Tarea Inducción
Soluciones

En los ejercicios siguientes determina, mediante el criterio o criterios más convenientes, el carácter de cada una de las series propuestas.

1.

$$\sum_{n>0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Solución:

Criterio del Cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}{\frac{((n-1)!)^2}{(2(n-1))!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(2(n-1))!}{(2n)!((n-1)!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n-2)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n(2n-1)} = \frac{1}{4}$$

Dado que $\frac{1}{4} < 1$, la serie es convergente.

2.

$$\sum_{n>0} \frac{e^n}{2^{4n}}.$$

Solución: Criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{2^{4n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{16}$$

Dado que $\dfrac{e}{16} < 1$, la serie es convergente.

3.

$$\sum_{n>0} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Solución:

Criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}}{\dfrac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a+n}{b+n} = 1$$

El criterio no decide. Probemos el criterio de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a+n}{b+n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{b-a-a+n}{b+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)n}{b+n} = b-a$$

Por lo tanto,

(a) Si $b-a<1$, la serie diverge,

(b) Si $b-a>1$, la serie converge,

(c) Si $b-a=1$, el criterio no decide.

En este caso $b=a+1$, el término general de la seria queda de la forma:

$$\sum_{n>0} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(a+n+1)} = \sum_{n>0} \frac{a}{a+n+1}$$

Aplicamos el criterio de Prinsheim,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\frac{a}{a+n+1} = a$$

con $\alpha=1$, por lo tanto, siempre que $b=a+1$, la serie es divergente.

4.

$$\sum_{n>0} \frac{1+\sin^2 n^\alpha}{n^\alpha}.$$

Solución:

En este caso, usaremos el criterio de comparación. Puesto que $0 < \sin^2\alpha < 1$, tenemos que

$$\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1+\sin^2 n^\alpha}{n^\alpha} < \frac{2}{n^\alpha}$$

(a) Si $\alpha > 1$, entonces la serie es convergente, puesto que la serie esta mayorada por una serie convergente y, por lo tanto al ser de términos positivos, es convergente.

(b) Si $\alpha \leq 1$, entonces la serie esta minorada por una divergente y, por lo tanto es divergente.

5.

$$\sum_{n>0} \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Solución:

Dado que

$$\sum_{n>0} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n>0} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n>0} \left(\log(n+1) - \log n\right),$$

se puede calcular fácilmente el término general, S_n, de la sucesión de sumas parciales:

$$S_n = (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + \cdots + \log(n+1) - \log n$$

$$= \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1)$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \log(n+1) = \infty$, es decir, la serie es divergente.

6.

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Solución:

Criterio de Prinsheim, $\lim n^{\alpha} a_n$, con $\alpha = 1$:

$$\lim \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1$$

Por lo tanto, la serie es divergente.

7.

$$\sum_{n>0} \frac{1}{\log n}.$$

Solución:

Criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\log n}}{\frac{1}{\log(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n-1)}{\log n} = 1$$

Por lo tanto, el criterio no decide. Probemos con el criterio de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\log(n-1)}{\log n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{\log n - \log(n-1)}{logn}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\log\left(\frac{n}{n-1}\right)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\log n} = 0$$

Por lo tanto, la serie es divergente.

8.

$$\sum_{n>0} na^n, \text{ donde } a > 0.$$

Solución:

Criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{na^n} = a$$

Por lo tanto,

(a) Si $a < 1$, entonces la serie es convergente.

(b) Si $a > 1$, la serie es divergente.

(c) Si $a = 1$, entonces se trata de la serie $\sum_{n>0} n$ que es claramente divergente.

9.

Determina el caràcter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

Solución: Criterio de Leibniz: La sucesión $\dfrac{1}{2n+1}$ es decreciente, puesto que si $n < m$, entonces $2n+1 < 2m+1$ y, por lo tanto $\dfrac{1}{2m+1} < \dfrac{1}{2n+1}$, por lo tanto, dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

La serie es convergente. La convergencia es condicional, puesto que la serie de valores absolutos, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}$, es divergente.

10.

> Determina el caràcter de la serie:
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log n}$$

Solución:

Criterio de Leibniz: En primer lugar, dado que la función $\log x$ es creciente, la sucesión $\dfrac{1}{\log n}$ es decreciente. Además

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}=0.$$

Por lo tanto, la serie es convergente. La convergenci es condicional, puesto que, como hemos visto en el ejercicio 7, la serie de valores absolutos, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\log n}$, es divergente.

11.

> Determina el caràcter de la serie:
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+\sin^2 n}{n^2}$$

Solución:

La serie es absolutamente convergente, puesto que

$$\left|\frac{1+\sin^2 n}{n^2}\right|=\frac{1+\sin^2 n}{n^2}\leq\frac{2}{n^2},$$

y la serie de término general $\dfrac{2}{n^2}$ es convergente.

12.

Determina el caràcter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}+n} \cos n\pi$$

Solución:

En primer lugar, observa que se trata de una serie alternada puesto que que $\cos n\pi = (-1)^n$. Veamos si la serie es absolutamente convergente, para ello, en primer lugar resulta que $n^{2n}+n > n^2$, la seria dada está mayorada por la serie de término general $\dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$. Veamos que esta serie es convergente, mediante el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!(n-1)^{2(n-1)}}{n^{2n}(2(n-1))!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n(2n-1)}{n^2} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n-2} = 4e^{-2}$$

Puesto que, por una parte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n(2n-1)}{n^2} = 4$$

y, por la otra

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n-2} = e^{\lim_{n\to\infty}(2n-2)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)} = e^{-2}$$

Dado que $4e^{-2} < 1$, resulta que la serie de valores absolutos, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{n^{2n}+n}$ está mayorada por una serie convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$ y, por lo tanto, es absolutamente convergente.