

Постановка краевой задачи о простейшем охладителе полупроводникового прибора

Температурное поле в области Ω , имеющей форму диска (прямого кругового цилиндра) $\Omega = \{0 \leq r < R_1, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < z < H\}$, подчиняется уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Theta(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta(r, z)}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

$\Theta(r, z)$ – превышение температуры в материале диска над температурой окружающей среды. Зависимость процессов от угловой переменной φ отсутствует (то есть, процессы считаются **осесимметричными**), этой переменной нет в списке аргументов искомой функции $\Theta(r, z)$, и далее она не обсуждается.

Теплота в диск подаётся через круглое пятно идеального теплового контакта с полупроводниковым прибором,

$$-\left. \frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{q}{\lambda}, \quad 0 \leq r < R_0, \quad (2)$$

здесь q – плотность теплового потока через пятно контакта, $[q] = \text{Вт}/\text{м}^2$, λ – коэффициент теплопроводности материала диска, $[\lambda] = \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{град})$. Величина q считается независимой от переменной r , но это допущение не принципиально.

На прочих участках поверхности диска ставятся условия конвективного теплообмена,

$$\left(\frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial z} + \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \Theta(r, z) \right) \Big|_{z=H} = 0, \quad 0 \leq r < R_0, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial z} + \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \Theta(r, z) \right) \Big|_{z=H} = 0, \quad R_0 < r < R_1, \quad (4)$$

$$\left(-\frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial z} + \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \Theta(r, z) \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad R_0 < r < R_1, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial r} + \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \Theta(r, z) \right) \Big|_{r=R_1} = 0, \quad 0 < z < H, \quad (6)$$

здесь α – коэффициент теплоотдачи через поверхность диска, $[\alpha] = \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$. Этот коэффициент тем выше, чем интенсивнее обдув поверхности диска окружающим воздухом. Интенсивность может быть увеличена, например, использованием вентилятора (кулера).

Диск играет роль простейшего теплоотводящего элемента электротехнической конструкции. В радиотехнике такой элемент принято называть радиатором, в теплотехнике – охладителем.

Постановка **краевой задачей теплопроводности** (1)–(6) является классической, поэтому вопрос существования и единственности решения не возникает.

Для оценки качества работы охладителя применяется числовая характеристика, называемая его **тепловым сопротивлением**:

$$\mathcal{R} = \frac{\bar{\Theta}}{Q}, \quad (7)$$

$\bar{\Theta}$ – средняя температура по пятну контакта охлаждаемого прибора с радиатором,

$$\bar{\Theta} = \frac{2}{R_0^2} \cdot \int_0^{R_0} \Theta(r, 0) \cdot r \cdot dr,$$

$Q = \pi R_0^2 \cdot q$ – тепловая мощность, отводимая от прибора. Обычно отводимая (по другому – рассеиваемая) мощность для данного, уже подключенного к своей схеме, полупроводникового прибора, является величиной заданной. Что касается средней температуры $\bar{\Theta}$, то чем она выше, тем хуже для прибора, который от перегрева может "сгореть". Таким образом, чем **меньше** тепловое сопротивление охладителя, тем он лучше.

Аналитическое решение задачи. Метод частичных областей

Цилиндрическая граница $\Gamma_{01} = \{r = R_0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < z < H\}$ рассекает область Ω на два подмножества (две частичные области), $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Gamma_{01}$,

$$\Omega_0 = \{0 \leq r < R_0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < z < H\},$$

$$\Omega_1 = \{R_0 < r < R_1, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < z < H\}.$$

В каждой из частичных областей будет построено "своё" представление для температурного поля.

Для области Ω_0 поле имеет вид

$$\Theta_0(r, z) = \Theta_{00}(r, z) + \Theta_{01}(z),$$

$$\Theta_{00}(r, z) = q \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cdot \frac{\Phi_0(p_m, r)}{\Phi_1(p_m, R_0)} \cdot f(p_m, z), \quad \Theta_{01}(z) = q \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{H - z}{\lambda} \right),$$

$$\Phi_0(p, r) = I_0(pr), \quad \Phi_1(p, r) = \frac{\partial \Phi_0(p, r)}{\partial r},$$

$$f(p, z) = \cos(pz),$$

a_m (при $m = 0, 1, 2, \dots$) – неизвестные пока коэффициенты, $I_\mu(x)$ – модифицированная функция Бесселя (функция мнимого аргумента) первого рода. Выражение для $\Theta_{01}(z)$ подчиняется условиям (1), (2), (3). Для того, чтобы функция $\Theta_0(r, z)$ подчинялась этим же трём условиям, достаточно наложить требование (3) на $\Theta_{00}(z)$, то есть, фактор p_m считать **положительным** корнем уравнения

$$p_m \cdot \sin(p_m H) - \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \cos(p_m H) = 0. \quad (8)$$

Для области Ω_1 поле имеет вид

$$\Theta_1(r, z) = q \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \cdot \frac{\Psi_0(q_n, r)}{\Psi_1(q_n, R_0)} \cdot g(q_n, z),$$

$$\Psi_0(q, r) = \frac{I_0(qr)}{qI_1(qR_1) + \frac{\alpha}{\lambda}I_0(qR_1)} + \frac{K_0(qr)}{qK_1(qR_1) - \frac{\alpha}{\lambda}K_0(qR_1)}, \quad \Psi_1(q, r) = \frac{\partial \Psi_0(q, r)}{\partial r},$$

$$g(q, z) = c_n \cos(qz) + s_n \frac{\sin(qz)}{q},$$

b_n, c_n, s_n (при $n = 0, 1, 2, \dots$) – неизвестные пока коэффициенты, $K_\mu(x)$ – модифицированная функция Бесселя (функция мнимого аргумента) второго рода. Представление для $\Theta_1(r, z)$ подчиняется условиям (1), (6). Подчинение функции $\Theta_1(r, z)$ условиям (3) и (4) означает, что коэффициенты c_n, s_n должны быть решениями (при каждом n) линейной однородной системы алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\lambda} c_n - s_n = 0 \\ (-q_n \sin(q_n H) + \frac{\alpha}{\lambda} \cos(q_n H)) c_n + \left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{\sin(q_n H)}{q_n} + \cos(q_n H) \right) s_n = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

Условие существования нетривиального решения системы (9) есть равенство нулю главного определителя системы,

$$\left(q_n - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{q_n} \right) \sin(q_n H) - 2 \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \cos(q_n H) = 0. \quad (10)$$

Коэффициенты c_n, s_n находятся из (9) с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно "спрятать" в неизвестный коэффициент b_n , приняв $c_n = 1$, $s_n = \frac{\alpha}{\lambda}$; в результате

$$g(q, z) = \cos(qz) + \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{\sin(qz)}{q}.$$

Для корней уравнений (8) и (10) при малых значениях безразмерной величины $\frac{\alpha H}{\lambda}$ можно использовать приближения

$$p_0 \underset{\frac{\alpha H}{\lambda} \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda H}} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha H}{\lambda} + \frac{11}{360} \cdot \left(\frac{\alpha H}{\lambda} \right)^2 - \frac{17}{5040} \cdot \left(\frac{\alpha H}{\lambda} \right)^3 \right), \quad (11)$$

$$p_m \underset{\frac{\alpha H}{\lambda} \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{H} \cdot \left(\pi m + \frac{1}{\pi m} \cdot \frac{\alpha H}{\lambda} - \frac{1}{(\pi m)^3} \cdot \left(\frac{\alpha H}{\lambda} \right)^2 - \left(\frac{1}{3 \cdot (\pi m)^3} - \frac{2}{(\pi m)^5} \right) \cdot \left(\frac{\alpha H}{\lambda} \right)^3 \right), \quad (12)$$

$m = 1, 2, 3, \dots$,

$$q_0 \underset{\frac{\alpha H}{\lambda} \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda H}} \cdot \left(1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{\alpha H}{\lambda} + \frac{11}{1440} \cdot \left(\frac{\alpha H}{\lambda} \right)^2 - \frac{17}{40320} \cdot \left(\frac{\alpha H}{\lambda} \right)^3 \right), \quad (13)$$

$$q_n \underset{\frac{\alpha H}{\lambda} \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{H} \cdot \left(\pi n + \frac{2}{\pi n} \cdot \frac{\alpha H}{\lambda} - \frac{4}{(\pi n)^3} \cdot \left(\frac{\alpha H}{\lambda} \right)^2 - \left(\frac{2}{3 \cdot (\pi n)^3} - \frac{16}{(\pi n)^5} \right) \cdot \left(\frac{\alpha H}{\lambda} \right)^3 \right), \quad (14)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Забегая вперёд, следует отметить, что во всех проведённых вычислительных экспериментах приближённые формулы (11)–(14) давали **относительную** погрешность, не превосходящую $1.11 \cdot 10^{-16}$. Такая погрешность вполне приемлема.

Решение краевой задачи (1)–(6), казалось бы, построено, но коэффициенты a_m , b_n пока не найдены. "Произвол" этих коэффициентов должен быть использован для устранения разрыва поля на поверхности Γ_{01} .

Метод частичных областей подразумевает постановку дополнительных условий – так называемых условий "сшивания" поля на границе Γ_{01} , между двумя частичными областями. Этих условий два: условие непрерывности поля на Γ_{01} ,

$$\Theta_0(R_0, z) - \Theta_1(R_0, z) \equiv 0, \quad 0 < z < H, \quad (15)$$

и условие непрерывности производной поля по направлению нормали к поверхности Γ_{01} ,

$$\left. \frac{\partial \Theta_0(r, z)}{\partial r} \right|_{r=R_0} - \left. \frac{\partial \Theta_1(r, z)}{\partial r} \right|_{r=R_0} \equiv 0, \quad 0 < z < H. \quad (16)$$

Соотношения

$$\frac{1}{q} \cdot \int_0^H (\Theta_0(R_0, z) - \Theta_1(R_0, z)) \cdot f(p_{\textcolor{teal}{i}}, z) \cdot dz = 0, \quad (17)$$

$$\frac{1}{q} \cdot \int_0^H \left(\left. \frac{\partial \Theta_0(r, z)}{\partial r} \right|_{r=R_0} - \left. \frac{\partial \Theta_1(r, z)}{\partial r} \right|_{r=R_0} \right) \cdot g(q_{\textcolor{blue}{j}}, z) \cdot dz = 0, \quad (18)$$

являются следствиями (15)–(16). Однако, в теории рядов Фурье доказывается, что выполнение требований (17)–(18) при $\textcolor{teal}{i} = 0, 1, 2, \dots$, $\textcolor{blue}{j} = 0, 1, 2, \dots$, является достаточным для выполнения (15)–(16).

В развёрнутом виде уравнения (17)–(18) принимают вид

$$a_{\textcolor{teal}{i}} \cdot \frac{\Phi_0(p_{\textcolor{teal}{i}}, R_0)}{\Phi_1(p_{\textcolor{teal}{i}}, R_0)} \cdot \mu_{\textcolor{teal}{i}\textcolor{teal}{i}} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \cdot \frac{\Psi_0(q_n, R_0)}{\Psi_1(q_n, R_0)} \cdot \kappa_{\textcolor{teal}{i}n} = -\frac{1}{\lambda \cdot p_{\textcolor{teal}{i}}^2}, \quad (19)$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cdot \kappa_{m\textcolor{blue}{j}} - b_{\textcolor{blue}{j}} \cdot \nu_{\textcolor{blue}{j}\textcolor{blue}{j}} = 0, \quad (20)$$

$$\mu_{il} = \int_0^H f(p_i, z) f(p_\ell, z) dz = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left(H + \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{\cos^2(p_i H)}{p_i^2} \right), & \ell = i \\ 0, & \ell \neq i \end{cases},$$

$$\kappa_{il} = \int_0^H f(p_i, z) g(q_\ell, z) dz = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{1}{q_\ell^2 - p_i^2},$$

$$\nu_{j\ell} = \int_0^H g(q_j, z) g(q_\ell, z) dz =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left(H \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{q_j^2} \right) + \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{1}{q_j^2} \cdot \left(1 + \left(\frac{q_j^2 + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}}{q_j^2 - \frac{\alpha^2}{\lambda^2}} \right)^2 \cdot \cos^2(q_j H) \right) \right), & \ell = j \\ 0, & \ell \neq j \end{cases}.$$

Полезно учесть, что

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \kappa_{ii} = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{q_i^2 - p_i^2} = \frac{H}{2}.$$

Найти точное аналитическое решение бесконечной системы уравнений (19)–(20) не представляется возможным. Приближенное решение системы следует строить методом редукции, ограничивая суммы по n в (19) и по m в (20) верхними пределами суммирования N и M соответственно. Количество сохраняемых уравнений в (19), (20) равно $N+1$ и $M+1$. Построенное таким образом приближенное решение стремится к точному при $\min(N, M) \rightarrow +\infty$.

Если ввести обозначения $x_1 = a_0$, $x_2 = a_1$, $x_3 = a_2$, $x_4 = a_3$, \dots , $x_{M+1} = a_M$, $x_{M+2} = b_0$, $x_{M+3} = b_1$, $x_{M+4} = b_2$, $x_{M+5} = b_3$, \dots , $x_{M+N+2} = b_N$, то редуцированная система уравнений (19)–(20) обретает вид

$$x_k \cdot \frac{\Phi_0(p_{k-1}, R_0)}{\Phi_1(p_{k-1}, R_0)} \cdot \mu_{k-1, k-1} - \sum_{n=0}^N x_{M+2+n} \cdot \frac{\Psi_0(q_n, R_0)}{\Psi_1(q_n, R_0)} \cdot \kappa_{k-1, n} = -\frac{1}{\lambda \cdot p_{k-1}^2}, \quad (21)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, M+1,$$

$$\sum_{m=0}^M x_{m+1} \cdot \kappa_{m, k-M-2} - x_k \cdot \nu_{k-M-2, k-M-2} = 0, \quad (22)$$

$$k = M+2, M+3, M+4, \dots, M+N+2.$$

Расширенная матрица системы линейных алгебраических уравнений (21)–(22), имеющая размеры $(M + N + 2) \times (M + N + 3)$, всюду далее, для удобства, обозначается через \bar{A} . Эта матрица имеет вид, символически представленный в (23). Символами "*" показаны элементы матрицы, отличные от нуля; количество таких элементов в матрице равно $(M + 1)^2 + (N + 1)^2 + 2(M + 1) + N + 1$, то есть, более половины. Нули в (23) соответствуют нулевым элементам.

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} (M+1) \text{ lines} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * & | & * \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * & | & * \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * & | & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * & * & \dots & * & | & * \\ * & * & * & \dots & * & * & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 \\ * & * & * & \dots & * & 0 & * & 0 & \dots & 0 & | & 0 \\ * & * & * & \dots & * & 0 & 0 & * & \dots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & 0 \\ * & * & * & \dots & * & 0 & 0 & 0 & \dots & * & | & 0 \end{pmatrix} \\ \left. \begin{array}{l} (N+1) \text{ lines} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \end{array} \quad \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{10em}}_{(M+1) \text{ columns}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(N+1) \text{ columns}} \end{array} \quad (23)$$

Среднеинтегральная (по пятну контакта) температура и тепловое сопротивление охладителя могут быть найдены по формулам

$$\bar{\Theta} = \frac{2}{R_0^2} \cdot \int_0^{R_0} \Theta(r, 0) \cdot r dr = q \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{H}{\lambda} + \frac{2}{R_0} \cdot \sum_{m=0}^M a_m \cdot \frac{1}{p_m^2} \right), \quad (24)$$

$$\mathcal{R} = \frac{\bar{\Theta}}{\pi R_0^2 q} = \frac{1}{\pi R_0^2} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{H}{\lambda} + \frac{2}{R_0} \cdot \sum_{m=0}^M a_m \cdot \frac{1}{p_m^2} \right). \quad (25)$$

Постановка задачи об оптимизации формы охладителя

Радиус R_1 и толщина диска H связаны соотношением

$$\pi R_1^2 H = V, \quad (26)$$

где V – заданный объём диска. Величина R_0 (радиус пятна контакта) также задана. Требуется найти такую величину R_1 , которая обеспечивает наименьшее значение теплового сопротивления \mathcal{R} .

Из конструктивных соображений ясно, что $R_1 \geq R_0$ (размер пятна контакта не может быть меньше размера контактной площадки полупроводникового прибора) и что $R_1 \leq R_2 = \sqrt{V/(\pi H_{min})}$ (пластина не может быть слишком тонкой).

Можно изменять величину R_1 в пределах промежутка $[R_0, R_2]$, выражать через неё по (26) величину $H = V/(\pi R_1^2)$, аналитически решать (и численно реализовывать) краевую задачу о поиске температурного поля при каждом текущем значении R_1 , а значит, можно считать тепловое сопротивление функцией аргумента R_1 : $\mathcal{R} = \mathcal{R}(R_1)$.

Для поиска минимума $\mathcal{R}(R_1)$ можно воспользоваться, например, методом золотого сечения. Скорость работы метода и точность нахождения оптимального R_1 невысоки.

Скорость и точность поиска была бы несколько выше, если бы (вместо привлечения метода золотого сечения) решалось уравнение

$$\frac{d\mathcal{R}(R_1)}{dR_1} = 0, \quad (27)$$

например, методом хорд. Но скорость поиска была бы ещё выше, если бы уравнение (27) решалось методом Ньютона.

Для **аналитического** поиска (на основе (25)) значений производных

$$\frac{d\mathcal{R}(R_1)}{dR_1}, \quad \frac{d^2\mathcal{R}(R_1)}{dR_1^2}$$

нужно при каждом R_1 иметь значения, а также первые и вторые производные (по R_1) коэффициентов $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_M$.

Со стороны студентов прозвучали предложения такого рода: количество сохраняемых уравнений в системе (21)–(22) **конечно**, следовательно, нужно заставить пакет

Mathematica аналитически эту систему решить, с явной зависимостью искомых коэффициентов $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_M$ от величины R_1 , подставить выражения для этих коэффициентов в (25) и продифференцировать $\mathcal{R}(R_1)$ по переменной R_1 сколько нужно раз. Реализация такого предложения невозможна ввиду колоссального объёма требуемых вычислительных ресурсов. Приходится применять более "щадящий" вычислительную технику (но не программиста) алгоритм.

Пусть известна не только расширенная матрица \overline{A} системы (24)–(25), но и матрица \overline{A}' , содержащая производные соответствующих элементов \overline{A} по переменной R_1 , а также матрица \overline{A}'' , содержащая вторые производные элементов \overline{A} по переменной R_1 .

Поиск решения системы (21)–(22) методом Гаусса означает, что элементарными преобразованиями строк матрицы \overline{A} в первых $(M + N + 2)$ столбцах создаётся единичная матрица, и тогда в последнем, $(M + N + 3)$ –м столбце появляются искомые коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_M, \dots$.

При совершении очередного элементарного преобразования какого-либо элемента матрицы \overline{A} всегда можно отследить, как именно преобразуются его первая и вторая производные по переменной R_1 , и зафиксировать эти изменения в матрицах \overline{A}' , \overline{A}'' .

В частности, при совершении **прямого хода** метода Гаусса применяется операция деления i –й строки матрицы на элемент \overline{A}_{ii} , или, что то же самое, умножение каждого элемента строки на величину $1/\overline{A}_{ii}$. Тогда, в соответствии с учебными материалами по математике для 1-го семестра 1-го курса,

$$r = \frac{1}{\overline{A}_{ii}}, \quad r' = -\frac{\overline{A}'_{ii}}{\overline{A}_{ii}^2}, \quad r'' = \frac{2(\overline{A}'_{ii})^2}{\overline{A}_{ii}^3} - \frac{\overline{A}''_{ii}}{\overline{A}_{ii}^2}, \quad (28)$$

$$\overline{\mathcal{A}}_{ij} = r \cdot \overline{A}_{ij}, \quad \overline{\mathcal{A}}'_{ij} = r' \cdot \overline{A}_{ij} + r \cdot \overline{A}'_{ij}, \quad \overline{\mathcal{A}}''_{ij} = r'' \cdot \overline{A}_{ij} + 2r' \cdot \overline{A}'_{ij} + r \cdot \overline{A}''_{ij}. \quad (29)$$

Синим каллиграфическим шрифтом в (28)–(29) показаны значения элементов матриц, получаемые **после** элементарного преобразования. Чёрный цвет применён к значениям, которые элементы имели до преобразования.

Фрагмент текста модуля *MyLinearSolve*, реализующего формулы (28)–(29), показан на Рис.1. Применены имена: $A0$ – для матрицы \overline{A} , $A1$ – для матрицы \overline{A}' , и $A2$ – для матрицы \overline{A}'' .

Недостающие **операторы** метода Гаусса предлагается дописать слушателям.

```
MyLinearSolve[A0_, A1_, A2_] :=  
Module[{i, j, m, n, r0, r1, r2, A0ii, A1ii, A2ii, A0ij, A1ij, A2ij},  
  m = Dimensions[A0][[1]]; n = Dimensions[A0][[2]];  
  If[m ≠ n + 1,  
    Print["Wrong Matrix!"]; Return[];  
  ];  
  For[i = 1, i ≤ m, i++,  
    A0ii = A0[[i, i]]; A1ii = A1[[i, i]]; A2ii = A2[[i, i]];  
    r0 = 1 / A0ii; r1 = -r0^2 * A1ii; r2 = r0^2 * (2 * r0 * A1ii^2 - A2ii);  
    For[j = i + 1, j ≤ n, j++,  
      A0ij = A0[[i, j]]; A1ij = A1[[i, j]]; A2ij = A2[[i, j]];  
      A0[[i, j]] = A0ij * r0;  
      A1[[i, j]] = A1ij * r0 + A0ij * r1;  
      A2[[i, j]] = A2ij * r0 + 2 * A1ij * r1 + A0ij * r2;  
    ];  
    A0[[i, i]] = 1; A1[[i, i]] = 0; A2[[i, i]] = 0;  
    ... (* Операторы *)  
  ];  
  ... (* Операторы *)  
]
```

Рис. 1.

Аналитическое решение: реализация

Численный эксперимент проведён для значений параметров: $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{град})$ (естественная конвекция), $\lambda = 236 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{град})$ (алюминий), $V = 0.00002 \text{ м}^3 = 20 \text{ см}^3$, $R_0 = 0.01 \text{ м} = 1 \text{ см}$.

Первым этапом поиска оптимальной формы охладителя является сканирование. Параметр R_1 изменяется в пределах от 48 мм до 162 мм (с шагом $dR_1 = 2 \text{ мм}$), что при соотношении (26) означает покрытие параметром H промежутка с границами 0.25 мм и 2.5 мм. Значение R_1 , в котором наблюдается наименьшее из вычисленных тепловое сопротивление, фиксируется в переменной $R1Min$.

Второй этап выполняется методом золотого сечения. Считается, что оптимальное R_1 локализовано на промежутке $[R1Min - dR_1, R1Min + dR_1]$. Второй этап прекращается, когда промежуток локализации R_1 "ужимается" до ширины 0.01 мм. За оптимальный радиус принимается середина промежутка, $R_1 = 92.2129 \text{ мм}$, при этом оценкой минимального теплового сопротивления служит величина $\tilde{\mathcal{R}} = 3.40077 \text{ град}/\text{Вт}$.

В настоящее время "хорошими" твёрдотельными охладителями считаются те, что дают тепловое сопротивление $\mathcal{R} \leq 1 \text{ град}/\text{Вт}$. Геометрическая форма таких охладителей настолько же сложна, насколько сложен ответ на вопрос, производилась ли для них аналитическая оценка теплового сопротивления.

Зависимость теплового сопротивления от параметра R_1 , полученная с помощью документа "РАМ.nb", показана на Рис. 10.

Более быстрые способы поиска минимума, означающие поиск корня уравнения (27) методом хорд и методом Ньютона, предлагается реализовать слушателям.

Численное решение задачи. Метод конечного элемента

В теории метода конечного элемента доказывается, что краевая задача, состоящая в решении уравнения Лапласа относительно искомой функции $\Theta(r, z)$ в области Ω при граничных условиях общего вида

$$\frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial \vec{n}_{\mathcal{S}}} + \Theta(r, z)f(r, z) + g(r, z) = 0, \quad (r, z) \in \mathcal{S}, \quad (30)$$

(где \mathcal{S} есть граница области Ω), эквивалентна задаче на отыскание минимума функционала

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\Theta) = & \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial z} \right)^2 \right) d\Omega + \\ & + \int_{\mathcal{S}} (\Theta^2(r, z)f(r, z) + 2\Theta(r, z)g(r, z)) d\mathcal{S}. \end{aligned} \quad (31)$$

Нетрудно показать, что для задачи (1)–(6) функционал (31) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\Theta) = & \int_0^H dz \cdot \left(\int_0^{R_1} dr \cdot 2\pi r \left(\left(\frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial z} \right)^2 \right) \right) + \\ & + \int_0^{R_0} dr \cdot 2\pi r \cdot 2\Theta(0, r) \frac{-q}{\lambda} + \int_{R_0}^{R_1} dr \cdot 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \Theta^2(0, r) + \\ & + \int_0^{R_1} dr \cdot 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \Theta^2(H, r) + \int_0^H dz \cdot 2\pi R_1 \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \Theta^2(z, R_1) \longrightarrow \min \end{aligned}$$

Избавление от общего множителя 2π позволяет далее перейти к минимизации функционала

$$\begin{aligned} \Phi(\Theta) = & \underbrace{\int_0^H dz \cdot \left(\int_0^{R_1} dr \cdot r \cdot \left(\left(\frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta(r, z)}{\partial z} \right)^2 \right) \right)}_{= I_1} + \\ & + \underbrace{\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \int_{R_0}^{R_1} dr \cdot r \cdot \Theta^2(0, r)}_{= I_2} + \underbrace{\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \int_0^{R_1} dr \cdot r \cdot \Theta^2(H, r)}_{= I_3} + \end{aligned}$$

$$+ R_1 \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \underbrace{\int_0^H dz \cdot \Theta^2(z, R_1)}_{= I_4} - 2 \cdot \frac{q}{\lambda} \cdot \underbrace{\int_0^{R_0} dr \cdot r \cdot \Theta(0, r)}_{= I_5} . \quad (32)$$

Поскольку решаемая здесь пространственная осесимметричная задача, по сути, является двумерной, на конечные элементы следует разбивать половину осевого сечения диска – прямоугольник $0 \leq r < R_1$, $0 < z < H$.

Коммерческие конечно–элементные пакеты чаще всего разбивают двумерные области интегрирования на треугольники (а трёхмерные – на тетраэдры).

Однако, [начинать](#) изучение метода конечного элемента лучше не на основе трудозатратной триангуляции, а с использованием простейшей прямоугольной сетки.

Пусть "большой" прямоугольник $0 \leq r < R_1$, $0 < z < H$ поделён на малые прямоугольники (конечные элементы) разбиением с узлами $\{r_i\}_{0 \leq i \leq m}$, $\{z_j\}_{0 \leq j \leq n}$, $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_m = R_1$, $0 = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_n = H$.

Искомые будут считаться величины $\Theta_{ij} = \Theta(r_i, z_j)$ – превышения температур в узловых точках разбиения.

Рассмотрим "текущий" конечный элемент $r_i \leq r \leq r_{i+1}$, $z_j \leq z \leq z_{j+1}$, где $0 \leq i < m$, $0 \leq j < n$. Введём локальные обозначения: $r_0 = r_i$, $r_0 + dr_0 = r_{i+1}$, $z_0 = z_j$, $z_0 + dz_0 = z_{j+1}$, $\Theta_{00} = \Theta_{ij}$, $\Theta_{10} = \Theta_{i+1,j}$, $\Theta_{01} = \Theta_{i,j+1}$, $\Theta_{11} = \Theta_{i+1,j+1}$.

Через названные четыре точки нужно "провести" функцию $\theta(r, z)$, которая называется пробной. От выбора аналитического вида пробной функции в некоторой (но не в критической) степени зависит погрешность получаемого численного решения. Одной из классических для метода конечного элемента является билинейная функция

$$\theta(r, z) = a + a_z z + a_r r + a_{zr} zr, \quad (33)$$

где a , a_z , a_r , a_{zr} – неизвестные пока коэффициенты.

Вдоль каждой из четырёх границ "текущего" конечного элемента билинейная функция ведёт себя, как линейная. Поскольку билинейная функция каждого из четырёх "соседних" конечных элементов на своих границах также ведёт себя, как линейная, а вершины элементов (концы границ) у "текущего" и "соседних" элементов общие, полное

температурное поле по всей области Ω непрерывно.

Далее выкладки будут сопровождаться фрагментами документа Mathematica, с привлечением которого эти выкладки исполняются.

```

 $\theta[r_, z_] = a + ar * r + az * z + arz * r * z$ 
 $d\theta dr[r_, z_] = D[\theta[r, z], \{r, 1\}]$ 
 $d\theta dz[r_, z_] = D[\theta[r, z], \{z, 1\}]$ 

 $a + ar r + az z + arz r z$ 

 $ar + arz z$ 

 $az + arz r$ 

```

Рис. 2. Пробная функция и её частные производные.

Функция Solve решает систему 4 уравнений относительно коэффициентов пробной функции так, чтобы функция "проходила" через узловые точки:

```

ReplCoeff =
Simplify[
  Solve[{ $\theta[r0, z0] = \theta00$ ,  $\theta[r0 + dr0, z0] = \theta10$ ,
     $\theta[r0, z0 + dz0] = \theta01$ ,  $\theta[r0 + dr0, z0 + dz0] = \theta11$ },
    {a, ar, az, arz}][[1]]]

{a  $\rightarrow \frac{1}{dr0 dz0} (dr0 (dz0 \theta00 + z0 (\theta00 - \theta01)) +$ 
   $r0 (dz0 (\theta00 - \theta10) + z0 (\theta00 - \theta01 - \theta10 + \theta11))$ ),
  ar  $\rightarrow \frac{dz0 (-\theta00 + \theta10) + z0 (-\theta00 + \theta01 + \theta10 - \theta11)}{dr0 dz0}$ ,
  az  $\rightarrow \frac{dr0 (-\theta00 + \theta01) + r0 (-\theta00 + \theta01 + \theta10 - \theta11)}{dr0 dz0}$ ,
  arz  $\rightarrow \frac{\theta00 - \theta01 - \theta10 + \theta11}{dr0 dz0}$  }

```

Рис. 3. "Проведение" пробной функции через четыре точки.

Функция Simplify упрощает полученные выражения для коэффициентов. Но даже с нею выражения получились бы более громоздкими, если бы вместо $z0 + dz0 = z_{i+1}$ и $r0 + dr0 = r_{j+1}$ использовалось соответственно $z1 = z_{i+1}$ и $r1 = r_{j+1}$.

В переменную ReplCoeff заносятся не сами искомые коэффициенты, а "подстановки" этих коэффициентов. Таков принцип работы функции Solve.

Начинаем брать интегралы, из которых состоит функционал.

$$\begin{aligned}
 I1 = & \text{Simplify[} \\
 & \text{ReplaceAll[} \\
 & \quad \text{Integrate[Integrate[(d\theta dr[r, z]^2 + d\theta dz[r, z]^2) * r,} \\
 & \quad \quad \{r, r0, r0 + dr0\}], \{z, z0, z0 + dz0\}], ReplCoeff]} \\
 & \frac{1}{12 dr0 dz0} \\
 & (4 dr0^2 r0 (\theta00^2 + \theta01^2 + (\theta10 - \theta11)^2 + \theta00 (-2 \theta01 + \theta10 - \theta11) + \\
 & \quad \theta01 (-\theta10 + \theta11)) + dr0^3 (\theta00^2 + \theta01^2 - 2 \theta01 (\theta10 - \theta11) + \\
 & \quad 3 (\theta10 - \theta11)^2 - 2 \theta00 (\theta01 - \theta10 + \theta11)) + \\
 & 2 dr0 dz0^2 (\theta00^2 + \theta01^2 + \theta10^2 + \theta00 (\theta01 - 2 \theta10 - \theta11) + \\
 & \quad \theta10 \theta11 + \theta11^2 - \theta01 (\theta10 + 2 \theta11)) + \\
 & 4 dz0^2 r0 (\theta00^2 + \theta01^2 + \theta10^2 + \theta00 (\theta01 - 2 \theta10 - \theta11) + \\
 & \quad \theta10 \theta11 + \theta11^2 - \theta01 (\theta10 + 2 \theta11)))
 \end{aligned}$$

Рис. 4. Взятие интеграла I_1 .

$$\begin{aligned}
 I2 = & \text{Simplify[} \\
 & \text{ReplaceAll[Integrate[r * \theta[r, z0]^2, \{r, r0, r0 + dr0\}],} \\
 & \quad \text{ReplCoeff]} \\
 & \frac{1}{12} dr0 (4 r0 (\theta00^2 + \theta00 \theta10 + \theta10^2) + dr0 (\theta00^2 + 2 \theta00 \theta10 + 3 \theta10^2))
 \end{aligned}$$

Рис. 5. Взятие интеграла I_2 .

$$\begin{aligned}
 I3 = & \text{Simplify[} \\
 & \text{ReplaceAll[Integrate[r * \theta[r, z0 + dz0]^2, \{r, r0, r0 + dr0\}],} \\
 & \quad \text{ReplCoeff]} \\
 & \frac{1}{12} dr0 (4 r0 (\theta01^2 + \theta01 \theta11 + \theta11^2) + dr0 (\theta01^2 + 2 \theta01 \theta11 + 3 \theta11^2))
 \end{aligned}$$

Рис. 6. Взятие интеграла I_3 .

I4 =

```
Simplify[
  ReplaceAll[Integrate[Θ[r0 + dr0, z] ^2, {z, z0, z0 + dz0}],
    ReplCoeff]]
```

$$\frac{1}{3} dz0 (\Theta10^2 + \Theta10 \Theta11 + \Theta11^2)$$

Рис. 7. Взятие интеграла I_4 .

I5 =

```
Simplify[ReplaceAll[Integrate[r * Θ[r, z0], {r, r0, r0 + dr0}],
  ReplCoeff]]
```

$$\frac{1}{6} dr0 (3 r0 (\Theta00 + \Theta10) + dr0 (\Theta00 + 2 \Theta10))$$

Рис. 8. Взятие интеграла I_5 .

Пусть, для примера, "большой" прямоугольник покрыт кусочно-равномерной сеткой (Рис. 9). Вдоль оси Or укладывается m_0 конечных элементов, если $0 \leq r < R_0$, и ещё m_1 конечных элементов, если $R_0 \leq r < R_1$. Вдоль оси Oz укладывается n_0 конечных элементов ($0 \leq z < H$). Итого, область Ω разбивается на $(m_0 + m_1) \cdot n_0$ конечных элементов.

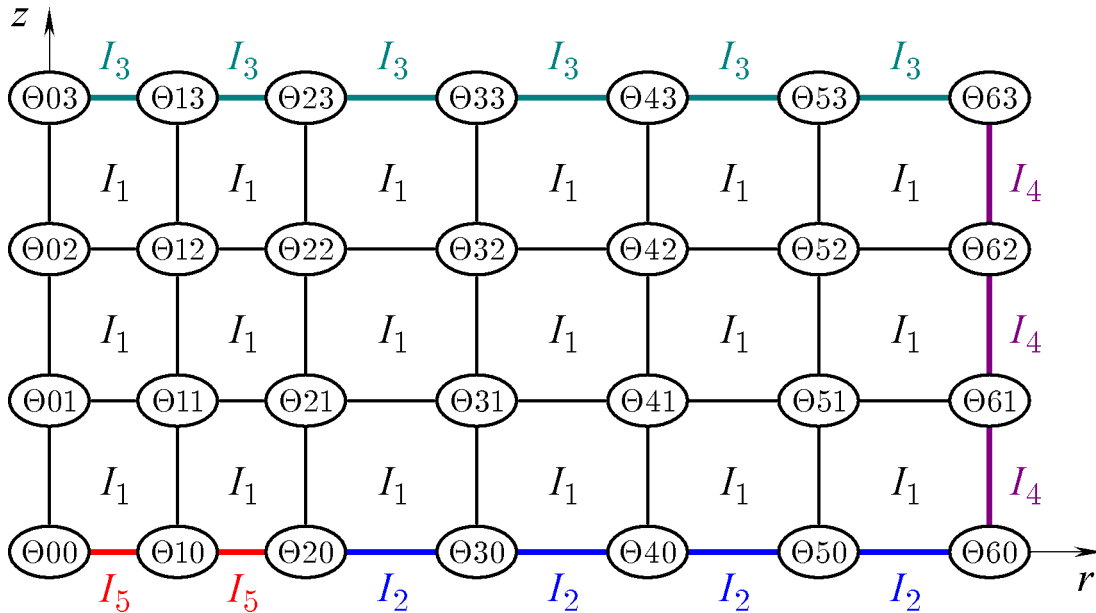


Рис. 9. Вклады, вносимые в Φ конечными элементами.

Накопление интегралов, а также все прочие действия по минимизации функционала производится в документе *FEM01.nb*. Содержание этого документа далее излагается кратко.

Формулы, показанные на Рис. 4–8, пригодны только для начального (примыкающего к нижнему левому углу "большого" прямоугольника) конечного элемента $z_0 \leq z \leq z_1$, $r_0 \leq r \leq r_1$. Достичь того, чтобы формулы для I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 работали в любом из $(m_0 + m_1) \cdot n_0$ конечных элементов, можно заменой переменных в этих формулах. Список таких замен формируется функцией *ReplShift*[*di*, *dj*], параметры которой *di*, *dj* выражают, на сколько шагов вверх (*di*) и вправо (*dj*) текущий конечный элемент отстоит от начального.

В теле функции *MainFunc*[*m0*, *m1*, *n0*] выполняется накопление функционала и нахождение списка тех температур в узловых точках сетки, которые доставляют минимум функционалу.

В теле функции *MainCircle*[*m0*, *m1*, *n0*] производится "сканирование" функции $\mathcal{R}(R_1)$ на некоем промежутке изменения величины R_1 . Величина H , зависящая от R_1 , находится из (26), величина V считается константой.

Численный эксперимент проведён для того же диапазона изменения параметра R_1 и тех же значений фиксированных параметров α , λ , V , R_0 , что были применены при реализации аналитического решения.

На Рис. 10 показан результат работы документа "FEM.nb". Зависимости выражены: **красным цветом** – для $m_0 = 2$, $m_1 = 8$, $n_0 = 5$; **зелёным цветом** – для $m_0 = 4$, $m_1 = 16$, $n_0 = 10$; **синим цветом** – для $m_0 = 6$, $m_1 = 24$, $n_0 = 15$. Зависимость, полученная аналитическим методом (документ "РАМ.nb"), показана чёрным цветом.

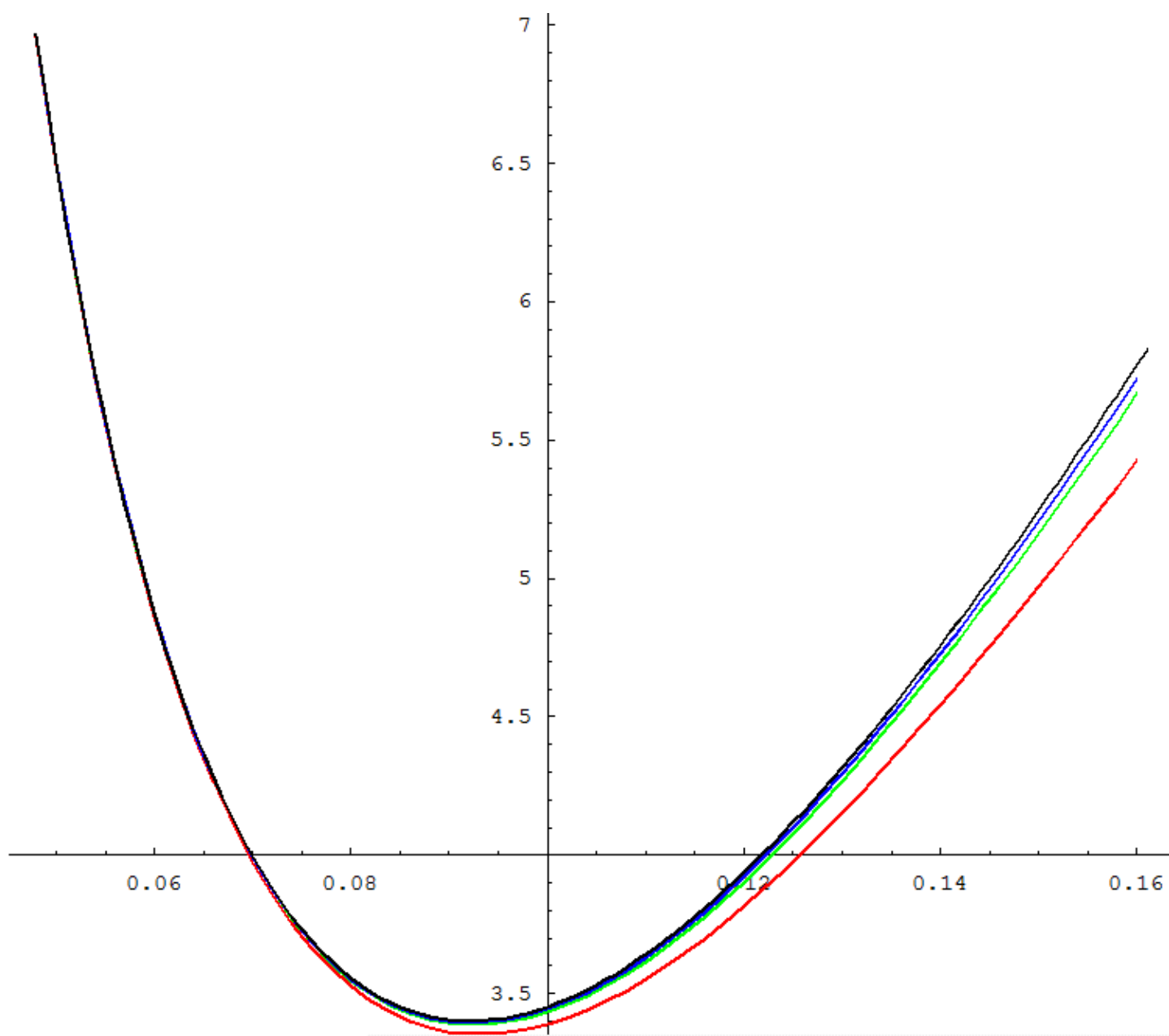


Рис. 10. Зависимость теплового сопротивления охладителя от радиуса R_1 .