Tarea: Intervalos

1. Resuelve las siguientes inecuaciones:

   a) $|x-1|<3$. b) $|2-3x|<1$. c) $|x-2|>3$.

   Solución:

   (a) $|x-1|<3$ es equivalente a $-3<x-1<3$, es decir, $2<x<4$, por lo tanto la solución es el conjunto de puntos del intervalo $(-2,4)$.

   Código Python para resolver esta inecuación:

```
import sympy as sp
x =var('x')
from sympy.solvers.inequalities import solve_univariate_inequality
expr=abs(x-1)
print(solve_univariate_inequality(expr < 3,x))
```

   (b) $|2-3x|<1$ es equivalente a $-1<3x-2<1$, es decir, debe ser $1<3x<3$, por lo tanto la solución es el intervalo $\left(\dfrac{1}{3},3\right)$.

   Código Python para resolver esta inecuación:

```
import sympy as sp
x =var('x')
from sympy.solvers.inequalities import solve_univariate_inequality
expr=abs(2-3*x)
print(solve_univariate_inequality(expr < 1,x))
```

   (c) Dado que el valor absoluto és un máximo, conviene resolver la inecuación $|x-2|\leq 3$ y la solución de la inecuación dada será el conjunto complementario. Ahora $|x-2|\leq 3$, si, y sólo si, $-3\leq x-2\leq 3$, es decir, si $-1\leq x\leq 5$, por lo tanto la solución de la inecuación dada es el conjunto $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$.

   Código Python para resolver esta inecuación:

```
import sympy as sp
x =var('x')
from sympy.solvers.inequalities import solve_univariate_inequality
expr=abs(x-2)
print(solve_univariate_inequality(expr > 3,x))
```

2. Resuelve analíticamente y gráficamente las siguientes inecuaciones:

$$\text{a) } |5 - \frac{1}{x}| < 1 \quad \text{ y } \quad \text{b) } |x^2 - 2| \leq 2.$$

Solución:

(a) $|5 - \frac{1}{x}| < 1$, si,y sólo si, $-1 < \frac{1}{x} - 5 < 1$, es decir, si $4 < \frac{1}{x} < 6$, es decir, si $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$, por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$.
Código Python:

```
import sympy as sp
x =var('x')
from sympy.solvers.inequalities import solve_univariate_inequality
expr=abs(5-(1/x))
print(solve_univariate_inequality(expr <1,x))
```

(b) $|x^2 - 2| \leq 2$, si,y sólo si, $-2 \leq x^2 - 2 < 2$, es decir, si $0 \leq x^2 \leq 4$, es decir, el conjunto solución de la inecuación dada es $(-2, 2)$.
Código Python:

```
import sympy as sp
x =var('x')
from sympy.solvers.inequalities import solve_univariate_inequality
expr=abs(x**2-2)
print(solve_univariate_inequality(expr <=2,x))
```

3. Resuelve analíticamente y gráficamente la inecuación:

$$|x-4| < |x+2|$$

Solución:

$|x-4| < |x+2|$, si y sólo si, $-|x+2| < x-4 < |x+2|$. Ahora distinguimos dos casos $x < -2$ y $x \geq 2$. En el primero $x \geq -2$, tenemos que $|x+2| = x+2$ y, por lo tanto, será $-x-2 < x-4 < x+2$, es decir $2-x < x < x+6$, desigualdades que son ciertas, siempre que $x > 1$.

Por otra parte, si $x < -2$, entonces $|x+2| = -2-x$ y, por lo tanto, será $x+2 < x-4 < -x-2$, es decir, si $x+6 < x < x+2$, la primera de las desigualdades no tiene solución, para $x < -2$ y la segunda se verifica para todo $x < -2$.

En definitiva, el conjunto solución es el intervalo $(1, +\infty)$.

Código Python:

```
import sympy as sp
x =var('x')
from sympy.solvers.inequalities import solve_univariate_inequality
expr=abs(x+2)-abs(x-1)
print(solve_univariate_inequality(expr >0,x))
```

4. Resuelve la siguientes inecuación:

$$\text{a) } x < x^2 - 12 < 3x.$$

Solución:

Se trata de dos inecuaciones, $x < x^2 - 12$ y $x^2 - 12 < 3x$. Para la primera tenemos que $x^2 - 12 - x = 0$, si, y sólo si ,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2},$$

es decir, si $x = -3$ o $x = 4$, por lo tanto la solución de la primera inecuación $x < x^2 - 12$ es $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$.

Por su parte, $x^2 - 3x - 12 = 0$, si, y sólo si,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+48}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{2},$$

es decir, si $x = \dfrac{3 - \sqrt{57}}{2} = x_1$ o $x = \dfrac{3 + \sqrt{57}}{2} = x_2$, por lo tanto, la solución de la segunda inecuación es el intervalo (x_1, x_2).

En resumen, dado que $x_2 = 5.27 > 4$, tenemos que la solución de las dos inecuaciones es el intervalo $(4, x_2) = \left(4, \dfrac{3 + \sqrt{57}}{2}\right)$

Código Python:

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot
x = symbols('x')
p1 = plot_implicit(x**2-12<3*x,(x,-5.,6.),line_color='c')
w1=solve_univariate_inequality(x**2-12<3*x,x)
print(w1)
p2= plot_implicit(x<x**2-12,(x,-5.,6.), line_color='y')
w2 =solve_univariate_inequality((x<x**2-12),x)
print(w2)
```

5. Resuelve la siguiente inecuación:

$$\text{b) } 0 < |x-3| < \frac{1}{3}$$

Solución:

$0 < |x-3| < \frac{1}{3}$, si, y sólo si, $-\frac{1}{3} < x-3 < \frac{1}{3}$, es decir, si, y sólo si, $-1 < 3x-9 < 1$, si, y sólo si, $8 < 3x < 10$, si, y sólo si $\frac{8}{3} < x < \frac{10}{3}$, por lo tanto, la solución pedida es el intervalo $\left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$

Código Python:

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot
x = symbols('x')
p1 = plot_implicit(abs(x-3)-1/3<0)
w=solve_univariate_inequality(abs(x-3)-1/3<0,x)
print(w)
```

6. Resuelve la inecuación:

$$|x-2|+|x+2| \leq 4.$$

Solución:

Sea $y = |x-2|+|x+2|$, entonces, si $x < -2$ es $|x-2| = -x-2$ y $|x+2| = 2-x$, por lo tanto $y = -x-2+2-x = -2x$. Si $-2 \leq x \leq 2$, entonces $|x-2| = -x+2$ y $|x+2| = x+2$, es decir $y = 4$: Finalmente, si $x > 2$, entonces $|x-2| = x-2$ y $|x+2| = x+2$, es decir $y = 2x$. En resumen

$$y = \begin{cases} -2x, & \text{si } x < -2; \\ 4, & \text{si } -2 \leq x \leq 2; \\ 2x & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Por lo tanto $y \leq 4$, si, y sólo si $-2 \leq x \leq 2$, es decir, el intervalo $[-2, 2]$ es la solución de la inecuación dada.

Código Python, esta vez usando *numpy*, en lugar de *sympy*:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
ax = plt.gca()
x = np.arange(-5,5,0.01)
y = (abs(x-2)+abs(x+2))
ax.plot(x, y)
ax.spines['left'].set_position('zero')
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['bottom'].set_position('zero')
ax.spines['top'].set_color('none')
plt.xticks(np.arange(-5,5, 1))
plt.yticks(np.arange(-8,6.1,2))
plt.show()
```

7. Resuelve analíticamente y gráficamente las siguientes inecuaciones:

$$\text{a) } |x^2 - 3| > 1. \quad \text{b) } \quad |x^2 - x + 1| > 1.$$

Solución:

(a) Como el valor absoluto es el máximo de a entre a y $-a$, resulta más conveniente resolver la inecuación $|x^2 - 3| \leq 1$, la solución de la dada será el completario de la solución de esta. Ahora $|x^2-3| \leq 1$, si, y sólo si, $-1 \leq x^2 - 3 \leq 1$, lo que es equivalente a que $2 \leq x^2 \leq 4$, es decir que, por una parte, si $2 \leq x^2$, debe ser $-\sqrt{2} \leq x$ o $x \geq \sqrt{2}$ y, por la otra $x^2 < 4$ si $-2 \leq x \leq 2$. En definitiva, la solución de la inecuación dada es

$$(-\infty, -2) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (2, \infty)$$

que es el complementario del conjunto solución calculado: $([-\infty, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty]) \cap [-2, 2]$.

Código Python:

```
import sympy as sp
x=var('x')
from sympy.solvers.inequalities import solve_univariate_inequality
expr=abs(x**2-3)
print(solve_univariate_inequality(expr>1,x))
```

(b) Como en anteriores ejemplos, resolveremos la inecuación $|x^2 - x + 1| \leq 1$ y la solución de la dada será el complementario de ésta. Ahora $|x^2-x+1| \leq 1$ si, y sólo sí, $-1 \leq x^2-x+1$ y $x^2-x+1 < 1$, dado que la ecuación de segundo grado $x^2 - x + 2 = 0$ no tiene soluciones reales, será o positiva o negativa para todo x, es fácil comprobar que es positiva, por ejemplo para $x = 0$, por lo tanto la primera de las inecuacones se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$. Veamos que pasa con la segunda: $x^2 - x + 1 \leq 1$ si, y sólo si, $x(x-1) \leq 0$, lo cual ocurre si $0 \leq x \leq 1$) y, por lo tanto, la solución de la inecuación dada es

$$(-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Código Python:

```
import sympy as sp
x =var('x')
from sympy.solvers.inequalities import solve_univariate_inequality
expr=abs(x**2-x+1)
solve_univariate_inequality(expr>1,x)
```

8. Resuelve analíticamente y gráficamente la inecuación:

$$\frac{|x-4|}{|x^2+5|} < 1.$$

Solución:

Dado que $x^2+5>0$ para todo x, las dos inecuaciones se reducen a

$$-x^2-5 < x-4 \quad \text{y} \quad x-4 < x^2+5$$

Dado que la s correspondientes ecuaciones de segundo grado $x^2+x+1=0$ y $x^2-x+9=0$ tienen discriminante negativo, ninguna de las dos ecuaciones tiene solución, por lo tanto o son siempre positivas o siempre negativas. Es f'ácil comprobar que ambas son positivas, por lo tanto la solución de la inecuación dada es toda la recta real $\mathbb{R}$.

Código Python:

```
import sympy as sp
x =var('x')
from sympy.solvers.inequalities import solve_univariate_inequality
expr=abs(x-4)/abs(x**2+5)
print(solve_univariate_inequality(expr<1,x))
```

9. Representa gráficamente los conjuntos de puntos (x, y) tales que:

   a) $x > y$ b) $y \leq 2$ c) $|x - y| < 1$

   Solución:

   (a) Código Python:

   ```
   from sympy import symbols
   from sympy.plotting import plot
   x = symbols('x')
   y = symbols('y')
   p1 = plot_implicit(x>y)
   ```

   (b) Código Python:

   ```
   from sympy import symbols
   from sympy.plotting import plot
   x = symbols('x')
   y = symbols('y')
   p1 = plot_implicit(y<=2)
   ```

   (c) Código Python:

   ```
   from sympy import symbols
   from sympy.plotting import plot
   x,y = symbols('x,y')
   p1 = plot_implicit(abs(x-y)<1)
   ```

10. Representa gráficamente los conjuntos de puntos (x, y) tales que:

    a) $|x| + |y| = 1$ b) $|x - 1| = |y - 1|$. c) $xy = 0$

    Solución:

    (a) Código Python:

    ```
    from sympy import symbols
    from sympy.plotting import plot
    x,y = symbols('x,y')
    expr=abs(x)+abs(y)
    p1 = plot_implicit(expr<1, (x,-1.5,1.5),(y,-1.5,1.5))
    ```

    (b) Código Python:

    ```
    from sympy import symbols
    from sympy.plotting import plot
    x,y = symbols('x,y')
    expr=abs(x-1)-abs(y-1)
    p1 = plot_implicit(abs(x-1)-abs(y-1))
    ```

    (c) $xy = 0$ si, y sólo si, $x = 0$ o $y = 0$, por lo tanto se trata de los dos ejes de coordenadas.

    Código Python:

    ```
    from sympy import symbols
    from sympy.plotting import plot
    x,y = symbols('x,y')
    expr=abs(x-1)-abs(y-1)
    p1 = plot_implicit(x*y)
    ```

11. Representa gráficamente los conjuntos de puntos (x, y) tales que:

a) $y = 2 - \frac{|x|}{x}$ b) $(x-1)^2 + (y-3)^2 < 1$. c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Solución:

(a) Código Python:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
ax = plt.gca()
x = np.arange(-5,5,0.01)
y = (2-(abs(x)/x))
ax.plot(x, y)
ax.spines['left'].set_position('zero')
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['bottom'].set_position('zero')
ax.spines['top'].set_color('none')
plt.xticks(np.arange(-5,5.1, 2))
plt.yticks(np.arange(-2,5.1,2))
plt.show()
```

(b) Código Python:

```
from sympy import symbols
from sympy.plotting import plot
scal = 3840/2400 # factor corrector apariencia
a = 4.05
x,y = symbols('x,y')
plot_implicit((x-1)**2+(y-3)**2<1,x_var=(x,-1,a*scal), y_var=(y,-1,a))
```

(c) Código Python:

```
from sympy import symbols
from sympy.plotting import plot
scal = 3840/2400 # factor corrector apariencia
a = 3.05
x,y = symbols('x,y')
plot_implicit(Eq(x**2/4+y**2/9,1),
                    x_var=(x,-a*scal,a*scal), y_var=(y,-a,a))
```