Tarea: Supremos e ínfimos

1. Calcula el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos:

   (a) $A = \{r \in \mathbb{Q} : 2r^3 - 1 < 15\}$.

   (b) $B = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 + x \leq 12\}$.

   Solución:

   (a) $2r^3 - 1 < 15$ si $2r^3 < 16$ y, por lo tanto, ha de ser $r^3 < 8 = 2^3$. En definitiva

   $$A = \{r \in \mathbb{Q} : 2r^3 - 1 < 15\} = (-\infty, 2)$$

   Por lo tanto, $\sup A = 2$ que, como no pertence a A, no es máximo. A no está acotado inferiormente.

   (b) $x^2 + x \leq 12$ si $x^2 + x - 12 < 0$. Si calculamos la soluciones de la ecuación de segundo grado asociada $x^2 + x - 12 = 0$ podremos saber fácilmente donde el polinomio es negativo:

   $$\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

   es decir, las soluciones son $x_1 = 3$ y $x = -4$, por lo tanto $x^2 + x - 12 = (x + 3)(x - 4)$, lo que significa que $x^2 + x - 12 \leq 0$ si, y sólo si, $x \in [-3, 4]$, dado que si $x < -3$ los dos factores son negativos. Por otra parte, si $x > 4$ los dos son positivos, por lo tanto, en el intervalo indicado, el segundo factor es positivo y el primero negativo. En resumen:

   $$B = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 + x \leq 12\} = [-3, 4] \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

   y, por lo tanto, $\sup B = 4$ y $\inf B = -3$. El supremo no es máximo, puesto que no pertenece al conjunto (4 es racional). Por la misma razón el ínfimo no es un mínimo.

2. Calcula el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos:

   (a) $C = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

   (b) $D = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

   Solución:

   (a) Para todo n, $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$, por lo que 1 es una cota superior del conjunto C y 0 es una cota inferior. Dado que $1 \in C$, resulta que $1 = \sup C = \max C$.

   Por otra parte, la propiedad arquimediana asegura que no existe un número real estrictamente positivo que sea menor que $\dfrac{1}{n}$, para todo n, puesto que de no ser así, si existiese un número positivo ϵ tal que $\epsilon < \dfrac{1}{n}$, para todo n, seria $n < \dfrac{1}{\epsilon}$, es decir que los naturales estarían acotados como subconjunto de $\mathbb{R}$. Por lo tanto $0 = \inf C$ y no es mínimo, ya que $0 \notin C$.

   (b) Consideremos los dos subconjuntos D_{2k}, for mado por los términos $a_{2k} = \dfrac{1}{2k} + (-1)^{2k} = \dfrac{1}{2k} + 1$ y D_{2k+1}, formado por los de la forma $a_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+1} + (-1)^{2k+1} = \dfrac{1}{2k+1} - 1$. Es claro que $D = D_{2k} \cup D_{2k+1}$.

   Tenemos que $0 < a_{2k} < \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y, además, $-1 < a_{2k+1} \leq \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{2}{3}$, por lo tanto $-1 = \inf D$ y $\dfrac{3}{2} = \sup D = \max D$. Dado que $-1 \notin D$, este conjunto no tiene mínimo.

3. Determina el supremo, ínfimo, máximo y mínimos, si existen de cada uno de los conjuntos siguientes:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$.

   (b) $C = \{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$, donde $a < b < c < d$

   Solución:

   (a) En primer lugar, debemos identificar el conjunto A, para ello resolvemos la ecuación de segundo grado $3x^2 - 10x + 3 = 0$:

   $$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6},$$

   es decir las raíces son $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = 3$, es decir $3x^2 - 10x + 3 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-3)$, por lo que $A = \left(\frac{1}{3}, 3\right)$. En definitiva $\sup A = 3$ y $\inf A = \frac{1}{3}$, puesto que ninguno de los dos pertenece a A, no son ni máximo ni mínimo.

   (b) Si $x < a$, entonces los cuatro factores involucrados son negativos, por lo tanto la función es positiva. Si $a < x < b$, entonces sólo tres factores son negativos y, por lo tanto su producto es negativo. Si $b < x < c$, entonces dos factores son positivos y dos negativos, por lo que el producto es positivo. Si $c < x < d$, entonces el producto es negativo, puesto que sólo uno de los factores es negativo. Finalmente, si $x > d$, entonces el producto es positivo, al ser los cuatro factores positivos. En resumen

   $$C = \{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\} = (a, b) \cup (c, d)$$

   Por lo tanto, $a = \inf C$ y $d = \sup C$, como ninguno de los dos pertence a C, no son ni mínimo ni máximo.

4. Determina el supremo, ínfimo, máximo y mínimo, si existen, del conjunto:
$$B = \{x \in \mathbb{R} : 5|x| - |x^2| - 6 > 0\}.$$

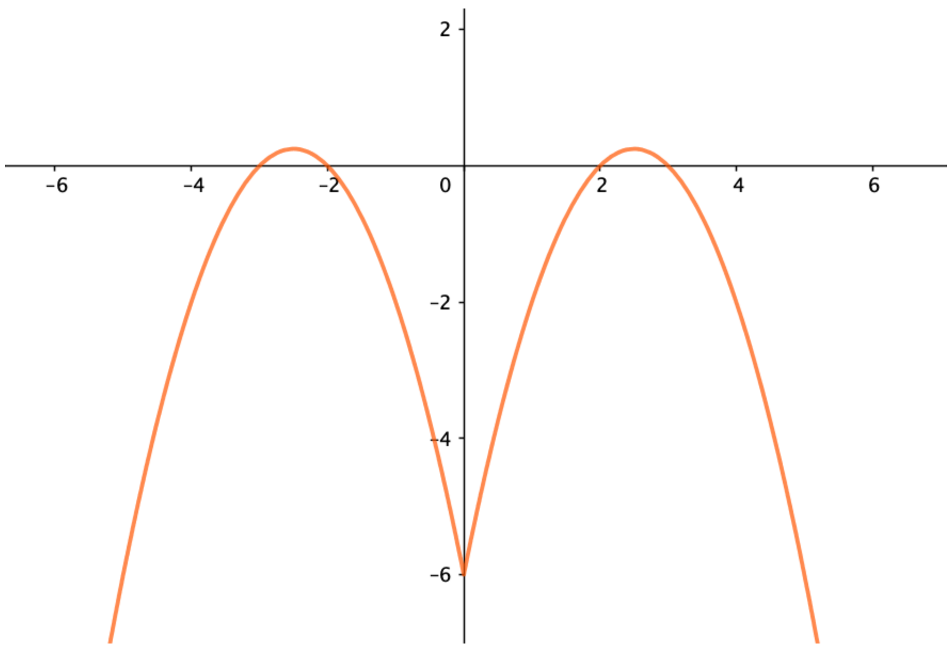
Solución:

$5|x| - |x^2| - 6 > 0$ si $-5x - x^2 - 6 > 0$ y $5x - x^2 - 6 > 0$, por lo tanto, hay que determinar para que valores de x cada una de estas expresiones es positiva. Para la primera, tenemos que $-5x - x^2 - 6 = 0$, es decir $x^2 + 5x + 6 = 0$, si
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2},$$
es decir, si $x = -3$ y $x = -2$. Por lo tanto, $-5x - x^2 - 6 > 0$ si $x \in (-3, -2)$.

Por otra parte $5x - x^2 - 6 = 0$, es decir $x^2 - 5x + 6 = 0$, si
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},$$
es decir, si $x = 2$ y $x = 3$. Por lo tanto, $5x - x^2 - 6 > 0$, si $x \in (2, 3)$.

En definitiva, $B = \{x \in \mathbb{R} : 5|x| - |x^2| - 6 > 0\} = (-3, -2) \cup (2, 3)$ y, en consecuencia $\inf B = -3$ y $\sup B = 3$, no son ni máximo ni mínimo dado que ninguno de ellos es un elemento de B.

Una representación gráfica de la función muestra la corrección de este resultado:



5. Sean S y T dos conjuntos acotados tales que $T \subset S$. Demuestra que:

$$\inf S \leq \inf T \leq \sup T \leq \sup S$$

Solución:

Dado que $T \subset S$, resulta que toda cota superior de S también lo es de T, por lo tanto $\sup S$ también es cota superior de T y, por lo tanto $\sup S \geq \sup T$.

Análogamente, toda cota inferior de S lo es de T, en particular $\inf S$ es una cota inferior de T y, por lo tanto $\inf S \leq \inf T$, ya que el ínfimo es la mayor de la cotas inferiores.

6. (a) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente, sean $\mu = \sup A$ y $\epsilon > 0$. Demuestra que existe un $x_0 \in A$ tal que $\mu - \epsilon < x_0 < \mu$.

   (b) Sea $B \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente, sean $\lambda = \inf B$ y $\epsilon > 0$. Demuestra que existe un $y_0 \in B$ tal que $\lambda < y_0 < \lambda + \epsilon$.

Solución:

(a) Supongamos que no existe $x_0 \in A$ tal que $\mu - \epsilon < x_0 < \mu$, entonces $\mu - \epsilon$ seria una cota superior de A, lo que contradice que μ sea el supremo de A, es decir la menor de las cotas superiores. Por lo tanto debe existir un $x_0 \in A$ tal que $\mu - \epsilon < x_0 < \mu$.+

(b) Supongamos que no existe $y_0 \in B$, tal que $\lambda < y_0 < \lambda + \epsilon$, entonces $\lambda + \epsilon$ seria una cota inferior de B, lo que contradice el hecho que λ sea el ínfimo de B, es decir la mayor de las cotas inferiores. Por lo tanto existe al menos un y_0 tal que $\lambda < y_0 < \lambda + \epsilon$.

7. Dados dos conjuntos $S, T \subset \mathbb{R}$, definimos el conjunto:

$$T + S = \{t + s : t \in T, s \in S\}.$$

Supongamos ahora que S y T son conjuntos acotados:

(a) Demuestra que $\sup(T + S) = \sup T + \sup S$.

(b) Demuestra que $\inf(T + S) = \inf T + \inf S$.

Solución:

(a) Dado que T y S es tan acotados, existen M_1 y M_2 tales que $t \leq M_1$ para todo $t \in T$ y $s \leq S$ para todo $s \in S$, por lo tanto $t + s \leq M_1 + M_2$, es decir, $T + S$ está cotado superiormente, existe pues $c = \sup(T + S)$. Veamos que $c = \sup T + \sup S$. Pongamos $a = \sup T$ y $b = \sup S$, dado que $t \leq a$ para todo $t \in T$ y $s \leq b$ para todo $s \in S$, tendremos que $t + s \leq a + b$, para todo t y para todo s, es decir $a + b$ es una cota superior de $T + S$ y, por lo tanto, $c \leq a + b$, por ser el supremo la menor de las cotas inferiores.

Veamos que no puede ser $c < a + b$. Supongamos que lo es, entonces $\epsilon = (a + b) - c > 0$, y por ser a y b supremos respectivos de T y S, tendríamos que existen t y s tales que $t > a - \dfrac{\epsilon}{2}$ $s > b - \dfrac{\epsilon}{2}$. Sumando miembro a miembro estas dos desigualdades obtendríamos

$$t + s > a + b - \epsilon = a + b - (a + b - c) = c$$

lo cual es absurdo, puesto que c es el supremo de $T + S$. En definitiva, hemos demostrado que

$$\sup(T + S) = \sup T + \sup S.$$

(b) La demostración es del todo análoga a la anterior.

8. Dados dos conjuntos $S, T \subset \mathbb{R}$, definimos el conjunto:

$$T \cdot S = \{t \cdot s : t \in T, s \in S\}$$

Supongamos ahora que S y T son conjuntos acotados y que $T \subset \mathbb{R}^+$ y que $S \subset \mathbb{R}^+$:

(a) Demuestra que $\sup(T \cdot S) = \sup T \cdot \sup S$.

(b) Demuestra que $\inf(T \cdot S) = \inf T \cdot \inf S$.

Solución:

(a) Dado que tanto T como S están acotados, tenemos que existen M_1 y M_2 tales que $t \leq M_1$ para todo $t \in T$ y que $s \leq M_2$ para todo $s \in S$, al ser $s > 0$ y $t > 0$, tendremos que $ts \leq M_1 M_2$, por lo tanto $M_1 M_2$ es una cota superior para TS. Sean ahora $c = \sup(TS)$, $a = \sup T$ y $b = \sup S$. $a \geq t$ para todo $t \in T$, $b \geq S$, por lo tanto $ts \leq ab$, lo que quiere decir que ab es cota superior de TS y, por lo tanto, $ab \geq c$, por ser el supremo la menor de la cotas superiores, es decir $\sup(T \cdot S) \leq \sup T \cdot \sup S$.

Veamos que $\sup(T \cdot S) \geq \sup T \cdot \sup S$: tenemos que $\sup(TS) \geq ts$, para todo t y para todo s, por lo tanto $\dfrac{1}{t}\sup(TS) \geq s$, es decir, $\dfrac{1}{t}\sup(TS) \geq \sup S$, para todo $t \in T$, por lo tanto $\dfrac{1}{\sup S}\sup(TS) \geq t$, para todo t y, en consecuencia,

$$\frac{1}{\sup S}\sup(TS) \geq \sup T,$$

en definitiva

$$\sup(T \cdot S) \geq \sup T \cdot \sup S.$$

Con lo que que queda demostrado que

$$\sup(T \cdot S) = \sup T \cdot \sup S.$$

(b) La demostración es del todo análoga a la anterior.

9. Dados A y B subconjuntos no vacíos de números reales, consideremos el conjunto $C = \{a - b : a \in A, b \in B\}$. Probar que C está acotado superiormente si, y sólo si, A está acotado superiormente y B está acotado inferiormente, en cuyo caso se tiene que $\sup C = \sup A - \inf B$.

   Solución:

   En primer lugar, hay que tener en cuenta la igualdad, obvia, que $\sup(-B) = -\inf B$, donde $-B$ es el conjunto $\{-b : b \in B\}$.

   Supongamos ahora que A está acotado superiormente y que B lo está inferiormente, es decir que existen M_1 y M_2 tales que $a \leq M_1$ para todo $a \in A$ y $b \geq M_2$ para todo $b \in B$. Entonces $-b \leq -M_2$ y, en consecuencia, $a - b \leq M_1 - M_2$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, es decir, C está acotado superiormente.

   Recíprocamente, si C está acotado superiormente, existirá M tal que $a - b \leq M$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Por lo tanto, dado un $b_0 \in B$ fijo, tendremos que $a - b_0 \leq M$ para todo $a \in A$, es decir $M - b_0$ es una cota superior para A. Análogamente, dado un $a_0 \in A$ fijo, tendremos que $a_0 - b \leq M$, para todo $b \in B$, es decir $-b \leq M - a_0$ y, por lo tanto, $b \geq a_0 - M$, para todo $b \in B$, es decir B está acotado inferiormente.

   Ahora $C = A + (-B)$ y, tal y como hemos demostrado en el ejercicio (7), será
   $$\sup C = \sup A + \sup(-B) = \sup A - \inf B.$$

   lo que termina la demostración.

10. Demuestra las siguientes igualdades:

(a) $\sup\left\{1-\dfrac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}=1,$

(b) $\inf\left\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{2^n} : m,n\in\mathbb{N}\right\}=0.$

Solución:

(a) 1 es cota superior, puesto que $1>1-\dfrac{1}{n}$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Sea ahora s tal que $1-\dfrac{1}{n}<s$ para todo n, entonces tendríamos que $1<s+\dfrac{1}{n}$ para todo n, por lo tanto $s>1$. En resumen, 1 es la menor de las cotas superiores.

(b) En primer lugar, dado que para todo $n\in\mathbb{N}$ es $n\leq 2^n$, tendremos que $\dfrac{1}{2^n}\leq\dfrac{1}{n}$, por lo que $0\leq \inf_m\left\{\dfrac{1}{2^m} : m\in\mathbb{N}\right\}\leq \left\{\dfrac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}=0$

Dado que $0<\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{2^n}$, el punto 0 es una cota inferior. Sea s tal que $s<\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{2^n}$, para todo $n,m\in\mathbb{N}$, En particular $s<\inf_n\left\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{2^n} : m,n\in\mathbb{N}\right\}=\dfrac{1}{2^m}$, para todo m y, por lo tanto $s<\inf_m\left\{\dfrac{1}{2^m} : m\in\mathbb{N}\right\}=0$, es decir que 0 es la mayor de las cotas inferiores.

Otra solución pasa por considerar que $\left\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{2^n} : m,n\in\mathbb{N}\right\}=T+S$, donde $T=\left\{\dfrac{1}{m} : m\in\mathbb{N}\right\}$ y $S=\left\{\dfrac{1}{2^n} : n\in\mathbb{N}\right\}$, dado que $\inf T=0$ y $\inf S=0$, por lo tanto $\inf\left\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{2^n} : m,n\in\mathbb{N}\right\}=\inf T+\inf S=0.$