1.9. MATRICES ESPECIALES

DEFINICIÓN: La matriz transpuesta de $A_{n\times m}$ es la matriz denotada por A^t de dimensión $m\times n$ y que se obtiene intercambiando las hileras por columnas, es decir, la primera hilera de A es la primer columna de A^t, la segunda hilera de A es la segunda columna de A^t, y así sucesivamente con todas y cada una de las hileras de la matriz A. En la notación compacta tenemos $\left(a_{ij}\right)_{n\times m}^t = \left(a_{ji}\right)_{m\times n}$, mientras que en la notación desarrollada de una matriz tenemos

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \quad \Rightarrow \quad A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

EJERCICIOS

Encontrar la matriz transpuesta de las matrices dadas

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & 9 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 8 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

NOTA

1. Los elementos de la diagonal principal son los mismos para la matriz como su transpuesta

PROPIEDADES DE LA MATRIZ TRANSPUESTA

Sean A y B matrices, y $c\in\mathbb{R}$. Supongamos que los tamaños de las matrices son tales que se puedan realizar las operaciones indicadas, entonces se satisface que

1. $\left(A+B\right)^t = A^t + B^t$
2. $\left(cA\right)^t = cA^t$
3. $\left(A^t\right)^t = A$
4. $\left(AB\right)^t = B^tA^t$

DEFINICIÓN: Decimos que una matriz es simétrica cuando es igual que su transpuesta, es decir, si A es una matriz, entonces A es simétrica si $A^t = A$

EJEMPLOS

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica ya que es igual que su transpuesta

2. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica ya que es igual que su transpuesta

NOTAS

1. Si A es una matriz simétrica, entonces A^t también es una matriz simétrica

DEFINICIÓN: Decimos que una matriz es antisimétrica cuando es igual al inverso aditivo de su transpuesta, es decir, si A es una matriz, entonces A es antisimétrica si $-A^t = A$

EJEMPLOS

1. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica ya que satisface que es igual al inverso aditivo de su transpuesta, esto es, $-\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

NOTAS

1. Todas las matrices simétricas y antisimétricas deben ser matrices cuadradas
2. Los elementos de la diagonal principal de las matrices antisimétricas son cero

DEFINICIÓN: Una matriz se dice que es ortogonal cuando su transpuesta es igual a su inversa, es decir, si D es una matriz ortogonal, entonces $D^t = D^{-1}$

EJERCICIO

Determinar si la matriz $D = \begin{pmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}$ es ortogonal

TEOREMA

D es una matriz ortogonal sí y sólo si $D\,D^t = I$

DEFINICIÓN: Si A es una matriz cuadrada y $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, definimos las siguientes potencias para la matriz A, entonces

a) $A^0 = I$ **b)** $A^1 = A$ **c)** $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ veces}}$

TEOREMA

Si A es una matriz cuadrada, r y s dos números enteros no negativos, entonces $A^r \cdot A^s = A^{r+s}$ y $\left(A^r\right)^s = A^{rs}$

DEFINICIÓN: Si A es una matriz cuadrada y $p \in \mathbb{Z}^+$, decimos que A es nilpotente de índice p si se satisface que $A^p = \mathbf{0}$ y p es el menor entero positivo posible.

DEFINICIÓN: Sea A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$, decimos que A es idempotente.

DEFINICIÓN: Sea A es una matriz cuadrada tal que $A^{p+1} = A$ para p el menor entero positivo, entonces decimos que A es periódica de índice p

NOTAS

1. Todas las matrices nilpotentes de índice p satisfacen que $A^m = \mathbf{0}\ \ \forall m > p$,es decir, $m \in \{p+1, p+2, p+3, \ldots\}$
2. Todas las matrices idempotentes cumplen que $A^{k+1} = A \ \ \forall k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$
3. $$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}^{k} = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{pmatrix}_{n\times n}$$

EJERCICIOS

Determinar lo indicado e identificar el tipo de matriz especial que representa

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}^3$ **(2)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}^3$ **(3)** $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}^2$