

第十六章 电磁感应 电磁场

16—1 电磁感应定律

16—2 动生电动势和感生电动势

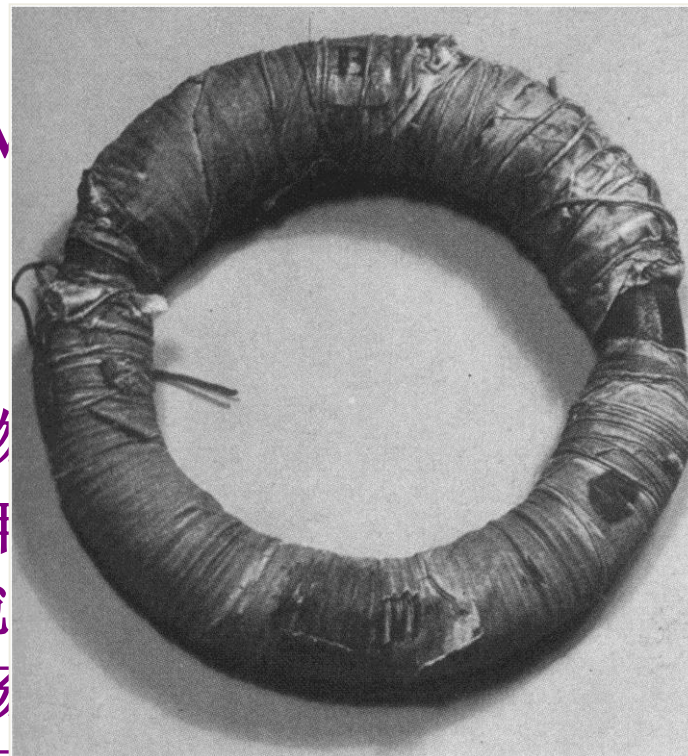
16—3 自感和互感

16—4 磁场的能量

16—6 位移电流

16—7 麦克斯韦方程组

16—9 平面电磁波



M
(

物
年
创
场

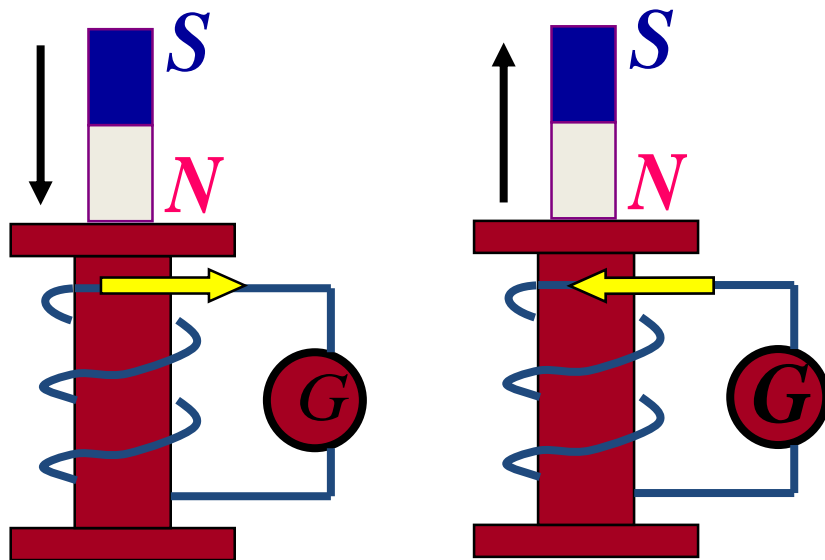
早引入的,他是电磁理论的
创始人之**法拉第用过的螺绕环**

16—1 电磁感应定律

一、电磁感应现象

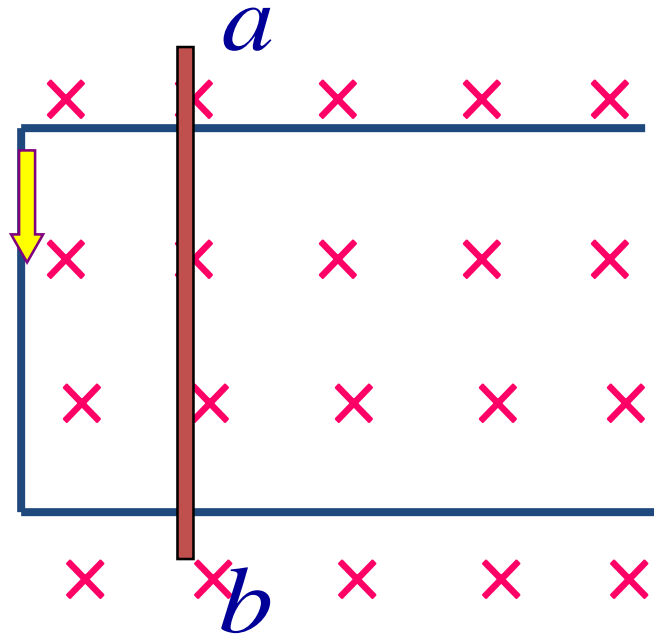
1831年法拉第首次发现，载流线圈中电流发生变化时，处在附近的闭合回路中有感应电流产生.

实验一 当条形磁铁插入或拔出线圈回路时，在线圈回路中会产生电流；而当磁铁与线圈保持相对静止时，回路中不存在电流.



实验二 当闭合回路和载流线圈间没有相对运动，但载流线圈中电流发生变化时，同样可在回路产生电流。

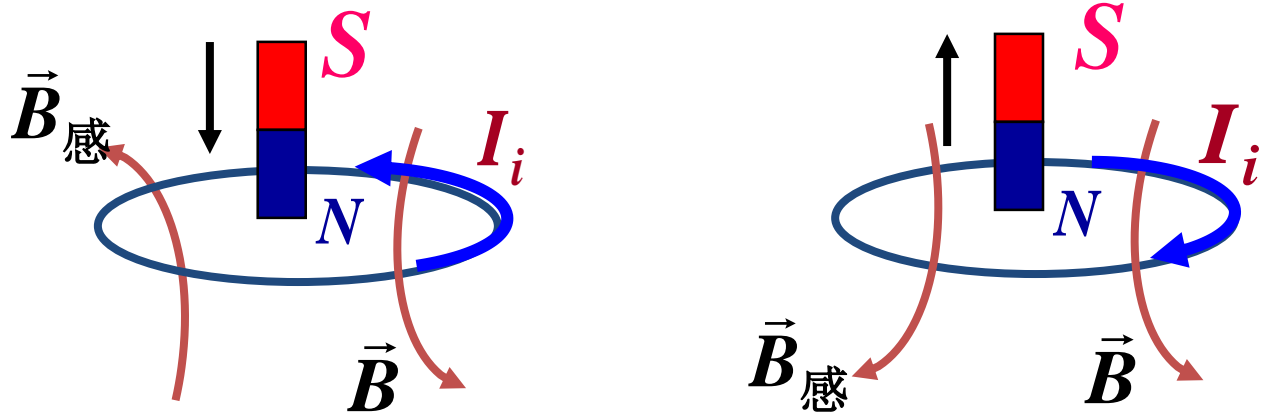
实验三 将闭合回路置于恒定磁场中，当导体棒在导体轨道上滑行时，回路内出现了电流。



电磁感应实验的结论

不管什么原因使穿过闭合导体回路所包围面积内的磁通量发生变化(增加或减少), 回路中都会出现电流, 这一现象称为电磁感应现象, 电磁感应现象中产生的电流称为感应电流.

二、楞次定律





楞次 (1804—1865)

楞次出生在德国的Dorpat .
俄国物理学家和地球物理学家,
1845年倡导组织了俄国地球物
理学会. 1836年至1865年任圣
彼得堡大学教授, 兼任海军和
师范等院校物理学教授.

楞次定律 回路中感应电流的流向, 总是使感应电流激发的穿过该回路的磁通量, 反抗回路中原磁通量的变化.

* 楞次定律的实质 \longrightarrow 能量守恒

三、法拉第电磁感应定律

感应电动势就是直接由电磁感应现象所引起的电动势。

法拉第电磁感应定律 不论任何原因,当穿过闭合导体回路所包围面积的磁通量 发生变化时,在回路中都会出现感应电动势,而且感应电动势的大小总是与磁通量对时间的变化率成正比。

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad \text{单位: 伏特(V)}$$

说明:

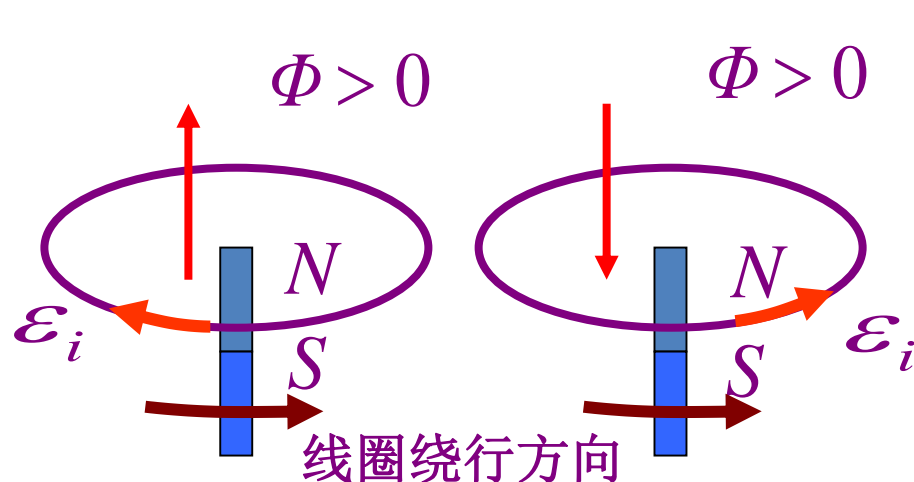
1) N 匝线圈, 令

$$\Psi_m = N\Phi_m$$

磁通链数

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi_m}{dt}$$

- 电磁感应定律中的负号反映了感应电动势的方向与磁通量变化状况的关系, 是楞次定律的数学表示.



$$\frac{d\Phi}{dt} > 0$$

$$\varepsilon_i < 0$$

$$\frac{d\Phi}{dt} < 0$$

$$\varepsilon_i > 0$$

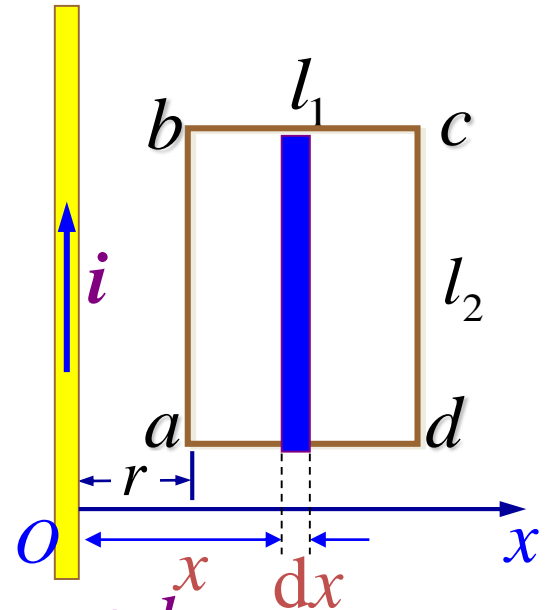
符号法则:

1. 对回路 L 任取一绕行方向.
2. 当回路中的磁感线方向与回路的绕行方向成右手螺旋关系时, 磁通量为正(+), 反之为负(-).
3. 回路中的感应电动势方向凡与绕行方向一致时为正(+), 反之为负(-).

例 一长直导线通以电流 $i = I_0 \sin \omega t$ (I_0 为常数). 旁边有一个边长分别为 l_1 和 l_2 的矩形线圈 $abcd$ 与长直电流共面, ab 边距长直电流 r . 求线圈中的感应电动势.

解: 建立坐标系 Ox 如图

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_r^{r+l_1} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} l_2 dx \\ &= \frac{\mu_0 I_0 l_2}{2\pi} \sin \omega t \ln \frac{r+l_1}{r} \\ \varepsilon_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} l_2 \omega \cos \omega t \ln \frac{r+l_1}{r}\end{aligned}$$



当 $0 < \omega t < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos \omega t > 0$

$\varepsilon_i < 0$ 为逆时针转向

当 $\frac{\pi}{2} < \omega t < \pi$ 时, $\cos \omega t < 0$

$\varepsilon_i > 0$ 为顺时针转向

16-2 动生电动势和感生电动势

根据法拉第电磁感应定律：只要穿过回路的磁通量发生了变化, 在回路中就会有感应电动势产生.

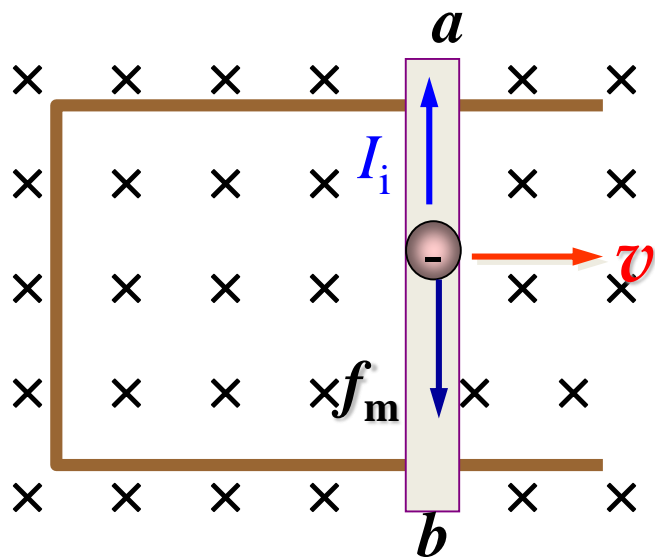
$$\Phi_m = \int_S B \cos \theta dS \left\{ \begin{array}{l} B \text{ 变} \quad \text{感生电动势} \\ \theta \text{ 变} \quad \text{导体转动} \\ S \text{ 变} \quad \text{导体平动} \end{array} \right\} \text{ 动生电动势}$$

一、动生电动势(motional electromotive force)

由 $\varepsilon = \frac{A}{q} = \int \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$

思考: 非静电力场来源?

 洛伦兹力



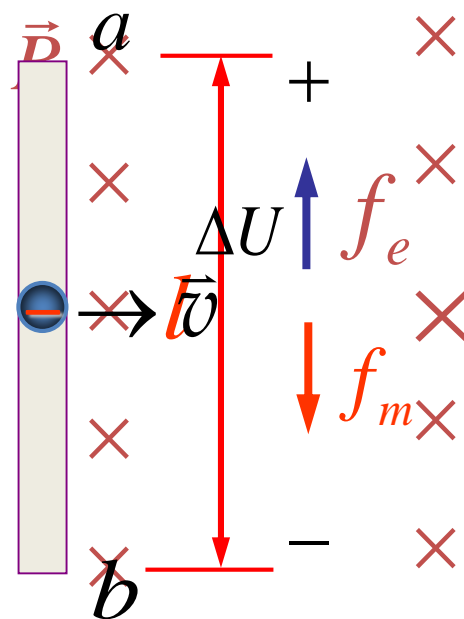
$$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_m}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$$

动生电动势

$$\varepsilon_i = \int \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

导线元 $d\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$



说明:

- 1) 洛伦兹力的作用并不是提供能量, 而是传递能量.
- 2) 未形成回路的导体在磁场中运动, 有动生电动势但没有感应(动生)电流.
- 3) 导线切割磁感线时才产生动生电动势.

动生电动势的计算

1. 定义求解: $\mathcal{E} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$
2. 法拉第电磁感应定律求解: $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt}$

若回路不闭合, 需增加辅助线使其闭合. 计算时只计大小, 方向由楞次定律决定.

例 长为 L 的铜棒 OA , 绕其固定端 O 在均匀磁场 \vec{B} 中以角速度 ω 逆时针转动, 铜棒与 \vec{B} 垂直, 求动生电动势 ε .

解: 方法一 如图, 取线元 $d\vec{l}$, 其运动速度大小为

$$v = \omega l$$

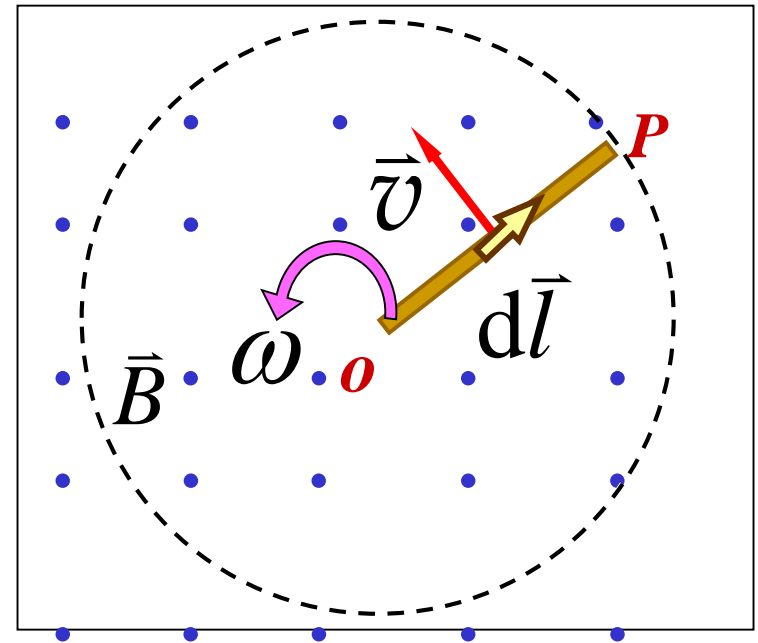
$\vec{v} \times \vec{B}$ 与 $d\vec{l}$ 方向相同

$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vBdl$$

$$= B\omega dl$$

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^L B\omega dl = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

方向 $O \rightarrow A$ $O(-), A(+)$

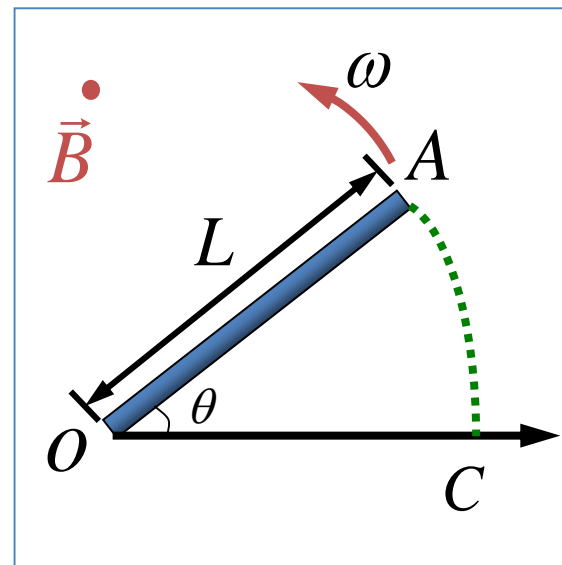


方法二 如图, 构成扇形闭合回路 $AOCA$, 回路的磁通量为

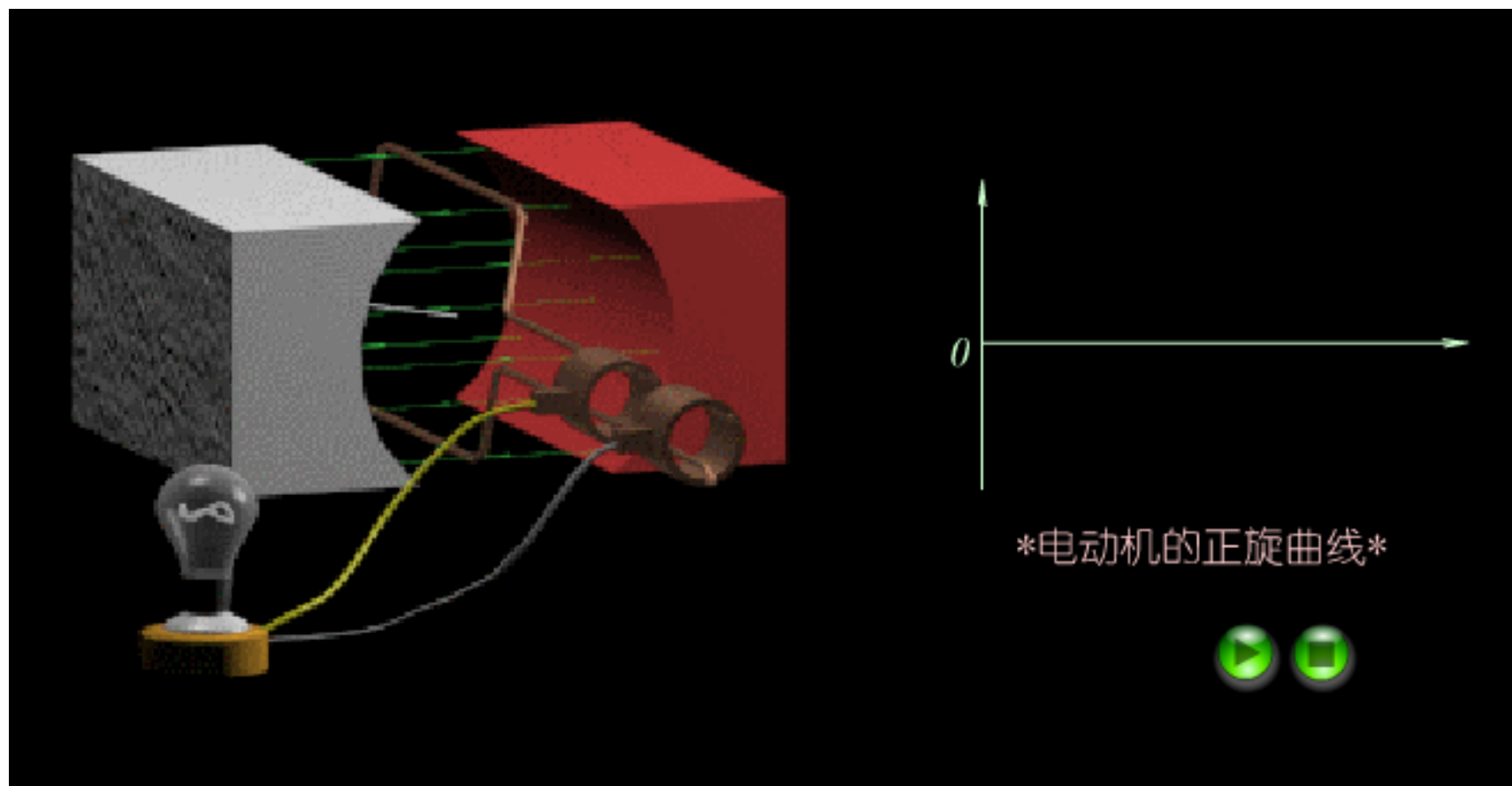
$$\Phi_m = BS_{AOCA} = B \cdot \frac{1}{2} L^2 \theta$$

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{1}{2} BL^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} BL^2 \omega$$

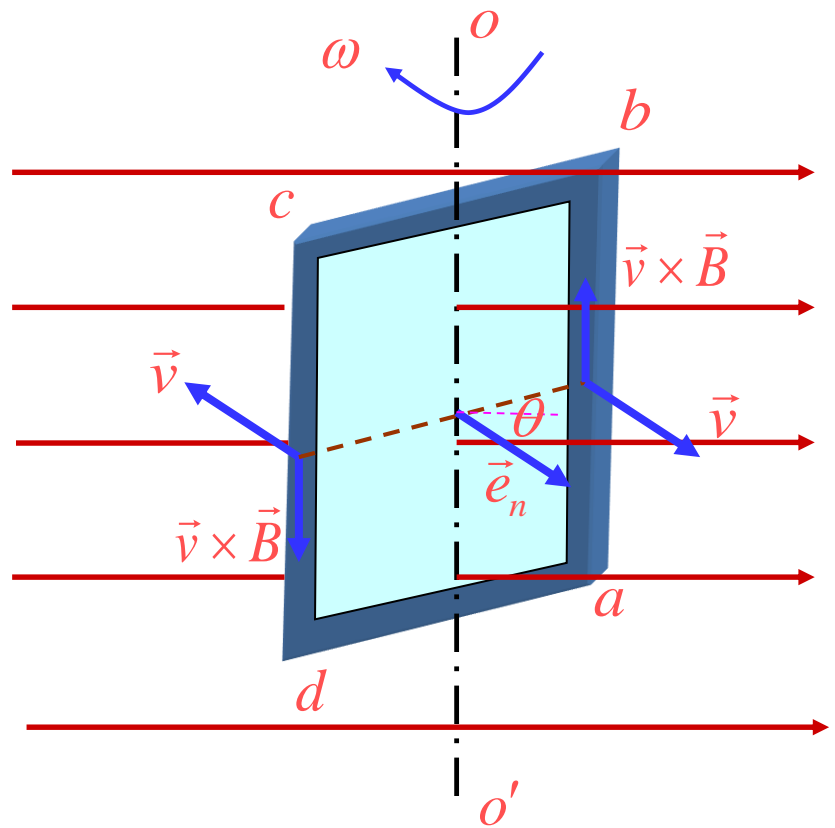
方向 $O \rightarrow A$ $O(-), A(+)$



交流发电机(alternator)



设矩形线圈 $abcd$ 的匝数为 N , 面积为 S , 使这线圈在匀强磁场中绕固定的轴线 OO' 转动, 磁感应强度 \vec{B} 与 OO' 轴垂直。当 $t=0$ 时, \vec{e}_n 与 \vec{B} 之间的夹角为零, 经过 t 时间, 与 \vec{e}_n 与 \vec{B} 之间的夹角为 θ 。



$$\Phi = BS \cos \theta \quad \varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\because \theta = \omega t$$

$$\therefore \varepsilon_i = NBS \omega \sin \omega t$$

$$\text{令 } NBS \omega = \varepsilon_0$$

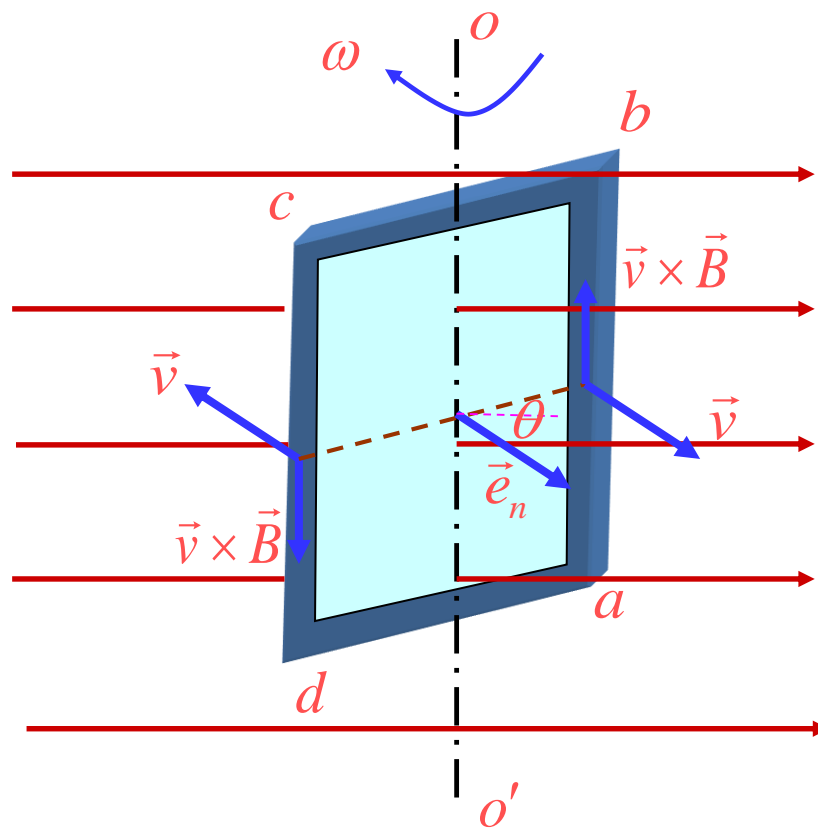
表示当线圈平面平行于
磁场方向瞬时的电动势

$$\text{则 } \varepsilon_i = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

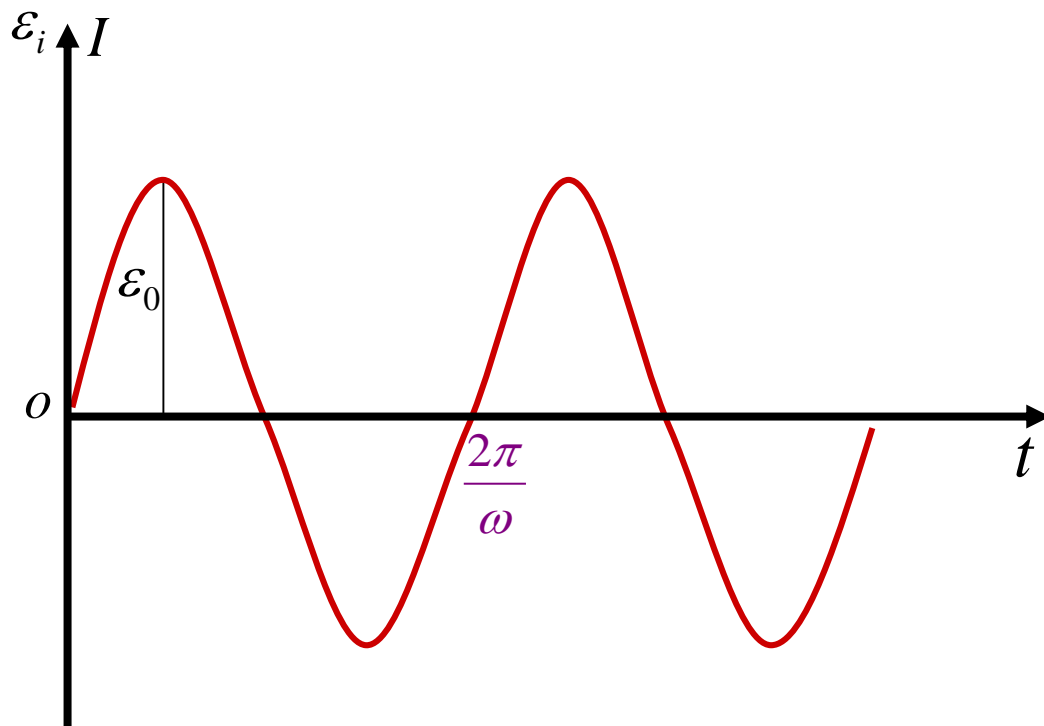
$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

周期 $\frac{2\pi}{\omega}$

频率 $f = \frac{\omega}{2\pi}$



在匀强磁场内转动的线圈中所产生的电动势是随时间作周期性变化的，这种电动势称为**交变电动势**。在交变电动势的作用下，线圈中的电流也是交变的，称为**交变电流或交流**。



交变电动势和交变电流

二、感生电动势(induced electromotive force)

导体回路不动, 由于磁场变化产生的感应电动势.

非静电力场来源? \Longrightarrow 感生电场

由于导体或者导体回路静止, 它不可能是磁场力。感应电流是由原来宏观上静止的电荷受到非静电力作用形成的, 二静止电荷受到的力只能是电场力, 所以非静电力本质是电场力, 而这种电场就是由变化的磁场引起的。

麦克斯韦尔假设: 1861年提出 变化的磁场在其周围空间激发一种电场, 这个电场叫感生电场。

$$\vec{E}_k = \vec{E}_{\text{感}}$$

当闭合导线处于变化的磁场中时, 感生电场作用于导体中自由电荷, 从而引起导体中的感生电动势和感生电流。

对于导线 ab $\varepsilon_i = \int_a^b \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l}$

对于闭合导体回路 $\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l}$

根据法拉第电磁感应定律 $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

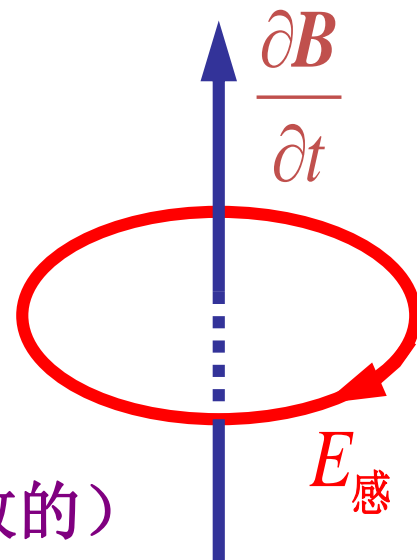
由于回路 L 静止，形状和面积不变，而一般情况下磁感应强度又是空间位置和时间的函数。故可得，电磁场的基本方程之一：

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

负号表示感生电场与变化磁场成左手螺旋关系，

这与用楞次定律判断 $\vec{E}_{\text{感}}$ 的方向是一致的

($\vec{E}_{\text{感}}$ 的方向与感应电动势和感生电流方向是一致的)



三、感生电场与静电场的比较

相同点： 感生电场和静电场均对电荷有力的作用。

不同点	静电场 $\vec{E}_{\text{静}}$	感生电场 $\vec{E}_{\text{感}}$
场 源	静止的正负电荷	变化的磁场
环 流	$\oint_L \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{l} = 0$ 保守场	$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ 非保守场
电 势	势场	非势场
场 线	不闭合，有源场	闭合，无源场
通 量	$\oint_S \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{S} = \sum q / \varepsilon_0$	$\oint_S \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{S} = 0$

四、感生电动势的计算

- 1) 若磁场在空间分布具有对称性, 在磁场中导体又不构成闭合回路, 可先求出空间感生电场分布, 再由定义式求出导体上的感生电动势.
- 2) 若导体为闭合回路, 或虽不闭合, 但可通过辅助线构成闭合回路, 这时可直接利用法拉第电磁感应式求解.

例 如图, 有一局限在半径为 R 的圆柱状空间的均匀磁场, 方向垂直纸面向里, 磁场变化率 dB / dt 为常数且小于零, 求距圆心 O 为 r ($0 < r < \infty$)处的 P 点的感生电场场强.

解: 根据对称性可知, 空间的感应电场也是对称的, 即 $\vec{E}_{\text{感}}$ 线应是一系列以 O 为圆心的同心圆。如图, 作半径为 r 的圆形回路 L 沿顺时针方向, 回路所围面积 S 的法线方向垂直纸面向里, 则

$$1) \quad 0 < r \leq R$$

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$E_{\text{感}} 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

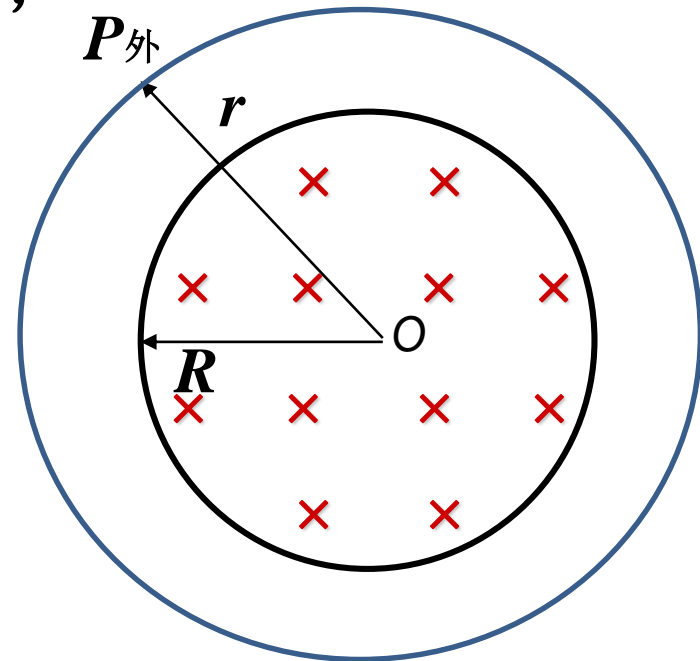
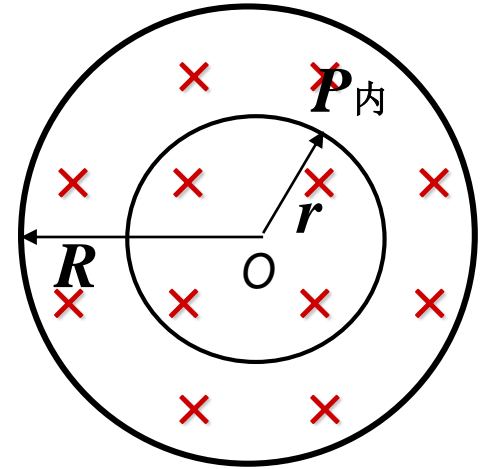
$$\therefore E_{\text{感}} = \frac{r}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right|$$

因为 $E_{\text{感}} > 0$ ，表明 $E_{\text{感}}$ 与回路绕行方向相同，即顺时针方向。用楞次定律也可判定。

$$2) \quad r > R \quad E_{\text{感}} 2\pi r = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\therefore E_{\text{感}} = \frac{R^2}{2r} \left| \frac{dB}{dt} \right|$$

方向同上

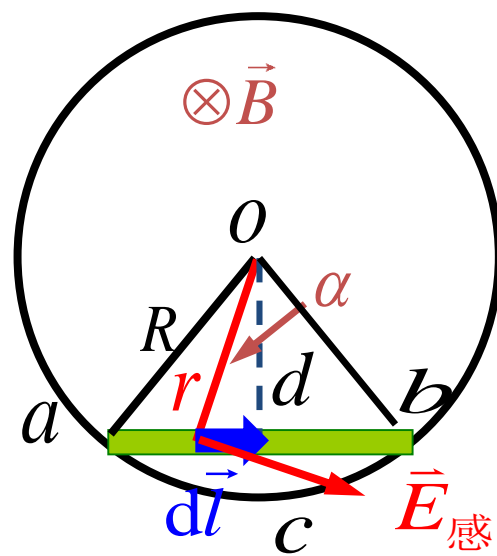


例 如图, 在半径为 R 的圆柱状空间的均匀磁场, 且磁场变化率 $(dB / dt) > 0$, 有一长为 l 的金属棒放在磁场中, 位置如图, 求棒两端的感生电动势.

解: 方法一 如图, 取弓形 $abca$ 为积分回路, 绕行方向为顺时针, 回路所围面积 S 的法线方向垂直纸面向里, 设 θ 为 abo 的顶角, 则

$$\oint_{abca} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} + \int_{bca} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l}$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \mathcal{E}_{ab} &= \int_{ab} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_{abca} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} - \int_{bca} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$



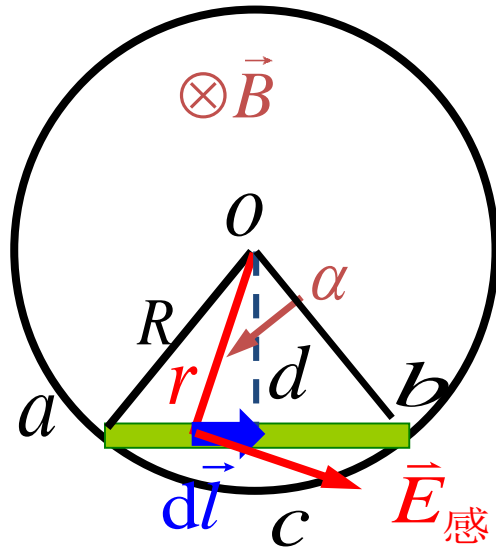
$$= \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \frac{dB}{dt} \quad \text{方向} \quad a \rightarrow b$$

其中, $\oint_{abca} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -S_{abca} \frac{dB}{dt}$

$$= -\left[\frac{\theta}{2\pi} \pi R^2 - \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \right] \frac{dB}{dt}$$

$$\int_{bca} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = -\frac{R}{2} \frac{dB}{dt} \theta R = -\frac{\theta R^2}{2} \frac{dB}{dt}$$

方法二 如图, 取三角形 $abOa$ 为积分回路, 绕行方向为逆时针, 回路所围面积 S 的法线方向垂直纸面向外, 则



$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{ab} &= \int_{ab} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = \oint_{abOa} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} - \int_{bo} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} - \int_{Oa} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} \\
 &= -\oint_{abOa} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - 0 - 0 = -(-S_{abOa} \frac{\partial B}{\partial t}) \\
 &= \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2} \frac{dB}{dt} \quad \text{方向 } a \rightarrow b
 \end{aligned}$$

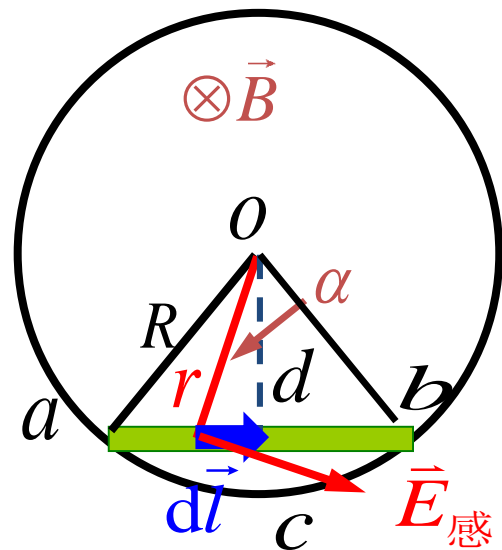
方法三 直接积分法,在 ab 上线元 $d\vec{l}$,则

$$E_{\text{感}} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}, \text{ 其与 } d\vec{l} \text{ 的夹角为 } \alpha, \text{ 则有}$$

$$\mathcal{E}_{ab} = \int_{ab} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \cos \alpha \cdot dl = \int_{ab} \frac{dB}{dt} \frac{d}{2} dl$$

$$= \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \frac{dB}{dt}$$

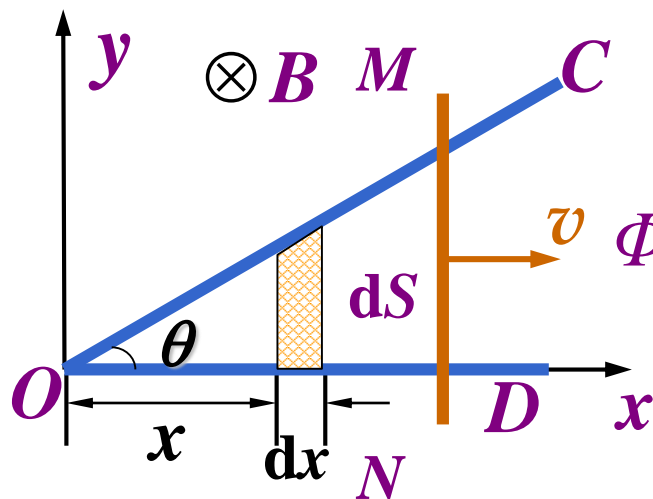
$$\text{其中 } d = r \cos \alpha = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \quad \text{方向 } a \rightarrow b$$



例 如图, 在垂直纸面向内的非均匀的随时间变化的磁场

$B = kx \cos \omega t$ 中, 有一弯成 θ 角的金属框 COD , OD 与 x 轴重合, 一导体棒 MN 沿 x 方向以速度 v 匀速向右滑动, 设 $t=0$ 时 $x=0$, 求框内的感应电动势的变化规律.

解: 在图中取面积元 dS 则



$$dS = ydx = x \tan \theta dx$$

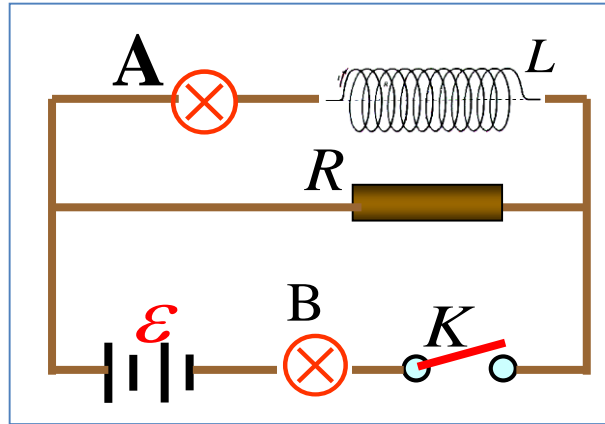
$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^x kx \cos \omega t \cdot x \tan \theta dx \\ &= \frac{1}{3} kx^3 \tan \theta \cos \omega t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{3} kx^3 \tan \theta \cdot \omega \sin \omega t - kx^2 \frac{dx}{dt} \tan \theta \cos \omega t \\ &= \frac{1}{3} k v^3 t^2 \tan \theta (\omega t \sin \omega t - 3 \cos \omega t) \quad \text{式中} \quad x = vt\end{aligned}$$

可以看出, 金属框架上总的感应电动势包括第一项感生电动势和第二项动生电动势.

16—3 自感和互感

一、自感 (self-inductance)



当线圈中的电流发生变化时，它所激发的磁场穿过该线圈自身的磁通量也随之变化，从而在该线圈自身产生感应电动势的现象，称为自感现象，这样产生的感应电动势，称之为自感电动势。

$$\Phi_m = LI \quad L: \text{自感系数(自感) 单位: H (亨利)}$$

自感系数 L 取决于回路线圈自身的性质(回路大小、形状、周围介质等)

自感电动势

按法拉第电磁感应定律，回路中所产生的自感电动势为

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right)$$

如果回路自身性质不随时间变化，则：

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$

注意

1. 负号： ε_L 总是阻碍 I 的变化；
2. L ：描述线圈电磁惯性的大小，回路中的自感系数 L 越大，回路中的电流越不易改变。

二、自感现象的应用和防止

1. 电器设备中，常利用线圈的自感起稳定电流的作用。

例如，日光灯的镇流器就是一个带有铁芯的自感线圈。

2. 电工设备中，常利用自感作用制成自耦变压器或扼流圈。

3. 电子技术中，利用自感器和电容器可以组成谐振电路或滤波电路等。

4. 在具有相当大的自感和通有较大电流的电路中，当切断电源的瞬间，开关处将发生强大的火花，产生弧光放电现象，亦称电弧。

因此通常都用油开关，即把开关放在绝缘性能良好的油里，以防止发生电弧。

自感系数的计算:

- 1) 设线圈通有电流 I ;
- 2) 确定电流在线圈中产生的磁场及其分布.
- 3) 求通过线圈的全磁通.
- 4) 由 $L = \frac{\Phi_m}{I}$ 求得.

例 长为 l 的螺线管,横断面为 S ,线圈总匝数为 N ,管中磁介质的磁导率为 μ . 求自感系数.

解: 螺线管中磁场为

$$B = \mu \frac{N}{l} I$$

磁通量为 $\Psi_i = NBS = \mu \frac{N^2}{l} IS$

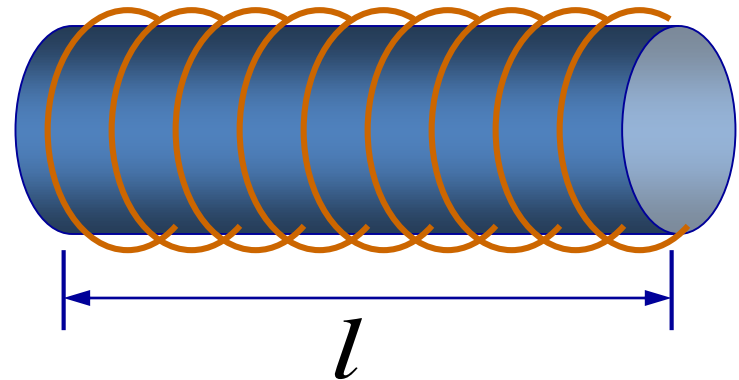
$$L = \frac{\Psi_i}{I} = \mu \frac{N^2}{l} S = \mu \frac{N^2}{l^2} lS$$

线圈体积 $V = Sl$

单位长度上线圈匝数

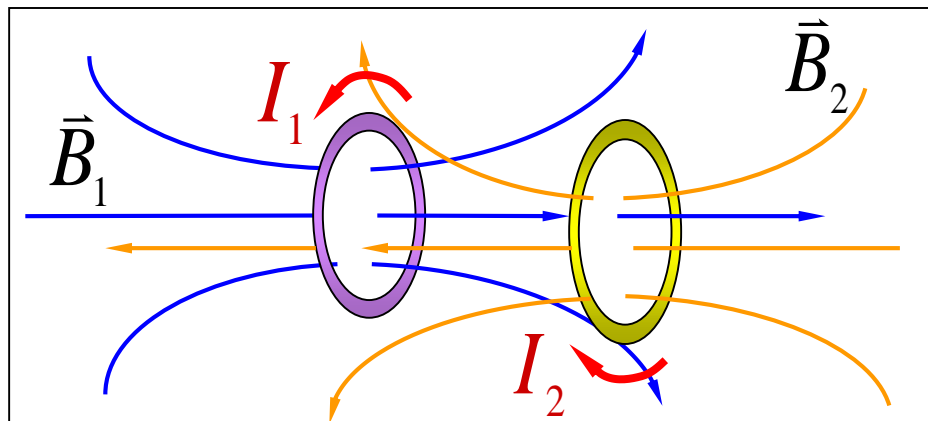
$$n = N / l$$

$$\therefore L = \mu n^2 V$$



三、互感(mutual-inductance)

如图两个载流回路相互地激起感应电动势的现象，称为互感现象。这样产生的感应电动势，称之为互感电动势。



穿过回路2的全磁通 $\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = M_{21} I_1$

穿过回路1的全磁通 $\Psi_{12} = N_1 \Phi_{12} = M_{12} I_2$

互感系数(互感):

只与两个回路的形状、大小、匝数、相对位置以及周围的磁介质的磁导率有关，当它们保持不变时

$$M_{12} = M_{21} = M \quad \text{单位: H (亨利)}$$

$$M = \Psi_{21} / I_1 = \Psi_{12} / I_2$$

根据法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -(M \frac{dI_1}{dt} + I_1 \frac{dM}{dt})$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -(M \frac{dI_2}{dt} + I_2 \frac{dM}{dt})$$

若 M 保持不变, 则:

$$\varepsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt} \qquad \varepsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

当一个回路中的电流随时间的变化率一定时，互感系数越大，通过互感在另一个回路中引起的互感电动势也越大，反之越小。

互感系数本质： 表征两耦合回路相互提供磁通量的强弱。

四、互感的应用和防止

互感在电工和电子技术中应用很广泛，通过互感线圈可以使能量或信号由一个线圈方便地传递到另一个线圈；利用互感现象的原理可制成**变压器**、**感应圈**等。



外型



器身



但在有些情况中,互感也有害处. 例如, 有线电话往往由于两路电话线之间的互感而有可能造成串音; 收录机、电视机及电子设备中也会由于导线或部件间的互感而妨害正常工作. 这些互感的干扰都要设法尽量避免.

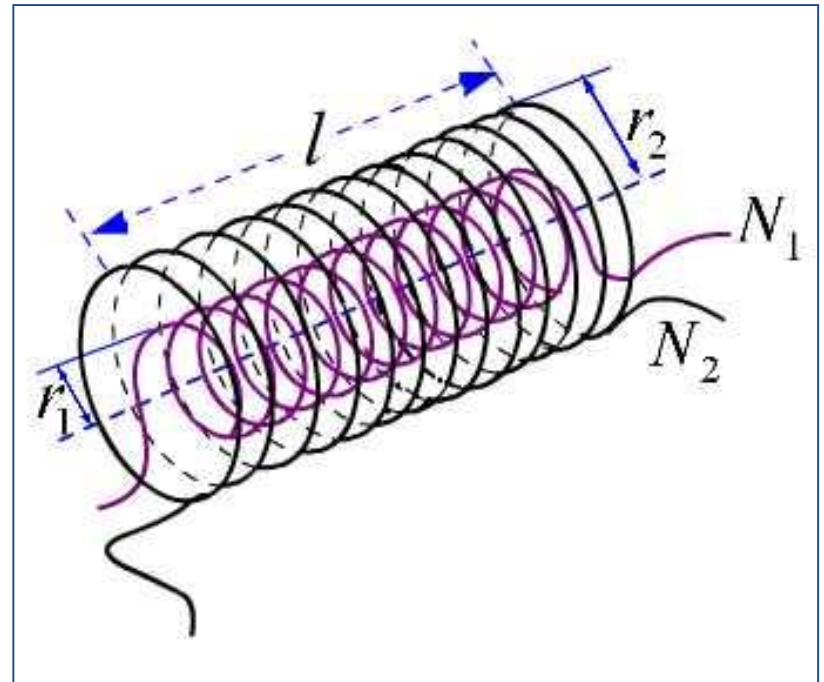
例 有两个长度均为 l , 半径分别为 r_1 和 r_2 ($r_1 < r_2$), 匝数分别为 N_1 和 N_2 的同轴长直密绕螺线管. 求它们的互感.

解: 设半径为 r_1 的线圈中通有电流 I_1 , 则

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 = \mu_0 n_1 I_1$$

则穿过半径为 r_2 的线圈中的磁通匝数为

$$\begin{aligned} N_2 \Phi_{21} &= N_2 B_1 (\pi r_1^2) \\ &= n_2 l B_1 (\pi r_1^2) \end{aligned}$$



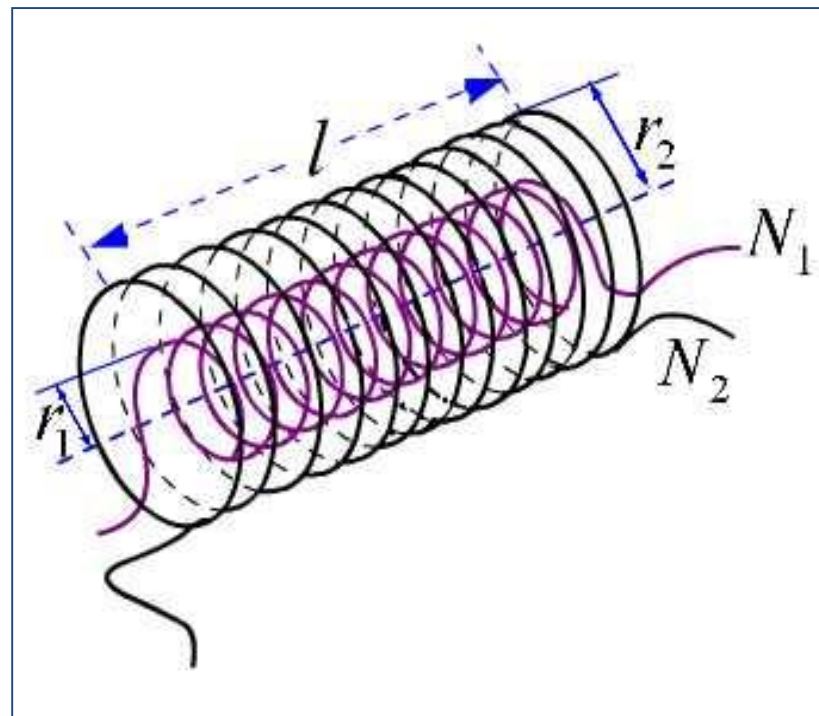
代入可得

$$N_2 \Phi_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2) I_1$$

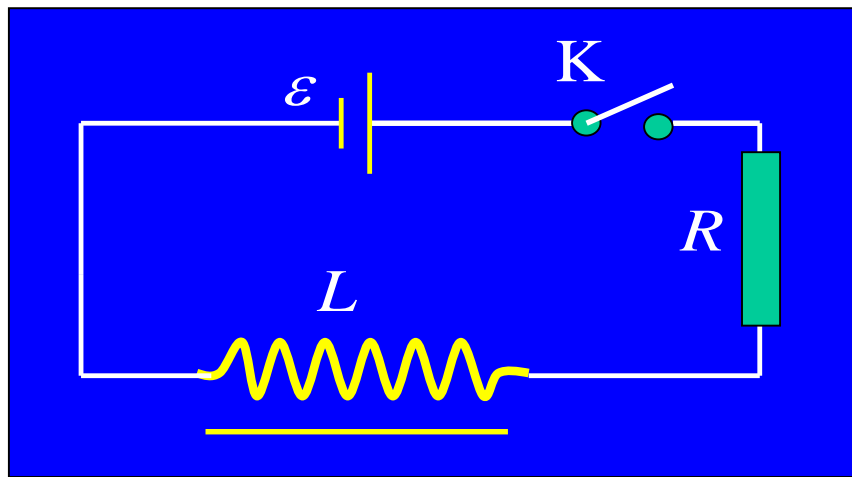
$$\therefore M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2)$$

同理也可求出 M_{21} , 可证得

$$\begin{aligned} \therefore M &= M_{12} = M_{21} \\ &= \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2) \end{aligned}$$



16-4 磁场的能量(magnetic energy)



电键K闭合时，回路中电流由零逐渐增大，线圈中产生自感电动势方向与电源电动势方向相反，起到阻碍电流增大的作用。因此，电源克服自感电动势而做功，所做的功转换为磁场的能量而储存在自感线圈之中。

线圈中通有恒定电流*I*时储存的磁场能量，应等于电流从零增加至稳定值*I*的过程中，电源反抗自感电动势所做的功，*dt*时间内电源克服自感电动势做功为

$$dA = -\varepsilon_L dq = -\varepsilon_L i dt = L i di$$

自感磁能

$$W_m = \int_V dW_m = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$$

考虑均匀密绕螺线管 $B = \mu n I$ $L = \mu n^2 V$

$$\therefore W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} (\mu n^2 V) \cdot \left(\frac{B}{\mu n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu} \cdot V$$

能量密度

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} BH$$

对于一般情况的均匀磁场，磁场能量密度可以表示为

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

在非均匀磁场中，体积元内 dV 中的磁场能量为

$$dW_m = w_m dV = \frac{BH}{2} dV$$

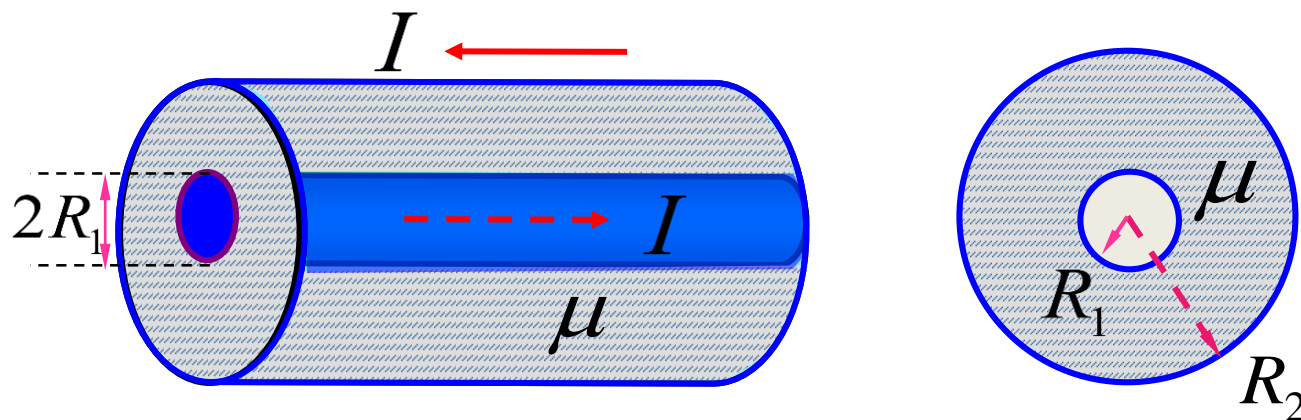
磁场能量

$$W_m = \int_V dW_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{1}{2} BH dV$$

□ 电场能量与磁场能量比较

电场能量	磁场能量
电容器储能 $\frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{Q^2}{2C}$	自感线圈储能 $\frac{1}{2} LI^2$
电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$	磁场能量密度 $w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r}$
电场能量 $W_e = \int_V w_e dV$	磁场能量 $W_m = \int_V w_m dV$
能量法求 C	能量法求 L

例 如图同轴电缆, 中间充以磁介质, 芯线与圆筒上的电流大小相等、方向相反. 已知 R_1, R_2, I, μ , 求单位长度同轴电缆的磁能和自感. 设金属芯线内的磁场可略.



解: 由安培环路定律可求 H

$$H = 0, \quad r < R_1, r > R_2; \quad H = \frac{1}{2\pi r}, \quad R_1 < r < R_2$$

则 $\omega_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$

单位长度壳层体积 $dV = 2\pi r dr$

单位长度同轴电缆的磁场能量为

$$W_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2}{4\pi r} dr = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 可得单位长度同轴电缆的自感为

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

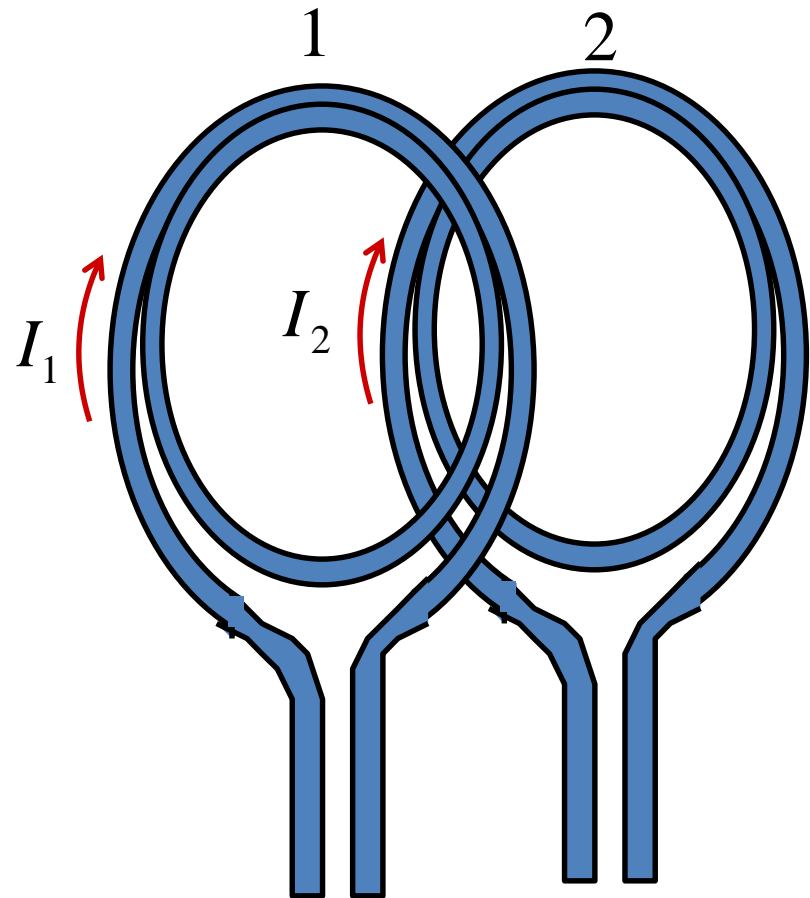
例：用通过在两个线圈中建立电流的过程计算储存在线圈周围空间磁场的方法，证明两个线圈的互感相等，即 $M_1=M_2$ ；并求当电流分别达到 I_1 和 I_2 时的总磁能。

解：设刚开始时两个线圈都是断路，先接通1，使其电流由零增加到 I_1 ，其中磁能为：

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

线圈1的
自感

1接通后，再接通2，使其电流由零增加到 I_2 ，其中磁能为：



$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

线圈2的
自感

由于在线圈2接通并逐渐增大电流的同时在线圈1中有互感电动势的产生，为保持线圈1中电流 I_1 不变，线圈1中的电源必须克服互感电动势做功，因而出现附加磁能。互感电动势大小为：

线圈2对1的互感

$$\varepsilon_{12} = M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

所以附加磁能为

$$\int_0^t \varepsilon_{12} I_1 dt = \int_0^t M_{12} \frac{dI_2}{dt} I_1 dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} dI_2 = M_{12} I_1 I_2$$

因此在两线圈组成的系统中，当线圈1的电流为 I_1 线圈2的电流为 I_2 时，系统所具有的磁能应为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

同理，也可以先在线圈2中建立电流为 I_2 ，然后在线圈1中建立电流为 I_1 时，重做上述讨论，可以得到相应的关系

$$W'_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

线圈1对2的互感

系统能量与建立电流的先后次序无关，所以

$$W_m = W'_m$$

$$\therefore M_{12} = M_{21}$$

$$\text{令 } M = M_{12} = M_{21}$$

则两个线圈总磁能的公式可表示为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

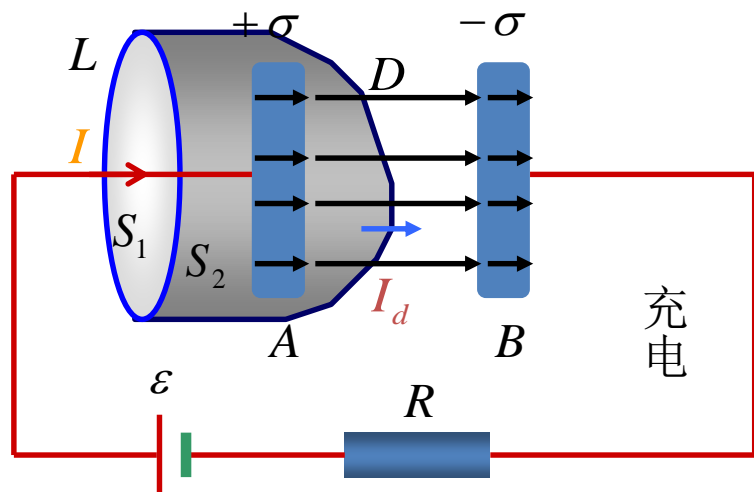
16-6 位移电流

一、位移电流

1. 问题的提出

对稳恒电流 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$

对于如图所示的电容器充、放电过程



对 S_1 面

对 S_2 面

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{矛盾}$$

稳恒磁场的安培环路定理已不适用于非稳恒电流的电路。

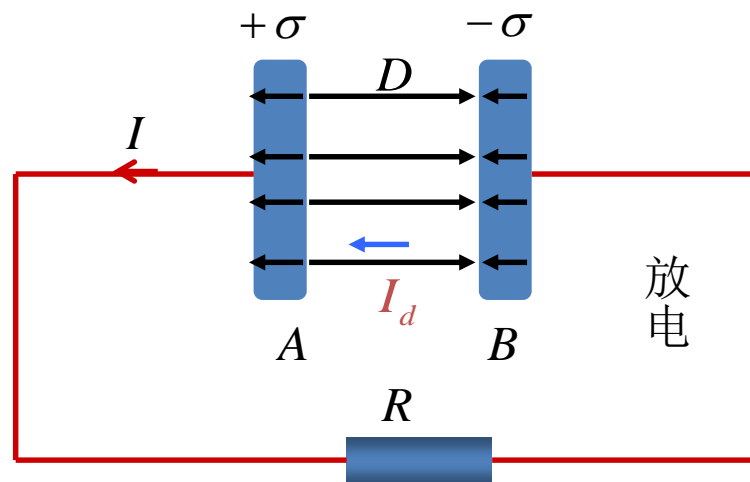
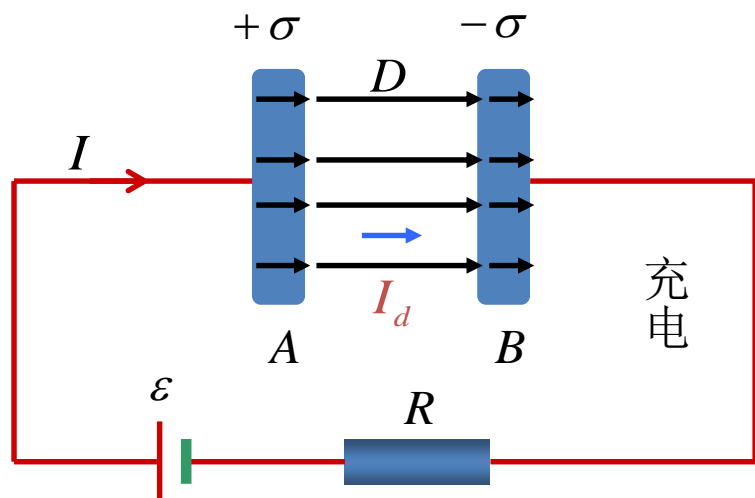
位移电流的提出：

产生上述矛盾的原因在于非稳定情况下电流不再连续。电流在极板处出现中断，但极板上的电荷 q 、电荷面密度 σ 、其间的电位移 D 、通过整个截面的电位移通量 $\Psi_D=SD$ 都随时间变化。

设平行板电容器极板面积为 S ，极板上电荷面密度 σ ，充、放电过程的任一瞬间

$$I = S \frac{d\sigma}{dt} \quad D = \sigma \quad \therefore \quad I = S \frac{d\sigma}{dt} = S \frac{dD}{dt}$$

上式表明，导线中的电流等于极板上的 $S \frac{d\sigma}{dt}$ ，又等于极板间的 $S \frac{dD}{dt}$



在当电容器充电时，电容器两极板间的电场增强，所以的 $\frac{d\vec{D}}{dt}$ 方向与 \vec{D} 的方向相同，也与导线中传导电流的方向相同； 当电容器放电时，电容器两极板间的电场减弱， 所以 $\frac{d\vec{D}}{dt}$ 与 \vec{D} 的方向相反，但仍和导线中传导电流的方向一致。（见上图）

麦克斯韦认为，可以把电位移通量对时间的变化率看作一种电流，称为位移电流。

$$I_d = S \frac{dD}{dt} = \frac{d\psi_D}{dt}$$

位移电流密度为

$$j_d = \frac{1}{S} \frac{d\psi_D}{dt} = \frac{dD}{dt}$$

二、全电流定律

电场中某一点位移电流密度矢量 \vec{j}_d 等于该点电位移矢量对时间的变化率；通过电场中某一截面的位移电流 I_d 等于通过该截面电位移通量 ψ 对时间的变化率，即：

令传导电流和位移电流相加的合电流 $I_t = I + I_d$ 。在有电容器的电路中，电容器极板表面被中断的传导电流 I ，可以由位移电流 I_d 继续下去，从而构成了电流的连续性。

非稳定电流的安培环路定理

在磁场中 H 沿任一闭合回路的线积分，在数值上等于穿过以该闭合回路为边线的任意曲面的全电流。即：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + I_d = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

将上式用于前面的电路取 S_2 面的情况，则

$$\left. \begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I_d = \frac{d\Psi_D}{dt} \\ \frac{d\Psi_D}{dt} &= \frac{dq}{dt} = I \end{aligned} \right\} \Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

解决了前面的矛盾之处。

由此可见，位移电流的引入，揭示了电场和磁场内在的联系和依存关系，反映了自然现象的对称性。

电磁感应定律说明变化的磁场产生涡旋电场，位移电流的论点说明变化的电场产生涡旋磁场，这两种变化的场永远互相联系着，形成统一的电磁场。

麦克斯韦提出的位移电流概念已经为无线电波的发现及其广泛的实际应用所证实。

通常导体中的电流主要是传导电流，位移电流可以不计，电介质中的电流主要是位移电流，传导电流可以不计。

位移电流与传导电流的关系

- (1) 位移电流与传导电流在产生磁效应上是等效的。
- (2) 产生的原因不同：传导电流是由自由电荷运动引起的，而位移电流本质上是变化的电场。
- (3) 通过导体时的效果不同：传导电流通过导体时产生焦耳热，而位移电流不产生焦耳热。

例半径为**R** 的圆形平行板空气电容器, 充电至使电容器两极板间电场的变化率为 dE / dt , 如图所示, 在某一时刻, 电容器内距轴线**r**处的**P**点, 有一电子沿径向向里作匀速直线运动, 此时此刻间的电场强度为 \vec{E} , 忽略重力及极板的边缘效应, 求: 1)极板间的位移电流 I_d ; 2)**P**点的磁感应强度; 3)电子在**P**点的速度大小.

解: 1)电容器两极板间的位移电流为

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = S \frac{dD}{dt} = \pi R^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

由全电流的连续性知, 电流的流向沿轴线向下.

2) I_d 均匀分布, 磁场具有对称性, 为右螺旋同心圆. 取半径为 r 的圆形环路积分, 应用全电流定律:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\mu_0} B_r 2\pi r = \frac{d\Phi_D}{dt} = \pi r^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

$$B_r = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt} \quad \text{方向垂直纸面向里.}$$

3) 电子在 P 点做匀速直线运动, 所以作用在电子上的洛伦兹力与电场力相平衡, 故:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{洛}} &= -e\vec{v} \times \vec{B}_r, \quad \text{方向向下.} \\ \vec{f}_{\text{电}} &= -e\vec{E} \quad \text{方向向上.} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad v = \frac{E}{B_r} = \frac{2E}{\mu_0 \varepsilon_0 r} \cdot \frac{1}{\frac{dE}{dt}}$$

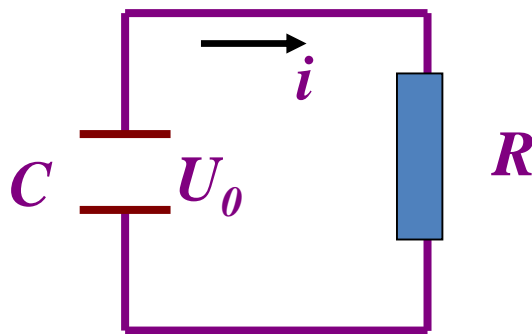
例 电容为 C , 极板面积为 S , 板间距为 d 的圆形平板电容器有漏电现象, 两板间介质的电容率为 ε , 磁导率为 μ , 电导率为 γ , 充电到电压为 U_0 和极板上带电 q_0 时, 撤去电源, 试计算: 1) 极板上的电量变化关系; 2) 位移电流 I_d ; 3) 全电流; 4) 两板间的磁场.

解: 1) 设漏电电流为 i , 由等效放电电路图可得

$$U_0 - iR = 0$$

即

$$\frac{q}{C} - i \frac{1}{\gamma} \frac{d}{S} = 0$$



$$\because C = \varepsilon \frac{S}{d} \quad \text{代入得} \quad q - i \frac{\varepsilon}{\gamma} = 0$$

$$\text{放电时} \quad i = -\frac{dq}{dt} \quad \text{代入得} \quad \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{dq}{dt} + q = 0$$

积分并代入初始条件 $(t = 0, q = q_0 = CU_0)$ 得:

$$q(t) = CU_0 e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon} t}$$

2) 板间电位移大小

$$D = \sigma = \frac{q}{S} = \frac{CU_0}{S} e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon} t}$$

于是得

$$I_d = S \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{CU_0 \gamma}{\varepsilon} e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon} t}$$

3)传导电流即为漏电流

$$I_0 = i = -\frac{dq}{dt} = \frac{\gamma CU_0}{\varepsilon} e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t}$$

$$\therefore I_{\text{全}} = I_0 + I_d = 0$$

4)由全电流定律

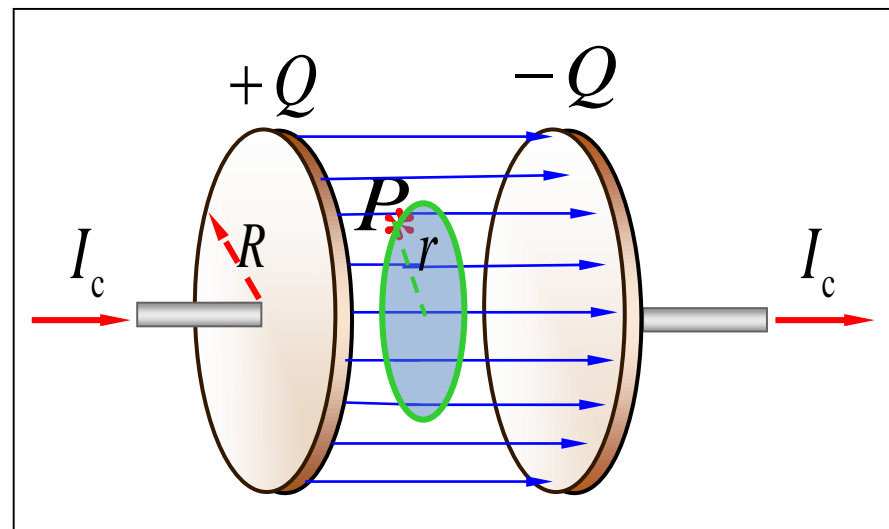
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{全}} = 0 \quad \text{得}$$

$$H = 0, \therefore B = 0$$

例 有一圆形平行平板电容器, $R = 3.0\text{m}$. 现对其充电, 使电路上的传导电流 $I_c = 2.5\text{A}$, 若略去边缘效应, 求
 (1) 两极板间半径 $r = 2.0\text{cm}$ 的圆面的位移电流; (2) 两极板间离开轴线的距离为 $r = 2.0\text{cm}$ 的点 P 处的磁感应强度.

解: 1) 如图作一半径为 r 平行于极板的圆形回路, 通过此圆面积的电位移通量为

$$\begin{aligned}\Psi &= D(\pi r^2) \\ \because D &= \sigma \quad \therefore \Psi = \frac{r^2}{R^2} Q \\ \therefore I_d &= \frac{d\Psi}{dt} = \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt}\end{aligned}$$



$$\therefore I_d = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt} = \frac{r^2}{R^2} I_C \quad \text{代入数据得}$$

$$I_d = 1.1\text{A}$$

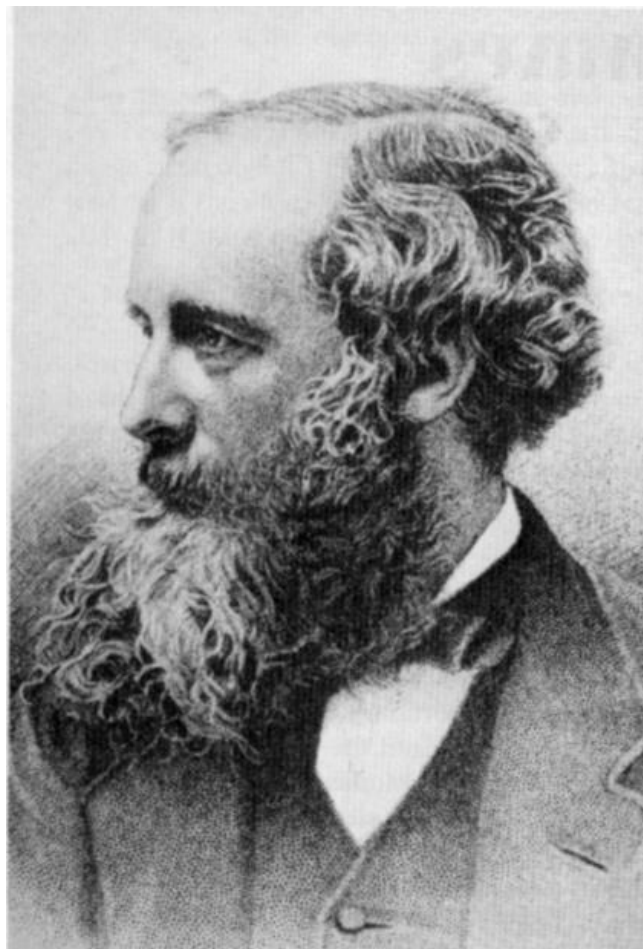
2)由全电流安培环路定理式, 得

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c + I_d = I_d \quad \therefore H = \frac{r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt} \quad \text{代入数据得}$$

$$B = 1.11 \times 10^{-5} \text{T}$$

16-7 麦克斯韦方程组



麦克斯韦（1831-1879）

英国物理学家。经典电磁理论的奠基人，气体动理论创始人之一。他提出了有旋场和位移电流的概念，建立了经典电磁理论，并预言了以光速传播的电磁波的存在。在气体动理论方面，他还提出了气体分子按速率分布的统计规律。

1865 年麦克斯韦在总结前人工作的基础上, 提出完整的电磁场理论, 他的主要贡献是提出了“感生电场（涡旋电场）”和“位移电流”两个假设, 从而预言了电磁波的存在, 并计算出电磁波的速度(即光速)。

一、麦克斯韦方程组的积分形式

1. 电场性质的说明

$$\oint_S \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \oint_S \epsilon \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \sum q_i \quad \text{静电场}$$

$$\oint_S \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = \oint_S \epsilon \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{感生电场}$$

电荷和变化磁场共同产生的电场中

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum q_i$$

2. 磁场性质的说明

传导电流和位移电流共同建立的磁场中

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \mu \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0$$

3. 变化电场和磁场的关系

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c + I_d = \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

4. 变化磁场和电场的关系

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电场

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_D}{dt} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

感生电场

电荷和变化磁场共同产生的电场中

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

5. 积分形式的麦克斯韦方程组

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dV = \sum q$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

*二、麦克斯韦方程组的微分形式

$$\text{div } \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

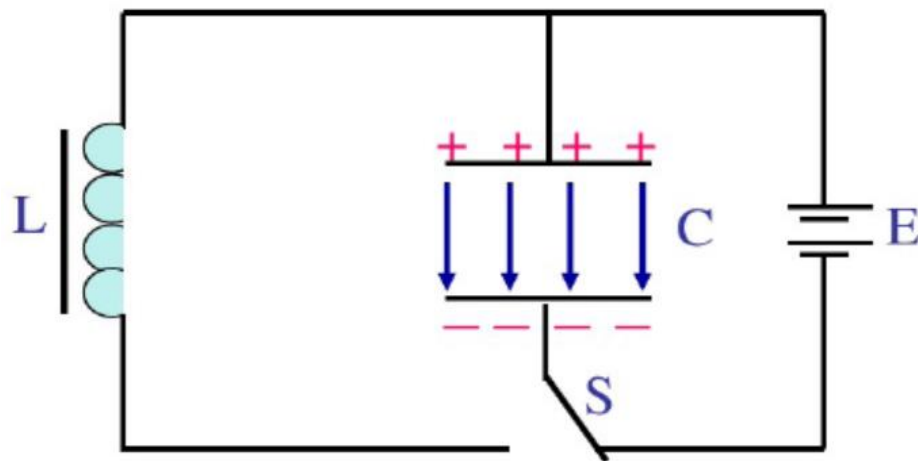
$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

三、麦克斯韦方程组的意义

- 1) 麦克斯韦方程组是对电磁场宏观规律的全面总结，建立了电磁场的数学形式，其中高斯定理方程描述了电磁场性质，而环路定律方程揭示了电场与磁场的关系，电场和磁场统一为电磁场理论。
- 2) 麦克斯韦方程组预言了电磁波的存在，电磁场可以在电荷、电流源之外的空间互相激发，从而可以脱离电荷、电流向外传播。
- 3) 麦克斯韦方程组预言了光的电磁本性，由方程组可以解出电磁波在真空的传播速度为光速。

16—9 平面电磁波

电磁振荡： LC 振荡电路



LC 回路工作过程具有对称性和周期性,可归结为

(1)、两个物理过程:

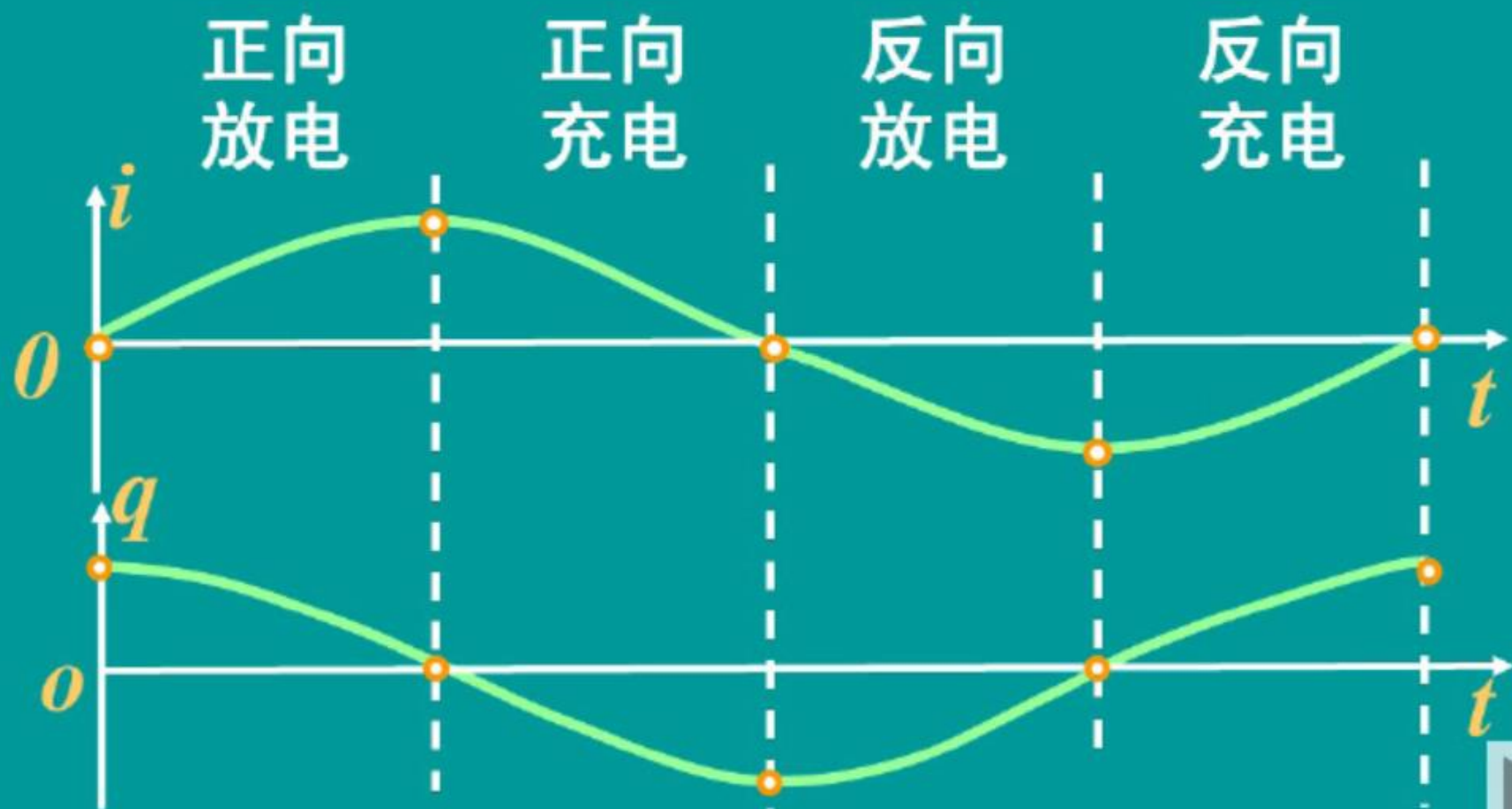
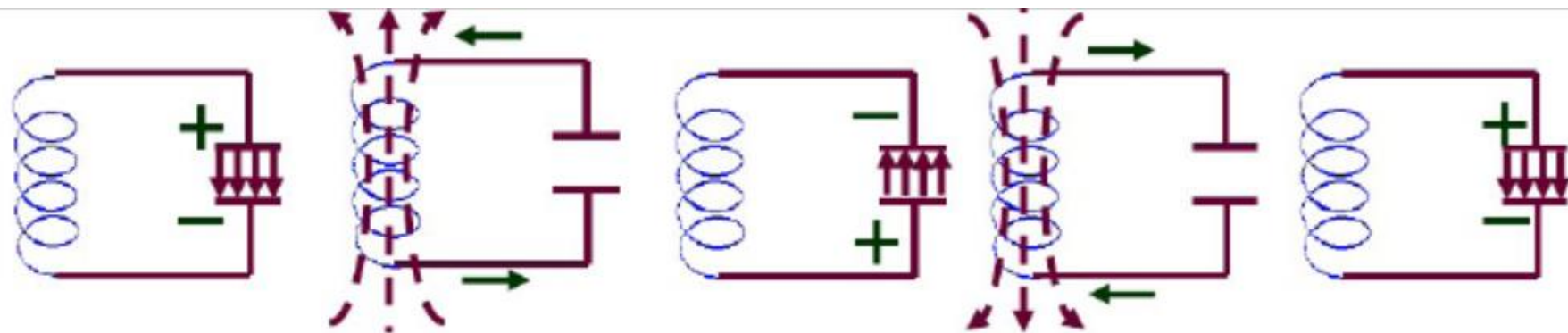
放电过程:电场能转化为磁场能, $q \downarrow \rightarrow i \uparrow$

充电过程:磁场能转化为电场能, $q \uparrow \rightarrow i \downarrow$

(2)、两个特殊状态:

充电完毕状态:磁场能向电场能转化完毕,电场能最大,磁场能最小.

放电完毕状态:电场能向磁场能转化完毕,磁场能最大,电场能最小.

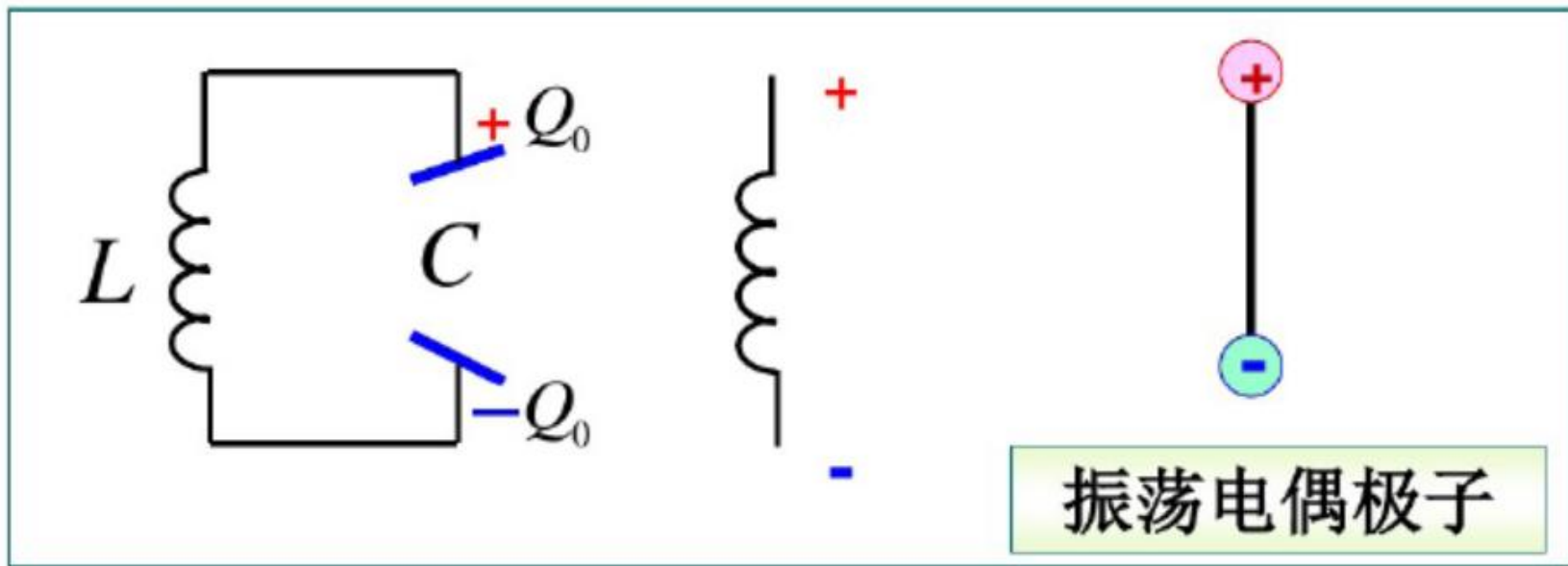


一、电磁波的产生与传播

变化的电磁场在空间以一定的速度传播就形成电磁波

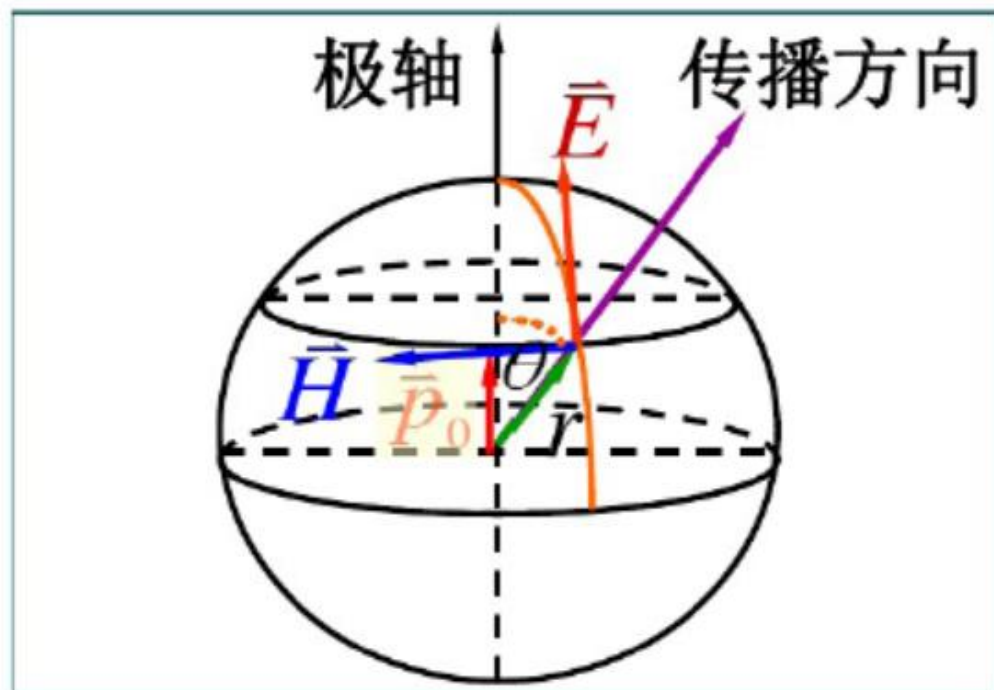
$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

$$v = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$



振荡偶极子类似一个正负电荷相对中心作谐振动的弹簧，
可激发涡旋电场。 电偶极矩： $p = p_0 \cos \omega t$

二、平面电磁波的特性



$$E(r, t) = \frac{\mu p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right)$$

$$H(r, t) = \frac{\sqrt{\epsilon \mu} p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) \quad u = 1 / \sqrt{\epsilon \mu}$$

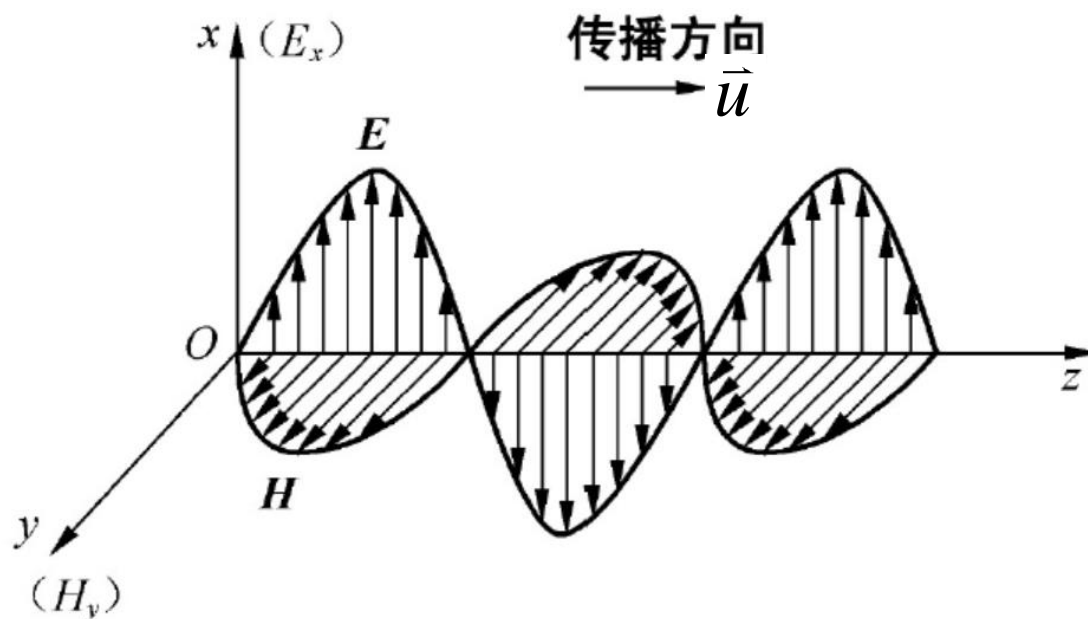
在离开振荡偶极子很远的地方，小范围内 θ 和 r 变化很小， E 和 H 的振幅可以看作常量，可得平面电磁波的波函数

$$\begin{cases} H = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) = H_0 \cos(\omega t - kx) \\ E = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) = E_0 \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

► 平面电磁波的基本特性:

(1) 平面电磁波是横波



$$\begin{aligned} \vec{E} &\perp \vec{u} \\ \vec{H} &\perp \vec{u} \end{aligned}$$

(2) \vec{E} 和 \vec{H} 同相位

(3) \vec{E} 和 \vec{H} 数值成比例 $\sqrt{\mu}H = \sqrt{\epsilon}E$

(4) 电磁波传播速度 $u = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, 真空中波速等于光速

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.85 \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

三、电磁波的能量

电场能量密度: $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

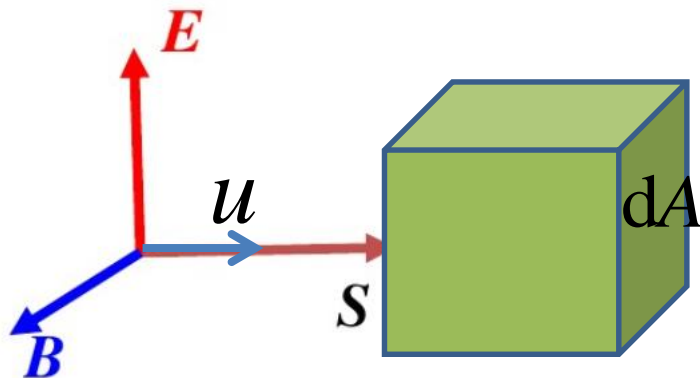
磁场能量密度: $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$

电磁波中电场能量和磁场能量的总和叫做**电磁波的能量**，亦称为**辐射能**。

电磁场能量密度: $w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$

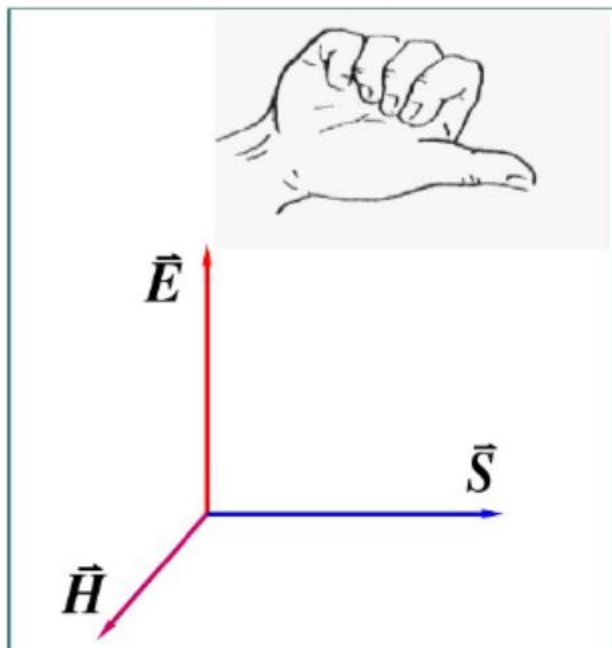
电磁波流动性的强弱-----**能流密度**。

能流-----单位时间内通过与波传播方向垂直的单位截面的能量。



$$S = \frac{w u dA dt}{dA dt} = w u = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = EH$$

➤ 电磁波的**能流密度(坡印廷)矢量** $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$



平面电磁波**能流密度**

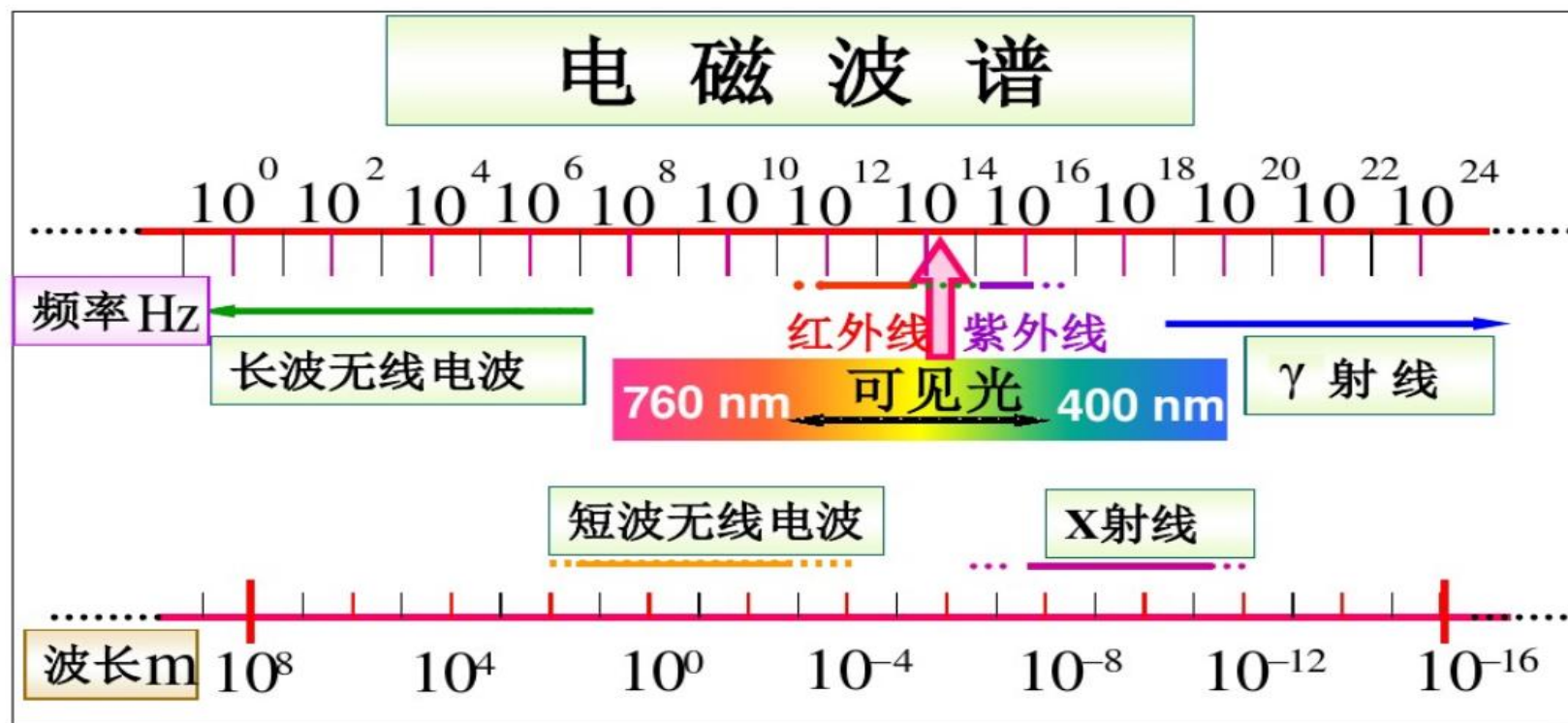
平均值 $\bar{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0$

振荡偶极子的平均
辐射功率

$$\bar{P} = \frac{\mu p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0} \propto \omega^4$$

(单位时间内辐射
出去的平均能量)

四、电磁波谱



无线电波 $3 \times 10^4 \text{ m} \sim 0.1 \text{ cm}$

红外线 $6 \times 10^5 \text{ nm} \sim 760 \text{ nm}$

可见光 $760 \text{ nm} \sim 400 \text{ nm}$

紫外光 $400 \text{ nm} \sim 5 \text{ nm}$

X射线 $5 \text{ nm} \sim 0.04 \text{ nm}$

γ射线 $< 0.04 \text{ nm}$

本章作业:

16-11, 16-13, 16-17, 16-20, 16-22