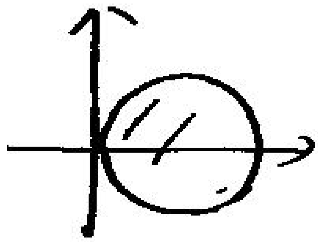
习题 11.4　重积分的应用

1. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.



【解析】（1）所求面积的曲面方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ；

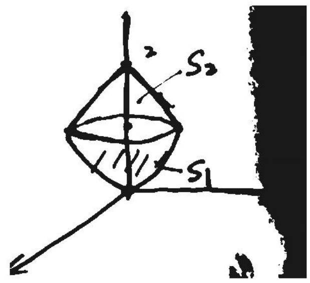
（2）$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$ ；

（3）$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2x$ 为在 xoy 面投影曲线边界方程；

（4）

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}rdr=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}r^2\right)\Bigg|_0^{2\cos\theta}d\theta=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta d\theta=\sqrt{2}\pi$$

2. 求由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}, z=x^2+y^2$ 所围立体的表面积.



【解析】（1）消 z ，得

$\left(x^2+y^2\right)^2=2-\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)^2+\left(x^2+y^2\right)-2=0$ ，即

$\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2+2\right)=0$ ，则 $x^2+y^2=1$ 为积分区域 D 的边界；

（2）$S_1=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$

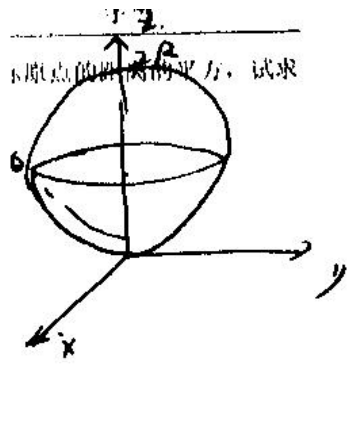
$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\cdot rdr=\dfrac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$；

（3）$S_1=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\iint_D\sqrt{1+\dfrac{x^2}{2-x^2-y^2}+\dfrac{y^2}{2-x^2-y^2}}dxdy$

$=\sqrt{2}\iint_D\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{2-r^2}}\cdot rdr=(4-2\sqrt{2})\pi$ ；

（4）$S=S_1+S_2=\dfrac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)+(4-2\sqrt{2})\pi$

3. 球体 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ 内，各点处的密度大小等于该点到坐标原点的距离的平方，试求该球体的质心.



【解析】（1）V 为球体空间区域，所给球体质量分布对称于 z 轴，质点位于 z 轴上，由对称性可知，$\bar{x}=0,\bar{y}=0$ ，所以只要求 $\bar{z}$ ；

（2）密度 $\rho=x^2+y^2+z^2$ ；

（3）$M=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dV$　　利用球坐标

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{5}\left(2R\cos\varphi\right)^5 d\varphi=\frac{32}{15}\pi R^5;$$

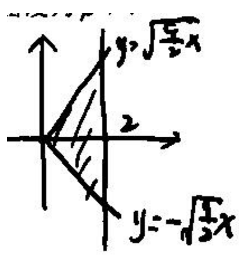
（4）$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dV=\frac{1}{M}\iiint\limits_V z(x^2+y^2+z^2)dV$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r\cos\varphi\cdot r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{2\pi}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\frac{1}{6}\left(2R\cos\varphi\right)^6 d\varphi$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{8}{3}\pi R^5=\frac{5}{4}R$$

所以质心为$\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

4. 求由$y^2=\frac{9}{2}x$和$x=2$围成的均匀薄板对x轴及y轴的转动惯量（设面密度为ρ）.



【解析】$I_x=\iint\limits_D y^2\rho d\sigma=\rho\int_0^2 dx\int_{-\sqrt{\frac{9}{2}x}}^{\sqrt{\frac{9}{2}x}}y^2dy=\rho\int_0^2\left(\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{-\sqrt{\frac{9}{2}x}}^{\sqrt{\frac{9}{2}x}}dx$

$$=\frac{2}{3}\rho\int_0^2\left(\sqrt{\frac{9}{2}x}\right)^3dx=\frac{2}{3}\rho\int_0^2\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{9}{\sqrt{2}}\rho\int_0^2 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{72}{5}\rho\ .$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\rho d\sigma=\rho\int_0^2 dx\int_{-\sqrt{\frac{9}{2}x}}^{\sqrt{\frac{9}{2}x}}x^2dy=2\rho\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{\frac{9}{2}x}dx=2\rho\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\int_0^2 x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{96}{7}\rho\ .$$