Tarea: **Límites de funciones con L'Hopital**

1. Calcula el
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}.$$

   Solución:

   Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Puesto que tanto el numerador como el denominador son funciones derivables y satisfacen las condiciones de la regla de L'Hopital. Calculamos, pues, el límite,
$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 4x - 1}{3x^2 - 7} = \frac{3 - 4 - 1}{3 - 7} = \frac{1}{2}.$$

   Por consiguiente, al existir este límite, tambien existe el del enunciado y son iguales, por lo tanto:
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} = \frac{1}{2}.$$

2. Calcula el

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x - e^x}{(\arctan x)^2}.$$

Solución:

Se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, las funciones del numerador y del denominador verifican las condiciones de la regla de L'Hopital, calculamos, pues, el

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{\frac{2\arctan x}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)(\cos x - e^x)}{2\arctan x}.$$

Nuevamente, se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ y la funciones del numerador y del denominador satisfacen las condiciones de la regla de L'Hopital, calculamos el

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x(\cos x - e^x) + (x^2+1)(-\sin x - e^x}{\frac{2}{x^2+1}} = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x - e^x}{(\arctan x)^2} = -\frac{1}{2}.$$

3. Calcula el
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3\sin x+x\cos x}{x^5}$$

Solución:

Se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Las funciones del numerador y del denominador verifican las condiciones de la regla de L'Hopital. Calculamos el
$$\lim_{x\to 0}\frac{2-3\cos x+\cos x-x\sin x}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x\sin x}{5x^4}$$

Nuevamente nos encontramos con una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Las funciones del numerador y del denominador verifican las condiciones de la regla de L'Hopital. Calculamos ahora el
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin x-x\cos x}{20x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{20x^3}$$

Se trata, de nuevo de una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{60x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{60x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{60x}=\frac{1}{60}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{60}$$

Por lo tanto el
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3\sin x+x\cos x}{x^5}=\frac{1}{60}$$

4. Calcula el

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

Solución:

Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Calculamos el límite del logaritmo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\log(\cos 2x)}{x^2}$$

Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Las funciones del numerador y del denominador verifican las condiciones de la regla de L'Hopital:

$$3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{x^2} = -3\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\cos 2x}\frac{\sin 2x}{2x} = -6$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6}$$

5. Calcula el

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{a}{x}$$

Solución:

Se trata de una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. La convertimos en una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{a}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Las funciones del numerador y del denominador verifican las condiciones de la regla de L'Hopital. Calculamos el limite del cociente de derivadas:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-a}{x^2}\cos\left(\frac{a}{x}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = -a \lim_{x\to\infty} \cos\frac{a}{x} = -a$$

6. Comprueba que la regla de l'Hopital no sirve para calcular el

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

Calcula este límite por otro procedimiento.

Solución:

Se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Numerador y denominador son derivables, podemos aplicar la regla de l'Hopital, que nos llevaría a calcular el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

y este límite no existe, puesto que no existe el $\lim_{x \to \infty} \cos x$.

Ahora, para calcular el límite pedido, dividimos numerador y denominador por x, para obtener

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}}$$

El $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, puesto que se trata del límite del producto de una función acotada $\sin x$, por una que tiene límite 0 en ∞, en consecuencia:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

7. Comprueba que la regla de l'Hopital no sirve para calcular el

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sin x}$$

Solución:

Veamos en primer lugar que la regla de L'Hopital no sirve para calcular este límite. Se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, puesto que $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, al tratarse del producto de una función acotada por una que tiene límite 0. Las funciones del numerador y del denominador verifican las condiciones de la regla de l'Hopital. Calculamos el

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x^2}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\cos x}$$

Este límite no existe, puesto que no existe el $\lim_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Ahora podemos calcular este límite por otro método:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

puesto que $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ está acotada y $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin x} = 0$

Este ejercicio, como el anterior, justifican porque no he escrito en ninguno de los ejercicios de esta tarea que $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, porque puede no ser cierto: si existe el segundo, existe el primero y son iguales, pero puede pasar, como acabamos de ver, que exista el primero sin que exista el segundo.

8. Calcula el

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$$

Solución:

Se trata de una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. En primer lugar, efectuamos la resta, con lo que reducimos el problema al cálculo del

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\log x-x+1}{(x-1)\log x}$$

Las funciones del numerador y del denominador son derivables, por lo que podemos aplicar la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x+x\dfrac{1}{x}-1}{\log x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{\log x+1-\dfrac{1}{x}}$$

Obtenemos así otra indeterminación, esta vez del tipo $\dfrac{0}{0}$, las funciones del numerador y del denominador siguen siendo derivables, por lo que podemos aplicar de nuevo la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{\log x+1-\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

y, en definitiva, también existe el límite pedido y

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)=\frac{1}{2}$$

9. Calcula los límites
$$\lim_{x\to 0^+} x^x \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} x^{x^x}$$

Solución:

Por una parte $x^x = e^{x\log x}$. Ahora para calcular el $\lim_{x\to 0^+} x\log x$, podemos aplicar la regla de L'Hopital al ponerlo de la forma:

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

la qual cosa lleva a calcular el

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Por lo tanto
$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x} = e^0 = 1$$

Para el segundo límite, tenemos que $\log x^{x^x} = x^x \log x$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^+} x^{x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x^x \log x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x^x \log x} = e^{-\infty} = 0$$

10. Calcula el

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$$

Solución:

Se trata de una indeterminación del tipo ∞^0. Si tomamos logaritmos, y tenemos en cuenta que $\dfrac{1}{\tan x} = \cot x$, nos queda

$$\lim_{x\to 0}\tan x\log\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log\dfrac{1}{x}}{\cot x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\cot x}$$

Se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Numerador y denominador verifican las condiciones de la regla de L'Hopital. Calculamos el límite del cociente de las derivadas respectivas del numerador y del denominador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to x}\frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x\to x}\frac{\sin x}{x}\sin x = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^0 = 1$$