Tarea: Límites de Sucesiones

1. Calcula el
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)$$

   Solución:

   Dado que $\sum_{k=1^n}(2k-1)=n^2$ (demostrable mediante inducción), se trata de una indeterminación del tipo $\infty-\infty$, por lo tanto tendremos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-(2n+1)(n+1)}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-2n^2-3n-1}{2n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n-1}{2n+2}=-\frac{3}{2}.$$

2. Calcula el
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

   Solución:

   Se trata de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$, y primer término $\frac{1}{2}$, por lo tanto

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$$

3. Calcula el
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$$

Solución:

Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Si dividimos numerador y denominador por n, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{(-1)^n}{n}}{1-\dfrac{(-1)^n}{n}} = 1,$$

puesto que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$

4. Sean a, b dos números reales estrictamente positivos, calcula el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$$

Solución:

Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Si $a = b$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a^{n+1}}{2a^n} = a$$

Supongamos ahora que $a > b$, dividimos numerador y denominador a^{n+1}, tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{\frac{1}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = a$$

Puesto que, al ser $a > b$ es el $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$.

En resumen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$$

5. Calcula el

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$$

Solución:

En primer lugar, calculamos el $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, para ello multiplicamos y dividimos por el el conjugado del denominador:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n} = \infty$$

Por lo tanto, se trata de una indeterminación del tipo 1^∞, podemos aplicar el hecho que si $\lim a_n = 1$, $\lim b_n = \infty$ y si existe el $\lim b_n(a_n - 1) = a$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^a$. En consecuencia:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}} = e^0 = 1$$

6. Calcula el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin n!}{n^2+1}$$

Solución:

Se trata del producto de una sucesión, $\dfrac{n}{n^2+1}$, que tiene límite 0 por otra, $\sin n!$, que está acotada en valor absoluto por 1, por lo tanto el límite es 0, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin n!}{n^2+1} = 0$$

7. Calcula el

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+4n}\right)^{\dfrac{n^2-1}{n}}$$

Solució:

Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞, calculamos pues el $\lim b_n(a_n-1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n}\left(\frac{n^2+3}{n^2+4n}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n} \cdot \frac{3-4n}{n^2+4n} = -4$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+4n}\right)^{\dfrac{n^2-1}{n}} = e^{-4}$$

8. Calcula el
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(n+a)}{\log n}\right)^{n\log n}$$

Solución:

Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Calculamos el $\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)$:

$$\lim_{n\to\infty} n\log n\left(\frac{\log(n+a)}{\log n}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\log n\frac{\log(n+a)-\log n}{\log n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{n+a}{n}\right)^n=\log e^a=a$$

Por lo tanto
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(n+a)}{\log n}\right)^{n\log n}=e^a$$