北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

韩家骅 汪洪 主编

大学物理学（第三版）

电子教案

第十三章 静电场中的导体和电介质

第十三章 静电场中的导体和电介质

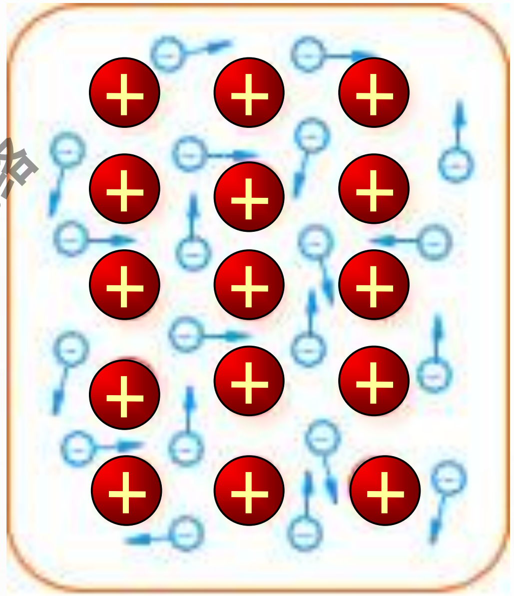
从物质电结构理论的观点来看，任何物体都亦可能带电。按导电性能的不同，物体可分为三类：

1. 导体　　存在大量的可自由移动的电荷 (conductor)
2. 绝缘体　理论上认为无自由移动的电荷　也称
   电介质 (dielectric)
3. 半导体　介于上述两者之间 (semiconductor)

本章将讨论静电场与场中导体和电介质的相互作用和相互影响.

13－1 静电场中的导体

如图，从物质的电结构看，金属导体具有带负电的自由电子和带正电的晶体点阵组成．当导体不带电也不受外电场的作用时，只有微观的热运动．



任意划取的微小体积元内，自由电子的负电荷和晶体点阵上的正电荷的数目相等，整个导体或其中任一部分都显现电中性。

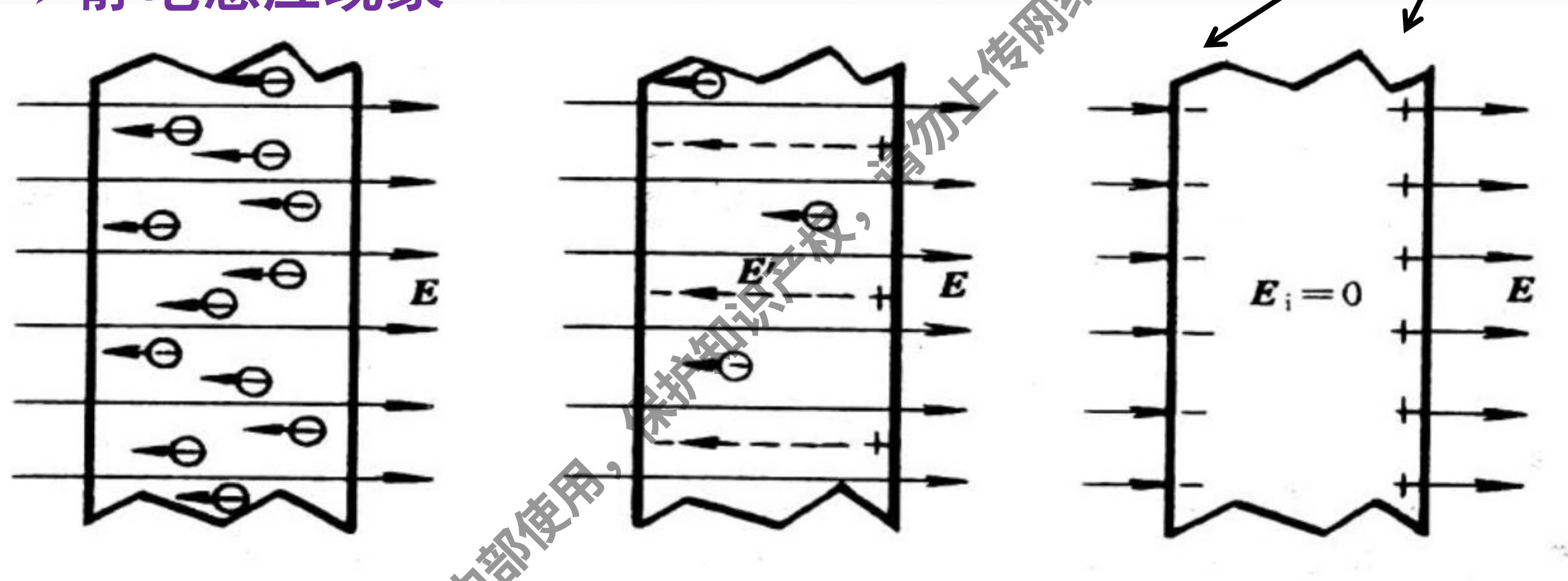
热平衡特征

一、导体静电平衡性质

1、导体的静电平衡状态

➤静电感应现象

感应电荷



➤不管导体原来是否带电或有无外场作用，导体内部和表面都没有电荷做宏观定向运动的状态称为导体的静电平衡状态。

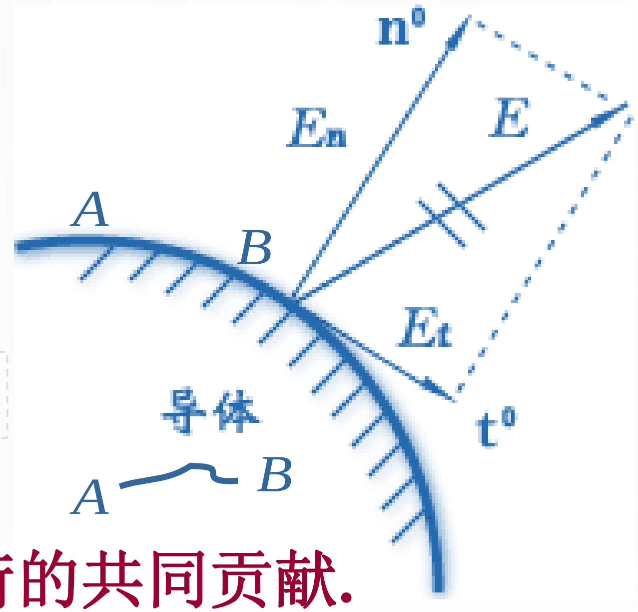
2、静电平衡条件

1) 导体内部的场强处处为零；导体表面的场强垂直于导体的表面; 电场线不进入导体内部, 而与导体表面正交.

2) 导体内, 导体表面各处电势相同, 整个导体是等势体.

$$E_{\text{切线方向}} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau_{\text{切线方向}}} = 0$$

$$E_{\text{内}} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l_{\text{任意方向}}} = 0 \longrightarrow U_{AB} = 0$$

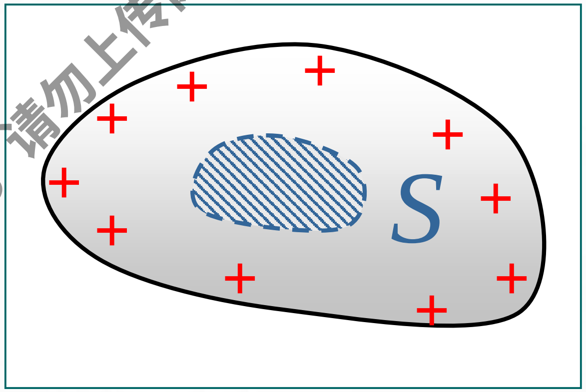


▲ 静电平衡条件是场中所有电荷的共同贡献.

3、静电平衡时导体的电荷分布

(1). 带电导体在静电平衡时, 电荷只分布在导体的表面上.

由高斯定理可以证明:



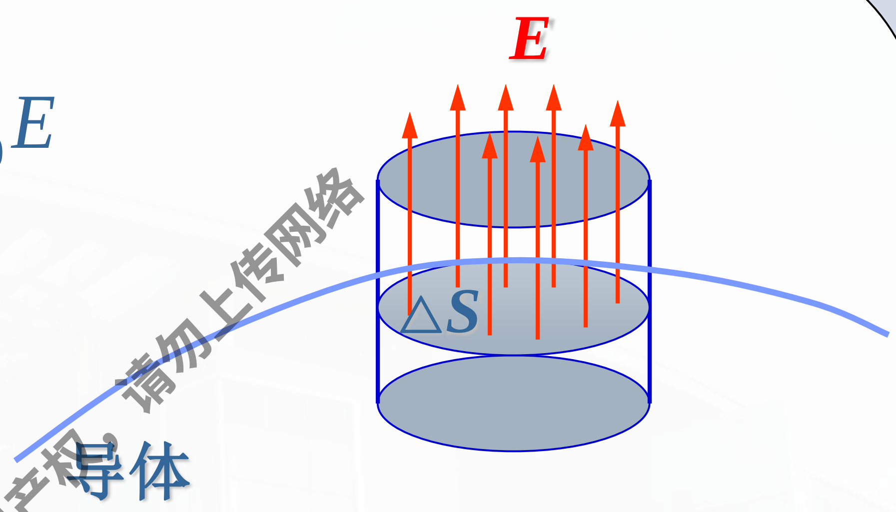
$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

$$\because \quad \vec{E} = 0 \qquad \therefore \sum q_i = 0$$

(2). 处于静电平衡的导体，其表面上各处的面电荷密度与当地表面近邻处的电场强度的大小成正比.

由高斯定理同样可以证明,作如图所示高斯面:

$$E\Delta S=\frac{\sigma\,\Delta S}{\varepsilon_0}\qquad \therefore \sigma=\varepsilon_0 E$$



(3). 孤立导体在静电平衡时，电荷密度与导体表面曲率成正比.

a. 孤立球形带电导体，由于球面上各部分的曲率相同，所以球面上电荷的分布是均匀的.

b. 形状不规则的孤立带电导体，表面上曲率愈大处(例如尖端部分)，面电荷密度愈大。

尖端放电 (discharge at sharp point)

对于有尖端的带电导体，尖端处电荷面密度大，则导体表面邻近处场强也特别大。当电场强度超过空气的击穿场强时，就会产生空气被电离的放电现象.

避雷针

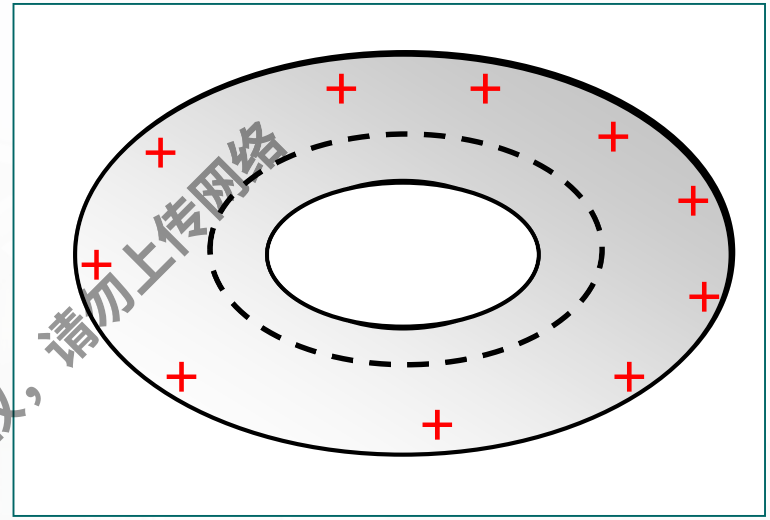
电风

二、空腔导体和静电屏蔽

1. 空腔导体

(1) 腔内无带电体

问题: 若导体带电, 电荷如何分布, 内表面上有无电荷?



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0, \quad \sum q_i = 0$$

$\therefore$导体内部无电荷.

反证: 若内表面带电, 则

$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0 \quad \overset{\text{矛盾}}{\Longleftrightarrow} \quad U_{AB} = \int_{AB} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

导体是等势体

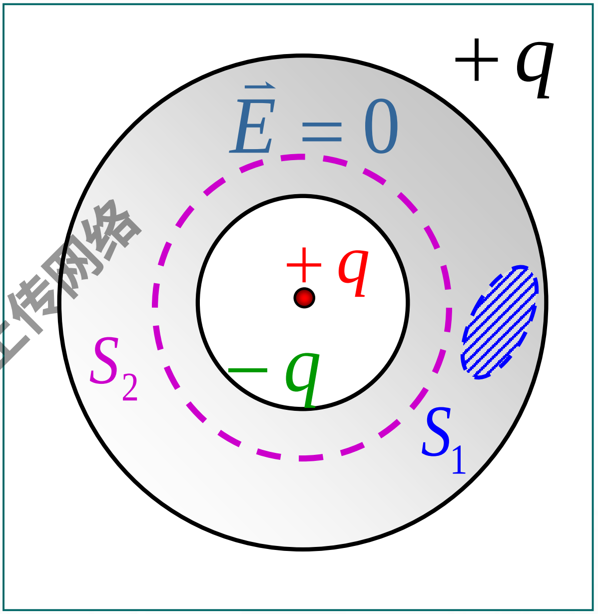
结论 若空腔带电, 电荷分布在外表面上（内表面无电荷）

(2) 腔内有带电体

1.导体中场强为零.

2.空腔内部电场决定于腔内带电体, 空腔外电场决定于空腔外表面的电荷分布.

3.空腔的内表面所带电荷与空腔内带电体所带电荷等量异号.



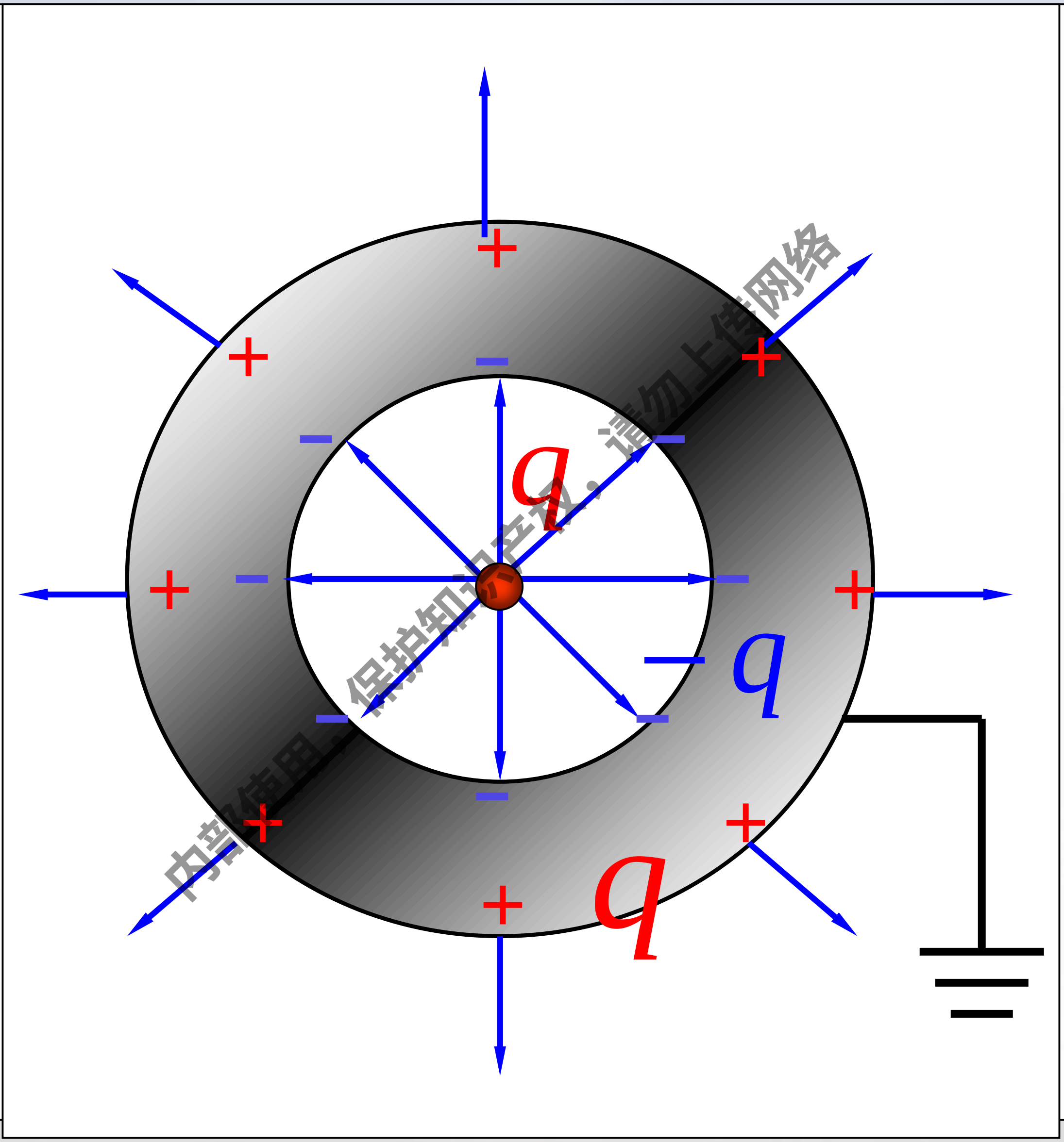
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0,\quad \sum q_i=0 \Rightarrow$$

S_1 ：导体内无电荷.

S_2 ：$q_{内表面}=-q$

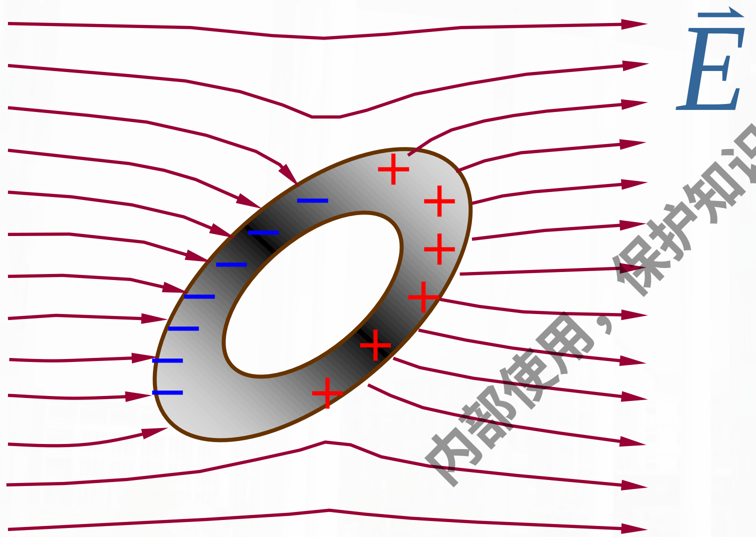
由电荷守恒，当空腔内有电荷**q** 时, 外表面有感应电荷**+q**

接地：

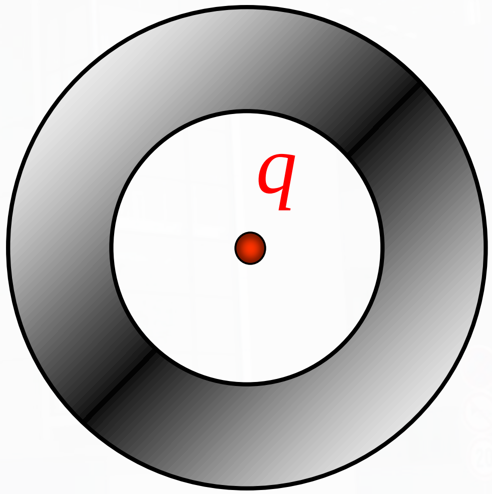


2.静电屏蔽(electrostatic shielding)

导体壳(不论是否接地)的内部电场不受壳外电荷的影响,接地导体壳的外部电场不受壳内电荷影响的现象称为**静电屏蔽**.



空腔导体屏蔽外电场



接地空腔导体屏蔽内电场

静电屏蔽应用

法拉第笼

防静电屏蔽袋

例1 有一外半径R_1、内半径R_2的金属球壳B, 其中放一半径为R_3的金属球A，球壳B和球A均带有电量为q的正电荷. 问：(1) 两球电荷分布. (2) 球心的电势. (3) 球壳电势.

解：(1) 电荷分布如图所示: 球面q,壳内表面$-q$,壳外表面$2q$,且所有电荷是均匀分布的.

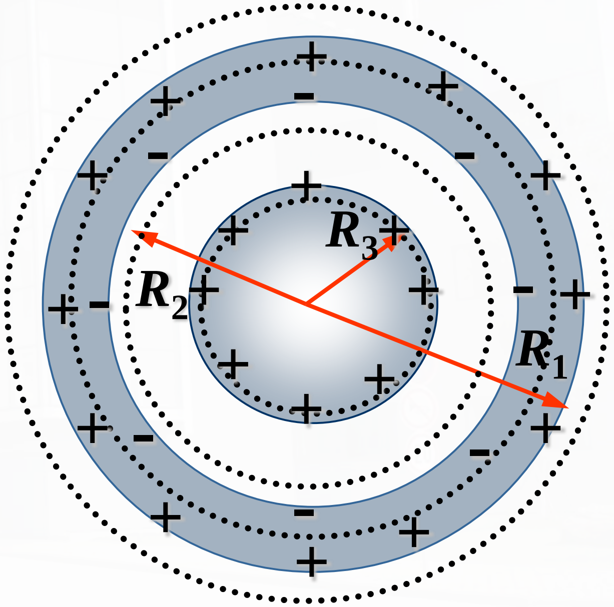
(2) 由高斯定理得电场分布为:

$$\vec{E}_3 = 0 \qquad (r < R_3)$$

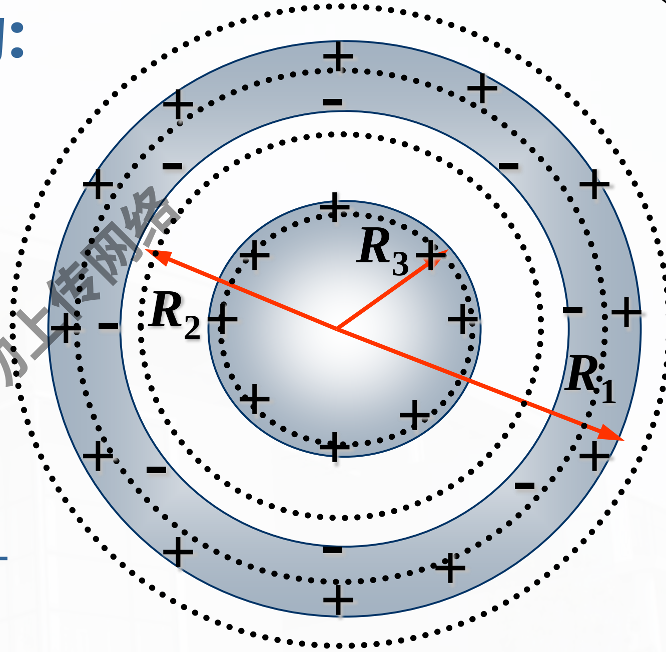
$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (R_3 < r < R_2)$$

$$E_1 = 0 \qquad (R_2 < r < R_1)$$

$$E_0 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r > R_1)$$



(2) 选积分路径沿径向,球心电势为:



$$U_o=\int_0^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{R_3}^{R_2}E_2\mathrm{d}r+\int_{R_1}^{\infty}E_0\mathrm{d}r$$

$$=\int_{R_3}^{R_2}\frac{q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}+\int_{R_1}^{\infty}\frac{2q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$=\underline{\int_0^{R_3}\vec{E}_3\cdot\mathrm{d}\vec{l}}+\int_{R_3}^{R_2}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\underline{\int_{R_2}^{R_1}\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}}+\int_{R_1}^{\infty}\vec{E}_0\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}+\frac{2}{R_1}\right)$$

(3) 同理,球壳电势为: $U_1=\int_{R_1}^{\infty}\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

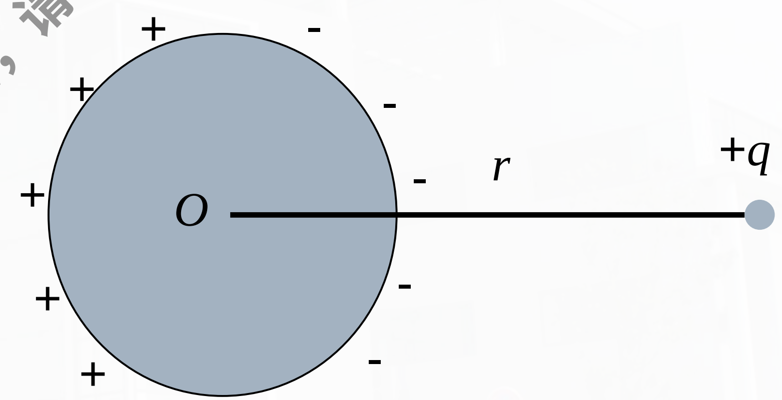
例2 在一不带电的金属球旁，有一点电荷+q，金属球半径为R，试求：(1) 金属球上感应电荷在球心处产生的电场强度E和此时球心处的电势U. (2) 若将金属球接地，球上的净电荷如何？已知+q与金属球心间距离为r.

解：（1）感应电荷 $\pm q'$ 在金属球的表面上，球心O点的场强为 $\pm q'$ 的电场 $\vec{E}'$ 点电荷q的电场 $\vec{E}$ 的叠加，即

$$\vec{E}_0 = \vec{E}' + \vec{E}$$

根据静电平衡条件，金属球内的场强处处为零，即 $\vec{E}_0 = 0$

则 $\vec{E}' = -\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$



因为$\pm q'$分布在金属球面上，它在球心处的电势为

$$U' = \int_{\pm q'} \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{\pm q'} dq' = 0$$

点电荷q在O的电势为 $U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

根据电势叠加原理，球心处的电势为$U_0 = U + U' = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

（2）若将金属球接地，设球上有净电荷 q_1，这时金属球的电势为零。由叠加原理，可得金属球的电势为

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0$$

解得 $q_1 = -\dfrac{R}{r}q$　　因为$R < r$，所以$|q_1| < q$

13－2 静电场中的电介质

电介质(dielectric)的电结构特征

分子中的正负电荷束缚的很紧，不能分离，介质内部几乎没有自由电荷.

无极分子电介质：（氢、甲烷、石蜡等）　正负电荷中心重合

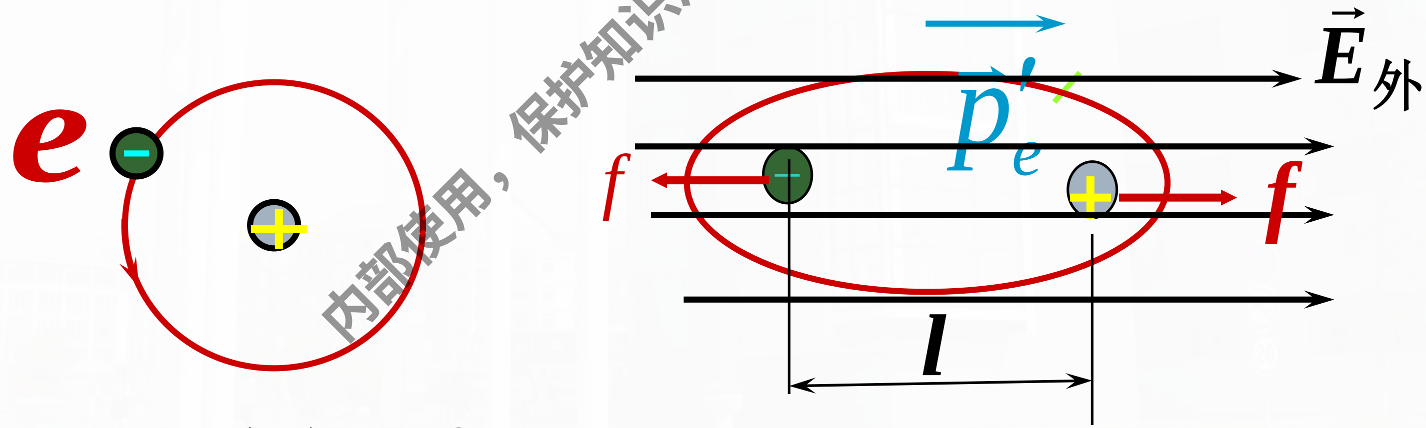
有极分子电介质：（水、有机玻璃等）　正负电荷中心不重合

一、电介质的极化

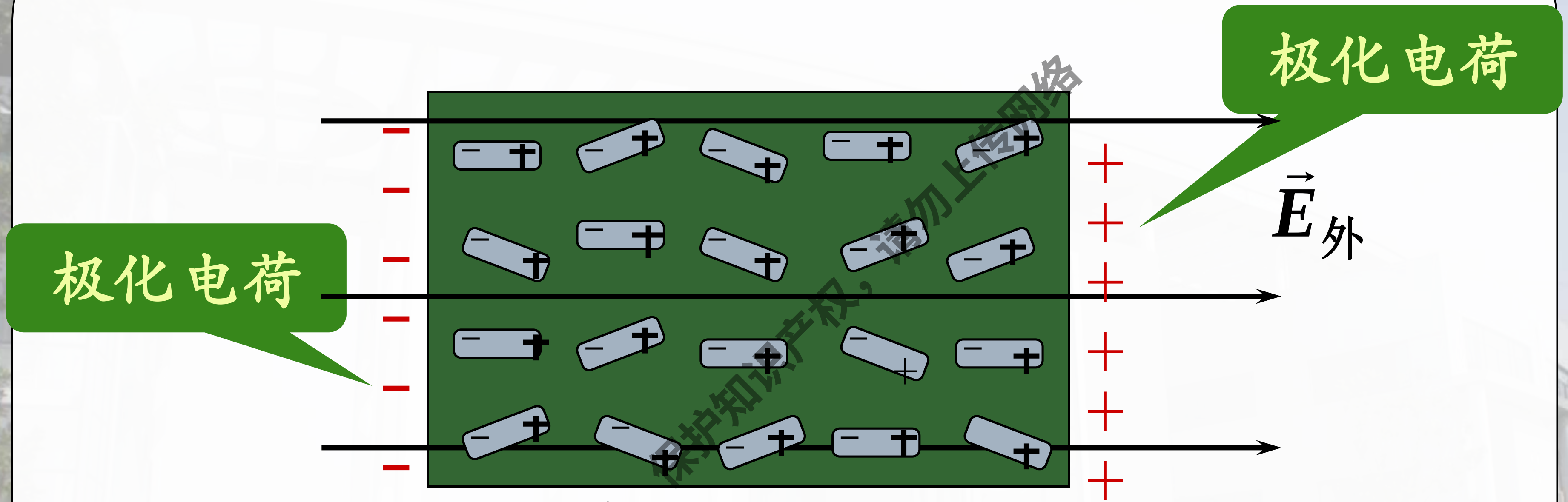
在外电场作用下在电介质中出现极化电荷的现象叫做**电介质的极化**。

(1) 无极分子电介质的位移极化

无极分子的极化在于正负电荷中心的相对位移，称为**位移极化**



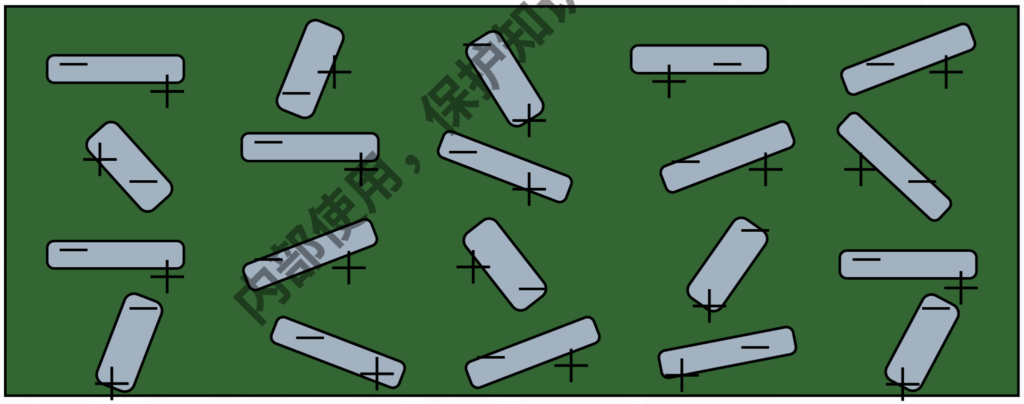
无外电场时 $\vec{p}_e = 0$　　加上外电场后 $\vec{p}_e' \neq 0$


极化电荷
极化电荷
$\vec{E}_{外}$

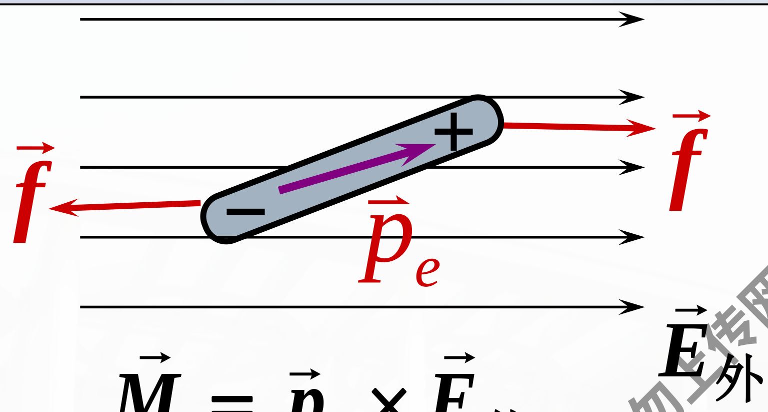
（2）有极分子的取向极化

无外电场时，有极分子电矩取向不同，整个介质不带电。

在外电场中有极分子的固有电矩要受到一个力矩作用，电矩方向转向和外电场方向趋于一致,这种极化称**有极分子的取向极化**。

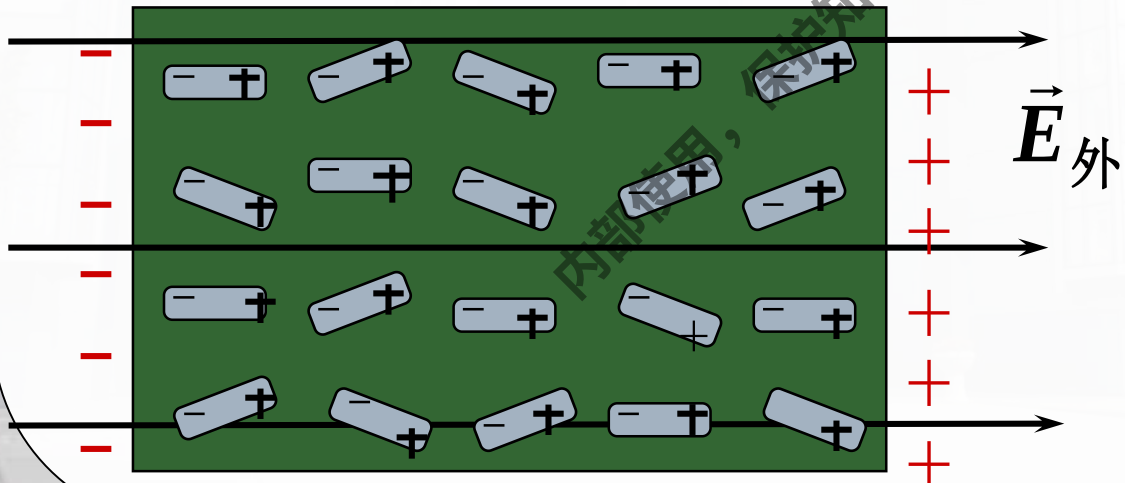


无外电场时　　电矩取向不同



$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}_{外}$$

加上外场



$\vec{p}_e$转向外电场

两端面出现

极化电荷层

二、电极化强度(polarization intensity)

上述两种电介质的极化微观过程虽然不同，但却有着同样的宏观效果，即电介质极化后，都使得其中所有分子的电矩的矢量和 $\sum_i \vec{P}_{ei} \neq 0$，同时出现极化电荷；而且电场越强，电场对介质的极化作用越大，极化电荷越多。

定义：用单位体积中的分子电矩矢量和来描述电介质的极化程度，令 $\Delta V \to 0$ 可得电介质中某点的极化程度，称为电极化强度，即

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p}_{ei}}{\Delta V}$$

$\vec{p}_{ei}$：分子电矩

$\vec{P}$ 的单位：$\mathrm{C \cdot m^{-2}}$

实验规律：

各向同性的电介质

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

电极化率　总电场强度

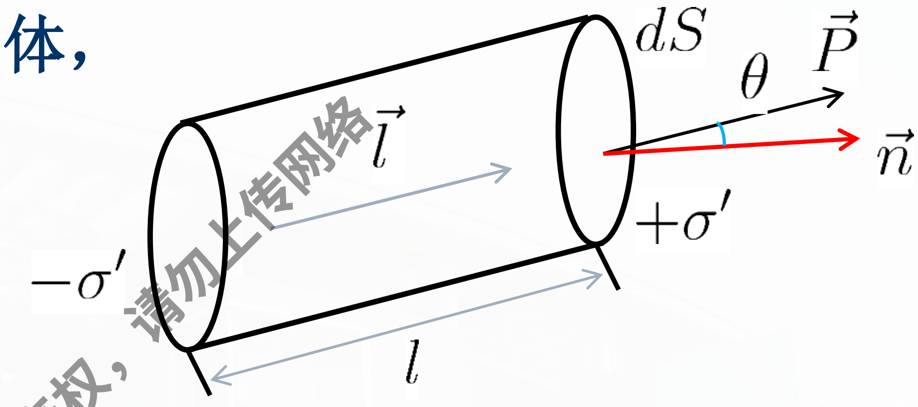
$$\chi = \varepsilon_r - 1$$

χ与E无关，取决于电介质的种类.

➤电极化强度与极化电荷密度的关系

设在均匀电介质中截取一斜柱体，

体积为 $dV = dS \cdot l\cos\theta$



以无极分子极化为例

设单位体积内的分子束为n，每个分子的电荷量为q，则电极化强度为

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_e}{\Delta V} = \frac{n\vec{p}_e}{1} = nq\vec{l}$$

极化时斜柱体内所有的正电荷中心将移至dS外表面称为极化电荷，若单位体积内的正电荷总量为nq，则由电荷守恒定律可知极化电荷总量dq'为

$$dq' = nqdV = nqdSl\cos\theta = PdS\cos\theta = \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

电极化强度的元通量

因此，dS面上的极化电荷面密度为

$$\sigma' = \frac{dq'}{dS} = P\cos\theta = P_n \quad \begin{cases} \theta < \dfrac{\pi}{2} & \text{极化电荷为正电荷} \\ \theta > \dfrac{\pi}{2} & \text{极化电荷为负电荷} \end{cases}$$

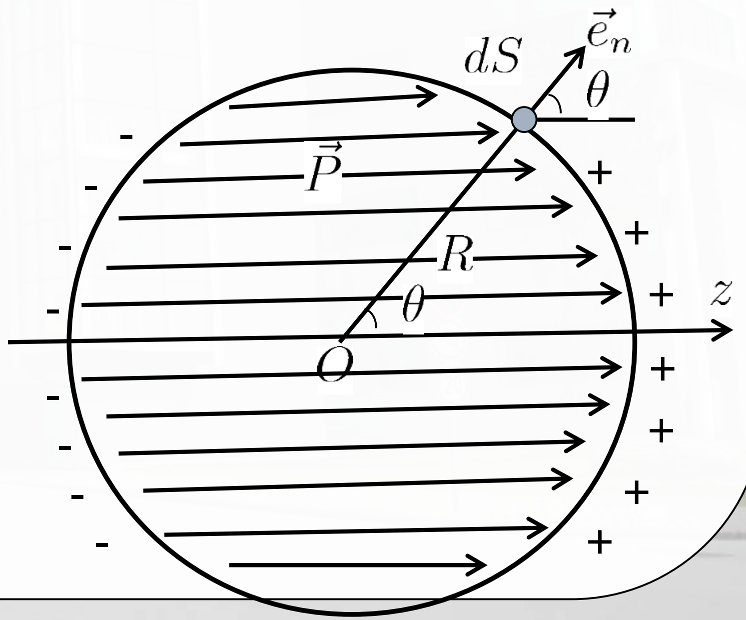
因此，穿过电介质中某一闭合面S的电极化强度的总通量等于因电介质极化而移出此面的极化电荷总量，或是闭合面S所包围的体积内极化电荷总量的负值，即

$$\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = \sum_{S外表面} dq' = -\sum_{S内} dq'$$

例：求均匀极化的电介质球表面上极化电荷的分布。已知电极化强度为P.

取球心O为原点，与 $\vec{P}$ 平行的直径为球的轴线，由于轴对称性，表面上任一点A的极化电荷面密度 $\sigma' = P\cos\theta$

可以看出，极化电荷在球表面时不均匀分布。右半球表面上σ'为正，左半球表面上为负，两半球分界面为0. 在轴线两端最大。



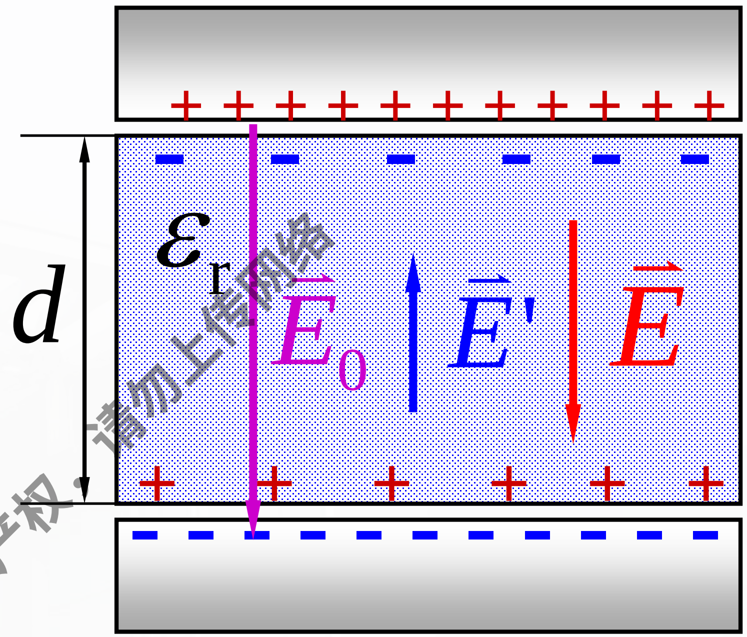
三、 有电介质时的场强

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$= E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi_e E$$

$$\therefore E = \frac{E_0}{1+\chi_e} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \quad (\varepsilon_r = 1 + \chi_e)$$



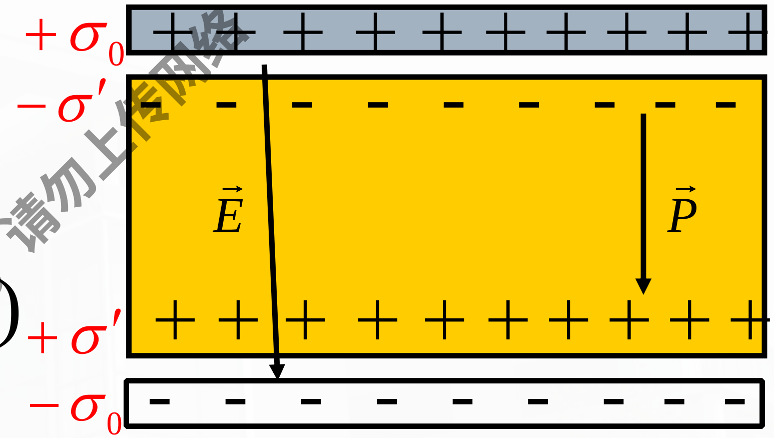
同理可得: $\sigma' = P = \varepsilon_0 \chi_e E = \varepsilon_0 \chi_e \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \right) = (\varepsilon_r - 1)(\sigma_0 - \sigma')$

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_0 \qquad Q' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} Q_0$$

13－3 有电介质时静电场的高斯定理

一、有电介质时高斯定理 电位移矢量

电场包括**自由电荷**和**极化电荷**产生的电场



$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\Big(\sum_i q_i + \sum_i q_i'\Big)$$

总电场强度 自由电荷 极化电荷

自由电荷面密度 $\pm\sigma_0$

极化电荷面密度 $\pm\sigma'$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

移项，得 $\Phi_E = \oint_S (\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot d\vec{S} = \sum_i q_i$

定义电位移矢量(electric displacement vector):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$\vec{D}$ 的单位：$\mathrm{C \cdot m^{-2}}$

介质中的高斯定理：通过有电介质的静电场中任一闭合曲面的电位移通量，等于该曲面所包围的自由电荷的代数和.

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i$$

说明：

1. 介质中的高斯定理有普适性.
2. 电位移矢量*D*是一个辅助量，描写电场的基本 物理量是电场强度*E*.
3. *D*是总场，与*q*、*q′*有关，但其通量仅与*q*有关。

对于各向同性的电介质： $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{D} = \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \vec{E}$$

$\because \varepsilon_r = 1 + \chi_e$ $\quad \therefore \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

电介质的性质方程： $\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$

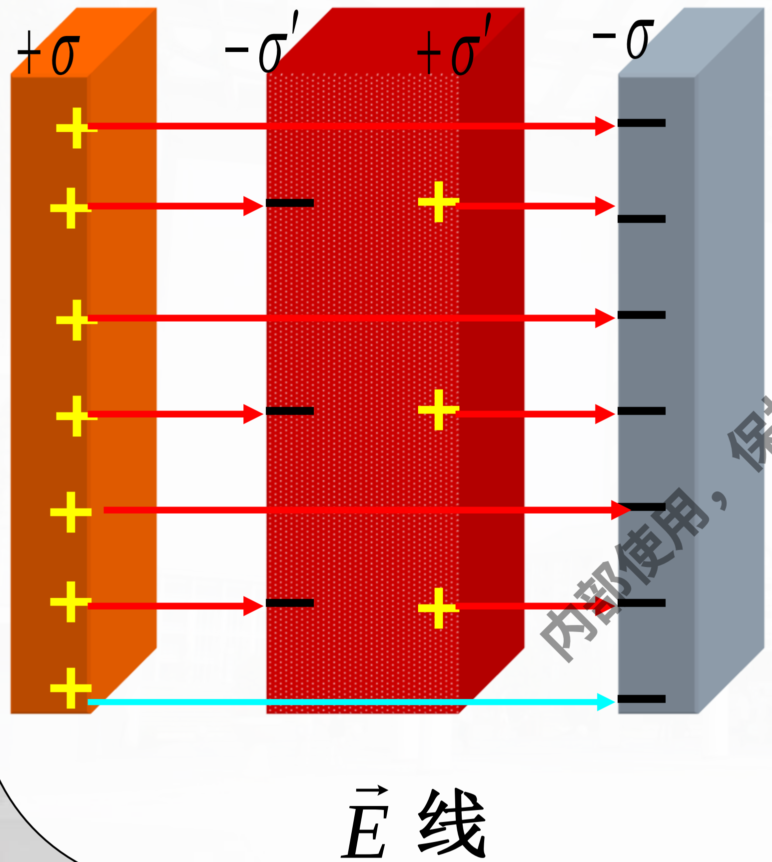
注: 性质方程只适用于各向同性的均匀介质.

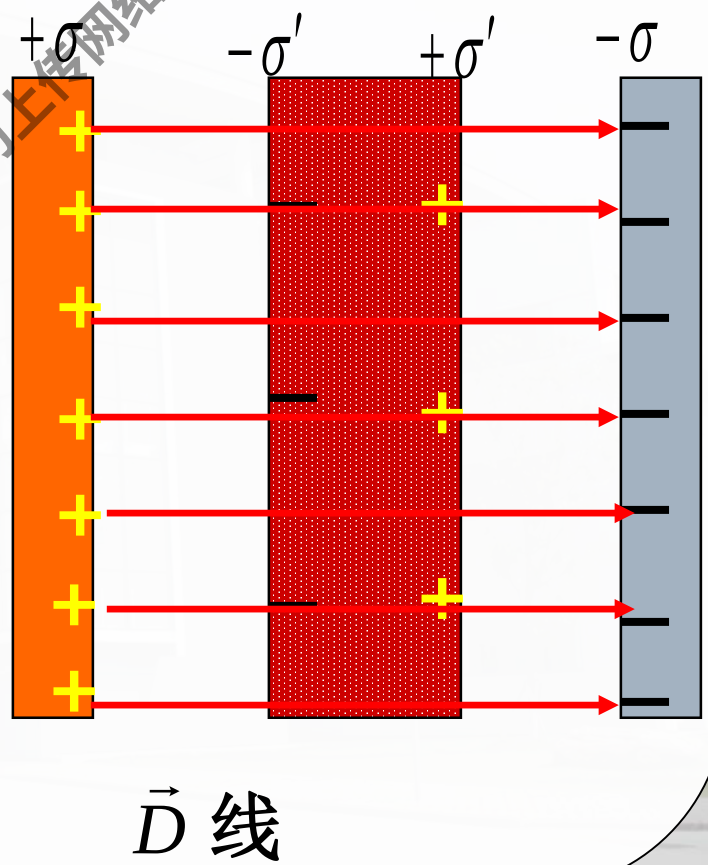
而 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 是定义式，普遍成立.

真空中： $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$ 介质中： $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

$$\varepsilon_0 \vec{E}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \qquad \vec{E}_0 = \varepsilon_r \vec{E}$$

从有电介质时的高斯定理可知：通过电介质中任一闭合曲面的电位移通量等于该面包围的自由电荷的代数和。

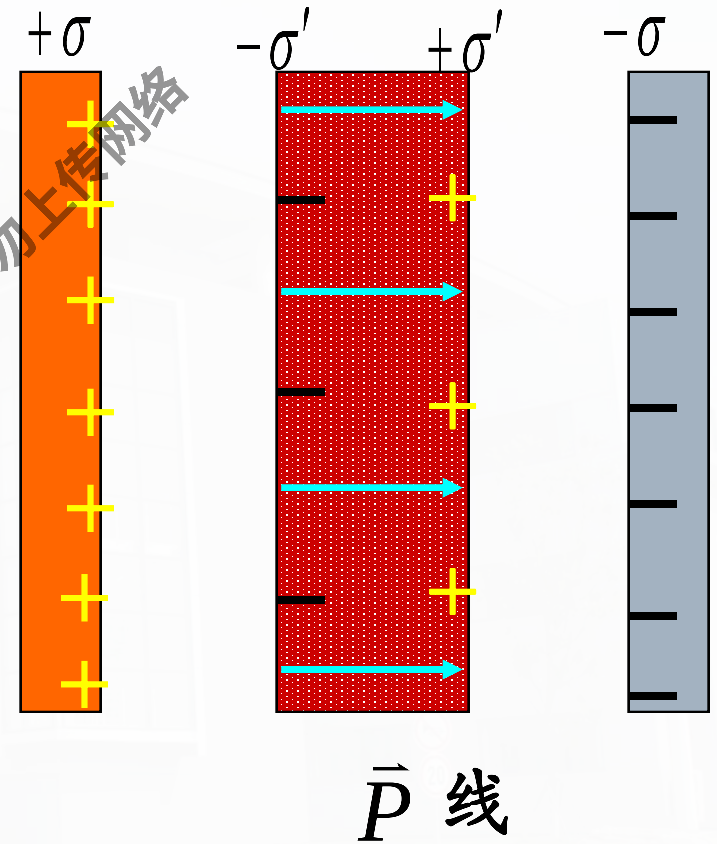




电场线起于正电荷、止于负电荷，包括自由电荷和极化电荷。

电位移线起于正的自由电荷，止于负的自由电荷。

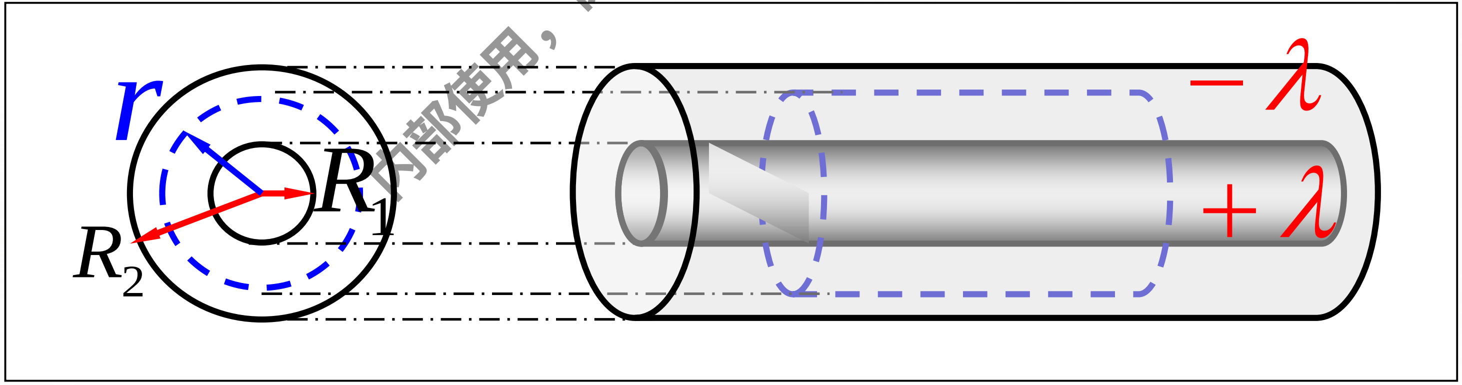
电极化强度矢量线起于正的极化电荷，止于负的极化电荷。只在电介质内部出现。



二、有电介质时高斯定理的应用

利用对称性, 根据介质中的高斯定理计算出电位移矢量, 再通过性质方程, 便可求出场强.

例1. 在无限长电缆内，导体圆柱A和同轴导体圆柱壳B的半径分别为 r_1和 r_2 $(r_1 < r_2)$，单位长度所带电荷分别为$+\lambda$和$-\lambda$，内、外导体之间充满电容率为 ε的均匀电介质。求电介质中任一点的场强及内、外导体间的电势差.



解：取如图同轴圆柱形闭合高斯面,由有电介质时的高斯定理,可得:

$$D\cos 0\cdot(2\pi rl)=\lambda l$$ **即：** $$D=\lambda/2\pi r$$

并由于*E* 和*D* 的方向一致，得所求场强的大小为

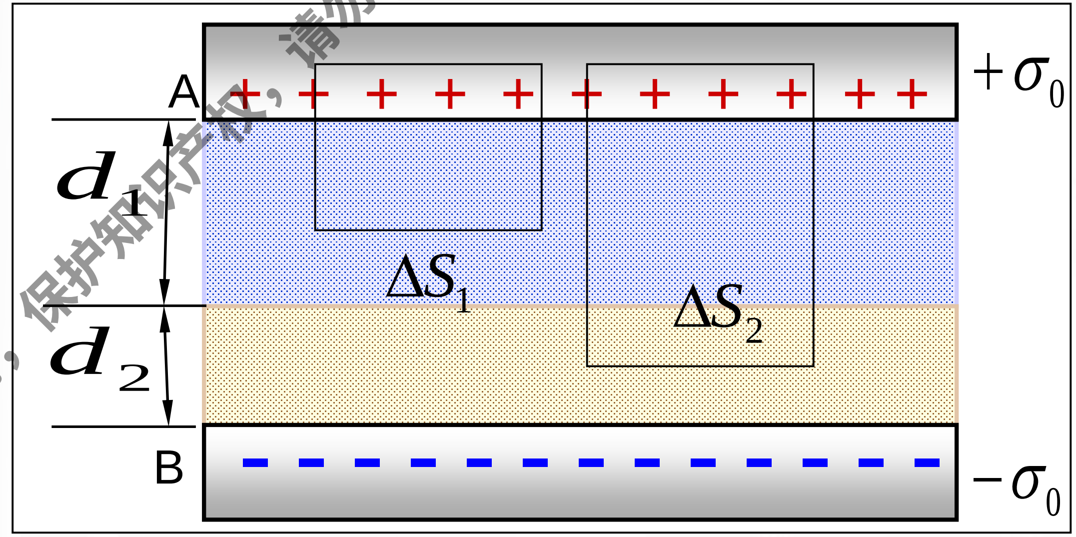
$$E=D/\varepsilon=\lambda/2\pi\varepsilon r$$

内、外导体间的电势差为

$$U_A-U_B=\int\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

例2. 如图, 自由电荷面密度为$\pm\sigma_0$的无限大金属平板A,B间充满两层各向同性的电介质, 电介质的界面与带电平板平行, 相对介电常数分别为 ε_{r1}和ε_{r2}, 厚度各为 d_1和d_2, 求(1)各介质层中的场强; (2)A, B间的电势差.

解: 由对称性可知,两层介质中的电场都为均匀电场, $\vec{D}$的方向与带电平面垂直. 取如图圆柱形闭合高斯面S_1,由电介质中的高斯定理,可得:



$$\oint_{S1}\vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = D_1\Delta S_1 = \sigma_0\Delta S_1$$ 故得: $$D_1 = \sigma_0$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = \frac{E_0}{\varepsilon_{r1}}$$

同理作高斯面 S_2 ,可得介质2中:

$$D_2 = \sigma_0\,, \qquad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = \frac{E_0}{\varepsilon_{r2}}$$

可见介质中 $D_1 = D_2 = \sigma_0\,,\quad E = E_0/\varepsilon_r$

由电势差定义,可求得

$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)$$

13－4 电容 电容器

一、孤立导体(isolated inductor)的电容(capacitance)

定义 带电量为q的孤立导体球的电量和电势之比为定值,

$$C=\frac{q}{U}$$

称为导体的**电容**.

注意 电容 C 反映导体容电能力, 只与导体本身的形状、大小和结构有关；与是否带电、带电多少以及构成导体的材料无关. 电容通过单位电势容纳的电量来表征.

单位 法拉 $1\mathrm{F}=1\mathrm{C/V}$ 实际中常用更小的单位

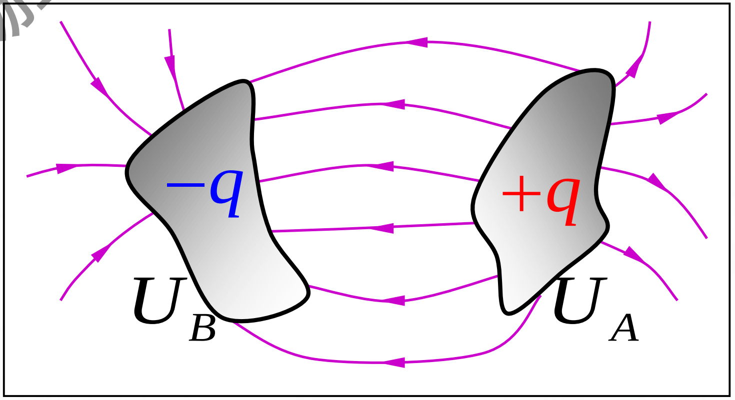
$$1\mu\mathrm{F}=10^{-6}\,\mathrm{F} \qquad 1\mathrm{pF}=10^{-12}\,\mathrm{F}$$

二、 电容器(capacitor)

*常用的电容器由两个金属极板和介于其间的电介质所组成.

*电容器电容 极板所带电量q的绝对值与极板间电势差ΔU的比值

$$C=\frac{q}{U_A-U_B}$$



说明：(1) C 是描述电容器储电本领的物理量；

(2) C 取决于电容器两板的形状、大小、相对位置及中间电介质的种类和分布情况；

(3) q为一个极板所带电量的绝对值.

电容器电容的计算步骤：

1、首先假设电容器的两个极板*A*、*B*分别带+*q*和-*q*电荷；

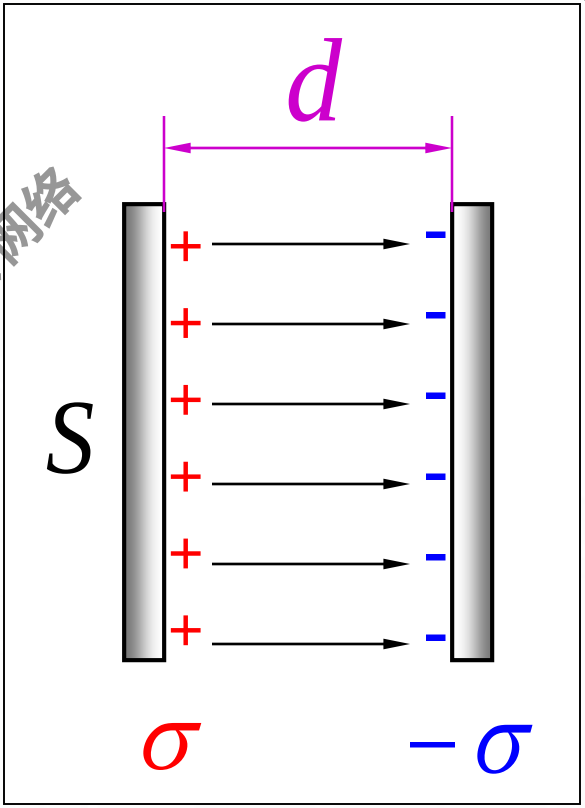
2、求两极板间的电场$\vec{E}$分布，并由

$$U_{AB}=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

计算两极板间电势差。

3、由定义式 $C=\dfrac{q}{U_A-U_B}$ **计算电容*C*。**

例1：平行板电容器



（1）设两导体板分别带电, 面密度 $\pm\sigma$

（2）两带电平板间的电场强度

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

（3）两带电平板间的电势差

$$U=Ed=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$

（4）平板电容器电容 $\boxed{C_0=\frac{q}{U}=\varepsilon_0\frac{S}{d}}$

$$\frac{C}{C_0}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=\varepsilon_r$$

同理，两极板间充满均匀电介质时的电容为：$C=\frac{\varepsilon S}{d}$

例2：球形电容器

球形电容器是由半径分别为 R_A 和 R_B 的两个同心金属球壳所组成．两球壳间充满电容率为 ε 的电介质. 内球壳均匀带正电 $+q$, 外球壳内外表面均匀分布感应电荷 $-q$ 和 $+q$.外球壳接地. 由高斯定理, 得:

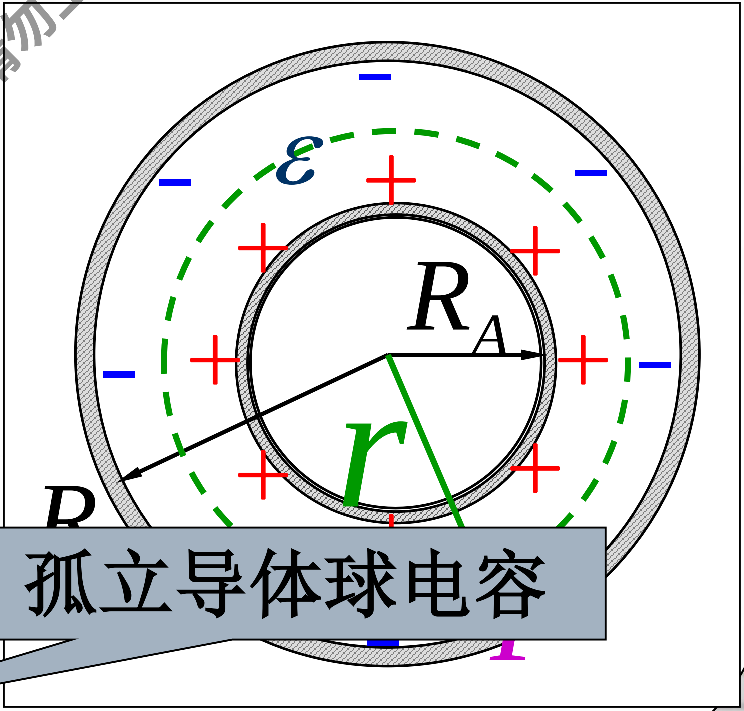
$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r \quad (R_A<r<R_B)$$

$$U_{AB}=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_A}^{R_B}\frac{dr}{r^2}$$

$$C=\frac{q}{U_{AB}}=4\pi\varepsilon\frac{R_A R_B}{R_B-R_A}$$

$R_B\to\infty,\quad C=4\pi\varepsilon R_A$

孤立导体球电容



例3：圆柱形电容器

圆柱形电容器是由半径分别为 R_1 的导线和与它同轴的导体圆筒构成，圆筒内半径为R_2，长为l，充满电容率为ε的均匀各向同性电介质，求此电容器的电容。

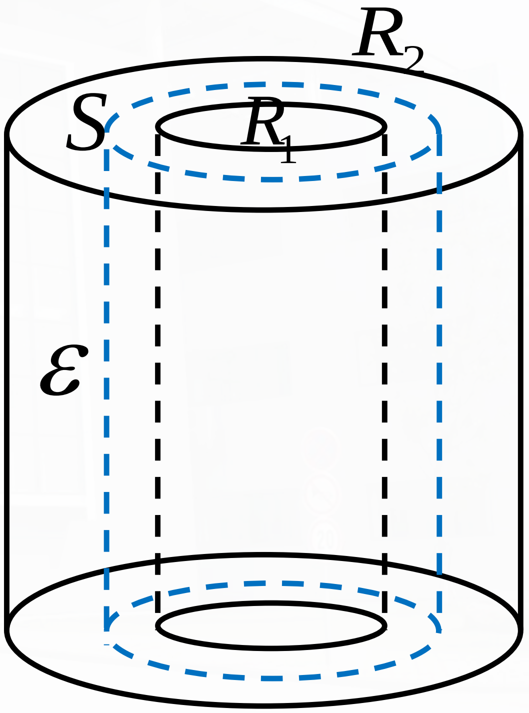
解：设导线和圆筒沿轴线单位长度所带电荷分别为 $+\lambda$和$-\lambda$

由高斯定理可知柱面之间的场强为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

内外导体间的电势差为

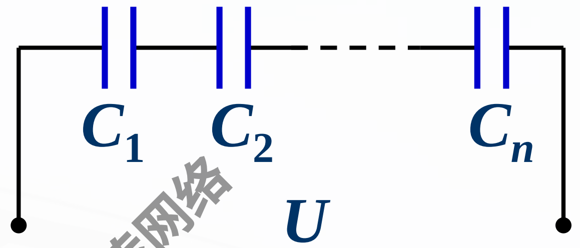
$$U_1-U_2=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\bullet d\vec{l}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}=\frac{q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



$$C=\frac{q}{U_1-U_2}=2\pi\varepsilon\frac{l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

三、电容器的串联和并联

1. 电容器的串联

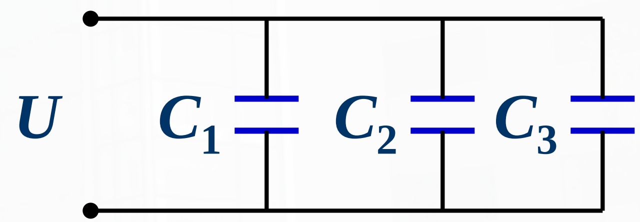


$$U=\frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}+\ldots+\frac{q}{C_n}=\frac{q}{C}$$

等值电容：$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$$

结论： 串联电容器等值电容的倒数等于各电容的倒数之和.

2. 电容器的并联



$$q_1=C_1U,\ q_2=C_2U,\cdots$$

总电量：$$q=q_1+q_2+\cdots+q_n=\left(C_1+C_2+\cdots C_n\right)U$$

等值电容：$$C=\frac{q}{U}=C_1+C_2+\cdots+C_n$$

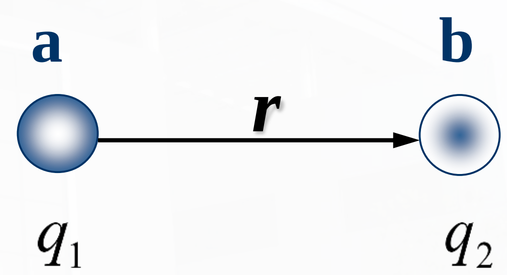
结论： 并联电容器的等效电容等于个电容器电容之和.

13－5 静电场的能量

带电过程：正负电荷分离 ⟶ 外力克服电场力作功 ⟶ 转化为静电能 ⟶ 储存在电场中

一、点电荷系统的电能

将两点荷从相距无限远处先后移动到如图位置,在这个过程中,外力克服电场力作功为:



$$A=\int_{\infty}^{b}\vec{F}_{外}\cdot d\vec{l}=-\int_{\infty}^{b}q_2\vec{E}_1\cdot d\vec{l}=q_2(U_b-U_{\infty})=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

该两点荷系统静电能为:

$$W=A=\frac{1}{2}q_1\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{1}{2}q_2\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1}{2}q_1U_1+\frac{1}{2}q_2U_2$$

用类似方法可以得出n个点电荷系统的电能：

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_i$$

***对真空和电介质都适用.**

点电荷间的相互作用能

连续分布带电体的电能：

$$W=\frac{1}{2}\int U\,\mathrm{d}q=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_V U\rho\,\mathrm{d}V\\ \frac{1}{2}\int_S U\sigma\,\mathrm{d}S\\ \frac{1}{2}\int_L U\lambda\,\mathrm{d}l\end{cases}$$

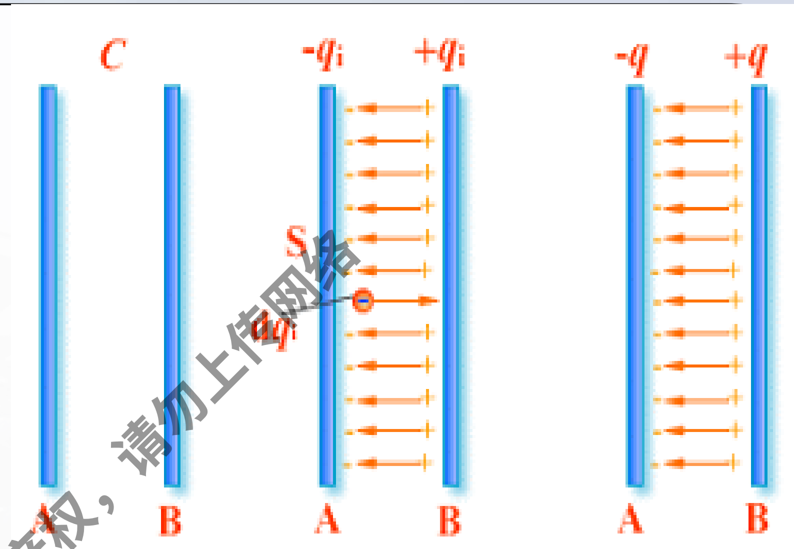
***带电体电荷体分布.**

***带电体电荷面分布.**

***带电体电荷线分布**

带电体系总能

二、 电容器的能量



图示为电容器充电过程.

若将正电荷$+dq_i$ 从A板移至B板, 则外力作功为:

$$dA = U_{AB} dq_i = q_i \frac{dq_i}{C}$$

在整个充电过程中, 外力作功为 $A = \int \mathrm{d}A = \int_0^q \frac{q_i}{C} \mathrm{d}q_i = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

所以, 带电量为q的电容器所具有的能量为:

$$W_e = A = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

根据电容器电容的定义式,上式也可写为:

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q(U_A - U_B) = \frac{1}{2} C(U_A - U_B)^2$$

三、电场的能量

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}(U_A - U_B)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon(Sd)(\frac{U_A - U_B}{d})^2$$

电场能量密度：某点处单位体积内的电场能量

$$w_e = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{DE}{2}$$

物理意义　电场是一种物质，它具有能量.

四、电场能量的计算

任一带电系统的电场，根据场强分布，便可计算其电场所储存的总能量.

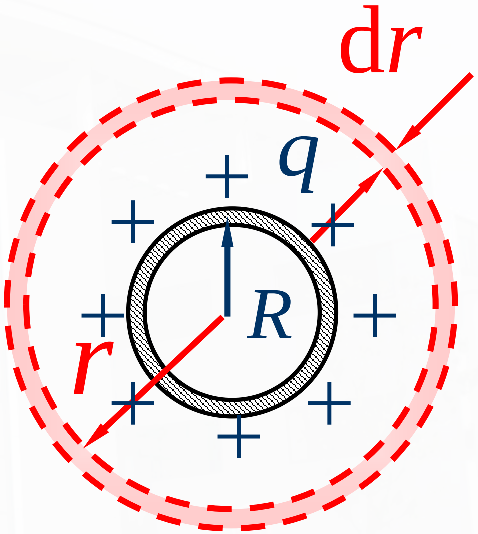
$$W_e = \int_V w_e \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V$$

例1. 半径为R=10cm 的金属球, 带有电荷为q=1.0×10^{-5}C, 位于ε_r=2 的无限大均匀电介质中, 求这带电球体的电场能量.

解法一:由高斯定理,可得离开球心为r (r>R)处的场强:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2},$$ **该处电场能量密度为:**

$$w_e=\frac{\varepsilon E^2}{2}=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}$$



取如图所示同心球壳作为体积元, 则积分可得整个电场的能量:

$$W_e=\int w_e\mathrm{d}V=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\int_R^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon R}$$ → **代入数值.**

解法二：由孤立导体球的电容表达式可知

$$C = 4\pi\varepsilon R$$ **所以带电球体的电场能量为:**

$$W_e = \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2\varepsilon_r R}$$

结果一致

例2. 一空气平板电容器电容*C*=1.0×10^-12^F，当充电至*Q*=1.0×10^-12^C时切断电源. 求(1)极板间电势差及电场能量(2)若将极板间距增加一倍，能量是增加还是减少？为什么？

解：(1)极板间电势差为:

$$U_{AB} = \frac{Q}{C} = \frac{1.0\times10^{-6}}{1.0\times10^{-12}} = 1.0\times10^{6}(V)$$

电场能量 $$W_e = CU_{AB}{}^2/2 = 0.5(J)$$

(2) 当极板间距由*d*变为*2d*，相应的电容为

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d},C'=\frac{\varepsilon_0 S}{2d}=\frac{C}{2}$$

能量的变化为

$$\Delta W_e=W_e'-W_e=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C'}-\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=0.5(J)>0$$

可见电场能量增加了,增加的能量是由外力克服两极间引力作功而转换来的.

1、本章小结

2、作业：13-14，13-18，13-20， 13-21