Hoja de Trabajo No.3

Kurth Michael Aguilar Ecobar - 20181242

Fecha de entrega: 16 de agosto de 2018

Ejercicio No.1

Instrucciones: Utilizando la definicion de suma ($\oplus$) para los numeros naturales unarios, llevar a cabo la suma entre tres $[s(s(s(0)))]$ y cuatro $[s(s(s(s(0))))]$. Debe elaborar todos los pasos de forma explicita.

Como referencia, se presenta nuevamente la definición de suma para numeros naturales unarios:

$$n \oplus m := \begin{cases} m & \text{si } n = o \\ n & \text{si } m = o \\ s(i \oplus m) & \text{si } n = s(i) \end{cases}$$

Solucion:

- En este caso se plantea la expresión de $n \oplus m$ donde m debe ser sucesor de cualquier numero: $s(i)$. Donde nuestro $s(i)$ equivale a $s(s(s(0)))$.
- n equivale a tres $[s(s(s(0)))]$.
- **Explicacion de la suma entre** $(n \oplus s(i))$

$$n \oplus m$$
$$n \oplus s(i)$$
$$(s(s(s(0)))) \oplus s(s(s(0)))) \ = \ s[s(s(0)))) \oplus s(s(s(0)))]$$
$$s(s(s(s(0)))) \oplus s(s(0))))$$
$$s(s(s(s(s(0)))) \oplus s(0))))$$
$$s(s(s(s(s(s(0)))) \oplus 0) \Rightarrow \text{ Esta forma demuestra el caso en el cual } n \oplus 0 \ = \ n$$
$$[s(s(s(s(s(s(s(0)))))))] \ = \ \text{A la suma buscada de } cuatro \oplus tres$$

Ejercicio No.2

Instrucciones: Definir inductivamente una función para multiplicar ($\otimes$) numeros naturales unarios.

$$n \otimes m := \begin{cases} 0 & \text{si } n = o \ \vee \ m = 0 \\ n \otimes s(m) & \text{si } n \oplus n \otimes m \end{cases}$$

***Nota:** En este caso en la definicion de la multiplicacion con numeros unarios, se definieron los casos posibles que incluyen un caso base = 0, para demostrar la solucion en la presentacion de dicho caso. Al igual que en esta definicion se presenta la definicion para el sucesor de un numero en este caso $s(m)$, para de esa manera generalizar los casos posibles de cualquier numero unario. Como se aprecia, se utilizo el operado de suma $\oplus$, que solo significa que tenemos la necesidad de eliminar mas de un operador. La expresion $n \oplus n \otimes m$ es una suma unaria que tiene como caracteristica un producto en su segunda expresion. Para operarlo se puede usar las operaciones aritmeticas ya conocidas.

Ejercicio No.3

Instrucciones: Verifique que su definición de multiplicación es correcta multiplicando los siguientes valores:

- $s(s(s(0))) \otimes 0$
  - **Verificacion:**

    ***Nota:** En este caso la presentacion de la operacion con la expresion $n \oplus n \otimes m$, es imposible, porque de acuerdo a los Axiomas de Peano 0 no tiene predecesor. Sin embargo, en la definicion de la multiplicacion se definio que en el caso de que $m \vee n = 0$ el resultado daria 0.

- $s(s(s(0))) \otimes s(0)$
  - **Verificacion:**

$$\begin{gathered} s(s(s(0))) \otimes s(0) = s(s(s(0))) \oplus s(s(s(0))) \otimes 0 \\ \cdots = s(s(s(0))) \oplus 0 \\ \cdots = s(s(s(0))) \\ s(s(s(0))) = s(s(s(0))) \end{gathered}$$

- $s(s(s(0))) \otimes s(s(0))$
  - **Verificacion:**

$$\begin{gathered} s(s(s(0))) \otimes s(s(0)) = s(s(s(0))) \oplus s(s(s(0))) \otimes s(0) \\ \cdots = s(s(s(0))) \oplus s(s(s(0))) \\ \cdots = s(s(s(s(s(0))))) \\ s(s(s(s(s(0))))) = s(s(s(s(s(0))))) \end{gathered}$$

Ejercicio No.4

Instrucciones: Demostrar utilizando induccion.

- $a \oplus s(s(0)) = s(s(a))$
  - **Demostracion:**
    - **Caso Base:** $a = 0$

$$0 \oplus s(s(0)) = s(s(0))$$
$$s(s(0)) = s(s(0))$$

    - **Caso Inductivo:** $\forall\ a$
      - **Hipotesis Inductiva:** $a \oplus s(s(0)) = s(s(a))$
      - **Sucesor:** $s(a) \ \vee \ a \oplus 1$

$$s(a) \oplus s(s(0)) = s(s(s(a)))$$
$$s(a) \ominus s(0) \oplus s(s(0)) = s(s(s(a))) \ominus s(0)$$
$$a \oplus s(s(0)) = s(s(s(a))) \ominus s(0)$$
$$a \oplus s(s(0)) = s(s(a))$$

- $a \otimes b = b \otimes a$
  - **Demostracion:**
    - **Caso Base:** $a = 0$

$$0 \otimes b = b \otimes 0$$
$$0 = 0$$

    - **Caso Inductivo:** $\forall\ a$
      - **Hipotesis Inductiva:** $a \otimes b = b \otimes a$
      - **Sucesor:** $a + 1$

$$(a \oplus 1) \otimes b = b \otimes (a \oplus 1)$$
$$ab \oplus b = ba \oplus b$$
$$ab \oplus b \ominus b = ba \oplus b \ominus b$$
$$ab = ba$$
$$a \otimes b = b \otimes a$$

- $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$
  - **Demostracion:**
    - **Caso Base:** $c = 0$

$$a \otimes (b \otimes 0) = (a \otimes b) \otimes 0$$
$$a \otimes (0) = (a \otimes b) \otimes 0$$
$$0 = 0$$

- **Caso Inductivo:** $\forall\ c$
  - **Hipotesis Inductiva:** $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$
  - **Sucesor:** $c + 1$

$$a \otimes (b \otimes (c \oplus 1)) = (a \otimes b) \otimes (c \oplus 1)$$
$$a \otimes (bc \oplus b) = abc \oplus ab$$
$$abc \oplus ab = abc \oplus ab$$
$$abc \oplus ab \ominus ab = abc \oplus ab \ominus ab$$
$$abc = abc$$
$$a \otimes b \otimes c = a \otimes b \otimes c$$
$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$$

- $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$
  - **Demostracion:**
    - **Caso Base:** $c = 0$

$$(a \oplus b) \otimes 0 = (a \otimes 0) \oplus (b \otimes 0)$$
$$(a0 \oplus b0) = (0) \oplus (0)$$
$$(0 \oplus 0) = 0$$
$$0 = 0$$

- **Caso Inductivo:** $\forall\ c$
  - **Hipotesis Inductiva:** $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$
  - **Sucesor:** $c + 1$

$$(a \oplus b) \otimes (c \oplus 1) = (a \otimes (c \oplus 1)) \oplus (b \otimes (c \oplus 1))$$
$$ac \oplus bc \oplus a \oplus b = (ac \oplus a) \oplus (bc \oplus b)$$
$$ac \oplus bc \oplus a \oplus b = ac \oplus bc \oplus a \oplus b$$
$$ac \oplus bc \oplus a \oplus b \ominus a \ominus b = ac \oplus bc \oplus a \oplus b \ominus a \ominus b$$
$$ac \oplus bc \ = ac \oplus bc$$
$$(a \oplus b) \otimes c = ac \oplus bc$$
$$(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$$