自 测 题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$______.

【解析】答案是 0. 利用有界量乘无穷小量仍为无穷小量.

2. 设 $z=e^{\sin xy}$，则 $dz=$______.

【解】 $dz=e^{\sin xy}\cdot\cos xy\cdot(ydx+xdy)$.

3. 设 $z=z\left(x,y\right)$可微，且满足$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$，且 $z\left(x,x^2\right)=1$，则 $z\left(x,y\right)=$______.

【解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y\Rightarrow z=x^2y+y^2+\varphi(x)$，又 $z\left(x,x^2\right)=1$，得 $\varphi(x)=1-2x^4$，则

$z\left(x,y\right)=x^2y+y^2+1-2x^4$.

4. 设 $f\left(x,y,z\right)=e^xyz^2$，其中 $z=z\left(x,y\right)$是由 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则 $f_x'\left(0,1,-1\right)=$______.

【解析】 $f_x'=e^xyz^2+e^xy\cdot 2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$； 下只要求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$即可；

方程 $x+y+z+xyz=0$ 两边对 x 求偏导，得$1+z_x'+yz+xyz_x'=0$，代值得 $z_x'\big|_{(0,1,-1)}=0$，进而得 $f_x'\left(0,1,-1\right)=1$.

5. 函数 $z=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值是_______.

【解析】按照无条件极值的计算方法，计算得极值为 0.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 设 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,则函数 z 在点$\left(0,0\right)$处（　　）.

$\left(A\right)$不连续　　$\left(B\right)$连续，但偏导数 $z_x'\left(0,0\right)$和 $z_y'\left(0,0\right)$不存在

$\left(C\right)$连续且偏导数 $z_x'\left(0,0\right)$和 $z_y'\left(0,0\right)$都存在，但不可微　$\left(D\right)$可微

【解析】答案选 C. 上课作为例题详细讲解过.

7. 考虑二元函数 $f\left(x,y\right)$下面 4 条性质：

① $f\left(x,y\right)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处连续　　② $f\left(x,y\right)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处的两个偏导数连续

③ $f\left(x,y\right)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处可微　　④ $f\left(x,y\right)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处的两个偏导数存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有（　　）.

$\left(A\right)$②⇒③⇒①　　$\left(B\right)$③⇒②⇒①

(C)③⇒④⇒①　　　　　　　　(D)③⇒①⇒④

【解析】答案选择 A. 上课讲解过之间关系图

8. 已知函数 $f\left(x+y,x-y\right)=x^2-y^2$ 对任何 x 与 y 成立，则 $\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}+\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}$ 等于（　　）.

$(A)\ 2x-2y$　　　$(B)\ 2x+2y$　　　$(C)\ x+y$　　　$(D)\ x-y$

【解析】由题意可知 $f(x,y)=xy$，得答案选 C.

9. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{1}{4}\left(x^2+y^2\right) \\ y=4 \end{cases}$ 在 $P_0\left(2,4,5\right)$ 点的法平面方程为（　　）.

$(A)x+y-7=0$　　$(B)x+z-7=0$　　$(C)x-y+7=0$　　$(D)x-z-7=0$

【解析】方程组两边分别对 x 求导，得 $\begin{cases} z'_x=\dfrac{1}{4}\left(2x+2y\cdot y'_x\right) \\ y'_x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x=\dfrac{1}{2}x \\ y'_x=0 \end{cases}$，则切向量 $\overline{T}=\left(1,0,\dfrac{1}{2}x\right)$，

切向量坐标为 $\overline{T}\Big|_{(2,4,5)}=\left(1,0,1\right)$，进而法平面方程为 $(x-2)+(z-5)=0$，化简得 $x+z-7=0$，答案选 B.

10. 函数 $f\left(x,y\right)=x^2-ay^2\left(a>0\right)$ 在 $\left(0,0\right)$ 处（　　）.

(A)不取极值　　(B)取极小值　　(C)取极大值　　(D)是否取极值依赖于 a

【解析】由极值的定义可知正确答案选 A.

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11. 设 $z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 $dz,\dfrac{\partial z^2}{\partial x\partial y}$.

【解析】（1） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-\arctan\frac{y}{x}}+\left(x^2+y^2\right)\cdot e^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\left[-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\right]\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$， $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(2y-x)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$；

（2） $dz=(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}dx+(2y-x)e^{-\arctan\frac{y}{x}}dy$；

（3） $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\right]=e^{-\arctan\frac{y}{x}}+(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\left[-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{x}\right]=\dfrac{y^2-x^2-xy}{x^2+y^2}e^{-\arctan\frac{y}{x}}$.

12. 设 $u=xy,v=\dfrac{x}{y},z=z\left(u,v\right)$ 对每个变量有二阶连续偏导数，计算 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【解析】（1） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z'_1\cdot y+z'_2\cdot\dfrac{1}{y}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=z'_1\cdot x+z'_2\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=z'_1\cdot x-\dfrac{x}{y^2}z'_2$；

（2） $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\cdot\left(z''_{11}\cdot y+z''_{12}\cdot\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{1}{y}\cdot\left(z''_{21}\cdot y+z''_{22}\cdot\dfrac{1}{y}\right)=y^2\cdot z''_{11}+2z''_{12}+\dfrac{1}{y^2}\cdot z''_{22}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\cdot\left[z''_{11}\cdot x+z''_{12}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]+\frac{2x}{y^3}\cdot z'_2-\frac{x}{y^2}\left[z''_{21}\cdot x+z''_{22}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]=x^2\cdot z''_{11}-\frac{2x^2}{y^2}z''_{12}+\frac{2x}{y^3}z'_2+\frac{x^2}{y^4}z''_{22}\ ;$$

（3）$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4x^2\cdot z''_{12}-\frac{2x}{y}\cdot z'_2$.

13. 设 $z=f\left(2x-y\right)+g\left(x,xy\right)$，其中 $f\left(t\right)$ 二阶可导，$g\left(u,v\right)$ 具有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial z^2}{\partial x\partial y}$.

【解析】(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot 2+g'_1\cdot 1+g'_2\cdot y=2f'+g'_1+yg'_2$；

（2）$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(2f'+g'_1+yg'_2\right)'_y=2f''\cdot(-1)+g''_{12}\cdot x+g'_2+yg''_{22}\cdot x=-2f''+xg''_{12}+g'_2+xyg''_{22}$.

14. 设 $u=u\left(x,y\right),v=v\left(x,y\right)$，由方程组 $\begin{cases}u^2-v=3x+y\\u^2-2v^2=x-2y\end{cases}$ 确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

【解析】方程组两边同时取微分，得 $\begin{cases}2udu-dv=3dx+dy & (1)\\2udu-4vdv=dx-2dy & (2)\end{cases}$，

$(1)\times 4v-(2)$ 得 $(8uv-2u)du=(12v-1)dx+(4v+2)dy\Rightarrow du=\frac{12v-1}{8uv-2u}dx+\frac{4v+2}{8uv-2u}dy$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{12v-1}{8uv-2u},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{4v+2}{8uv-2u}.$$

$(1)-(2)$ 得 $(4v-1)dv=2dx+3dy\Rightarrow dv=\frac{2}{4v-1}dx+\frac{3}{4v-1}dy$，则

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2}{4v-1},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3}{4v-1}.$$

15. 设曲面 $F\left(x,y,z\right)=0$ 在点 $P\left(1,1,1\right)$ 处法向量为 $\vec{n}=\left\{1,2,3\right\}$，求曲面 $F\left(x,y^2,z^3\right)=0$ 在点 $P\left(1,1,1\right)$ 处的法线与切平面方程.

【解析】(1) $F'_x(1,1,1)=1,F'_y(1,1,1)=2,F'_z(1,1,1)=3$，

（2）$\vec{n}=\left(F'_x\cdot 1,F'_y\cdot 2y,F'_z\cdot 3z^2\right)$，则 $\vec{n}\big|_P=\left(1,4,9\right)$；

（3）法线方程为：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{9}$；

（4）切平面方程为：$(x-1)+4(y-1)+9(z-1)=0$，化简得 $x+4y+9z-14=0$.

16. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使该切平面与三个坐标平面围成四面体体积最小，求切点坐标.

【解析】(1) 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为椭球面上任一点，x_0,y_0,z_0 均大于零.

在 P_0 处法向量为 $\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)\big|_{P_0}=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)$，则切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0\ ,$$

化简为：$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$，所以切平面在三个坐标轴上的截距分别为 $\frac{a^2}{x_0},\frac{b^2}{y_0},\frac{c^2}{z_0}$，于是由该切平面与三坐标轴围

成四面体体积为$V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$.

（2）要使得$V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6xyz}$取得最小值，只要$u=xyz$取得最大值即可，故原问题转化为求$u=xyz$在$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$下最大值.

构建拉格朗日辅助函数$L=xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$，则

$$\begin{cases} L'_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0 & (1) \\ L'_y=zx+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0 & (2) \\ L'_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0 & (3) \\ L'_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 & (4) \end{cases}$$

由（1）（2）（3）联立，得$-xyz=\dfrac{2\lambda x^2}{a^2}=\dfrac{2\lambda y^2}{b^2}=\dfrac{2\lambda z^2}{c^2}$，则$\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$，代入（4）中，得

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}},$$

所以$u=xyz$在$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$处取最大值，故切点坐标为$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$，$V_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}abc$.