Observatoire de Paris, Universités Paris 6, Paris 7 et Paris 11,
École Normale Supérieure

Master *Astronomie, Astrophysique et Ingénierie Spatiale*
Année M2 - Parcours Recherche

2013 - 2014

UE FC5

Relativité générale

Éric Gourgoulhon

Laboratoire Univers et Théories (LUTH)
CNRS / Observatoire de Paris / Université Paris Diderot (Paris 7)
eric.gourgoulhon@obspm.fr

http://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relat.html

Chapitre 2

Cadre géométrique

version 2013-2014

Sommaire

2.1 Introduction

L'objectif de ce premier cours est d'introduire le cadre mathématique de la relativité générale. On privilégie une approche géométrique et picturale — basée sur l'algèbre linéaire telle qu'enseignée dans les deux premières années d'université ou de classes préparatoires — à une approche basée sur les systèmes de coordonnées. Pour ne pas être trop formel, le cours repose sur de nombreuses figures et des exemples issus de l'espace-temps de Minkowski. Une importance particulière est donnée à la notion de ligne d'univers.

2.2 L'espace-temps relativiste

2.2.1 Les quatre dimensions

La relativité a opéré la fusion de l'*espace* et du *temps*, deux notions qui étaient complètement distinctes en mécanique galiléenne. Il faut quatre nombres pour déterminer un événement dans le « continuum » d'espace et temps : trois pour sa localisation spatiale

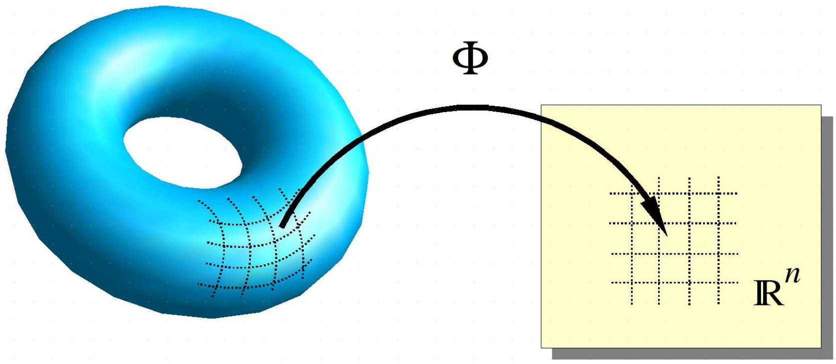

FIGURE 2.1 – Variété : vue de près, une variété ressemble à $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ sur la figure), mais cela n'est plus nécessairement vrai au niveau global.

(par exemple ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou sphériques (r, θ, ϕ)) et un pour sa date. La structure mathématique correspondant à ce « continuum » à quatre dimensions est celle de *variété*. Avant de décrire cette dernière, il convient d'éclaircir un point : vouloir former un continuum d'espace-temps signifie implicitement que les grandeurs d'espace et de temps se voient donner la même dimension physique. Par convention, nous choisirons cette dimension être celle d'une longueur (donc mesurée en mètres dans le Système International). Pour obtenir les temps dans la dimension usuelle, il faut donc introduire un facteur de conversion qui a la dimension d'une vitesse : il s'agit de la constante

$$\boxed{c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}. \tag{2.1}$$

Au risque de tuer le suspense, disons tout de suite que cette constante correspondra à la vitesse de la lumière dans le vide telle que mesurée par un observateur localement inertiel.

2.2.2 Notion de variété

Une *variété* est un ensemble qui « ressemble localement » à $\mathbb{R}^n$ (dans le cas présent $n = 4$). Plus précisément, une *variété de dimension 4* est un espace topologique $\mathscr{E}$ tel qu'en chacun de ses points, on peut définir un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^4$ ([1]). En langage imagé, cela veut dire que sur toute partie pas trop grosse de la variété, on peut étiqueter les points par 4 nombres. Cela est représenté schématiquement sur la figure 2.1. On appelle *système de coordonnées* (ou *carte*) sur une partie ouverte $\mathscr{U}$ d'une variété $\mathscr{E}$ tout « étiquetage » des points de $\mathscr{U}$, c'est-à-dire tout homéomorphisme [2]

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathscr{U} \subset \mathscr{E} & \longrightarrow & \Phi(\mathscr{U}) \subset \mathbb{R}^4 \\ & P & \longmapsto & (x^0, x^1, x^2, x^3) \end{array} \tag{2.2}$$

1. La définition complète d'une variété fait intervenir deux propriétés supplémentaires qui permettent d'éviter des cas pathologiques : (i) l'espace topologique $\mathscr{E}$ doit être séparé et (ii) il doit être doté d'une base dénombrable, c'est-à-dire d'une famille $(\mathscr{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'ouverts tel que tout ouvert de $\mathscr{E}$ puisse s'écrire comme l'union (éventuellement infinie) de membres de cette famille.

2. rappelons qu'un *homéomorphisme* entre deux espaces topologiques (ici $\mathscr{U} \subset \mathscr{E}$ et $\Phi(\mathscr{U}) \subset \mathbb{R}^4$) est une bijection continue et dont l'application réciproque est également continue.