Tarea Inducción
Soluciones

En los ejercicios siguientes demuestra, por inducción, que las expresiones (igualdades o desigualdades) de los enunciados son ciertas

1.

$$1 + 2 + \cdots + n = \textstyle\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Solución:

- Para $k = 1$ es evidente. item Supongamos ahora que es cierto hasta $k - 1$, veamos que también lo es para k

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=1}^{k} j &= k + \sum_{j=1}^{k} j \\
&= k + \frac{(k-1)k}{2} && \texttt{Hip. de inducción} \\
&= \frac{2k + k^2 - k}{2} \\
&= \frac{k(k+1)}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la igualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.

$2^n \leq (n+1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

- Para $n = 1$, la igualdad es clara.
- Supongamos que es cierta hasta $k-1$, es decir, que $2^{k-1} \leq k!$, veamos que también lo es para k:

$$\begin{array}{rcrl} 2^k & = & 2 \cdot 2^{k-1} & \\ & \leq & 2 \cdot k! & \texttt{Hip. de inducción} \\ & \leq & (k+1)! & \texttt{ya que } 2 < k+1. \end{array}$$

Por lo tanto, la igualdad se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$

3.

Si $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Solución:

- Para $n = 1$, la igualdad es cierta, puesto que

$$\frac{1 - r^2}{1 - r} = \frac{(1-r)(1+r)}{1 - r} = 1 + r$$

- Supongamos que es cierta hasta $k-1$, es decir que $\sum_{j=0}^{k-1} r^j = \frac{1 - r^j}{1 - r}$, Veamos que también es cierta para k:

$$\begin{array}{rcrl} \sum_{j=0}^{k} r^j & = & r^k + \sum_{j=0}^{k-1} r^j & \\ & = & r^k + \dfrac{1 - r^j}{1 - r} & \texttt{Hip. de inducción} \\ & = & \dfrac{r^k - r^{k+1} + 1 - r^k}{1 - r} & \\ & = & \dfrac{1 - r^{k+1}}{1 - r} & \end{array}$$

4.

$n^2 \leq 2^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 7$

Solución: Para $n = 7$, tenemos $n^2 = 7^2 = 49 < 64 = 2^6 = 2^{n-1}$ Ahora, si $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 7$, tendremos que

$$
\begin{array}{rcll}
(k+1)^2 & = & k^2 + 2k + 1 & \\
& \leq & k^2 + 2k + k, & \texttt{ya que } k \geq 7 \\
& = & k^2 + 3k & \\
& \leq & k^2 + k \cdot k, & \texttt{ya que } k \geq 7 \\
& = & 2k^2 & \\
& \leq & 2 \cdot 2^{k-1}, & \texttt{hipótesis de inducción} \\
& = & 2^k & \\
& = & 2^{(k+1)-1} &
\end{array}
$$

5.

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solución:

- Es inmediato comprobar que se verifica la igualdad para el caso $n = 1$
- Supongamos que es cierta hasta $k-1$, es decir que $\sum_{j=1}^{k-1} j^2 = \dfrac{(k-1)k(2(k-1)+1)}{6}$, veamos que también lo es para k

$$
\begin{array}{rcll}
\sum_{j=1}^{k} j^2 & = & \sum_{j=1}^{k-1} j^2 + k^2 & \\
& = & k^2 + \dfrac{(k-1)k(2k-1)}{6} & \texttt{hip. de inducción} \\
& = & \dfrac{6k^2 + 2k^3 - 3k + k}{6} = \dfrac{2k^3 + 3k + 1}{6} & \\
& = & \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} &
\end{array}
$$

Por lo tanto, la igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$

6.

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

Solución:

- Es fácil comprobar que la igualdad es cierta para $n = 1$.
- Supongamos que es cierta hasta $k-1$, es decir que $\sum_{j=1}^{k-1}(2j-1) = (k-1)^2$. Veamos que pasa para k

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{k}(2j-1) & = & (2k-1) + \sum_{j=1}^{k-1}(2j-1) & \\ & = & (2k-1) + (k-1)^2 & \texttt{hip. de inducción} \\ & = & 2k-1+k^2-2k+1 & \\ & = & k^2 & \end{array}$$

Por lo tanto, la igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

7.

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Solución:

- Es fácil comprobar que la igualdad es cierta para $n = 1$.
- Supongamos que es cierta hasta $k-1$, es decir que $\sum_{j=1}^{k-1} j(j+1) = \dfrac{(k-1)k(k+1)}{3}$. Veamos que pasa para k:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{k} j(j+1) & = & k(k+1) + \sum_{j=1}^{k-1} j(j+1) & \\ & = & (k^2+k) + \dfrac{(k-1)k(k+1)}{3} & \texttt{hip. de inducción} \\ & = & \dfrac{3(k^2+k)+(k^3-k}{3} & \\ & = & \dfrac{k^3+3k^2+2k}{3} & \\ & = & \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3} & \end{array}$$

Por lo tanto, la igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

8.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Solución:

- Es fácil comprobar que la igualdad es cierta para $n = 1$.
- Supongamos que es cierta hasta $k-1$, es decir que $\sum_{j=1}^{k-1} j^3 = \frac{(k-1)^2k^2}{4}$. Veamos que pasa para k:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} j^3 &= k^3 + \sum_{j=1}^{k-1} j^3 \\
&= k^3 + \frac{(k-1)^2k^2}{4} && \texttt{hip. de inducción} \\
&= \frac{4k^3 + (k^4 - 2k^3 + k^2}{4} \\
&= \frac{k^4 + 2k^3 + k^2}{4} \\
&= \frac{k^2(k^2 + 2k + 1)}{4} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

9.

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k!) = (n+1)! - 1$$

Solución:

- Es fácil comprobar que la igualdad es cierta para $n = 1$.
- Supongamos que es cierta hasta $k-1$, es decir que $\sum_{j=1}^{k-1} j \cdot (j!) = k! - 1$. Veamos que pasa para k:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} j \cdot (j!) &= k \cdot (k!) + \sum_{j=1}^{k-1} j \cdot (j!) \\
&= k \cdot (k!) + k! - 1 && \texttt{hip. de inducción} \\
&= k!(k+1) - 1 \\
&= (k+1)! - 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

10.

> $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}$

Solución:

- Es fácil comprobar que la igualdad es cierta para $n = 1$.
- Supongamos que es cierta hasta $k-1$, es decir que $\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{k-1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{k-2}}$. Veamos que pasa para k:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{2^j} & = & \frac{k}{2^k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{2^j} & \\ & = & \frac{k}{2^k} + 2 - \frac{k-1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{k-2}} & \texttt{hip. de inducción} \\ & = & \frac{k}{2^k} + 2 - \frac{2k-2}{2^k} - \frac{1}{2^{k-2}} & \\ & = & 2 - \frac{k}{2^k} + \left(\frac{2}{2^k} - \frac{1}{2^{k-2}}\right) & \\ & = & 2 - \frac{k}{2^k} - \frac{2}{2^{k-1}} & \end{array}$$

Por lo tanto, la igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

11.

> Desigualdad de Bernoulli: Sea $a > 0$, demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que
>
> $$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Solución:

Está claro que para $n = 1$ es $1 + a \geq 1 + a$.

Supongamos que se verifica hasta $n-1$, veamos que también es cierta para n:

$$\begin{array}{rcll} (1+a)^n & = & (1+a)(1+a)^{n-1} & \\ & \geq & (1+a)(1+(n-1)a) & \texttt{hip. de inducción} \\ & = & 1 + (n-1)a + a + (n-1)a^2 & \\ & \geq & 1 + na, & \texttt{ya que } (n-1)a^2 \geq 0 \end{array}$$

12.

Sean $x_1 = 3$ i $x_2 = 5$. Para $n \geq 3$, sea

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}.$$

Demuestra que $x_n = 2^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Solución:

Este es un ejemplo de una variante del Principo de Inducción, en lugar de suponer sólo que la propiedad es cierta para $k-1$, suponemos que es cierta para todo $j \leq k$, se trata de ver que es cierta para $k+1$.

- Para $n = 1$ es $2^n + 1 = 2^1 + 1 = 3 = x_1$ y para $n = 2$, es $2^2 + 1 = 5 = x_2$
- Hipótesis de inducción: supongamos que el enunciado es cierto para x_{k-1} y x_k, para algún $k \geq 2$, es decir, que

  $$x_{k-1} = 2^{k-1} + 1 \quad \text{y} \quad x_k = 2^k + 1.$$

  Veamos que también se verifica para $k+1$.
- Consideremos ahora $k+1$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= 3x_{(k+1)-1} - 2x_{(k+1)-2}, && \texttt{por definición} \\
&= 3x_k - 2x_{k-1} \\
&= 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1), && \texttt{hipótesis de inducción} \\
&= 3 \cdot 2^k - 2^k + 1 \\
&= 2 \cdot 2^k + 1 \\
&= 2^{k+1} + 1
\end{aligned}$$