2.2. DETERMINANTES DE ORDEN 3

DEFINICIÓN: Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz de orden 3×3, se define el determinante de la matriz A denotado por $\det(A)$ o $|A|$ como

$$\det(A) = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{31}\,a_{23} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{31}\,a_{22}$$

O bien, podemos observar que podemos escribir el determinante como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

EJERCICIOS

Calcular el determinante indicado

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Existe otro método para encontrar el determinante de una matriz de orden 3×3, llamado **método de lluvia** o **regla de Sarrus** y es de uso exclusivo para matrices de tal dimensión.

Obsérvese lo siguiente

$$\det(A) = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{31}\,a_{23} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{31}\,a_{22}$$

$$A_1 = a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

$$A_2 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Tenemos que $\det(A) = A_2 - A_1$

EJERCICIOS

Calcular el determinante indicado por el método de lluvia

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{vmatrix}$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES DE ORDEN 3

1. Si las filas de un determinante se intercambian por sus columnas correspondientes, entonces el valor del determinante no se altera, es decir, $\det(A) = \det(A^t)$

NOTA

De esta propiedad se deduce que cualquier propiedad válida para hileras es también válida para columnas

2. Si todos los elementos de una fila (o columna) son cero entonces el valor del determinante es cero.

3. Si dos filas (o columnas) contiguas de un determinante se intercambian entonces el valor del determinante cambia de signo, pero se conservan en valor absoluto

NOTA

Si intercambiamos filas contiguas o columnas contiguas un número par de veces entonces el valor del determinante no cambia

4. Si los elementos correspondientes de dos filas (o columnas) de un determinante son iguales, el determinante es cero

5. Si cada elemento de una fila (o columna) de un determinante se multiplica por el mismo número k, entonces el determinante tiene un valor igual al producto de k por el determinante de la matriz original

NOTA

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$, o bien, $\left| k\, A_{3\times 3} \right| = k^3 \left| A \right|$

6. Si dos filas (o columnas) de un determinante son múltiplo escalar entonces el determinante de la matriz es cero

7. Si cada elemento de una fila (o columna) de un determinante es igual a la suma de dos determinantes.

8. Si cada elemento de una fila (o columna) de un determinante se multiplica por el mismo número escalar k y el resultado se suma al elemento correspondiente de otra fila (o columna) entonces el valor del determinante no se altera

Lic. Rodrigo A. Rodríguez