3. FRACCIONES PARCIALES

3.1 TEOREMA FUNDAMENTAL EN LA DESCOMPOSICIÓN DE UNA FRACCIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

Consideremos el problema de encontrar la suma de 3 fracciones algebraicas, por ejemplo,

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{2x-1}{x^2+1}=\frac{(x-1)(x^2+1)+2(x+1)(x^2+1)+(2x-1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}=\frac{5x^3+x+2}{x^4-1}$$

Ahora consideremos el problema inverso, es decir, el problema de descomponer una fracción dada en la suma de fracciones más sencillas, denominadas fracciones parciales. Por ejemplo, podemos decir que, para la fracción $\frac{5x^3+x+2}{x^4-1}$, la descomposición en fracciones parciales queda expresada por $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{2x-1}{x^2+1}$

DEFINICIÓN: Una expresión fraccionaria $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, con $Q(x)$ no nulo, recibe el nombre de fracción algebraica.

DEFINICIÓN: Una fracción algebraica se dice que es propia cuando el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador. Y se dice que es impropia en caso contrario.

DEFINICIÓN: Una fracción algebraica se dice que es impropia cuando el grado del polinomio del numerador es mayor o igual que el grado del polinomio del denominador

EJEMPLOS

$$\frac{x^3}{(x-3)^2(x^2+4)}$$

Fracción propia

$$\frac{x^4-2x^3+7x^2-6x+4}{2x^2-4x+2}$$

Fracción impropia

NOTA

1. Se puede expresar una fracción impropia como la suma de un polinomio y una fracción propia al efectuar la división de polinomios, por ejemplo,

$$\frac{x^4-2x^3+7x^2-6x+4}{2x^2-4x+2}=\underbrace{\frac{1}{2}x^2+3}_{\text{polinomio}}+\underbrace{\frac{3x-1}{x^2-2x+1}}_{\text{fracción propia}}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL EN LA DESCOMPOSICIÓN DE FRACCIÓNES PARCIALES SIMPLES (TFDFPS)

Cualquier fracción propia, reducida a su mínima expresión, puede expresarse como una suma de fracciones parciales de los siguientes tipos

1. A cada factor lineal $ax+b$ que aparezca solo una vez como factor del denominador, corresponde una fracción parcial de la forma $\dfrac{A}{ax+b}$ en donde A es una constante no nula.

2. A cada factor lineal $ax+b$ que aparezca k veces como factor del denominador corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+....+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

Donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son constantes y $A_k \neq 0$

3. A cada factor cuadrático ax^2+bx+c irreducible en el campo de los números reales que aparezca una sola vez como factor del denominador corresponde una fracción de la forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ donde A y B no son simultáneamente nulas

4. A cada factor cuadrático ax^2+bx+c irreducible en el campo de los números reales que aparezca k veces en el denominador corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+....+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ y $B_1, B_2, \ldots, B_k$ son constantes y A_k y B_k son constantes no nulas simultáneamente.

NOTAS

1. Las fracciones parciales se aplican únicamente a fracciones algebraicas.
2. El TFDFPS se aplica a fracciones propias.
3. Para aplicar el TFDFPS el denominador deberá contener factores lineales (diferentes o repetidos) o factores cuadráticos irreducibles (diferentes o repetidos).
4. Una expresión cuadrática es irreducible en el campo de los números reales cuando el discriminante de la expresión es negativo.
5. Los tipos de fracciones que menciona el teorema se llaman fracciones parciales simples, es decir, las fracciones de la forma

$$\frac{A}{ax+b},\quad \frac{A_k}{(ax+b)^k},\quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},\quad \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

6. El teorema anterior nos indica la descomposición de una fracción en fracciones simples, sin embargo, no menciona nada acerca de cómo encontrar el valor de las constantes. En este curso veremos tres métodos para encontrar dichas constantes método de valores, igualdad de polinomios y diferenciación.

Lic. Rodrigo A. Rodríguez