Tarea Puntos de acumulación
Solución

1. Demuestra que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ no tiene puntos de acumulación.

   Solución:

   Sea $a \in \mathbb{Z}$, consideremos el entorno centrado en a de radio 1: $V_1(a) = (a-1, a+1)$. En este entorno, el único punto de $\mathbb{Z}$ es a, por lo tanto $V_1^*(a) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

   Dado que este argumento es válido para cualquier elemento de $\mathbb{Z}$, resulta que $\mathbb{Z}$ no tiene puntos de acumulación.

2. Sea $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales de rango infinito tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Demuestra que a es un punto de acumulación de A.

   Solución:

   Recuerda que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ significa que en cada entorno de a, $V_\epsilon(a)$ estan todos los términos de la sucesión a partir de uno determinado, $n_0 \in \mathbb{N}$, por lo tanto, en cada entorno hay infinitos términos de la sucesión, lo que quier decir que hay puntos diferentes de a, es decir, $V_\epsilon^*(a) \cap \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$, lo que significa que a es un punto de acumulación del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

3. Determina los puntos de acumulación del conjunto

$$B = \left\{ (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Solución:

El conjunto dado es infinito y acotado, inferiormente por -2 y superiormente $\frac{3}{2}$. Por lo que, de acuerdo con el teorema de Bolzano-Weirstrass, debe tener al menos un punto de acumulación.

Consideremos las dos subsucesiones

$$a_{2k} = (-1)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2k} \right) = \left(1 + \frac{1}{2k} \right)$$

y

$$a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} \left(1 + \frac{1}{2k+1} \right) = - \left(1 + \frac{1}{2k+1} \right)$$

Es fácil comprobar que $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ y que $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1$, por lo tanto 1 y -1 son los puntos de acumulación del conjunto B.

No hay más puntos de acumulación, ya que $B = \{a_{2k}\}_{k\geq 1} \cup \{a_{2k+1}\}_{k\geq 0}$. Por tanto, si x es un punto de acumulación la intersección de cualquier entorno de x con $\{a_{2k}\}$ o $\{a_{2k+1}\}$ tendría infinitos términos con lo que x o es el límite de a_{2k} o el límite de a_{2k+1}. En conclusión, $x = 1$ o $x = -1$.

4. Determina los puntos de acumulación del conjunto:

$$C = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Solución:

Se trata de una sucesión infinita con doble índice que, además está acotada inferiormente por -1 y superiormente por 2, por lo que debe tener, al menos, un punto de acumulación.

Dado que se trata de una sucesión alternada, consideremos, en primer lugar los términos para los que $n = 2k$, entonces tendríamos la subsucesión $a_{2k,m} = 1 + \frac{1}{m}$, para todo k y, como $\lim_{m\to\infty} a_{2k,m} = 1$, resulta que 1 es un punto de acumulación de C. Anàlogamente, si consideramos los términos $n = 2k+1$, tendremos que $a_{2k+1} = -1 + \frac{1}{m}$ para todo k y, por lo tanto, $\lim_{m\to\infty} a_{2k+1,m} = -1$, es decir que -1 es también un punto de acumulación.

Estos son los dos únicos puntos de acumulación de C: Usando que $C = \{-1 + 1/m, m \in \mathbb{N}\} \cup \{-1 + 1/m, m \in \mathbb{N}\}$, si x es un punto de acumulación, la intersección de cualquier entorno de x con $\{-1 + 1/m, m \in \mathbb{N}\}$ o con $\{-1 + 1/m, m \in \mathbb{N}\}$, tendrá infinitos elementos, con lo que x es el límite de puntos de uno o del otro y, por lo tanto $x = 1$ o $x = -1$.

5. Determina los puntos de acumulación del conjunto

$$D = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Solución:

Se trata de otra sucesión infinita con doble índice que, al igual que los casos anteriores, está acotada inferiormente por 0 y superiormente por 2. Por consiguiente, debe tener, al menos un punto de acumulación.

Ahora para cada n_0 fijo, la sucesión $a_{m,n_0} = \frac{1}{n_0} + \frac{1}{m}$ tiene límite: $\lim_{m\to\infty} a_{m,n_0} = \frac{1}{n_0}$, por lo que, todos los puntos de la forma $\frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$, son puntos de acumulación del conjunto D.

Llegaríamos a la misma conclusión si, en lugar de fijar un n_0, fijamos un m_0.

Finalmente sólo falta considerar el punto 0, el cual, por ser el límite de una sucesión de puntos de acumulación es también de acumulación.

6. Determina los puntos de acumulación del conjunto

$$D = \{2^{-n} + 5^{-m} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

Solución:

Se trata de otra sucesión infinita con doble índice que, además, está acotada inferiormente por 0 y superiormente por $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$, por lo que, de acuerdo con el teorema de Bolzano-Weirstrass, tiene al menos un punto de acumulación.

Consideremos, en primer para cada n_0, la subsucesión $a_{m,n_0} = \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{5^m}$. Esta sucesión tiene límite:

$$\lim_{m\to\infty} a_{m,n_0} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{5^m} \right) = \frac{1}{2^{n_0}}$$

Por lo que todos los puntos de la forma $\frac{1}{2^n}$ son puntos de acumulación del conjunto D.

Análogamente veríamos que los puntos de la forma $\frac{1}{5^m}$ tamb ién son puntos de acumulación de D.

Finalmente, el punto 0, al ser tanto el límite de la sucesión $\frac{1}{2^n}$, como de la sucesión $\frac{1}{5^m}$, también será un punto de acumulación de D, por ser el límite de sucesiones de puntos de acumulación de D.

7. Determina el conjunto de puntos de acumulación de $\mathbb{Q}$.

   Solución:

   El conjunto de puntos de acumulación de $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{R}$ porque dado un punto $x \in \mathbb{R}$, tenemos dos casos: $x \in \mathbb{Q}$ en cuyo caso podemos considerar la sucesión de términos de $\mathbb{Q}$, $\{\frac{x+1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que tiende a x y todos los términos son distintos de x. La otra opción es que sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, en cuyo caso sabemos que existe una sucesion q_n de racionales con límite x. En todo caso, cualquier número real es limíte de una sucesión de términos de $\mathbb{Q}$ de valores distintos del punto x, lo que significa que el conjunto de puntos de acumulación de $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{R}$.

8. Determina el conjunto de puntos de acumulación de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

   Solución:

   El mismo razonamiento que en problema anterior, permite demostrar que $\mathbb{R}$ el conjunto de puntos de acumulación de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.