Tarea: Tipos de aplicaciones
Soluciones

1. Determina el carácter (inyectiva, exhaustiva, biyectiva) de la aplicación $f(x) = 2x$ en los casos siguientes:

   (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

   (b) $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, donde $2\mathbb{Z}$ indica el conjunto de los números enteros pares.

   (c) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

   Solución:

   (a) Se trata de una aplicación inyectiva, puesto que si $2n = 2m$, entonces $n = m$. Pero no es exhaustiva, puesto que un número impar no se puede obtener doblando un número natural.

   (b) Es inyectiva, igual que en el apartado anterior. También es exhaustiva, puesto que $2\mathbb{Z}$ es el conjunto de los enteros pares y, por lo tanto cualquiera de ellos es siempre el doble de un entero. Por lo tanto, en este caso, se trata de una aplicación biyectiva.

   (c) También es biyectiva, puesto que todo racional dividido por 2 es un racional.

2. Sea $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty)$. Determina el carácter (inyectiva, exhaustiva, biyectiva) de la aplicación $h(x) = |x|$, en los casos siguientes:

   (a) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

   (c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

   Solución:

   (a) En este caso no es inyectiva, puesto que $|x| = |-x|$. Tampoco es exhaustiva, puesto el valor absoluto de un número siempre es un número positivo.

   (b) No es inyectiva por la misma razón del apartado anterior. En este caso, es axhaustiva, puesto que cualquier número positivo x es el valor absoluto tanto de x como de $-x$.

   (c) Ahora se trata de una aplicación biyectiva, puesto que no puede haber dos números positivos con el mismo valor absoluto, por lo tanto es inyectiva y exhaustiva, es decir, biyectiva.

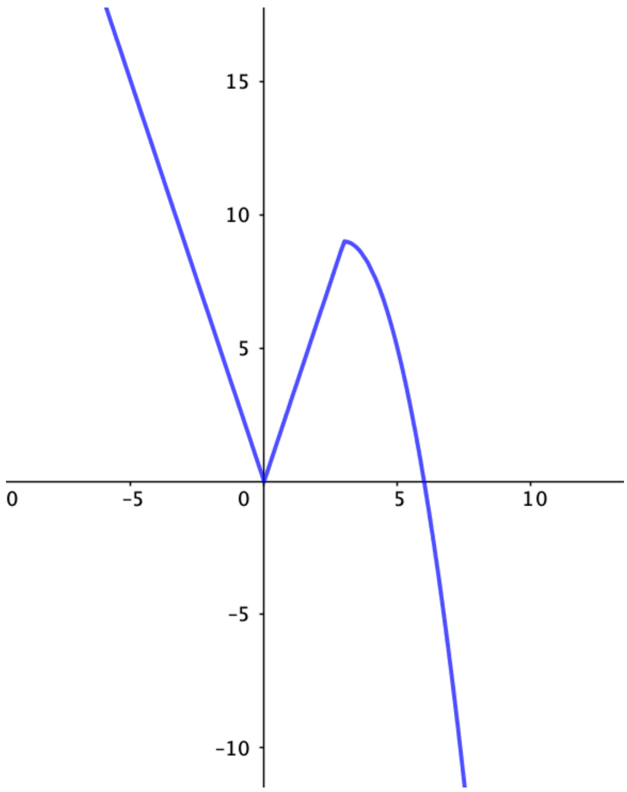
3. Determina el carácter (inyectiva, exhaustiva, biyectiva) de la aplicación

$$f(x) = \begin{cases} 6x - x^2, & \text{si } x \geq 3, \\ |3x|, & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Solución:

Tenemos que tanto 1 como -1, son menores que 3, por lo que $f(1) = f(-1) = 3$, es decir, la aplicación no es inyectiva.

Por otra parte, dado que $f(3) = 9$, si $y > 9$, resulta que y es la imagen de $\frac{y}{3}$, y si $y < 9$, entoces existirá un x tal que $f(x) = y$ si la ecuación de segundo grado $6x - x^2 = y$ tiene alguna solución, lo cual ocurre si el correspondiente doscriminante $(b^2 - 4ac)$ es positivo. En este caso es $36 - 4y > 0$, es decir $y < 9$. Por lo tanto se trata de una aplicación exhaustiva no inyectiva. La gráfica de la función corrobora este resultado.



4. Sea $p \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_p(n)$ indica el resto resultante al dividir n entre p: $n = pq + r$. Demuestra que la aplicación

$$g_p : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, \ldots p - 1\}$$

es exhaustiva. ¿Es inyectiva?.

Solución:

Se trata de una aplicación exhaustiva, puesto que la imagen de cada uno de los elemento del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots p-1\}$ es él mismo, es decir $g_p(x) = x$ si $x \in \{0, 1, 2, \ldots p - 1\}$.

No es inyectiva ya que, por ejemplo, para todos los múltiplos de p la imagen por g_p es 0.

5. Sean a, b dos números reales, con $a < b$. Demuestra que la aplicación h de $[0, 1]$ en $[a, b]$ definida por $h(x) = a + t(b - a)$ es una biyección. Calcula la aplicación inversa h^{-1}.

Solución:

Es inyectiva: puesto que si $a + t(b - a) = a + t'(b - a)$, entonces, claramente $t = t'$. Sea ahora un $y \in [a, b]$, entonces $y = a + t(b - a)$ si $t = \dfrac{y - a}{b - a}$ está claro que $t \in [0, 1]$ y que $h(t) = h\left(\dfrac{y - a}{b - a}\right) = y$, por lo tanto h también es exhaustiva. Además

$$h^{-1}(y) = \frac{y - a}{b - a}$$

6. Sean a, b, c, d números reales tales que $a < b$ y $c < d$. Demuestra que existe una aplicación biyectiva entre los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$. Determina explícitamente una biyección entre ellos. (Indicación: Usa el ejercicio 5).

   Solución:

   Hemos demostrado que existe una biyección f entre $[a, b]$ y $[0, 1]$ y también que existe una biyección $g : [0, 1] \to [c, d]$. Tenemos que

   $$f(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{y} \quad g(t) = c + t(d-c)$$

   Por lo tanto

   $$g(f(x)) = c + f(x)(d-c) = c + (d-c)\frac{x-a}{b-a}$$

   es una aplicación biyectiva entre $[a, b]$ y $[c, d]$:

   - Es inyectiva: puesto que si $g(f(x) = g(f(x')$, entonces $x = x'$.
   - Es exhaustiva, puesto que dado un $y \in [c, d]$, entonces para que exista un $x \in [a, b]$ tal que

     $$y = c + (d-c)\frac{x-a}{b-a} \in [a, b]$$

     debe pasar que

     $$x = a + (b-a)\frac{y-c}{d-c}$$

     Si $y \in [c, d]$, entonces $0 < \frac{y-c}{d-c} < 1$ y, por lo tanto $x \in [a, b]$.

7. Demuestra que la aplicación $h : (0,1) \to (0,+\infty)$ definida por

$$h(x) = \frac{1}{1-x}$$

es biyectiva. (Recuerda que $(0,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$).

Solución:

Es inyectiva puesto que si $\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x'}$ entonces $1-x = 1-x'$ y, por lo tanto $x = x'$

Es exhaustiva puesto que $y = \dfrac{1}{1-x}$ si $1-x = \dfrac{1}{y}$, es decir $x = 1 - \dfrac{1}{y}$ y está claro que $x \in (0,1)$ si $y > 0$.

8. Sea A el conjunto de los números racionales del intervalo unidad, $A = [0,1]\cap\mathbb{Q}$ y sea B, el conjunto de los números irracionales de este mismo intervalo, $B = [0,1] \setminus A$.

   (a) Si $A' = A\setminus\{0,1\}$, demuestra que A y A' tienen el mismo cardinal. (Indicación: el conjunto de números racionales es numerable).

   (b) Sea $g : A' \to A$ una biyección. Demuestra que la aplicación h de $(0,1)$ en $[0,1]$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in A', \\ x, & \text{si } x \in B \end{cases}$$

   es una biyección y, por lo tanto, los intervalos $(0,1)$ y $[1,0]$ tienen el mismo cardinal.

Solución:

Hemos visto que el conjunto $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ es infinito numerable (método diagonal de Cantor), por lo tanto $A' = A \setminus \{0,1\}$ también es infinito numerable. Existe, pues, una biyección $g : A' \to A$. Veamos que la aplicación h es biyectiva.

Sea $x \in (0,1)$, entonces o $x \in A'$ o $x \in B = [0,1] \setminus A$. En el primer caso $h(x) = g(x)$, y en el segundo $h(x) = x$, por lo tanto si $h(x) = g(x) = g(x') = h(x')$ es $x = x'$, por ser g una biyección y si $x = h(x) = h(x') = x'$, es decir, en cualquier caso h es inyectiva.

Por otra parte, si $y \in [0,1]$, entonces $y \in A$ o $y \in B$ y por lo tanto, en los dos casos, y es la imagen de algún $x \in (0,1)$.

9. Demuestra que los intervalos $(0,1]$ y $[0,1)$ tienen el mismo cardinal.

   Solución:

   Usando una estrategia similar al caso anterior, podemos demostrar que existe una biyección entre $(0,1]$ y $[0,1]$, es suficiente considerar como $A' = A \setminus \{0\}$. Anàlogamente, considerando $A' = A \setminus \{1\}$ se demuestra que hay una biyección entre $[0,1)$ y $[0,1]$.

   Al ser tanto $(0,1]$ com $[1,0)$ del mismo cardinal que $[0,1]$, resulta que ellos también tienen el mismo cardinal.