自 测 题

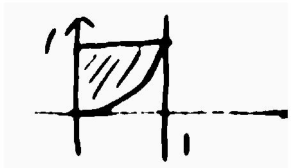
一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 交换二次积分次序：

$$\int_0^1 dx\int_{1-x^2}^1 f\left(x,y\right)dy+\int_1^e dx\int_{\ln x}^1 f\left(x,y\right)dy=\underline{\qquad\qquad}.$$

【答案】$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{e^y} f\left(x,y\right)dx$

2. 计算 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy=\underline{\qquad\qquad}$.



【解析】交换积分顺序，计算得 $\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$

3. 设 $f\left(x\right)$ 连续，$f\left(1\right)=1,F\left(t\right)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f\left(x^2+y^2\right)dxdy,\left(t\ge 0\right)$，则 $F'\left(1\right)=\underline{\qquad}$.

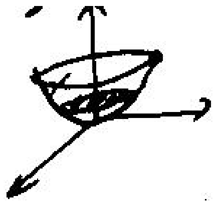
【解析】$F\left(t\right)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)\cdot rdr=2\pi\int_0^t f(r^2)\cdot rdr,$

则 $F'(t)=2\pi tf(t^2)$，进而 $F'(1)=2\pi$.

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln\left(x^2+y^2+z^2+1\right)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz=\underline{\qquad\quad}$，其中 Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.

【解析】利用三重积分的对称性计算可知积分制为 0.

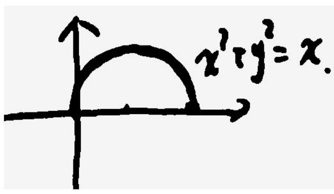
5. 设立体 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 围成，则其体积为$\underline{\qquad\quad}$.



【解析】$V=\iiint\limits_{\Omega}1dV=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z}1dV=\int_0^1 \pi zdz=\frac{\pi}{2}$

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 设 $f\left(u,v\right)$ 连续，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta} f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdr$ 等于（　　）.

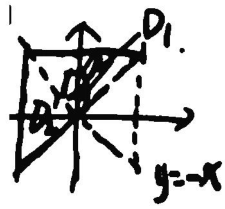


$(A)\ \int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_0^1 f\left(x,y\right)dx$　　　$(B)\ \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f\left(x,y\right)dy$

$(C)\ \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f\left(x,y\right)dy$　　　$(D)\ \int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f\left(x,y\right)dx$

【解析】由图形可知正确答案选择 B

7. 设平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|-a\le x\le a,x\le y\le a\right\}$，$D_1$表示$D$在第一象限的部分，则$\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)dxdy=$（　　）



$(A)\ 2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$　　$(B)\ 2\iint\limits_{D_1}xydxdy$

$(C)\ 4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　　$(D)\ 0$

【解析】添加辅助曲线$y=-x$，则$\iint\limits_D=\iint\limits_{D_1'}+\iint\limits_{D_2'}$，如图所示，利用对称性可知正确答案为A

8. 设$f(x,y)$为连续函数，且$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le t^2\right\}$，则$\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$

（　　）

$(A)\ f(0,0)$　　$(B)\ -f(0,0)$　　$(C)\ f'(0,0)$　　(D)不存在

【解析】

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\pi t^2}f(\xi,\eta)\cdot\pi t^2=\lim_{t\to0^+}f(\xi,\eta)=\lim_{\substack{\xi\to0^+\\ \eta\to0^+}}f(\xi,\eta)=f(0,0)$$

9. 设有空间区

$\Omega_1=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2,z\ge0\right\},\Omega_2=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2\right.$

则有（　　）

$(A)\ \iiint\limits_{\Omega_1}xdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2}xdxdydz$

$(B)\ \iiint\limits_{\Omega_1}ydxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2}ydxdydz$

$(C)\ \iiint\limits_{\Omega_1}zdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2}zdxdydz$

$(D)\ \iiint\limits_{\Omega_1}xyzdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyzdxdydz$

【解析】利用对称性和保号性可知正确答案为C

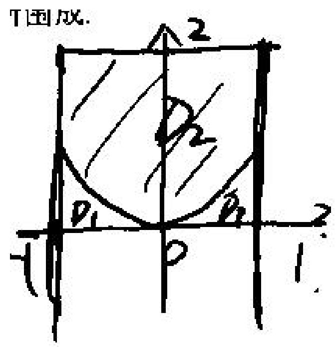
10. 已知空间区域Ω由$x^2+y^2\le z,1\le z\le2$确定，$f(z)$连续，则$\iiint\limits_\Omega f(z)dv=$（　　）

$(A)\ \pi\int_1^2 z^2f(z)dz$　$(B)\ 2\pi\int_1^2 f(z)dz$　　$(C)\ 2\pi\int_1^2 zf(z)dz$　$(D)\ \pi\int_1^2 zf(z)dz$

【解析】利用三重积分的截面法得正确答案为D

三、解答题（每小题10分，共60分）.

11. 计算二重积分$\iint\limits_D\left|y-x^2\right|dxdy$，其中$D$由$|x|\le1,0\le y\le2$所围成.



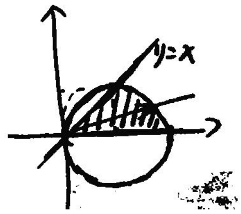
【解析】（1）利用$y=x^2$将D划分为D_1,D_2，如图所示；

（2） $I=\iint\limits_{D_1}(x^2-y)dxdy+\iint\limits_{D_1}(y-x^2)dxdy$

$=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}(x^2-y)dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}(y-x^2)dy$

$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^4dx+\int_{-1}^{1}(2-2x^2+\frac{1}{4}x^4)dx=\frac{46}{15}$

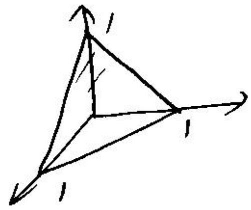
12. 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x,x^2+y^2\le 2x\right\}$.



【解析】 $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{0}^{2\cos\theta}r\cdot rdr$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}r^3\Big|_{0}^{2\cos\theta}d\theta=\frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta=\frac{10}{9}\sqrt{2}$$

13. 计算三重积分 $\iiint\limits_{V}\frac{dxdydz}{\left(1+x+y+z\right)^3}$，其中 V 由 $x=0,y=0,z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成.



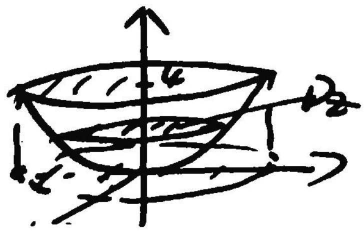
【解析】 $\iiint\limits_{V}\frac{dxdydz}{\left(1+x+y+z\right)^3}=\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x}dy\int_{0}^{1-x-y}(1+x+y+z)^{-3}dz$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$$

14. 计算三重积分 $\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2+z\right)dxdydz$，其中 V 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成

的旋转曲面与平
面 $z=4$ 所围成的立体.

【解析】（1）所得旋转曲面方程为： $x^2+y^2=2z$，如图所示，其投影区



域为 $D_{xy}:x^2+y^2\le 8$；

（2） $\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2+z\right)dxdydz=\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2\right)dxdydz+\iiint\limits_{V}zdxdydz$ ；

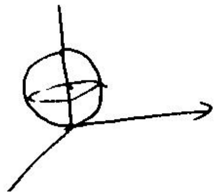
（3） $\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int_{0}^{4}dz\iint\limits_{D_z}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_{0}^{4}dz\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{\sqrt{2z}}r^2\cdot rdr\ =2\pi\int_{0}^{4}z^2dz=\frac{128\pi}{3}$；

（4） $\iiint\limits_{V}zdxdydz=\int_{0}^{4}dz\iint\limits_{D_z}zdxdy=\int_{0}^{4}z\cdot\pi\cdot 2zdz=2\pi\int_{0}^{4}z^2dz=\frac{128\pi}{3}$；

（5）原积分 $=\frac{256\pi}{3}$

15. 计算三重积分$\iiint\limits_{V}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$，其中$V$ 由曲面$x^2+y^2+z^2=z$所围成.

【解析】原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\theta}r\cdot r^2\sin\varphi dr$



$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3dr=$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\left(\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\cos\varphi}\right)d\theta=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d(\cos\varphi)=\frac{\pi}{10}$$

16. 求由曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2},z=x^2+y^2$所围成立体的表面积.

【解析】本题同 11.4 节第一题一样，免做！