

SZAKDOLGOZAT

# Schrödinger macskája dobozban: falak közé zárt részecske kvantumállapotai homogén külső térben

KÜRTI ZOLTÁN

*Fizika BSc., fizikus szakirány*



Témavezetők:

DR. CSERTI JÓZSEF

egyetemi tanár

DR. GYÖRGYI GÉZA

egyetemi docens

**Eötvös Loránd Tudományegyetem**  
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

**2021**

## Kivonat

Kvantummechanikai iskolapélda a homogén térbe helyezett egydimenziós részecske. Ezt három dimenzióra kiterjesztve és két fal közé zárva keressük az energia sajátállapotokat. Annyi előrelátható, hogy a nyílt vagy félig nyílt esetekben használható, reguláris Airy függvény itt nem elegendő a megoldáshoz, ennyiben túlmegyünk a tankönyvi feladaton. Az aszimptotikus függvényalakok segítségével előállítjuk a magasan gerjesztett állapotok energiáit és hullámfüggvényeit, s ezeket összehasonlítjuk a közvetlenül a Bohr–Sommerfeld-módszerrel kapott eredménnyel. Numerikusan szemléltetjük fizikailag érdekes kezdőállapotok időfejlődését. Vizsgáljuk a rezolvenst és az állapotsűrűséget, továbbá a sokrészecske rendszerekre való általánosítás lehetőségét.

Egydimenziós,  $m$  tömegű, lineáris  $Fx$  potenciálban mozgó kvantumos részecskét zárjunk  $L$  hosszú, merev falú dobozba (ekvivalens a padló és mennyezet között függőlegesen pattogó kvantum labdával). A stacionárius Schrödinger-egyenletből kiindulva, a határfeltételek figyelembe vételével, írjuk fel az energia sajátértékeket meghatározó szekuláris egyenletet, melyet oldjunk meg numerikusan. Ábrázoljuk az alacsonyabb nívókat a doboz méretének változtatása mellett, és szemléltessük grafikusán a stacionárius hullámfüggvényeket. A szekuláris egyenletben fellépő függvények aszimptotikáinak ismeretében a magasabb nívókra próbáljunk egyszerűbb implicit formulát adni. Végezzük el a szemiklasszikus kvantálást is, hasonlítsuk össze az előző közelítő eredménnyel, és numerikusan néhány, az egzakt egyenletből kapott nívóval.

További kérdések: (a) Számítsuk ki a nívókat expliciten, kicsiny  $L$ -ek mellett. (b) Mely paraméterek mellett esik egybe  $FL$  éppen az alapállapot energiával? (Ilyenkor a klasszikus labda éppen eléri a mennyezetet.) (c) Mutassuk meg, hogy e határesetnél kisebb  $L$  belméret mellett minden nívó  $FL$  fölé esik. (d) Írjuk fel a szemiklasszikus stacionárius hullámfüggvényeket, s grafikusán hasonlítsuk össze őket az egzaktakkal – mikor jó a közelítés? (e) Írjuk fel a kicsiny  $L$  melletti hullámfüggvényeket expliciten, ezeket szintén hasonlítsuk össze a valódiakkal.

- Miért nem Rodnik osztályba tartozik
- $f_x, f_y = 0$  külön tárgyalás
- program leírása

## Köszönetnyilvánítás

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2. Egy dimenziós eset</b>	<b>1</b>
2.1. Kvantumos közelítése . . . . .	3
2.2. Szemiklasszikus közelítés . . . . .	3
2.3. Green függvény . . . . .	5
2.3.1. Egzakt Green-függvény . . . . .	6
2.3.2. Green-függvény perturbáció számítással . . . . .	9
<b>3. Kiterjesztés több dimenzióra</b>	<b>11</b>
<b>4. Numerikus számítások</b>	<b>13</b>
4.1. Momentumok időfejlődése . . . . .	13
4.2. Hullámfüggvény időfejlődése . . . . .	14
4.2.1. 1D . . . . .	14
4.2.2. 2D . . . . .	14
<b>5. Plafon érintés 1D</b>	<b>14</b>

## Ábrák jegyzéke

2.1. Energiaszintek $L$ függvényében . . . . .	2
2.2. Szemiklasszikus közelítés . . . . .	4
2.3. Szemiklasszikus közelítés . . . . .	5
2.4. Állapotsűrűség a Green-függvényből . . . . .	8
2.5. Állapotok száma a Green-függvényből . . . . .	9
2.6. Rövid cím . . . . .	11
4.1. Várható értékek és szórások időfejlődése . . . . .	13

## Táblázatok jegyzéke

## 1. Bevezetés

notin

## 2. Egy dimenziós eset

A probléma egy 1D dobba zárt résecske homogén erőterben.  $F(x) = -F$ , azaz  $V(x) = Fx$ . Az egyenlethez tartozó határfeltételek, ha a doboz hossza  $L$ :

$$\phi|_0 = \phi|_L = 0 \quad (2.1)$$

A megoldandó időfüggetlen Schrödinger-egyenlet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} + Fx\phi = E\phi \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{2mFx}{\hbar^2}\phi = -\frac{2mE}{\hbar^2}\phi \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \left( \frac{2mF}{\hbar^2}x - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \phi = 0 \quad (2.4)$$

Az Airy egyenlet ilyen alakra hozható a változó affín lineáris transzformációjával:

$$\frac{d^2y}{dx'^2} - x'y = 0 \quad (2.5)$$

$x' = ax - bE$ , azaz  $\frac{d}{dx} = a\frac{d}{dx'}$ :

$$\frac{d^2y}{dx'^2} - (a^3x - a^2bE)y = 0 \quad (2.6)$$

Az együtthatók összevetése alapján  $a = \sqrt[3]{\frac{2mF}{\hbar^2}}$  és  $b = \sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 F^2}}$ . Így a Schrödinger-egyenlet megoldása:

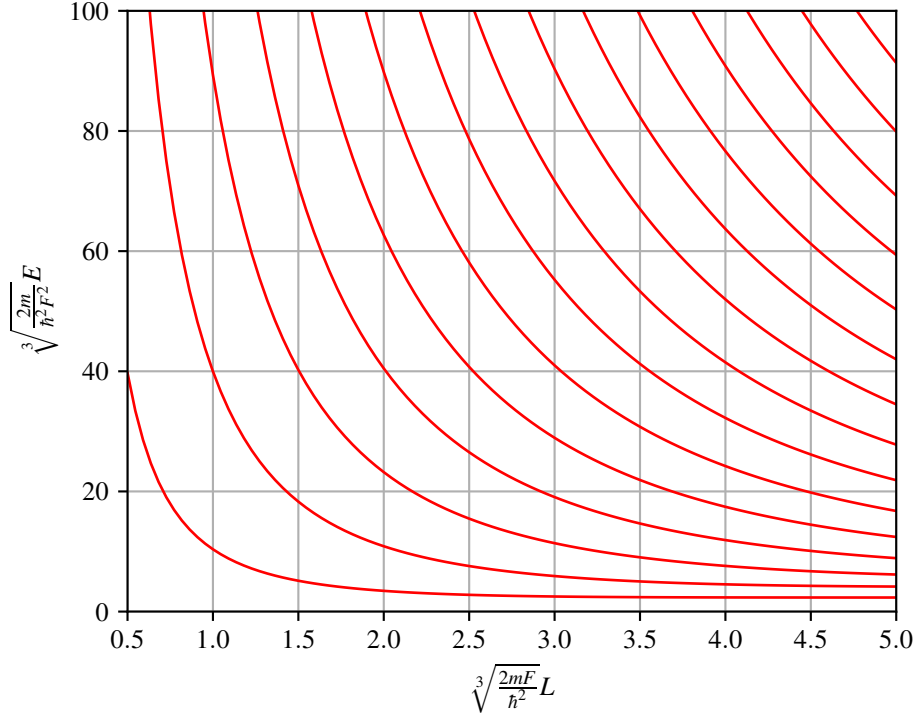
$$\phi(x) = y(x') = y\left(\sqrt[3]{\frac{2mF}{\hbar^2}}x - \sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 F^2}}E\right) \quad (2.7)$$

, ahol  $y(x) = \alpha \text{Ai}(x) + \beta \text{Bi}(x)$ . A  $\phi|_0 = 0$  feltételből következik, hogy  $\phi \propto \text{Bi}(-bE) \text{Ai}(ax - bE) - \text{Ai}(-bE) \text{Bi}(ax - bE)$ . A második határfeltétel pedig meghatározza a lehetséges energiákat. A feltétel:

$$\text{Bi}(-bE) \text{Ai}(aL - bE) - \text{Ai}(-bE) \text{Bi}(aL - bE) = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{Ti}(aL - bE) - \text{Ti}(-bE) = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{Ti}\left(\sqrt[3]{\frac{2mF}{\hbar^2}}L - \sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 F^2}}E\right) - \text{Ti}\left(-\sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 F^2}}E\right) = 0 \quad (2.10)$$



2.1. ábra. Energiaszintek  $L$  függvényében

Amikor  $FL \ll \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ , a potenciál jól közelíthető konstans potenciállal, mivel az alapállapot energiájához képest is elhanyagolható a lineáris potenciál eltérése a konstans potenciáltól. Eben a esetben  $E \propto n^2$ .  $E \ll FL$  esetben az energiaszintek jó közelítéssel konstanssá válnak. Ennek az oka, hogy  $\lim_{L \rightarrow \infty} \psi(x) = \alpha \text{Ai}(ax - b)$ , mert a  $\text{Bi}(x)$  exponenciálisan növekszik nagy  $x$ -ek esetén. Ebben az eseten az energiaszinteket a  $\text{Ai}\left(-\sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 F^2}}E\right) = 0$  egyenlet határozza meg. Ezeket az aszimptotikus viselkedéseket a 2.1. ábra jól mutatja.

TODO: link 1D videóról

## 2.1. Kvantumos közelítése

$x \rightarrow \infty$  aszimptotikus alak:

$$\text{Ai}(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}(x^{-5/4}) \quad (2.11)$$

$$\text{Bi}(-x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}(x^{-5/4}) \quad (2.12)$$

$$\text{Ti}(-x) = -\cot\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}(x^{-5/4}) \quad (2.13)$$

Ezzel a közelítéssel a 2.9. egyenlet alakja:

$$\cot\left(\frac{2}{3}(b-aL)^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{2}{3}b^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.14)$$

, azaz

$$\frac{2}{3}b^{3/2} - \frac{2}{3}(b-aL)^{3/2} = n\pi \quad (2.15)$$

. Az  $a$  és  $b$  behelyettesítésével az egyenlet

$$\frac{2\sqrt{2m}}{3F\hbar} \left(E^{3/2} - (E-FL)^{3/2}\right) = n\pi \quad (2.16)$$

Ez megegyezik a szemiklasszikus kvantálással kapott eredménnyel, ami azt jelenti, hogy a szemiklasszikus közelítés jól működik nagy energiáknál, hibája  $\mathcal{O}(E^{-5/4})$  nagyságrendű.

## 2.2. Szemiklasszikus közelítés

$$nh = \oint p dq = \quad (2.17)$$

$E/F < L$  esete:

$$2 \int_0^{E/F} \sqrt{2m(E-Fx)} dx = -\frac{2}{3mF} (2m(E-Fx))^{3/2} \Big|_0^{E/F} = \frac{4\sqrt{2m}E^{3/2}}{3F} \quad (2.18)$$

$$E_n = \left(\frac{3nhF}{4\sqrt{2m}}\right)^{2/3} \quad (2.19)$$

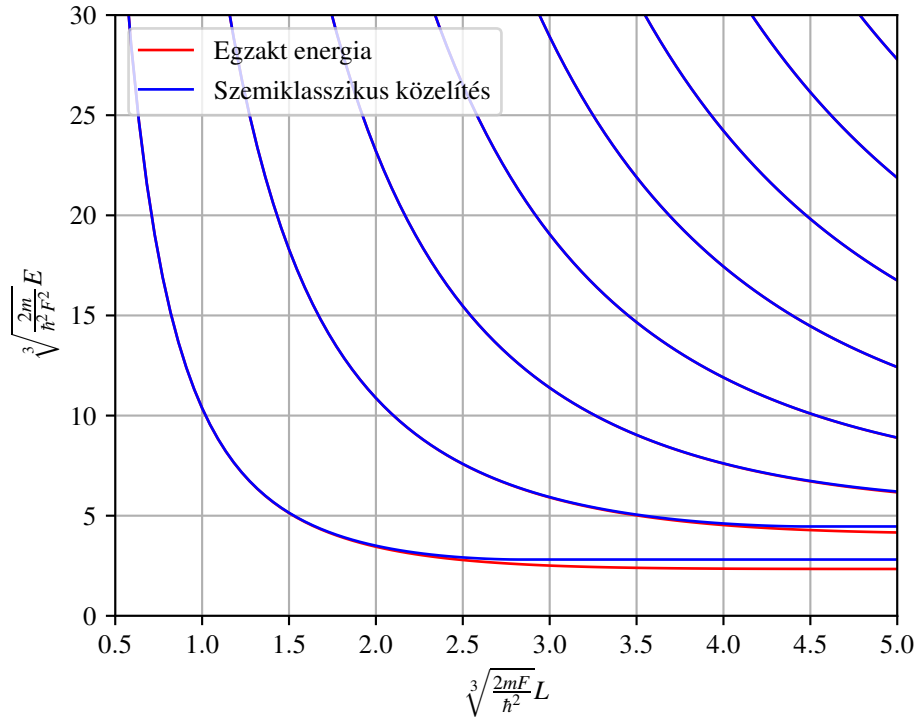
$E/F > L$  esete:

$$-\frac{2}{3mF} (2m(E-Fx))^{3/2} \Big|_0^L = \frac{4\sqrt{2m}}{3F} \left(E^{3/2} - (E-FL)^{3/2}\right) = nh \quad (2.20)$$

$E \gg FL$  esetén a különbség az  $E^{3/2}$  függvény deriváltjának segítségével helyettesíthető:

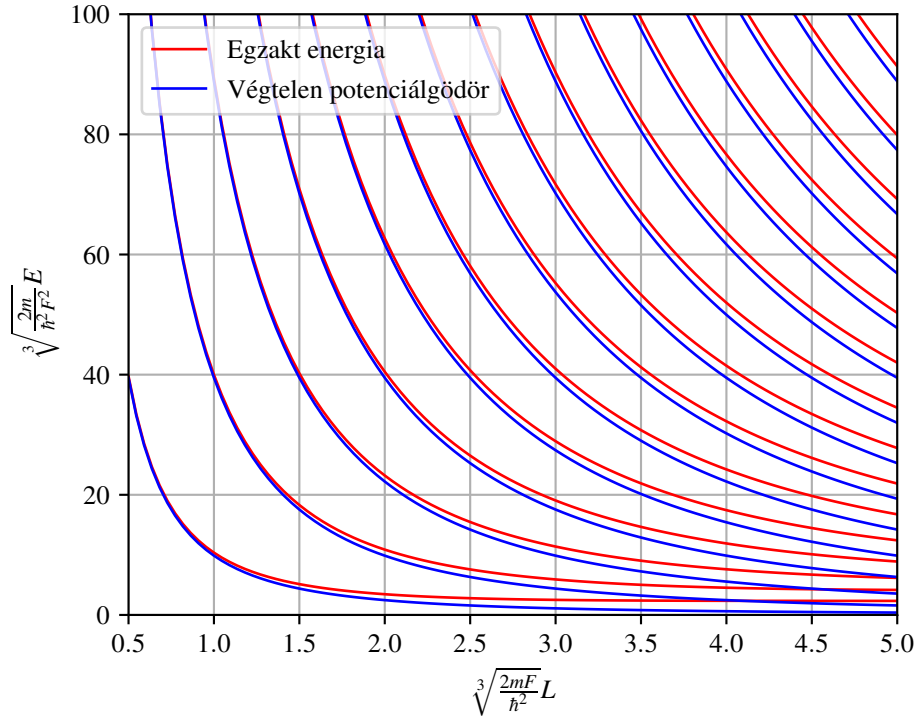
$$nh \approx 2\sqrt{2m}E^{1/2}L \quad (2.21)$$

$$E_n \approx \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \quad (2.22)$$



2.2. ábra. Szemiklasszikus közelítés





2.3. ábra. Szemiklasszikus közelítés

### 2.3. Green függvény

A rezolvens operátor definíciója

$$\hat{G}(E) = \frac{1}{\hat{H} - E} \quad (2.23)$$

és ezen operátorhoz tartozó két változós függvény a Green-függvény.

$$G(x, y; E) = \langle x | G(E) | y \rangle \quad (2.24)$$

A Green-függvény név indokolt, és ennek a segítségével fogom meghatározni a Green-függvényeket konkrét esetben. A teljességi reláció beszúrásával látható, hogy a kvantummechanikai Green-függvény megegyezik a differenciálegyenletek elméletéből ismert Green-függvénnyel.

$$(\hat{H} - E) \hat{G}(E) = \hat{I} \quad (2.25)$$

$$\int dx' \langle x | (\hat{H} - E) | x' \rangle \langle x' | \hat{G}(E) | y \rangle = \langle x | \hat{I} | y \rangle = \delta(x - y) \quad (2.26)$$

A  $\langle x | (\hat{H} - E) | x' \rangle$  maggal vett konvolúció a  $\hat{H} - E$  operátor hatása. Ezért

$$(\hat{H}_x - E) G(x, y; E) = \delta(x - y) \quad (2.27)$$

ami a differenciálegyenletek elméletéből ismert Green-függvény definíciója. Ebben a konkrét esetben

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + Fx - E \right) G(x, y; E) = \delta(x - y) \quad (2.28)$$

### 2.3.1. Egzakt Green-függvény

ami azt jelenti, hogy az  $x < y$  tartományban

$$G(x, y; E) = C_1 \text{Ai} \left( \sqrt[3]{\frac{2mF}{\hbar^2}} x - \sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 F^2}} E \right) + C_2 \text{Bi} \left( \sqrt[3]{\frac{2mF}{\hbar^2}} x - \sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 F^2}} E \right) \quad (2.29)$$

illetve az  $x > y$  tartományban

$$G(x, y; E) = C_3 \text{Ai} \left( \sqrt[3]{\frac{2mF}{\hbar^2}} x - \sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 F^2}} E \right) + C_4 \text{Bi} \left( \sqrt[3]{\frac{2mF}{\hbar^2}} x - \sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 F^2}} E \right) \quad (2.30)$$

, ahol a  $C$  együtthatók függhetnek  $y$  és  $E$  értékétől. A  $C$  együtthatók meghatározásához a doboz eredeti határfeltételeit  $x = 0$  és  $x = L$  pontban, valamint az  $x = y$  pontban a 2.28. egyenlet  $y$  körüli integrálásából kapott feltételeket kell felhasználni. A doboz falára vonatkozó határfeltételek:

$$G(x, y; E)|_{x=0} = 0 \quad (2.31)$$

$$G(x, y; E)|_{x=L} = 0 \quad (2.32)$$

A 2.28. egyenlet  $\int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} dx' \int_y^{x'} dx$  szerinti integrálja az  $\epsilon \rightarrow 0^+$  határesetben:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} G(x, y; E)|_{x=y-\epsilon}^{x=y+\epsilon} = 0 \quad (2.33)$$

A jobb oldal integrálja  $(x - y) \theta(x - y)|_{x=y-\epsilon}^{x=y+\epsilon}$ , ami a határesetben 0. Az  $(Fx - E) G(x, y; E)$  integrálja is 0 a határesetben, mert az eredeti függvény is folytonos, így az integrálja is. A 2.28. egyenlet  $x$  szerinti integrálja  $y$  körüli  $\epsilon$  sugarú környezetében az  $\epsilon \rightarrow 0^+$  határesetben:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial x} G(x, y; E) \Big|_{x=y-\epsilon}^{x=y+\epsilon} = -\frac{2m}{\hbar^2} \quad (2.34)$$

Itt a jobb oldal integrálja  $\theta(x-y)|_{x=y-\epsilon}^{x=y+\epsilon} = 1$  a határesetben. A bal oldalon az előzőhöz hasonló módon csak a derivált integrálja marad meg. A 2.29. és a 2.30. egyenlet behelyettesítése meghatározza a  $C$  együtthatókra vonatkozó egyenleteket:

$$\frac{C_2}{C_1} = -\text{Ti}(-bE) \quad (2.35)$$

$$\frac{C_4}{C_3} = -\text{Ti}(aL - bE) \quad (2.36)$$

$$\frac{C_3}{C_1} = \frac{\text{Ti}(ay - bE) + \text{Ti}(-bE)}{\text{Ti}(ay - bE) + \text{Ti}(aL - bE)} \quad (2.37)$$

TODO:  $b$  lecserélése  $bE$ -re az előző részekben.

$$C_1 = -\frac{2m}{a\hbar^2} \frac{1}{\left(\left(\frac{C_3}{C_1} - 1\right) \text{Ai}'(ay - bE) + \left(\frac{C_4}{C_3} \frac{C_3}{C_1} - \frac{C_2}{C_1}\right) \text{Bi}'(ay - bE)\right)} \quad (2.38)$$

$$C_1 = -\frac{a^2}{F} \frac{1}{\left(\left(\frac{C_3}{C_1} - 1\right) \text{Ai}'(ay - bE) + \left(\frac{C_4}{C_3} \frac{C_3}{C_1} - \frac{C_2}{C_1}\right) \text{Bi}'(ay - bE)\right)} \quad (2.39)$$

A 2.35-2.38, 2.29. és a 2.30. egyenletek explicit, analitikus módon előállítják a  $G(x, y; E)$  Green-függvényt.

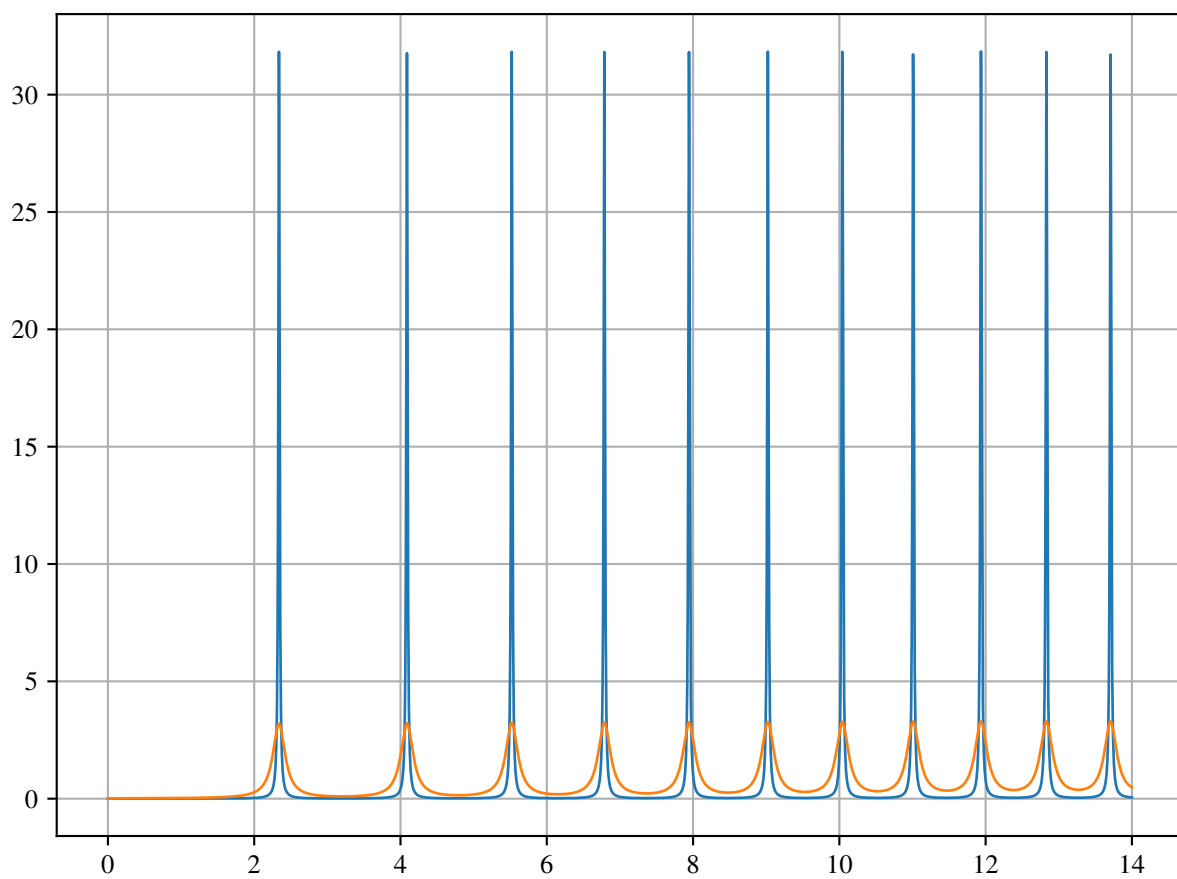
A rezolvens operátornak pólusai vannak a rendszer  $E_k$  sajátenergiáinál:

$$\hat{G}(E) = \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{E_n - E} \quad (2.40)$$

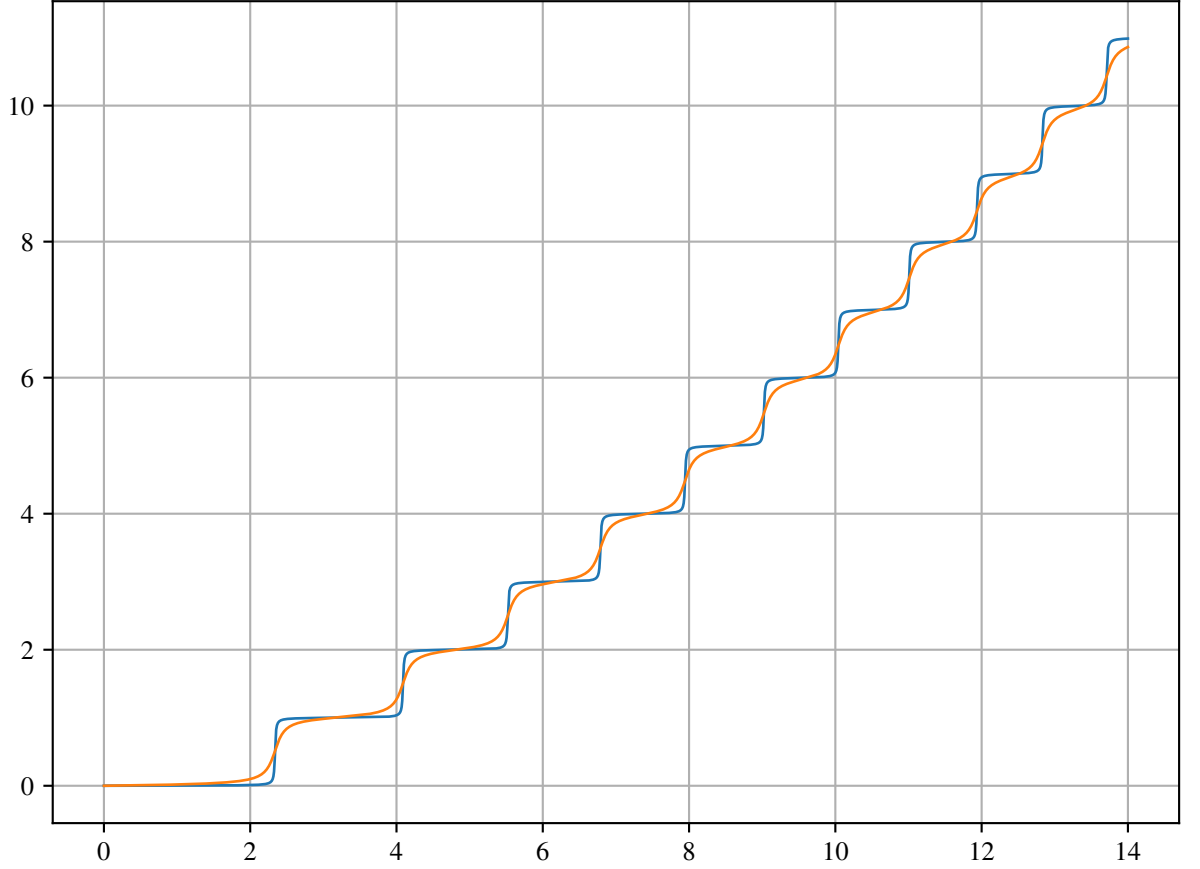
Így ha  $E$  kielégíti a 2.9. egyenletet, akkor a rezolvensnek és ezért a Green-függvénynek is pólusa kell hogy legyen. Ezt a  $C_1$  szingularitásán lehet a legkönnyebben belátni. Ha  $C_1$  szinguláris, az összes többi  $C$  együttható is, és így a Green-függvény is. A 2.9. egyenlet szerint a  $\frac{C_3}{C_1}$  számlálójának és nevezőjének 3. tagjai egyenlőek. Első tagjuk bármely  $E$  esetén egyenlő, így hányadosuk 1, valamint a 2.9. egyenlet esetén  $\frac{C_2}{C_1} = \frac{C_4}{C_3}$ . Ezeknek a következtében mind  $\frac{C_3}{C_1} - 1$ , mind  $\frac{C_4}{C_3} \frac{C_3}{C_1} - \frac{C_2}{C_1}$  0-val egyenlő, így a  $C_1$ -re vonatkozó kifejezés nevezője 0. Ezek a  $\frac{1}{E_n - E}$  típusú pólusok a 2.40. egyenletből.

Egy érdekes matematikai eredmény, hogy a Green-függvényre vonatkozó differenciál egyenlet megoldásával elvégeztem a 2.40. egyenlet összegzését. Ez az összeg az Airy függvények szorzatának összege lenne, osztva  $E_k - E$ -vel és a megfelelő normalizációs faktoral, ami Airy függvények szorzatának 0 és  $L$  közötti integrálj, valamint  $E_k$ -t a 2.9. transzcendens egyenlet határozza meg. A Green-függvényre vonatkozó differenciálegyenlet nélkül az összeg elvégzése reménytelennek látszana.

$$\rho(E) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{ImTr} \hat{G}(E + i\epsilon) \quad (2.41)$$



2.4. ábra. Állapotsűrűség a Green-függvényből



2.5. ábra. Állapotok száma a Green-függvényből

### 2.3.2. Green-függvény perturbáció számítással

A perturbációs számításhoz a Hamilton operátort két részre bontom fel:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (2.42)$$

A  $\hat{H}_0$  operátorhoz tartozó rezolvens  $\hat{G}_0(E)$ .  $\hat{H}$  és  $\hat{H}_0$  kifejezhetőek a rezolvenseikkel. Ha a kifejezéseket behelyettesítjük a fenti egyenletbe, implicit egyenletet kapunk  $opG(E)$ -re nézve, melyet fel lehet használni perturbációs számításra. Az egyenletet balról  $\hat{G}_0^{-1}(E)$ -vel, jobbról  $\hat{G}^{-1}(E)$ -vel szorzunk.

$$\hat{G}^{-1}(E) + E = \hat{G}_0^{-1}(E) + E + \hat{V} \quad (2.43)$$

$$\hat{G}(E) = \hat{G}_0(E) - \hat{G}_0(E) \hat{V} \hat{G}(E) \quad (2.44)$$

Az alábbi módon definiálva  $\hat{G}_n(E)$  operátort, a 2.44. egyenlethez hasonló rekurziós összefüggés áll fent:

$$\hat{G}_n(E) = \hat{G}_0(E) \sum_{k=0}^n \left( -\hat{V} \hat{G}_0(E) \right)^k \quad (2.45)$$

$$\hat{G}_{n+1}(E) = \hat{G}_0(E) - \hat{G}_0(E) \hat{V} \hat{G}_n(E) \quad (2.46)$$

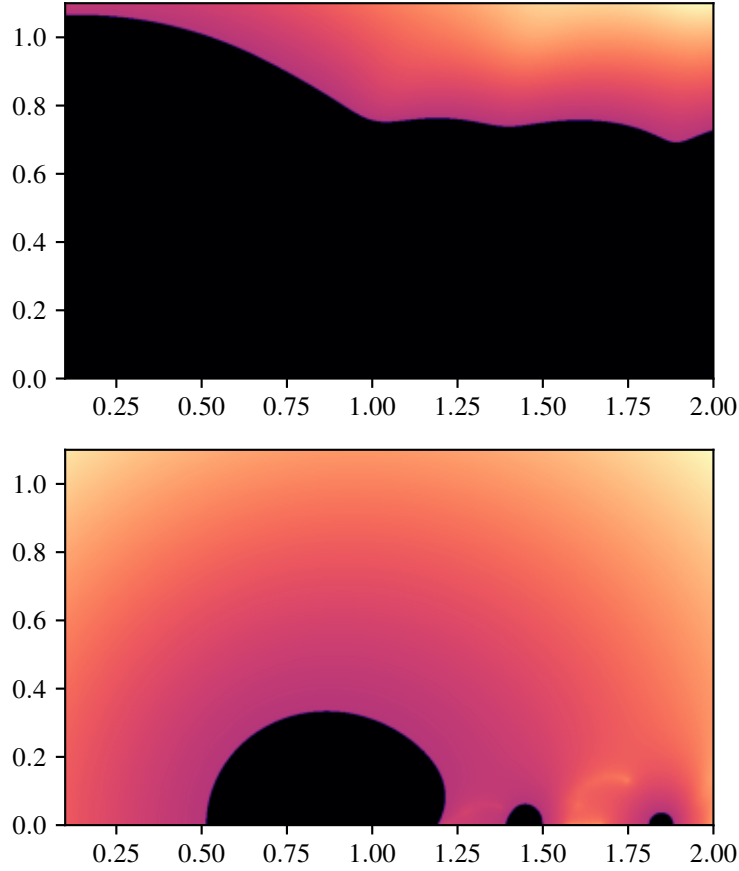
Ha  $\left\| \hat{V} \hat{G}_0(E) \right\| < 1$  akkor a  $\hat{G}_n$  sorozat konvergál, és kielégíti a 2.44. egyenletet. Ezért konvergencia esetén:

$$\hat{G}(E) = \hat{G}_0(E) \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\hat{V} \hat{G}_0(E) \right)^n \quad (2.47)$$

A perturbálatlan operátornak a lineáris potenciál nélküli dobozba zárt részecske Hamilton operátorát választom,  $\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} \hat{p}^2$ , így a lineáris potenciál marad a perturbáció  $\hat{V} = F\hat{x}$ . A perturbálatlan  $\hat{G}_0(E)$  Green-függvényt is a 2.35-2.38, 2.29. és a 2.30. egyenletek alapján határozom meg.

$$G_0(x, y; E) = \begin{cases} -\frac{2m}{k\hbar^2} \frac{1}{\sin(kL)} \sin(k(y-L)) \sin(kx) & x \leq y \\ -\frac{2m}{k\hbar^2} \frac{1}{\sin(kL)} \sin(k(x-L)) \sin(ky) & x > y \end{cases} \quad (2.48)$$

, ahol  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ .



2.6. ábra. Konvergenciája a két különböző perturbáló potenciálnak.

### 3. Kiterjesztés több dimenzióra

A rendszer egy téglatest alakú dobozba zárt részecske. A doboz mérete  $L_x$ ,  $L_y$  és  $L_z$ . A dobozban homogén erőtér hat a részecskére, azaz  $\mathbf{F} = \text{const}$ . A potenciál így  $V(x, y, z) = -\mathbf{F}_x x - \mathbf{F}_y y - \mathbf{F}_z z$ . Mivel az a potenciál lineáris  $x$ ,  $y$  és  $z$ -ben, a Schrödinger egyenlet szeparálható.

$$\psi_{klm}(x, y, z) = \phi_k(x') \phi_l(y') \phi_m(z') \quad (3.1)$$

Ahol  $x' = \sqrt[3]{\frac{2m\mathbf{F}_x}{\hbar^2}} x - \sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 \mathbf{F}_x^2}} E_k$ ,  $E_k$  pedig az 1 dimenziós probléma, Ti  $\left( \sqrt[3]{\frac{2m\mathbf{F}_x}{\hbar^2}} L - \sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 \mathbf{F}_x^2}} E \right) -$  Ti  $\left( -\sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 \mathbf{F}_x^2}} E \right) = 0$ ,  $k$ .  $\phi_k(x')$  az 1D-s rész TODO:REFERENCIA hullámfüggvénye.  $y'$ ,  $z'$ , valamint  $E_l$  és  $E_m$  hasonlóan vannak definiálva a hozzájuk tartozó 1 dimenziós probléma alapján. A 3D-s hullámfüggvényhez tartozó energia az 1D-s

megoldásokhoz tartozó energiák összege.

$$E = E_k + E_l + E_m \quad (3.2)$$

Amennyiben valamelyik irányú komponense  $\mathbf{F}$ -nek 0, abban az esetben a hozzá tartozó 1D-s pprobléma a híres végtelen mély potenciálgödör, ahol

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \quad (3.3)$$

valamint

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2mL^2} \quad (3.4)$$

TODO: ÁBRA AZ EGYSZER FÜGGŐLEGES ESET ENERGIÁIRÓL, esetleg szintén  $L$  függvényében.

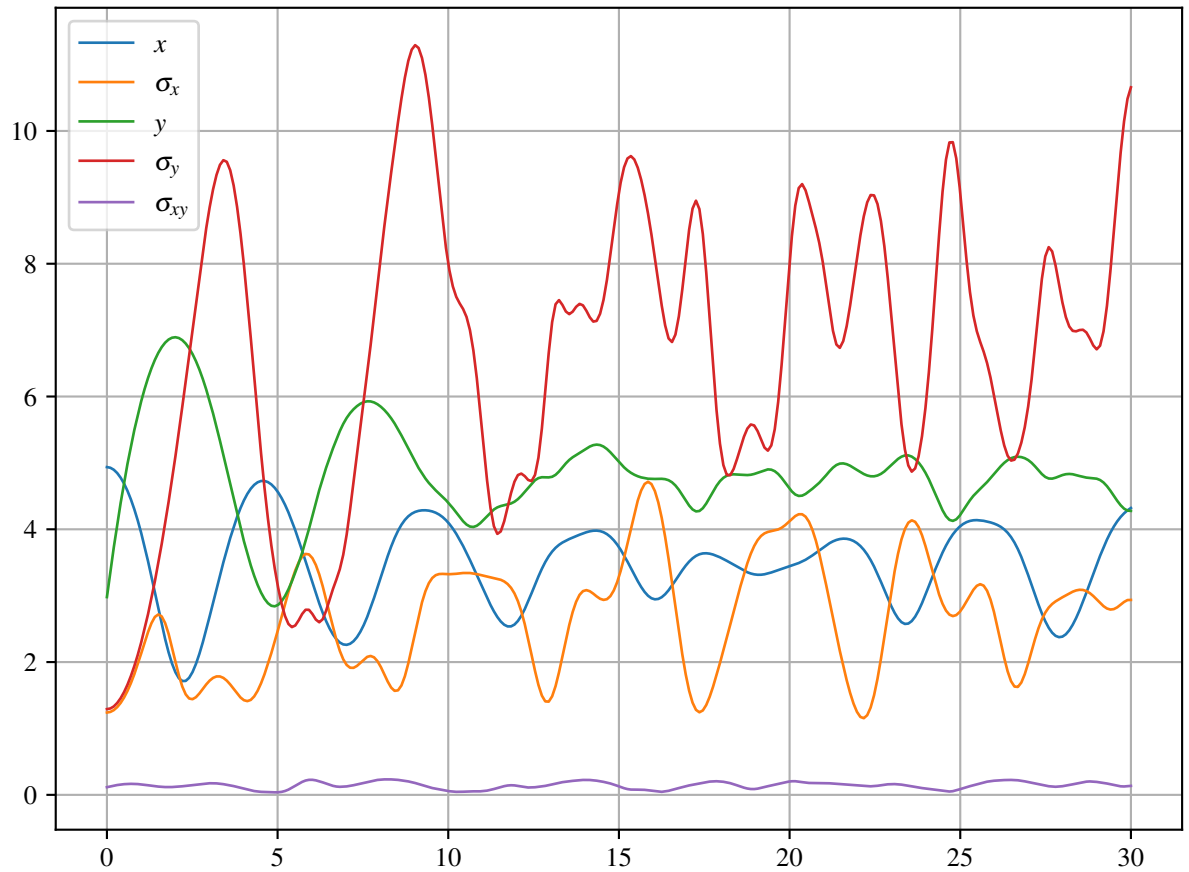
TODO: ábra 2D -quantum chaos in billiards-

TODO: 2D (3D?) videó link időfeloldásról



## 4. Numerikus számítások

### 4.1. Momentumok időfejlődése



4.1. ábra. Várható értékek és szórások időfejlődése

## 4.2. Hullámfüggvény időfejlődése

### 4.2.1. 1D

### 4.2.2. 2D

## 5. Plafon érintés 1D

Azokat a paramétereket keresem, ahol az alapállapot  $E = FL$ :

$$\text{Ti} \left( \sqrt[3]{\frac{2mF}{\hbar^2}} L - \sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 F^2}} FL \right) - \text{Ti} \left( -\sqrt[3]{\frac{2m}{\hbar^2 F^2}} FL \right) = 0 \quad (5.1)$$

, azaz

$$\text{Ai} \left( -\sqrt[3]{\frac{2mF}{\hbar^2}} L \right) = 0 \quad (5.2)$$

. Az első gyöke az Airy függvénynek megadja azt az esetet, amikor az alapállapot energiája  $FL$ , és nem pedig valamelyik gerjesztett állapoté.

$$-a_1 = \sqrt[3]{\frac{2mF}{\hbar^2}} L \approx 2.338 \quad (5.3)$$