NAMA/NIM: KURNIAWAN RIZKI TRINANTA SEMBIRING / 230535607266

PRODI/OFFR: S1 TEKNIK INFORMATIKA / B

MATKUL: MATEMATIKA KOMPUTER 2

Nomor 1:

(a). Mari kita periksa kembali solusi yang diberikan oleh dosen Anda untuk memastikan kita memahami bagaimana bentuk Row Reduced Echelon Form (RREF) *R* diperoleh.

Langkah-langkah:

Kita memiliki dua solusi khusus untuk $A_x = 0$:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kita tahu bahwa bentuk RREF dari A harus menghasilkan nol saat dikalikan dengan x_1 dan x_2.

Misalkan R adalah bentuk RREF dari A:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Menyelesaikan $R_{x1} = 0$:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+a \\ 1+c \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Dari sini, kita dapatkan:

1 + a = 0

1 + c = 0

Sehingga:

a = -1

c = -1

Menyelesaikan $R_{x2} = 0$:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2+b \\ -1+d \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Dari sini, kita dapatkan:

-2 + b = 0

-1 + d = 0

Sehingga:

b = 2

c = 1

Dengan demikian, bentuk RREF dari A adalah:

$$\text{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b). jawaban sebagai berikut:

1. Basis untuk N (A) N(A) (Null Space of A):

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Basis untuk $C(A^T)$ (Row Space of A Column Space Of A^T)

Vektor-vektor ortogonal terhadap x_1 dan x_2 :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

3. Basis untuk C (A) C(A) (Column Space of A):

Meskipun kita tidak mengetahui A secara eksplisit, kita bisa menyatakan bahwa dua kolom pertama dari A adalah basis.

4. Basis untuk N (A^T) N(A^T) (Left Null Space of A):

Dimensi dari N (A^T) N(A^T) adalah 1, tetapi kita tidak memiliki informasi yang cukup untuk menentukan vektor basis yang tepat tanpa mengetahui matriks A. Ini adalah vektor yang ortogonal terhadap kolom pertama dan kedua dari A.

Ringkasan:

dim(C(A))=2

dim(N(A))=2

dim(C(A^T))=2

dim(N(A^T))=1

Dengan basis yang dapat ditentukan dari solusi khusus dan baris dari bentuk RREF dari *A:*

Basis N(A):

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Basis $C(A^T)$C(A^T):

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Nomor 2

(A): Berikut Jawaban nya

Matrix u = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ I = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$U^{-1} = \frac{1}{\det(U)} \cdot \operatorname{adj}(U)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & b/a & c/a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e/d & 0 & 1/d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/f \end{bmatrix}$$

bagi baris pertama dengan a, baris kedua dengan d
Dan baris ketiga dengan f untuk mendapatkan adjoin

Kemudian menghitung determinan dari U

$$\det(U) = a \cdot d \cdot f$$

Jadi hasilnya adalah 1/ adf

Kemudian kalikan hasil determinan diatas dengan adjoin diatas
Sehingga didapatkan hasil seperti

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{df} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{bmatrix}$$

(B): Berikut jawaban nya
Karena kolom-kolom U adalah vektor eigen dari matriks A, mari kita sebut sebagai V1, V2, V3. Karena U adalah segitiga atas, vektor eigen secara jelas bebas linier. Dengan demikian, U memiliki tiga nilai eigen yang berbeda. Sekarang, ingatlah bahwa kolom-kolom matriks segitiga atas adalah vektor eigen jika dan hanya jika matriksnya diagonal. Tetapi, karena U adalah segitiga atas namun tidak tentu diagonal, maka nilai eigen harus merupakan entri diagonalnya. Oleh karena itu, U harusnya diagonal.

(C): Berikut Jawaban nya
Dalam Dekomposisi Nilai Singular (SVD) dari matriks A, dinyatakan sebagai A = UDVT, matriks U dan V adalah matriks ortogonal, sedangkan Σ adalah matriks diagonal yang berisi nilai-nilai singular dari A. Dalam beberapa kasus, matriks U bisa berbentuk segitiga atas, namun tidak selalu diagonal. Ini bertentangan dengan syarat agar U menjadi matriks ortogonal dalam SVD, karena invers dari matriks segitiga atas (dalam hal ini, U) mungkin bukanlah transposisinya. Oleh karena itu, U yang disebutkan dalam konteks ini tidak boleh identik dengan matriks yang memiliki faktor pertama dalam Dekomposisi Nilai Singular dari A

Nomor 6

(a) berikut jawabannya:

1. Hitung proyeksi ortogonal dari v ke u:

$$\mathrm{proj}_u(v) = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

2. Hitung vektor w yang tegak lurus terhadap u:

$$w = v - \mathrm{proj}_u(v)$$

$$w = v - \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

(b) Berikut jawabannya:
Normalisasi u menjadi vektor q_1 :

$$q_1 = \frac{u}{\|u\|}$$

Hitung proyeksi ortogonal v ke q_1 :

$$\text{proj}_{q_1}(v) = \frac{v \cdot q_1}{q_1 \cdot q_1} q_1$$

Hitung vektor v yang tegak lurus terhadap q_1 :

$$v_2 = v - \text{proj}_{q_1}(v)$$

Normalisasi v_2 menjadi vector q_1

$$q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$$

Matriks Q terdiri dari vektor-vektor unit ortogonal ini:

$$Q = [q_1\, q_2]$$

$$R = Q^T A$$

Karena $A = [u\, v]$, maka R memiliki bentuk:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

Di sini, r 1 dan r 2 adalah vektor-vektor baris yang merepresentasikan koefisien dari kombinasi linear u u dan v v

(C) Berikut jawabannya:
1. Karena $A = QR$, maka kita tahu bahwa $A^T A = R^T Q^T QR$.

2. Kita perlu mencari $(A^T A)^{-1}$, yang merupakan invers dari $(R^T Q^T QR)$.

3. Karena R adalah matriks segitiga atas, R^T juga akan menjadi matriks segitiga atas.

4. Kita juga tahu bahwa matriks segitiga atas dan matriks ortogonal (seperti Q) bersifat invarian terhadap tranpos, yaitu $(R^T)^{-1} = R$ dan $(Q^T)^{-1} = Q$.

5. Jadi, $(A^T A)^{-1} = (R^T Q^T QR)^{-1} = R^{-1}(Q^T)^{-1}Q^{-1}R^{-T}$.
6. Karena R adalah matriks segitiga atas, inversnya adalah juga matriks segitiga atas, jadi $R^{-1}=R^T$.

7. Karena Q adalah matriks ortogonal, inversnya adalah tranposnya sendiri, yaitu $(Q^T)^{-1} = Q$.

8. Maka, $(A^T A)^{-1} = R^T Q^T Q^{-1} R^{-T} = R^T R^{-T}$. .

9. Dengan demikian, proyeksi P ke ruang yang dibentuk oleh u dan v adalah:

$$P = QR(Q^T Q)^{-1} Q^T = QR(I)^{-1} Q^T = QRQ^T = QQ^T$$

di mana kita menggunakan fakta bahwa $Q^T Q = I$ karena Q adalah matriks ortogonal.

Jadi, langkah-langkahnya adalah untuk menemukan invers dari $A^T A$ menggunakan properti matriks segitiga atas dan ortogonal, dan kemudian menggunakan hasil ini untuk mengekspresikan P hanya dalam terminologi Q.

NOMOR 7

(A).

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertama determinan kan matrix c dengan lambda

$$\det(C - \lambda I) = 0$$

$$C - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(C - \lambda I) = (-\lambda) \cdot \det \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda^2 + 0) = \lambda^3$$

Lalu dialanjutkan dengan perhitungan determinan kedua

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2$$

$$\det(C - \lambda I) = (-\lambda) \cdot \lambda^3 - (-\lambda^2) = -\lambda^4 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 1) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Dan dari perhitungan diatas didapatkan hasil seperti ini

λ=0,0,1,−1

Selanjutnya mencari eguivalen dari C^2

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan eguivalen C bisa didapdatkan bahwa

0^2 = 0

1^2 = 1
-1^2 = 1
Jadi eguivalen dari C^2 adalah

0,0,1,1

(B). invers dari C^-1

$$C^{-1} = C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CC^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I$$

Kemudaian menghitung invers dari (C^2)^-1

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C^2)^{-1} = (C^2)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C. determinants of C and C+I and C +21.
Det C = -1

$$C + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

upper triangular form

$$\begin{gathered} R_1 : [1, 0, 0, 1] \\ R_2 : [1, 1, 0, 0] \rightarrow R_2 - R_1 = [0, 1, 0, -1] \\ R_3 : [0, 1, 1, 0] \\ R_4 : [0, 0, 1, 1] \end{gathered}$$

reduce the third row:

$$\begin{gathered} R_3 : [0, 1, 1, 0] \rightarrow R_3 - R_2 = [0, 0, 1, 1] \\ R_4 : [0, 0, 1, 1] \rightarrow R_4 - R_3 = [0, 0, 0, 0] \end{gathered}$$

sehingga didapatkan hasil C+1 =

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Menghitung C+2I

$$C + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(C + 2I) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(C + 2I) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

compute each of these 3x3 determinants

$$\det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 0) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 2 - 0 \cdot 0) = 1 \cdot 2 = 2$$

didapatkan hasil

$\det(C+2I)=2\cdot 8-2=16-2=14$

$\det(C+2I)=14$