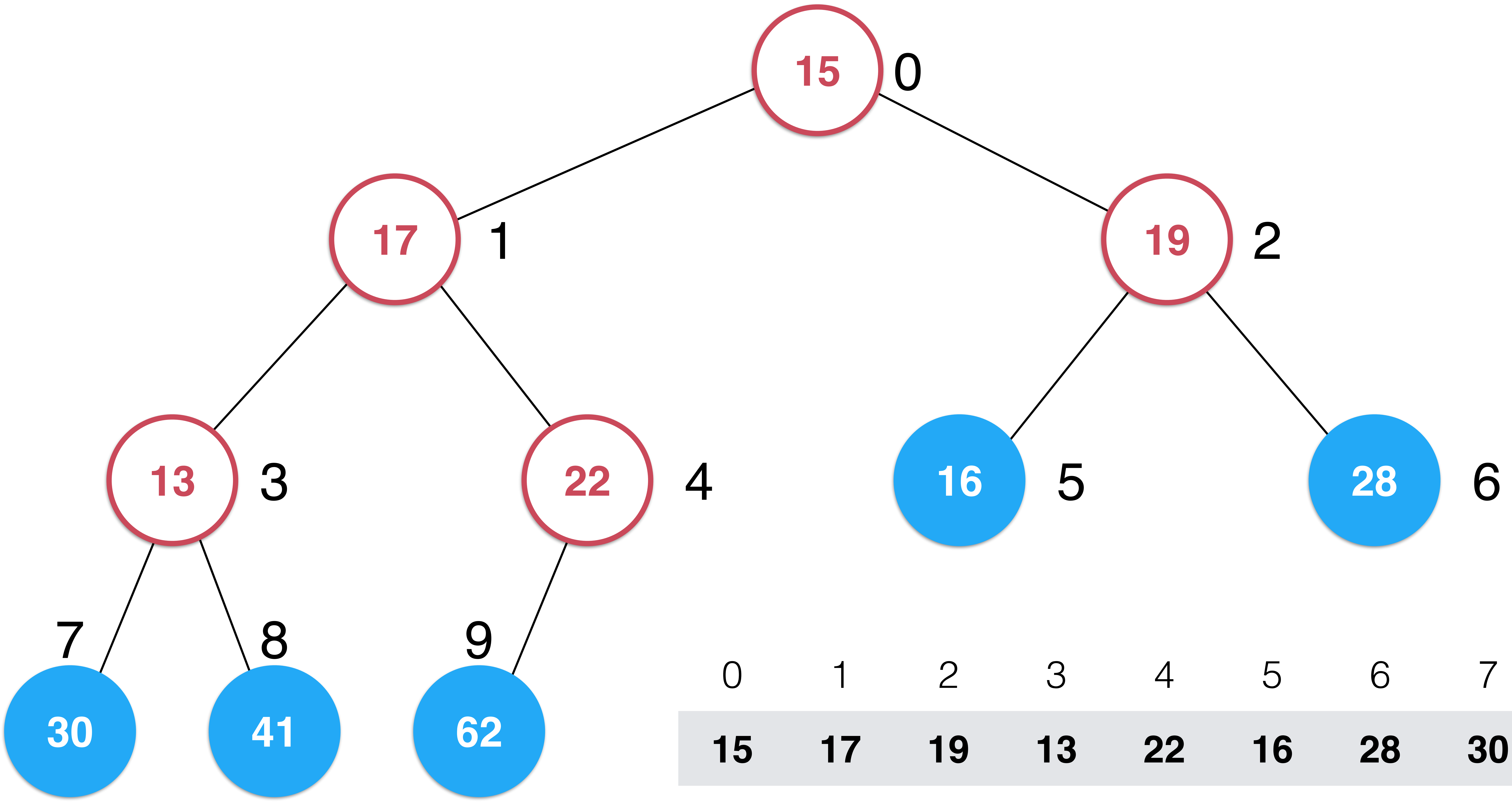
heapify：将任意数组整理成堆的形状

# Heapify



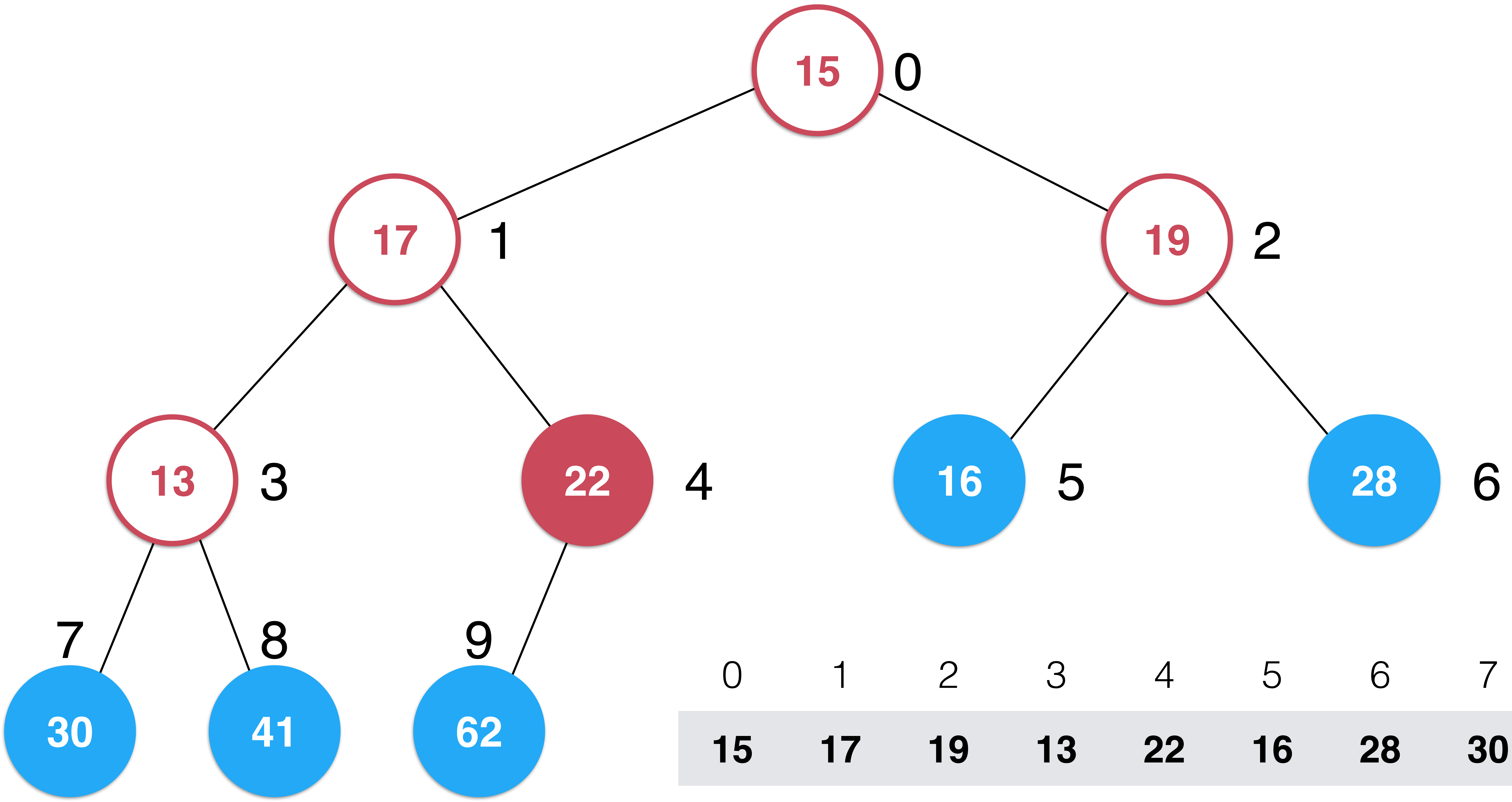

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | **17** | **19** | **13** | **22** | **16** | **28** | **30** | **41** | **62** |

# Heapify



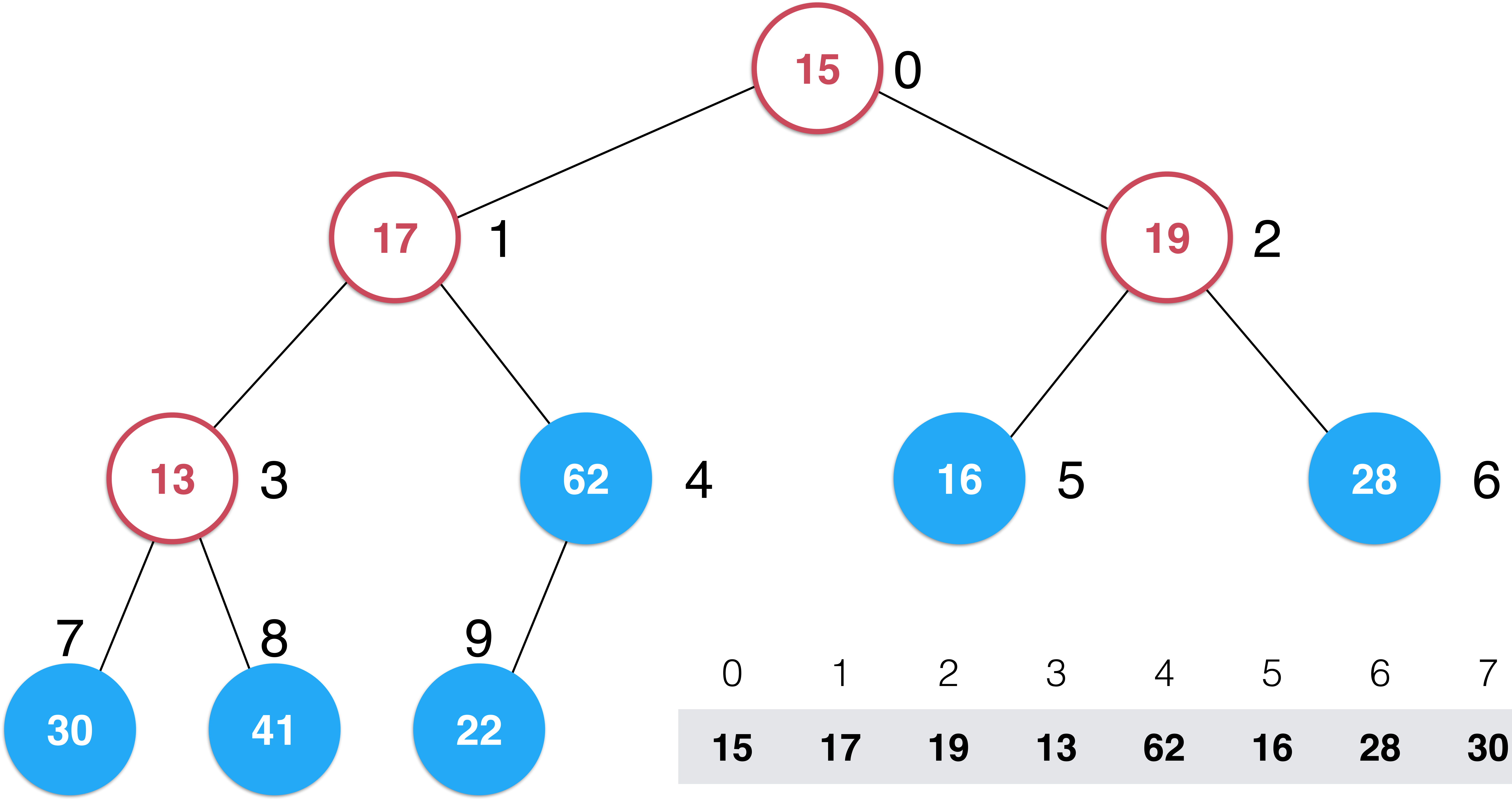

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | **17** | **19** | **13** | **22** | **16** | **28** | **30** | **41** | **62** |

# Heapify



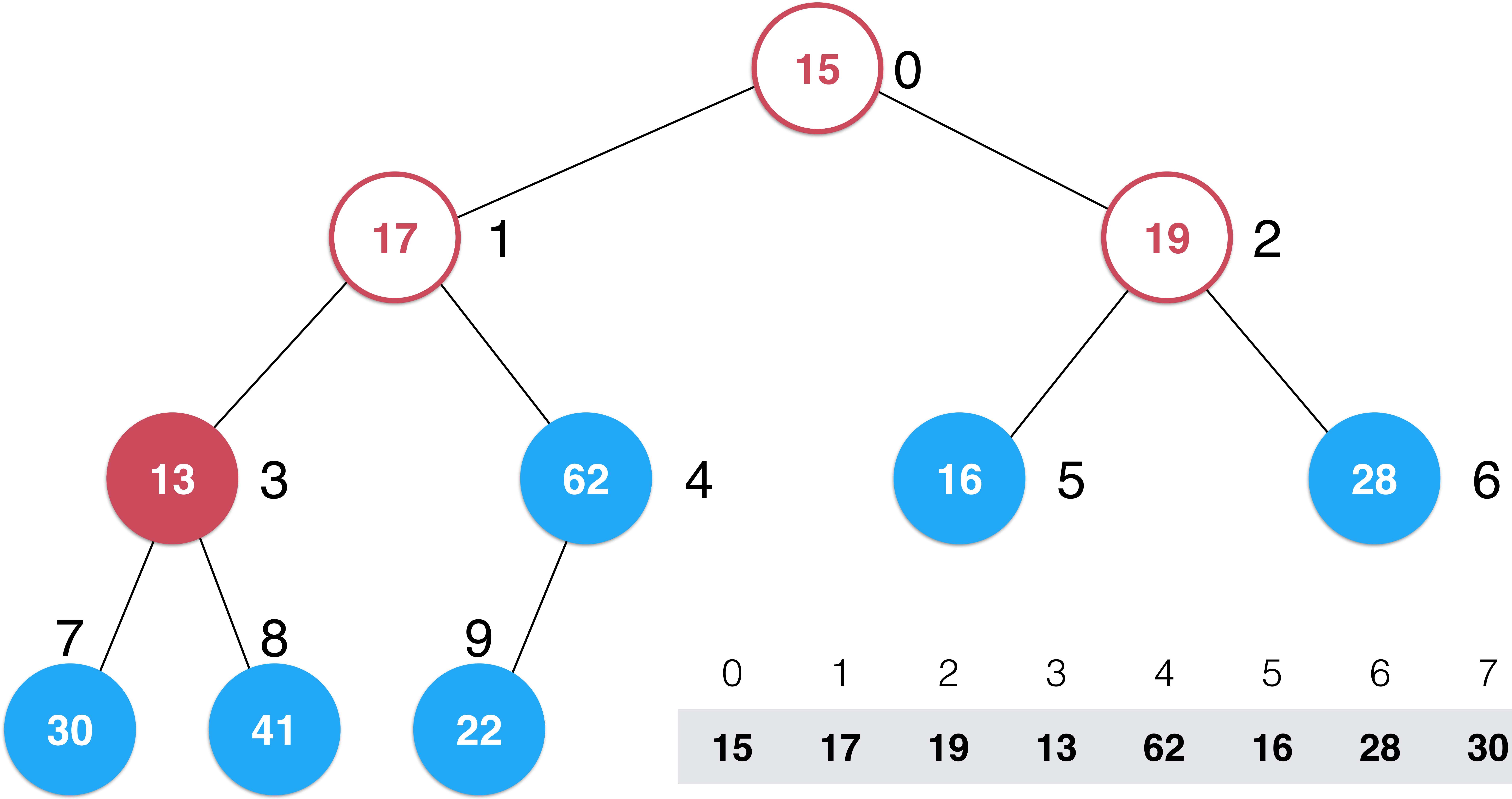

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | **17** | **19** | **13** | **22** | **16** | **28** | **30** | **41** | **62** |

# Heapify



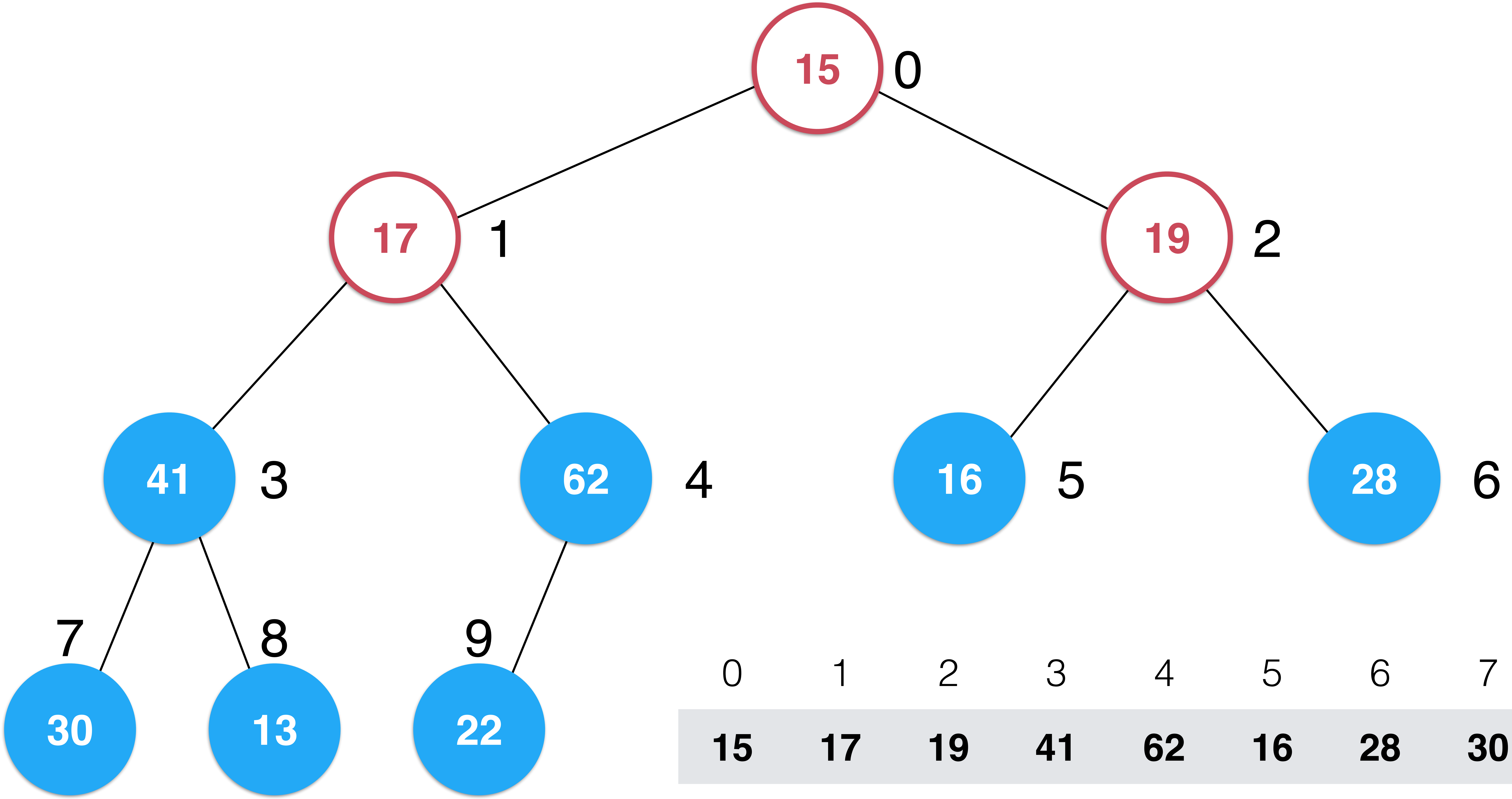

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | **17** | **19** | **13** | **62** | **16** | **28** | **30** | **41** | **22** |

# Heapify



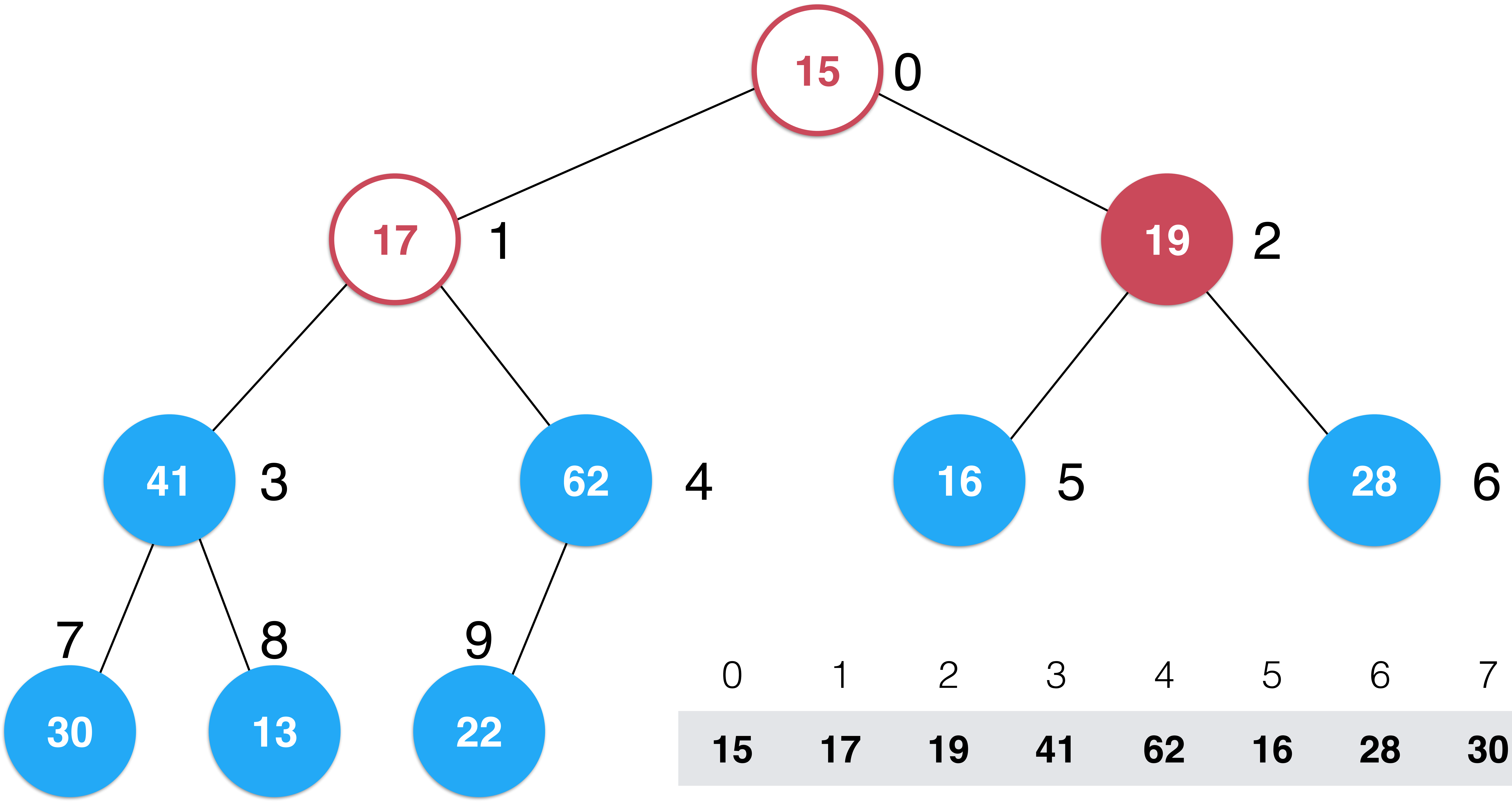

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | **17** | **19** | **13** | **62** | **16** | **28** | **30** | **41** | **22** |

# Heapify



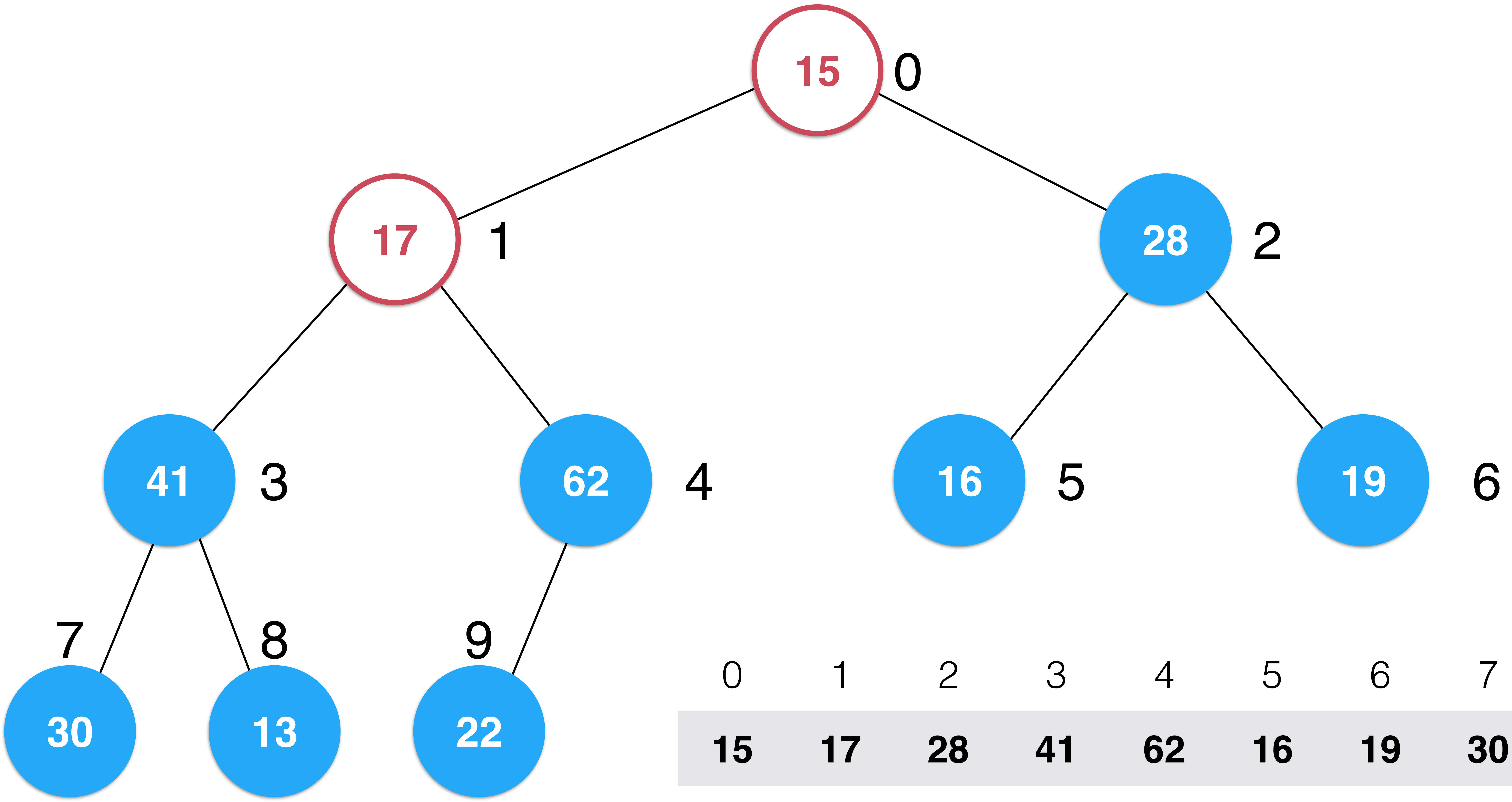

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | **17** | **19** | **41** | **62** | **16** | **28** | **30** | **13** | **22** |

# Heapify



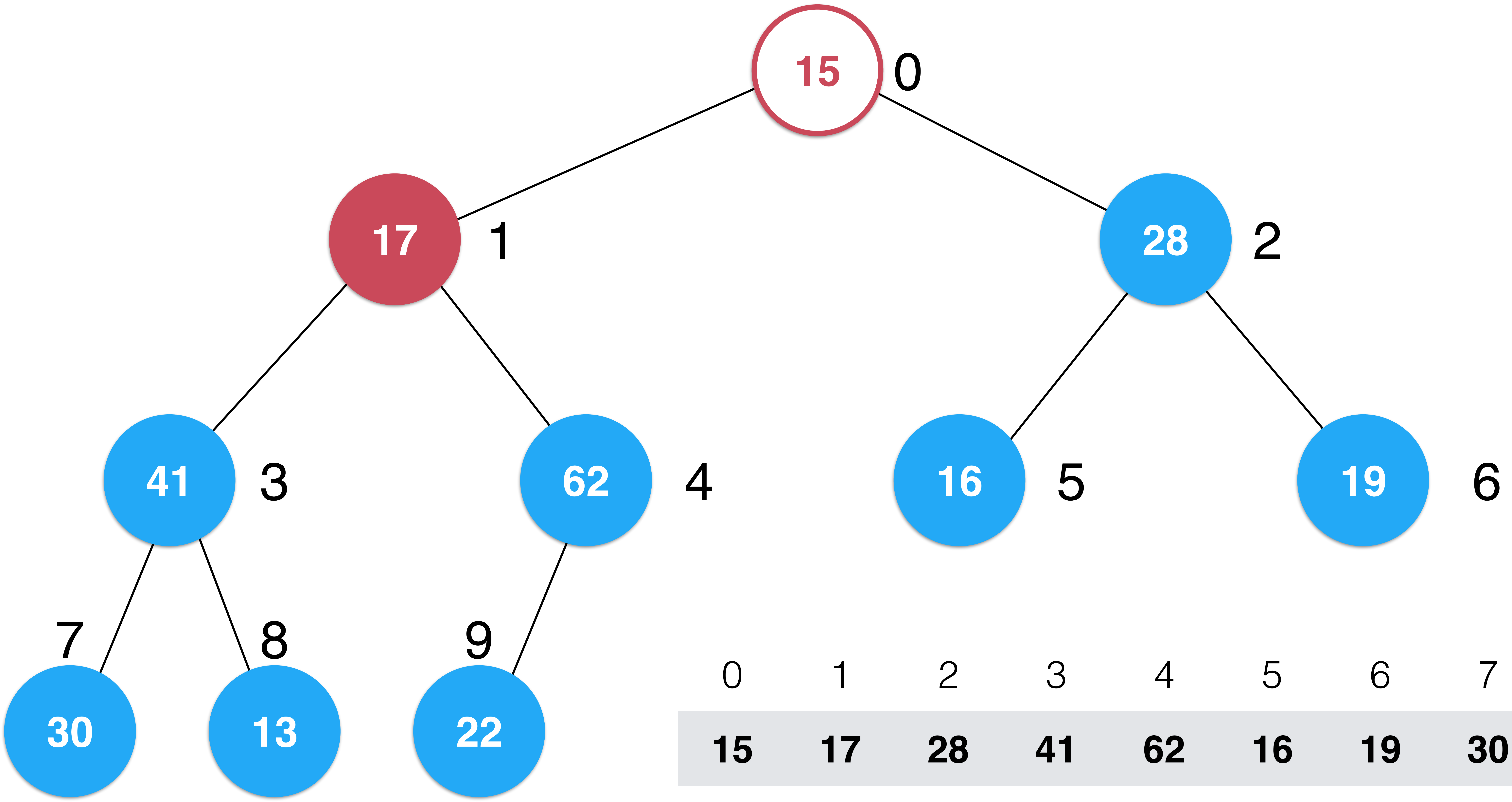

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | **17** | **19** | **41** | **62** | **16** | **28** | **30** | **13** | **22** |

# Heapify



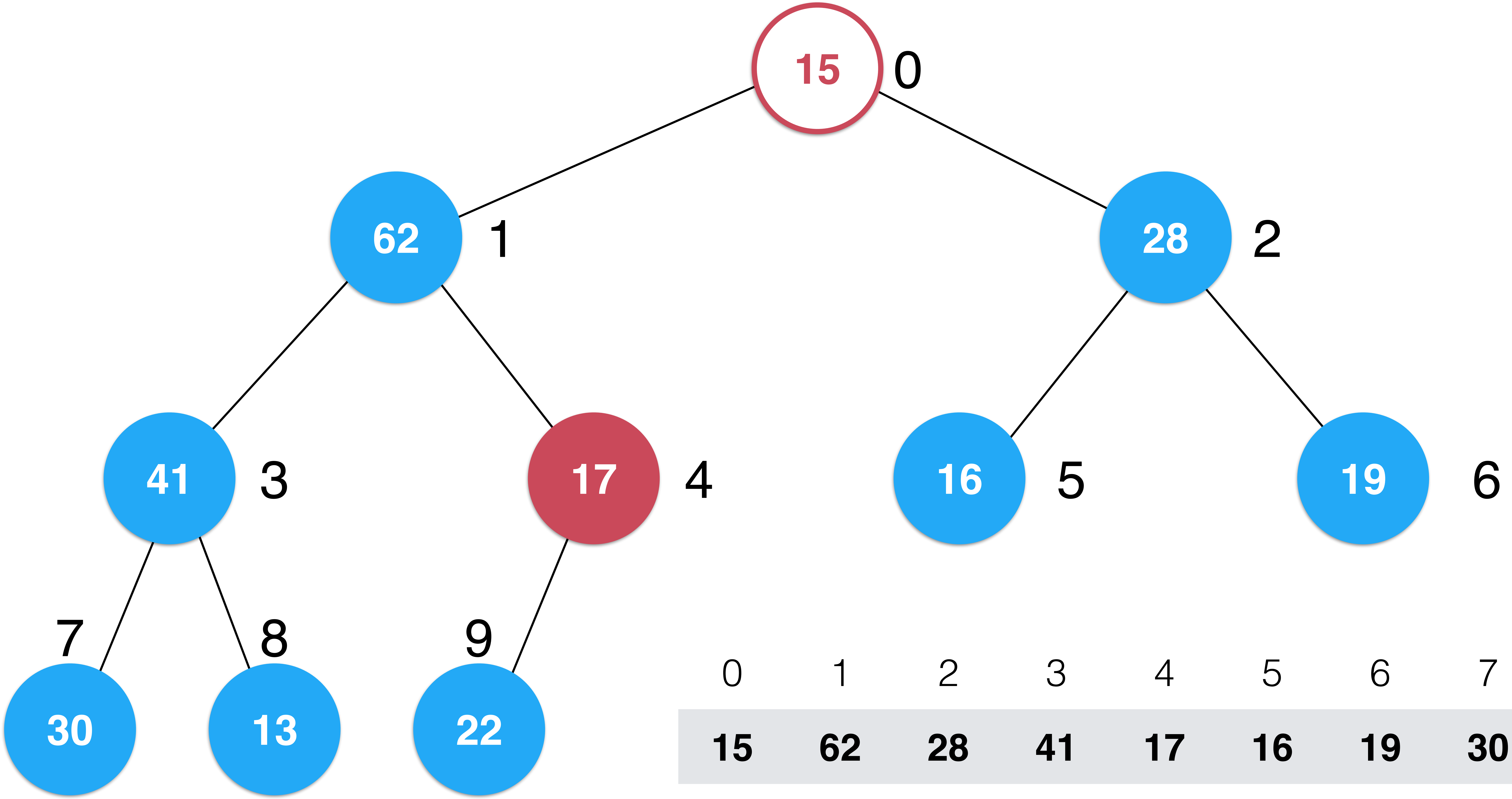

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | **17** | **28** | **41** | **62** | **16** | **19** | **30** | **13** | **22** |

# Heapify



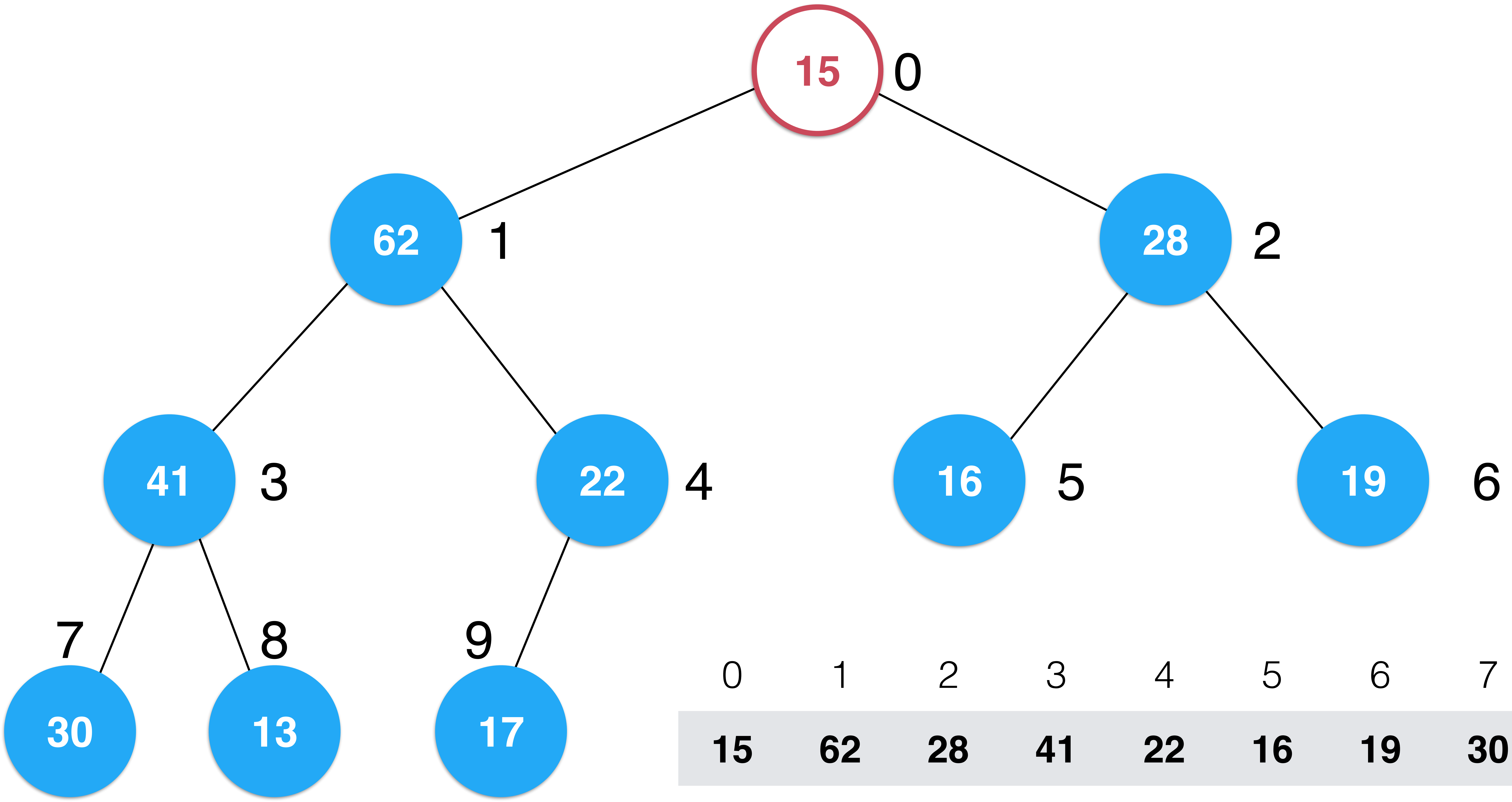

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | **17** | **28** | **41** | **62** | **16** | **19** | **30** | **13** | **22** |

# Heapify



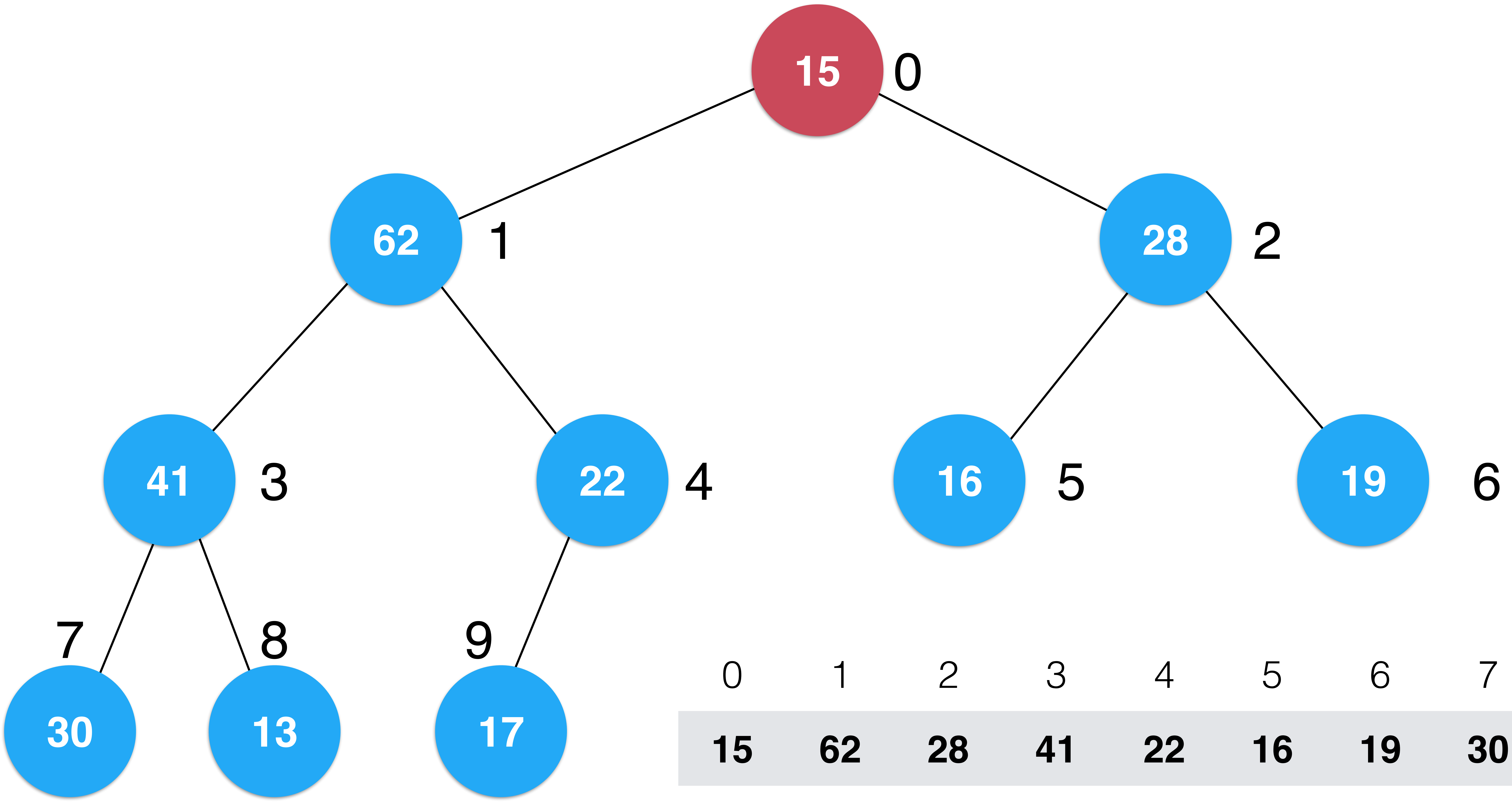

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | **62** | **28** | **41** | **17** | **16** | **19** | **30** | **13** | **22** |

# Heapify



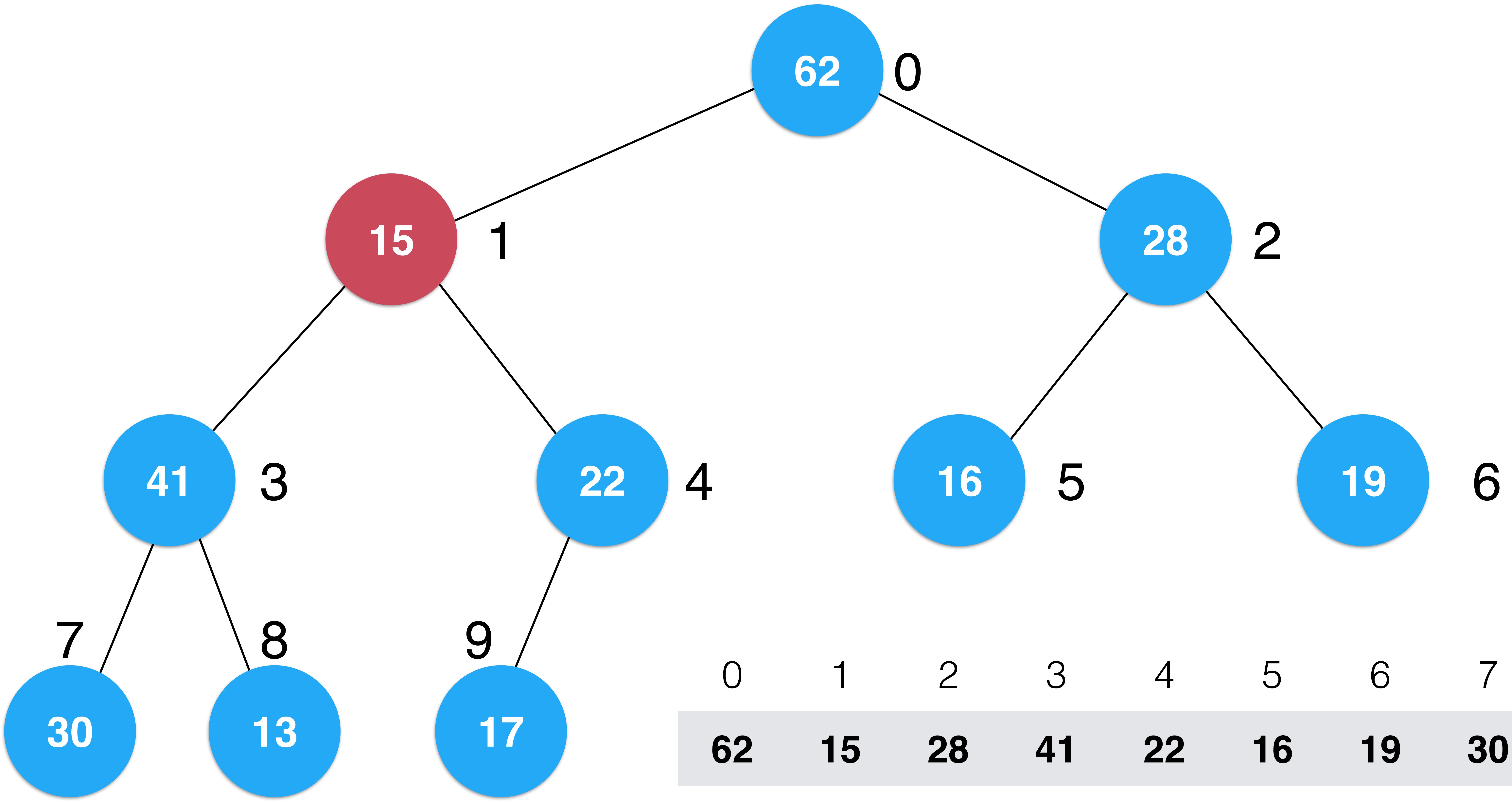

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | **62** | **28** | **41** | **22** | **16** | **19** | **30** | **13** | **17** |

# Heapify



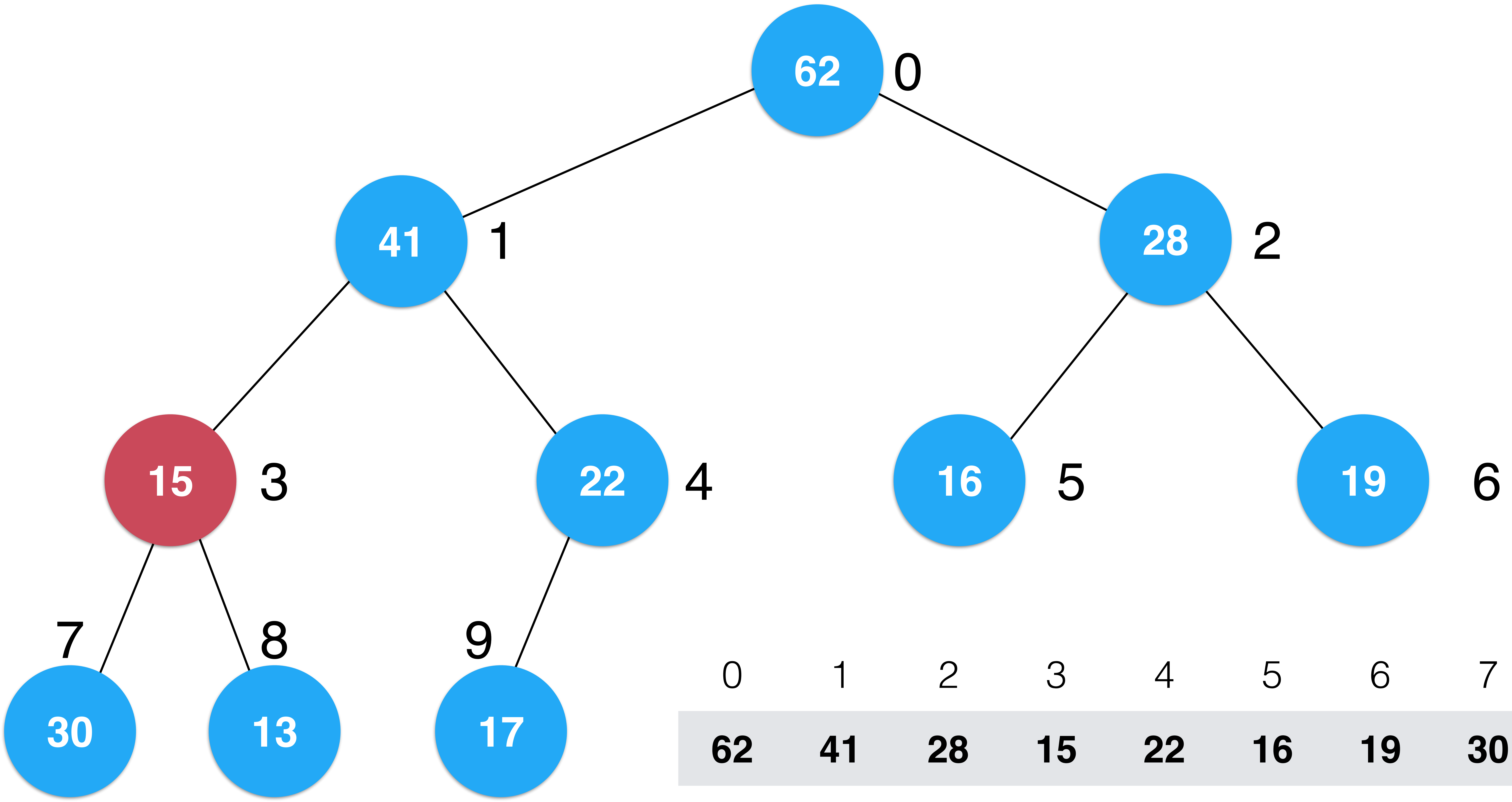

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | **62** | **28** | **41** | **22** | **16** | **19** | **30** | **13** | **17** |

# Heapify



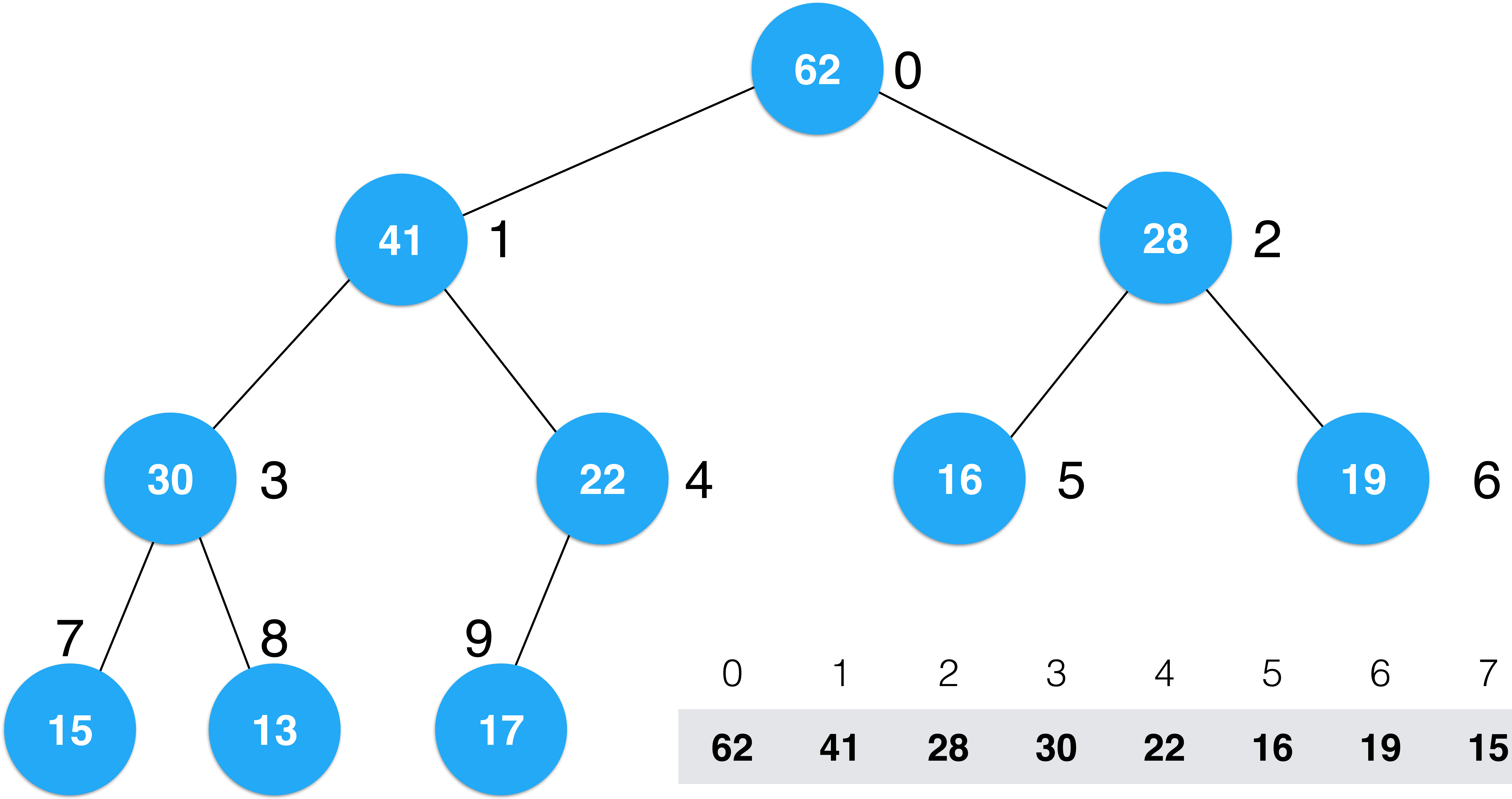

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **15** | **28** | **41** | **22** | **16** | **19** | **30** | **13** | **17** |

# Heapify




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **41** | **28** | **15** | **22** | **16** | **19** | **30** | **13** | **17** |

# Heapify




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **62** | **41** | **28** | **30** | **22** | **16** | **19** | **15** | **13** | **17** |

# Heapify 的算法复杂度

将n个元素逐个插入到一个空堆中，算法复杂度是O(nlogn)

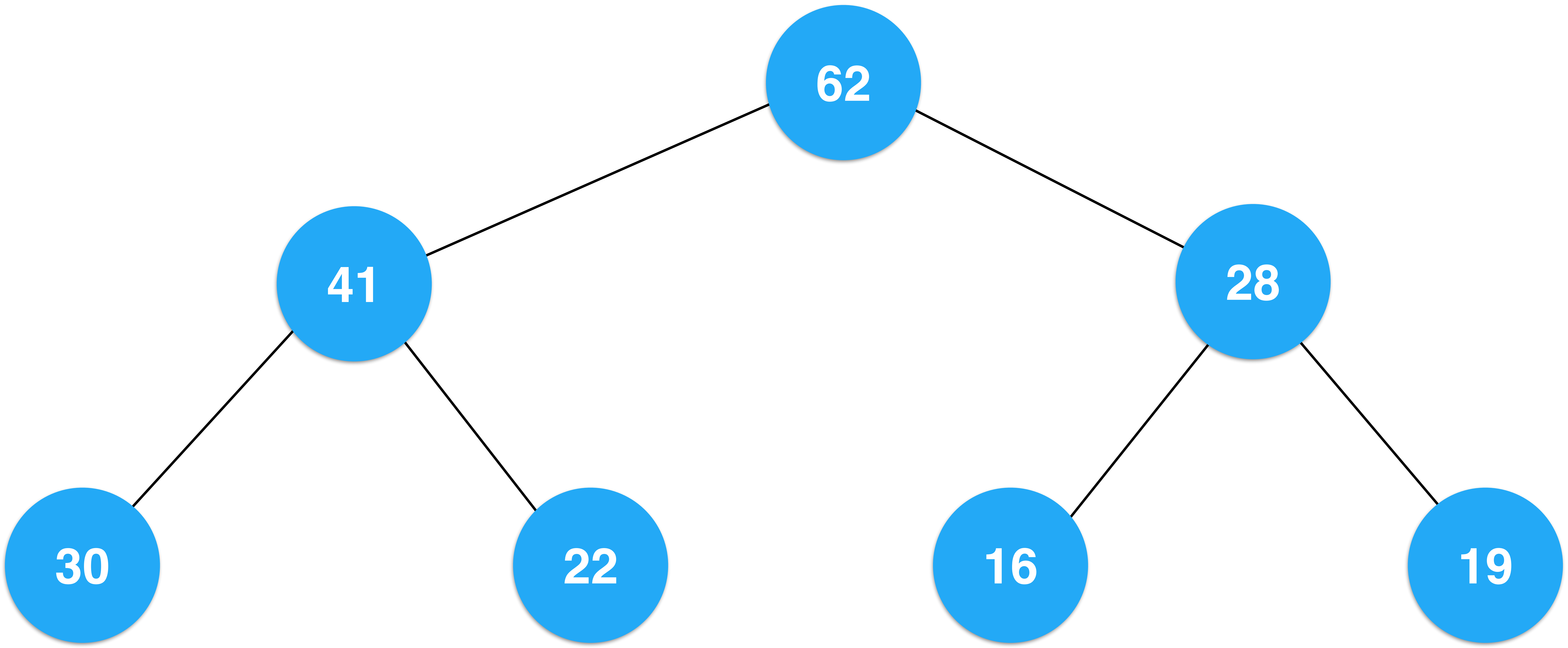
heapify的过程，算法复杂度为O(n)

# Heapify 的算法复杂度

heapify的过程，算法复杂度为O(n)

最后一层最多有多少个节点?

# Heapify 的算法复杂度




$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{h-1} = \frac{1(1-2^h)}{1-2} = 2^h - 1$$

非叶子节点： $2^{h-1} - 1$ 　叶子节点：$2^{h-1}$ 　大约是 n/2 个

# Heapify 的算法复杂度

heapify的过程，算法复杂度为O(n)

最后一层最多有多少个节点?　n/2　n/2 * 0

倒数第2层最多有多少个节点?　n/4　n/4 * 1

下面有 h 层节点　$\frac{n}{2^{h+1}}$　$\frac{n}{2^{h+1}} * h$

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil O(h) = O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h}\right)$$

# Heapify 的算法复杂度

heapify的过程，算法复杂度为O(n)

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil O(h) = O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h}\right)$$

$$= O\left(n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h}\right)$$

$$= O(n)\,.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

for $|x| < 1$.

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2}$$

$$= 2\,.$$

# Heapify 的算法复杂度

heapify的过程，算法复杂度为O(n)

# 实现 Heapify

# 实践：实现 Heapify

# 优化的堆排序

# 原地堆排序

# 原地堆排序

# 原地堆排序

# 原地堆排序

# 原地堆排序

# 原地堆排序

# 原地堆排序

# 原地堆排序

# 原地堆排序

# 作业：实现最小堆

# 作业解析：实现最小堆

# 其他

欢迎大家关注我的个人公众号：是不是很酷

# 算法与数据结构体系课程

liuyubobobo