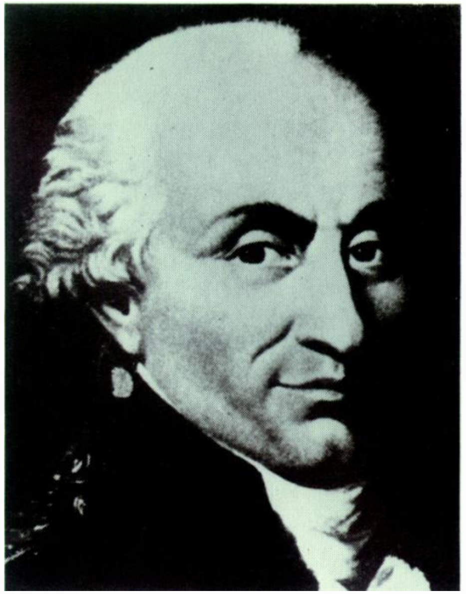
大学物理学（第三版）下册
电子教案

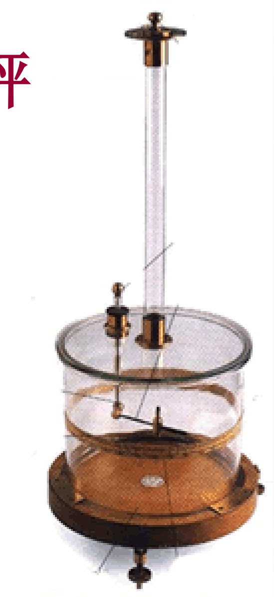
第十二章 真空中的静电场

第十二章 真空中的静电场



Charles A. Coulomb (1736– 1806)

库仑, 法国工程师、物理学家. 1777年开始研究静电和磁力问题. 1785~1789年, 用扭秤测量静电力和磁力,导出著名的库仑定律.



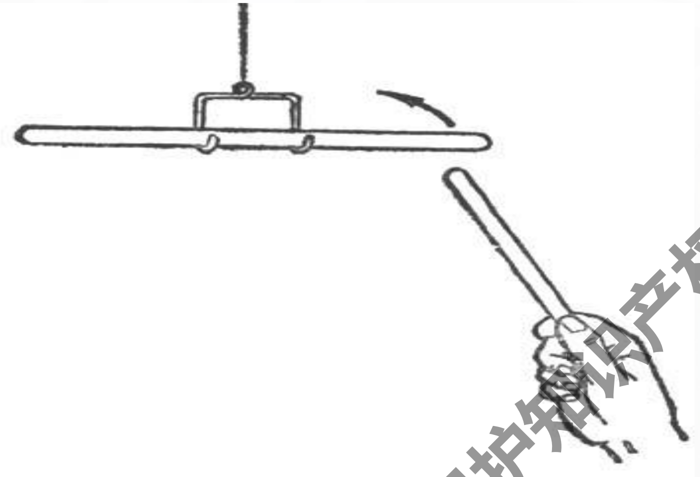
库仑扭秤

电磁学(electromagnetics) 研究电磁相互作用及其运动规律.

静电场(electrostatic field) 相对于观察者静止的电荷在空间激发的电场.

12－1 库伦定律

一、电荷及其性质



电荷 (electric charge)： 自然界中只存在两种电荷, 正电荷和负电荷. 同种电荷互相排斥, 异种电荷互相吸引.

电量(electric quantity)： 物体所带电荷数量的多少.一般用q或Q表示, 在SI制中, 其单位为库仑(C).

1.电荷守恒定律

一个与外界没有电荷交换的孤立系统,无论发生什么变化,整个系统的电荷总量(正、负电荷的代数和)必定保持不变. 这个结论称为**电荷守恒定律**.

说明: 电荷守恒定律适用于一切宏观和微观过程, 例如核反应和基本粒子过程, 它是自然界的基本守恒定律之一.

2.电荷的量子化

电荷只能一份一份地取分立的, 不连续的数值的性质, 叫做**电荷量子化**.

电子电荷 $e = 1.60217733(49) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

任一带电体电荷 $q = ne \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$

强子的夸克模型具有分数电荷（**1/3** 或 **2/3** 电子电荷）但实验上尚未直接证明.

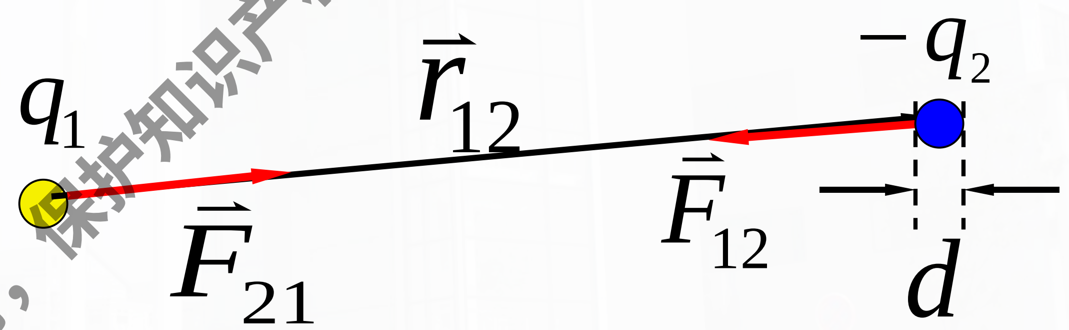
注意: 分析常规带电体带电情况时，可以认为电荷是连续变化的.

3.电荷的相对论不变性：一个电荷的电量与运动状态无关。

二、库仑定律

点电荷(理想模型)： 带电体的线度比带电体间的距离或比所讨论的问题中涉及的距离小得多, 则带电体的形状和电荷在其上的分布已无关紧要, 带电体可抽象为一个几何点, 这称作点电荷.

如图, $d << r$, 故$q_1 q_2$可看为点电荷.



库仑定律(Coulomb' s law): 真空中两静止点电荷之间相互作用的基本规律.

(1) 同号电荷相互排斥，异号电荷相互吸引；

(2) 作用力沿两点电荷的连线；

(3) 力的大小正比于每个点电荷电量的多少；

(4) 力的大小反比于两点电荷之间距离的平方.

矢量式

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$$

k : 比例系数, 量值取决于式中各物理量的单位.

国际单位制中，k 写成

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

ε_0 为真空中电容率, 也叫介电常数.

1986 年推荐值

$$\varepsilon_0 = 8.854187818(17)\times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$$

于是, 国际单位制中, 库仑定律又可表示成

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r}$$

$\vec{e}_r$: $\vec{r}$ 方向的单位矢量.

位矢 $\vec{r}$ 的方向是由施力电荷指向受力电荷.

***库仑定律是关于两个静止点电荷间相互作用的实验定律.**

思考 对于带电物体, 如何定量研究其相互间作用力？

例 在氢原子内,电子和质子的间距为 $5.3\times10^{-11}\mathrm{m}$ 求它们之间电的相互作用力和万有引力,并比较它们的大小.

解: 这里电子与质子之间的距离远大于它们本身的线度,故电子与质子都可看成为点电荷. 设相距为r，其电荷分别为$+e$ 和 $-e$，质量分别为m_e和 m_p，则根据库仑定律, 此库仑力大小为

$$F_{\mathrm{e}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

而由万有引力知, 电子和质子间万有引力的大小为

$$F_{\mathrm{g}}=G\frac{m_{\mathrm{e}}m_{\mathrm{p}}}{r^2}$$

比值为:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 G m_e m_p}$$

已知:

$$m_e = 9.1\times10^{-31}\,\mathrm{kg};\quad m_p = 1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg};$$

$$e = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C};\quad G = 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$$

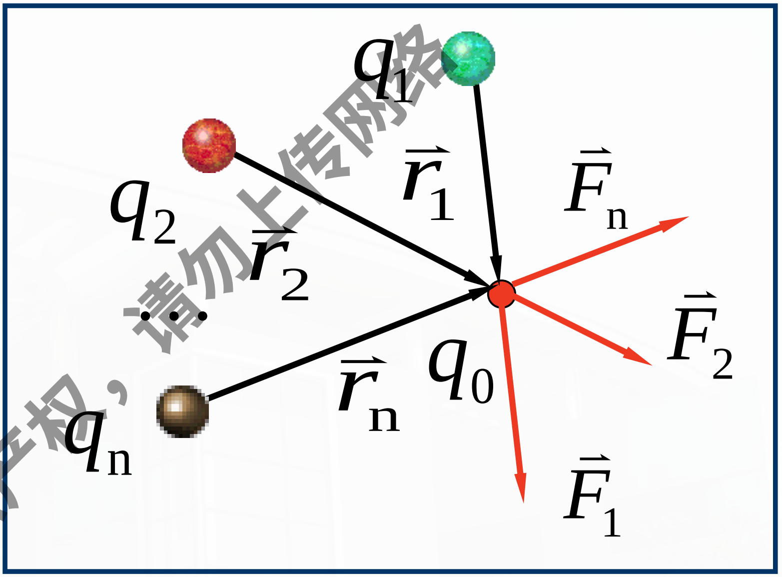
所以

$$\frac{F_e}{F_g} = 2.27\times10^{39}$$

可见, 在微观领域中, 万有引力比库仑力小得多,可忽略不计.

静电力叠加原理

实验证明 对于两个以上的点电荷，其中每个点电荷所受的总静电力等于其他点电荷单独存在时作用在该点电荷上的静电力之矢量和．这就是**静电力的叠加原理**．

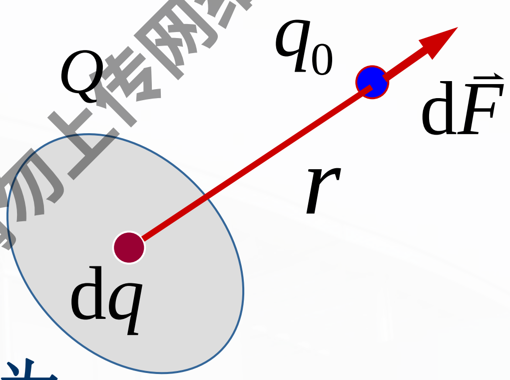


如图，q_0所受静电力的合力为

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

对电荷连续分布带电体, 选取电荷元(elementary charge) **dq**

则 **dq** 对 q_0 的作用力为



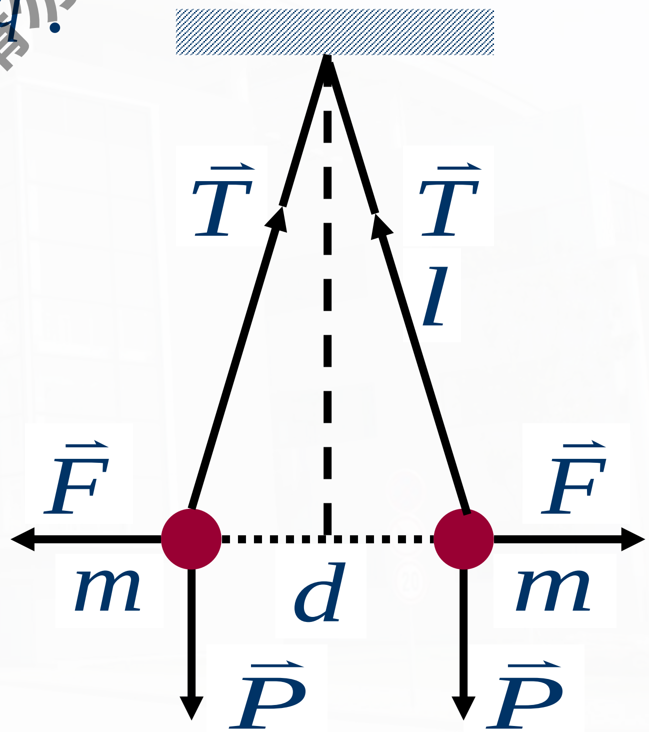
$$\mathrm{d}\vec{F} = \frac{q_0 \mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

而积分可得带电体Q 对 q_0 的作用力为

$$\vec{F} = \int_Q \frac{q_0 \mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

库仑定律与静电力叠加原理是静电学的最基本规律. 原则上, 有关静电学的问题都可用这两条规律解决.

例 如图所示，两小球的质量均为 $m=0.1\times10^{-3}\,\mathrm{kg}$，分别用两根长 $l=1.20\,\mathrm{m}$ 的塑料细线悬挂着．当两球带有等量的同种电荷时，它们相互排斥分开，在彼此相距 $d=5\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ 处达到平衡．求每个球上所带的电荷 q．



解：对每个小球来说，受重力、悬线拉力和小球间的静电斥力三个力作用．

由于小球分别处于平衡状态，它们的速度和加速度皆为零．根据牛顿第二定律，对任一个小球来说，在竖直方向和水平方向分别有

$$mg - T\cos\theta = 0$$

$$F - T\sin\theta = 0$$

联立两式，得

$$F = T\tan\theta$$

因为 $d << l$ **所以** $\tan\theta \approx \sin\theta = d/2l$

又

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

可得

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = mg\frac{d}{2l}$$

故

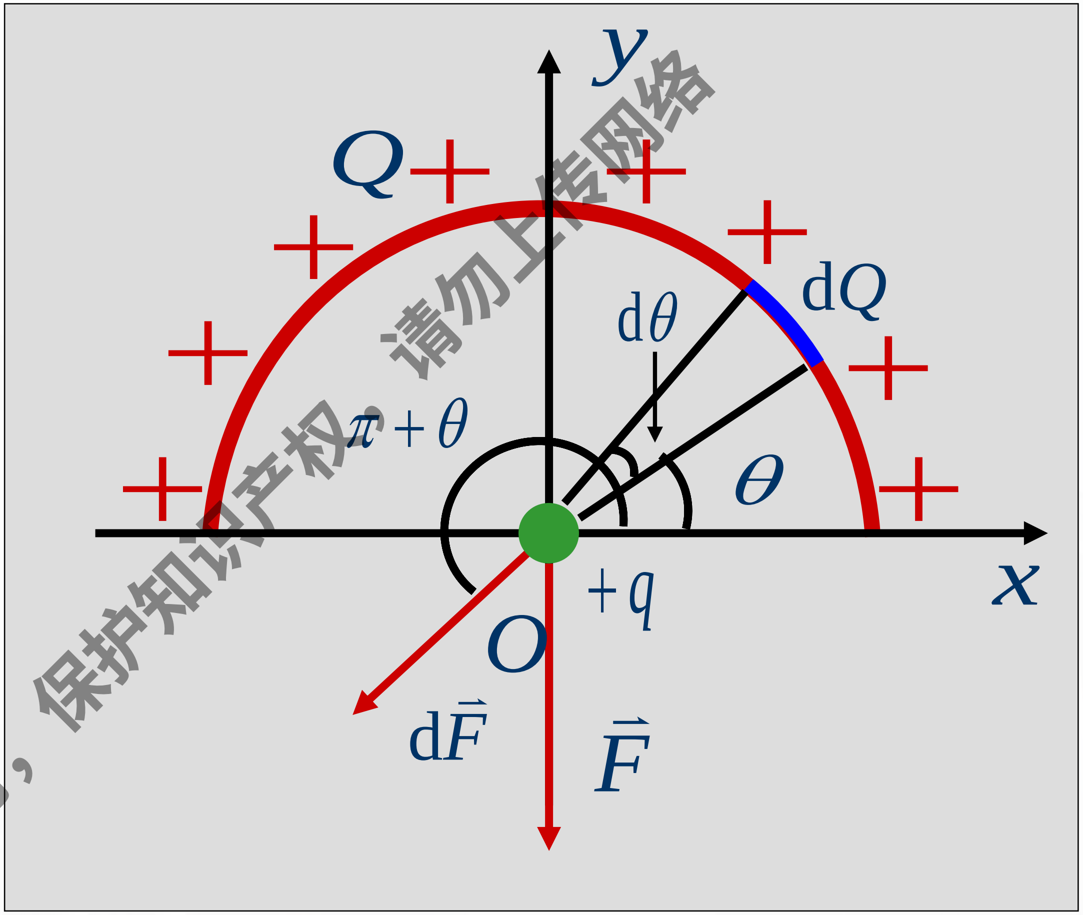
$$q = \pm\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 mgd^3}{2l}\right)^{\frac{1}{2}}$$

代入数值

$$q = \pm 2.38\times10^{-9}\,\mathrm{C}$$

***所带电荷同正或同负**

例 在半径为 R 的均匀带电的半圆弧形塑料细杆上，均匀地分布着正电荷，求它对位于圆心 O 处的点电荷 q ($q>0$) 的作用力.



解：取如图所示坐标系和弧形线元 d*l* ,由题设可知它所带电荷为

$$\mathrm{d}Q = (Q/\pi R)\mathrm{d}l = (Q/\pi R)R\mathrm{d}\theta = Q\mathrm{d}\theta/\pi$$

按库仑定律，电荷元dQ 对点电荷q 作用的静电力大小为

$$\mathrm{d}F=\frac{q\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\pi R^2}\mathrm{d}\theta$$

因为Q 与q 都是正电荷，则静电力的方向沿两者连线，为斥力，矢量式表示为

$$\mathrm{d}\vec{F}=\mathrm{d}F_x\vec{i}+\mathrm{d}F_y\vec{j}=\mathrm{d}F\cos(\pi+\theta)\vec{i}+\mathrm{d}F\sin(\pi+\theta)\vec{j}$$

综合以上两式，可得电荷Q 对点电荷q 作用的静电力的合力为

$$\vec{F}=\int_l \mathrm{d}\vec{F}=\int_l \mathrm{d}F_x\vec{i}+\int_l \mathrm{d}F_y\vec{j}$$

$$=-\frac{qQ}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\left[\int_0^{\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\right]\vec{i}+\frac{qQ}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\left[\int_0^{\pi}-\sin\theta\mathrm{d}\theta\right]\vec{j}$$

$$=0\vec{i}+(-\frac{qQ}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2})\vec{j}=-\frac{qQ}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\vec{j}$$

根据对称性, 亦可分析得出

合力沿 y 轴负向

合力大小为 $F=\left|\vec{F}\right|=\dfrac{qQ}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$

注意这里对矢量求积分的方法, 先将矢量写成正交分解式, 考虑到其中的单位矢量是恒矢量, 积分时, 可以将其提到积分号外. 这样, 就把矢量积分转化为求标量的积分了.

12－2 电场强度

一、静电场

实验证明　两静止电荷间存在相互作用的静电力, 但是它们在真空中并未接触, 那么相互作用怎样实现呢?

错误的观点

电荷 ⟷ ~~超距作用~~ ⟷ 电荷

场 ＋ 实物 ⟶ 物质世界

注意　**电场也具有能量、动量和质量等重要特征; 静电场存在于静止电荷的周围, 它对引入静电场中的任何带电体都有电场力的作用, 若电荷在电场中移动, 电场力将对其作功.**

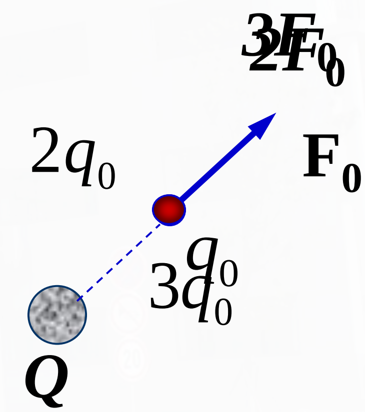
二、电场强度(electric field intensity)

场源电荷 激发电场的点电荷(系)或带电体.

试探电荷 点电荷(几何线度小,与场点一一对应)且电量足够小, 故对原电场几乎无影响.

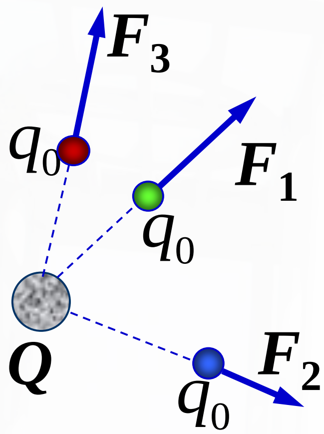
1) 在电场的同一点上放置量值不同的同种试探电荷

$$\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{2\vec{F}}{2q_0}=\frac{3\vec{F}}{3q_0}=\cdots=\text{恒矢量}$$



在电场中的某一确定点上, $\vec{F}/q_0$ 的大小和方向恒定, 与试探电荷的量值无关.

2) 在电场的不同点上放同样的正试探电荷.



在电场中取不同的点，$\vec{F}/q_0$ 各不相同，但就一点而言，有其确定的大小和方向.

*电场强度

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}}$$

定义　电场中某点处的电场强度等于位于该点处的单位正试探电荷所受的力，其方向为正电荷受力方向.

单位　$\mathrm{N \cdot C^{-1}}$ ，$\mathrm{V \cdot m^{-1}}$

讨论：

1) 电场强度反映电场本身的性质,与试探电荷无关.

2) 变化电场 $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r},t)$，静电场 $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r})$.

3) 均匀电场: 电场强度在某一区域内, 大小和方向都相同.

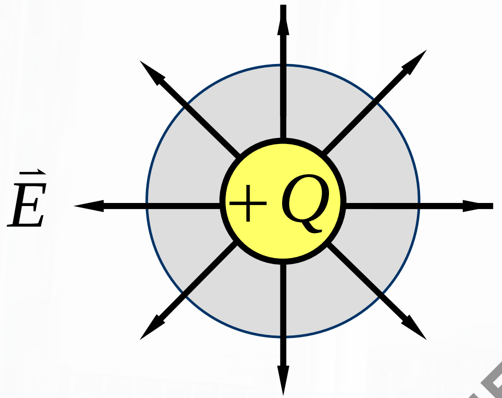
4) 电场中电荷受力： $\vec{F}=q\vec{E}$

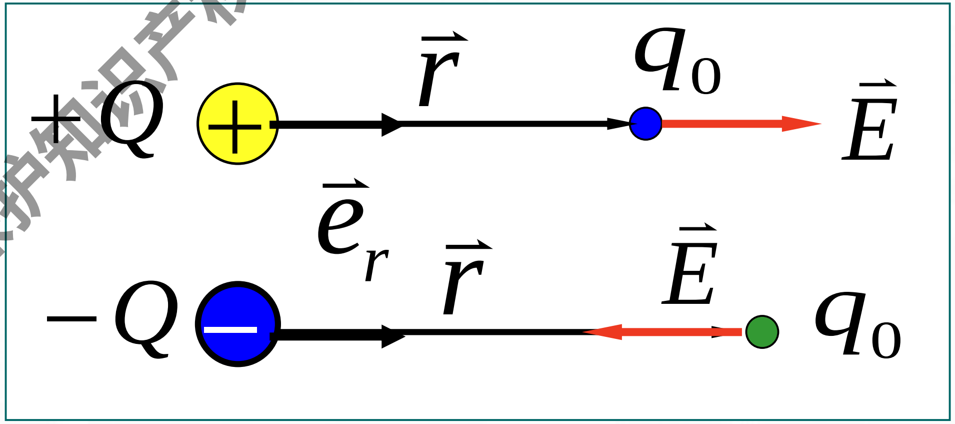
三、点电荷的电场

在真空中有一个静止的点电荷 Q，在与它相距为r 的场点P上，设想放一个试探电荷q_0 (q_0 >0)，按库仑定律，试探电荷 q_0所受的力

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\vec{e}_r$$ 根据定义,得到 $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$

即任一点场强大小为 $$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ 方向如图所示





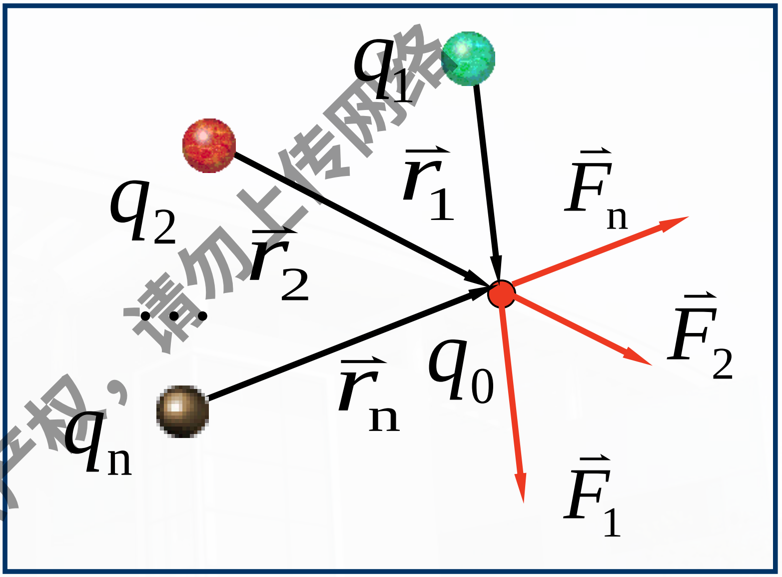
$r \to \infty \quad E \to 0$

$r \to 0 \quad E \to \infty\,?$

球面上各点的场强大小均相同

四、电场强度叠加原理

如图 根据静电力叠加原理, 对于两个以上的点电荷激发的静电场中的试探电荷q_0, 其所受力F等于各个场源电荷单独存在时作用于试探电荷上的静电力之矢量和. 即:



$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n$$

考虑到

$$\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{\vec{F}_1}{q_0}+\frac{\vec{F}_2}{q_0}+\frac{\vec{F}_3}{q_0}+\cdots\frac{\vec{F}_n}{q_0}$$

于是,有 $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n=\sum_i \vec{E}_i$

场强叠加原理 点电荷系电场中某点的总场强, 等于各个点电荷单独存在时在该点的场强的矢量和.

点电荷系的场强公式

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{e}_r$$

电荷连续分布带电体 选取电荷元(elementary charge) dq

则 dq 在场中某点产生的电场强度为

$$d\vec{E}=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

积分可得 $$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r$$

引入电荷密度的概念

体电荷密度 $$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$

面电荷密度 $$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$$

线电荷密度 $$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$

$$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V$$

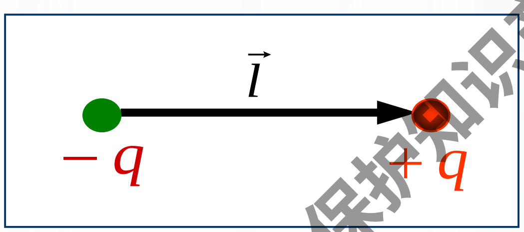
$$\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}S$$

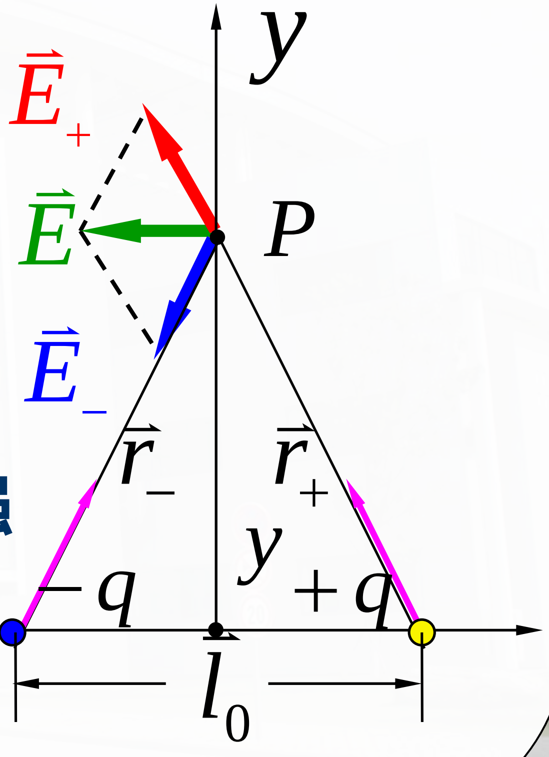
$$\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}l$$

例1 分别求电偶极子(electric dipole)连线中垂线上一点和延长线上一点处的场强 .

电偶极子 相距很近的等量异号电荷

电偶极矩(electric moment) $\vec{p}_e = q\vec{l}$





解: (1)中垂线上距中心较远处一点的场强

如图

$$\vec{E}_+ = \frac{q\vec{r}_+}{4\pi\varepsilon_0 r_+^3} \qquad \vec{E}_- = -\frac{q\vec{r}_-}{4\pi\varepsilon_0 r_-^3}$$

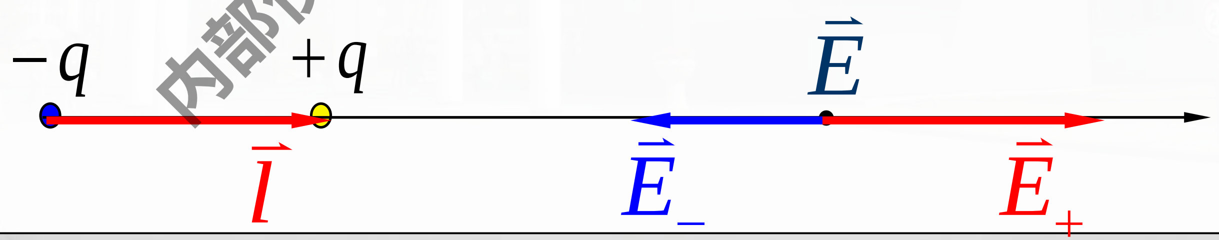
$$\because r >> l \qquad \therefore |r_+| \approx |r_-| \approx |r|$$ **可得**

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

由于 $\vec{r}_+ - \vec{r}_- = -\vec{l}$ **上式化为**

$$\vec{E} = \frac{-q\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{-\vec{p}_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

(2)电偶极子延长线上距离中心较远处一点的场强



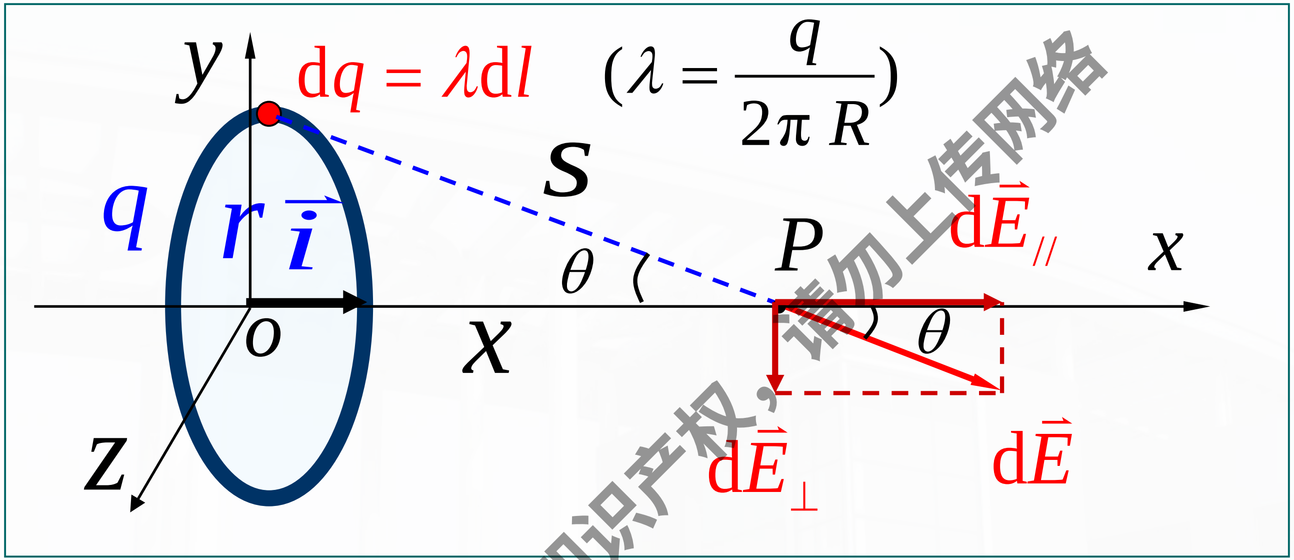
$$\vec{E}=\vec{E}_{+}+\vec{E}_{-}=[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-l/2)^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r+l/2)^2}]\vec{e}_r$$

$$\because r>>l \qquad \therefore (r^2-\frac{l^2}{4})^2\approx r^4$$

$$\therefore \vec{E}\approx\frac{2\vec{p}_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

例2 如图, 电荷 *q* (*q*>0) 均匀分布在一半径为 *r* 的细圆环上. 计算在垂直于环面的轴线上任一场点 *P* 的场强 .

解: (1) 如图,在圆环上取电荷元dq , 则



$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{s^2} \qquad \mathrm{d}\vec{E} = \mathrm{d}\,\vec{E}_{\perp} + \mathrm{d}\,\vec{E}_{//}$$

各电荷元在P点 $\mathrm{d}\vec{E}$ 方向不同，分布于一个圆锥面上

由对称性可知

$$E_{\perp} = \int \mathrm{d}E_{\perp} = 0$$

$$E=\int_L \mathrm{d}E_{//}=\int_L \mathrm{d}E\cos\theta=\int_L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{s^2}\cdot\frac{x}{s}$$

$$=\int_L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\frac{q\mathrm{d}l}{2\pi r}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\cdot\frac{q}{2\pi r}\int_L \mathrm{d}l$$

$$\therefore \vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+r^2)^{3/2}}\vec{i}$$

方向沿 x 轴正向

讨论

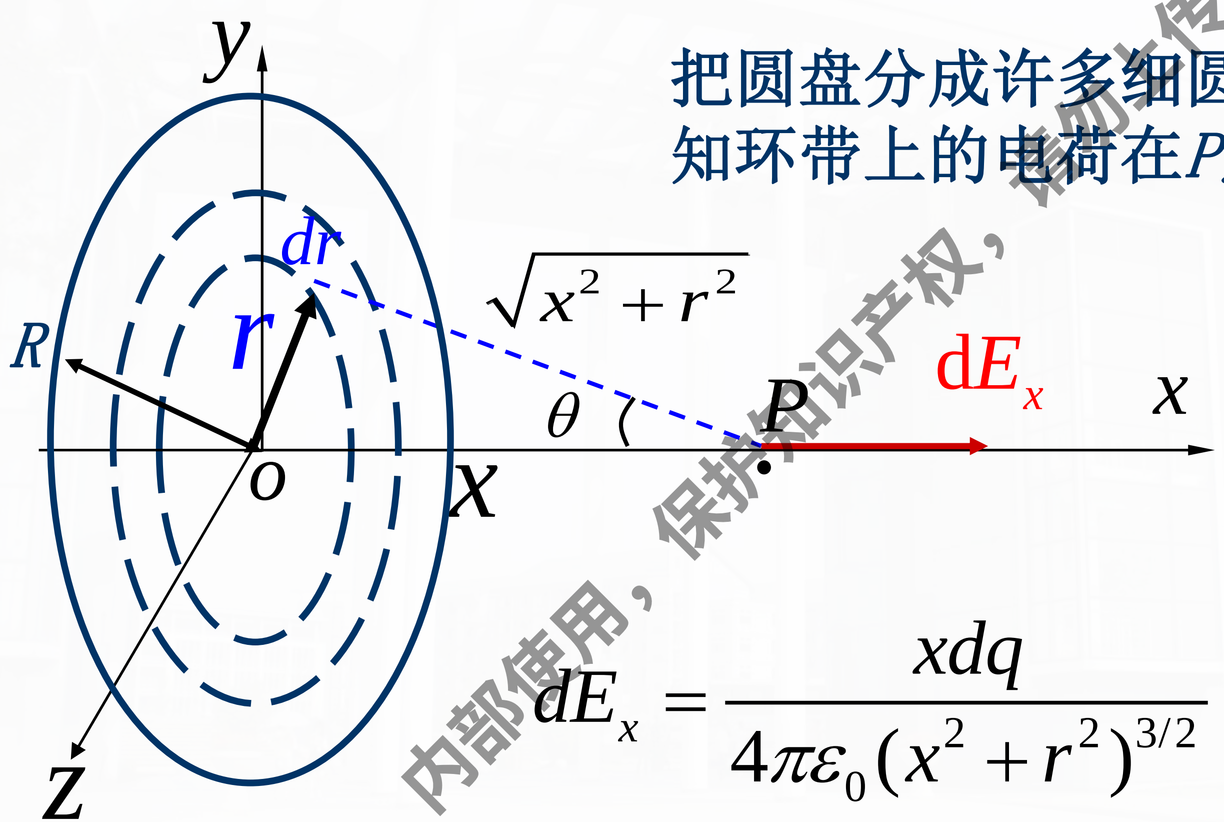
（1）$x >> R$　　$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\vec{i}$

（点电荷电场强度）

（2）$x \approx 0$，　$E_0 \approx 0$

（3）$\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 0$，　$x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$　　（最大场强位置）

例3 如图, 有一半径为R、电荷均匀分布的薄圆盘，其电荷面密度为σ. 求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度.



把圆盘分成许多细圆环带，由例2可知环带上的电荷在*P*点的场强为

$$dE_x=\frac{xdq}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{xrdr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

因此，可得均匀带电圆盘轴线上点*P*处的电场强度为

$$E=\int dE_x=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

讨论: (1)如果$x\ll R$，带电圆盘可看作无限大的均匀带电平面，

则*P*点的电场强度为$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ （均匀电场）

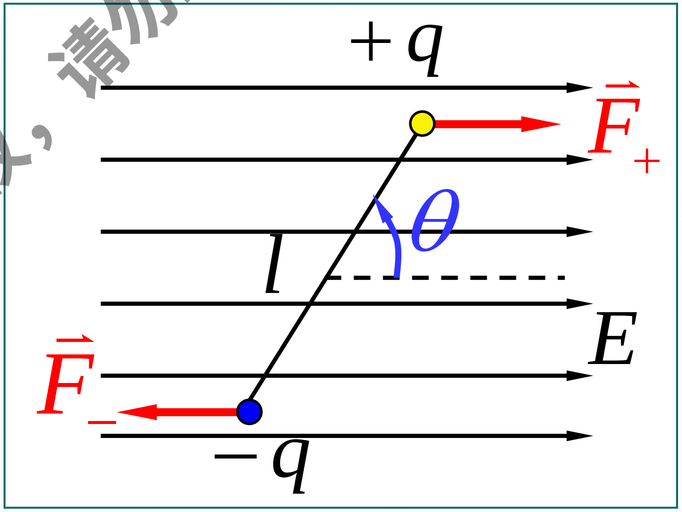
(2)如果$x\gg R$，则 $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\vec{i}$（点电荷）

例4 讨论电偶极子在电场中的受力情况 .

解： 电偶极子尺度很小, 这里认为它处在均匀电场中.

$$\vec{F} = \vec{F}_{+} + \vec{F}_{-}$$
$$= q\vec{E} - q\vec{E} = 0$$

$$M = Fl\sin\theta$$
$$= p_e E\sin\theta$$



力偶矩 $\boxed{\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}}$ 1) $\theta = \pi/2$, $\vec{M}$ 最大

2) $\theta = 0, \theta = \pi$, $\vec{M} = 0$ 平衡状态

12－3 高斯定理

高斯(K. F. Gauss)

(1777– 1855)德国数学家、物理学家、天文学家. 近代数学的奠基者之一.

高斯在学术上十分谨慎，他恪守这样的原则：“问题在思想上没有弄通之前决不动笔”．

一、电场线(electric field lines)

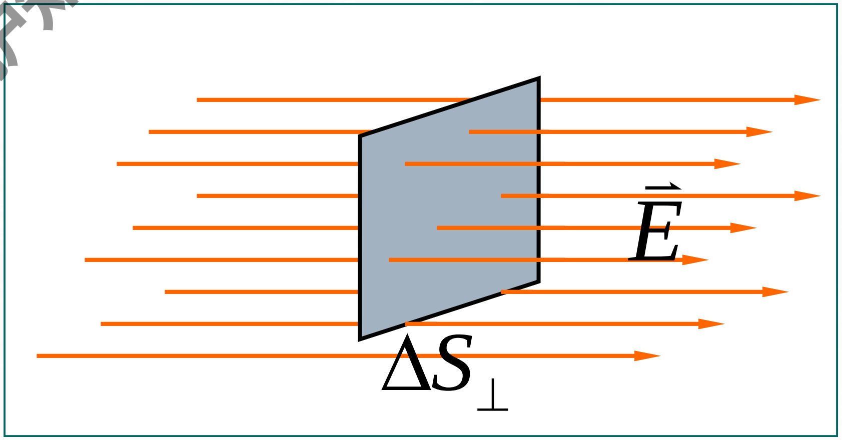
定义 人为引入的形象描述电场情况的曲线 .

规定 1) 曲线上每一点切线方向为该点电场强度方向.

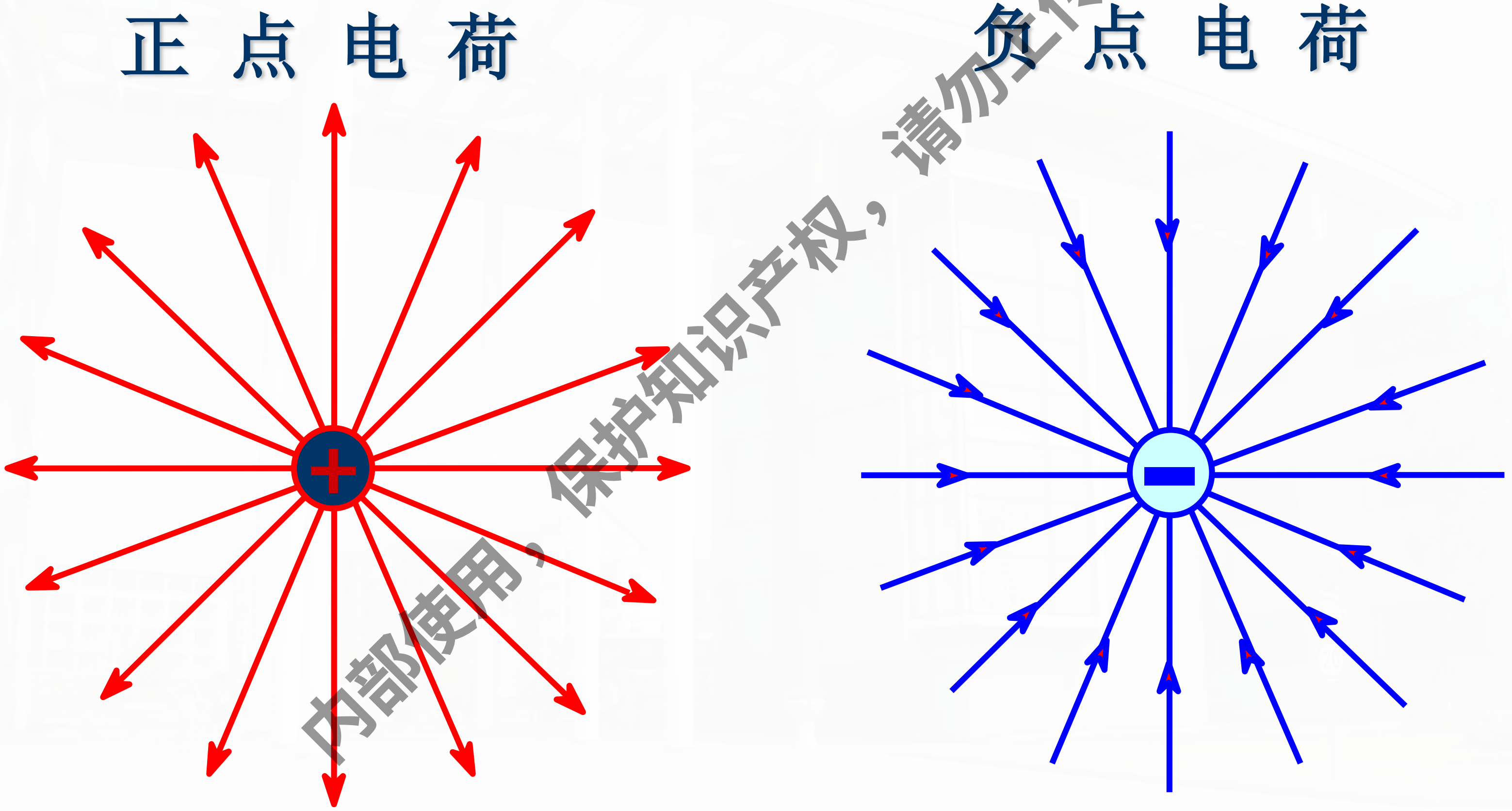
2) 在电场中任一点处，通过垂直于场强的单位面积的曲线条数（电场线密度）等于该点处场强的大小 .

电场线密度

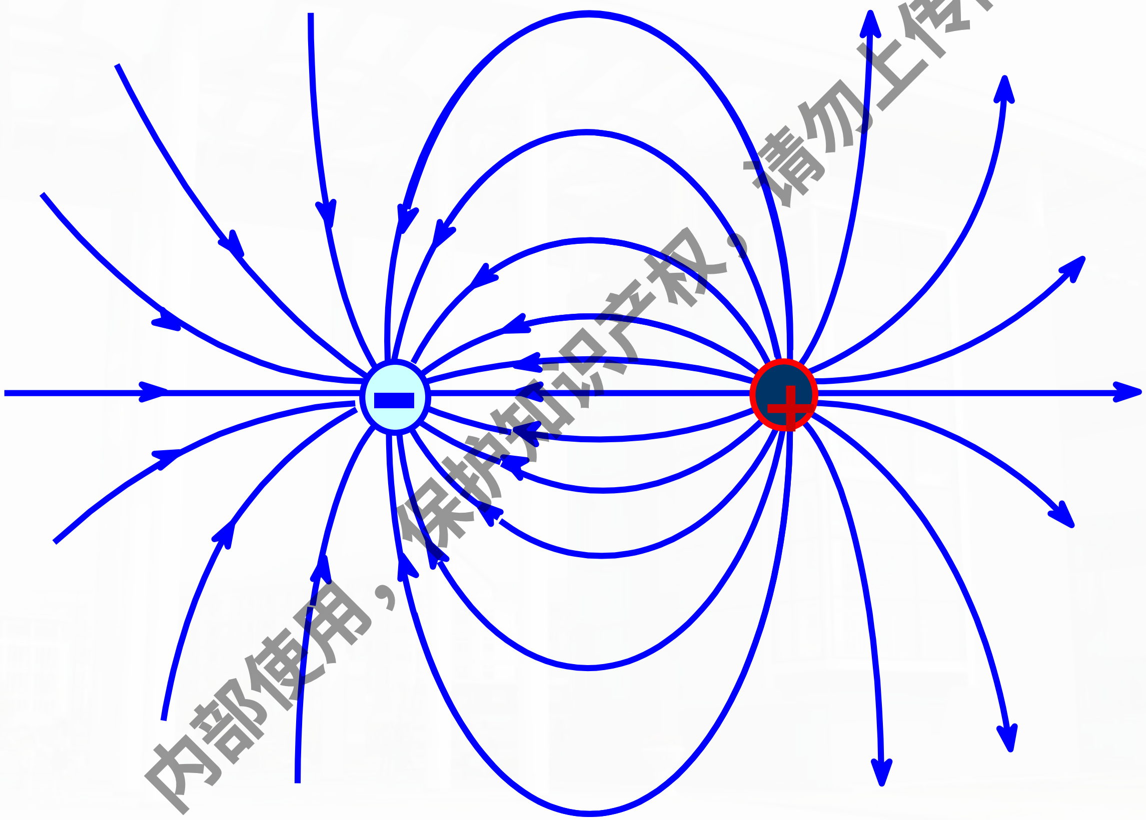
$$\boxed{\frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}} = E}$$



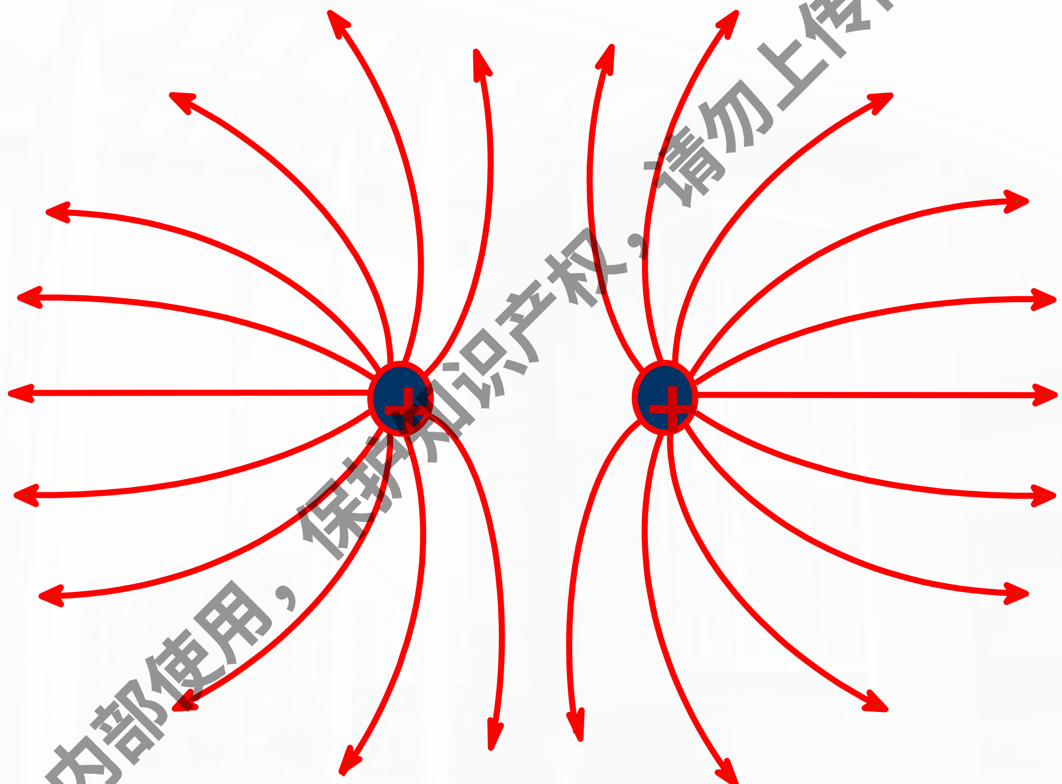
点电荷的电场线



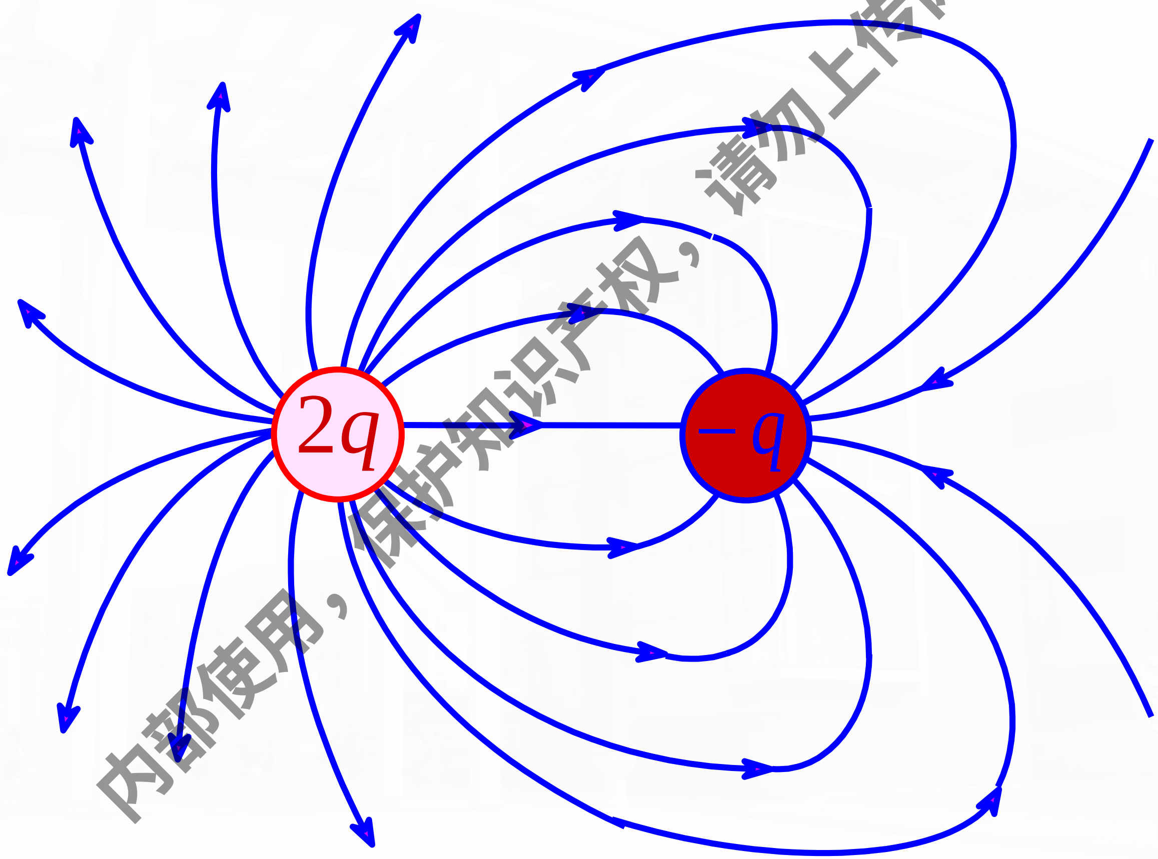
电偶极子的电场线



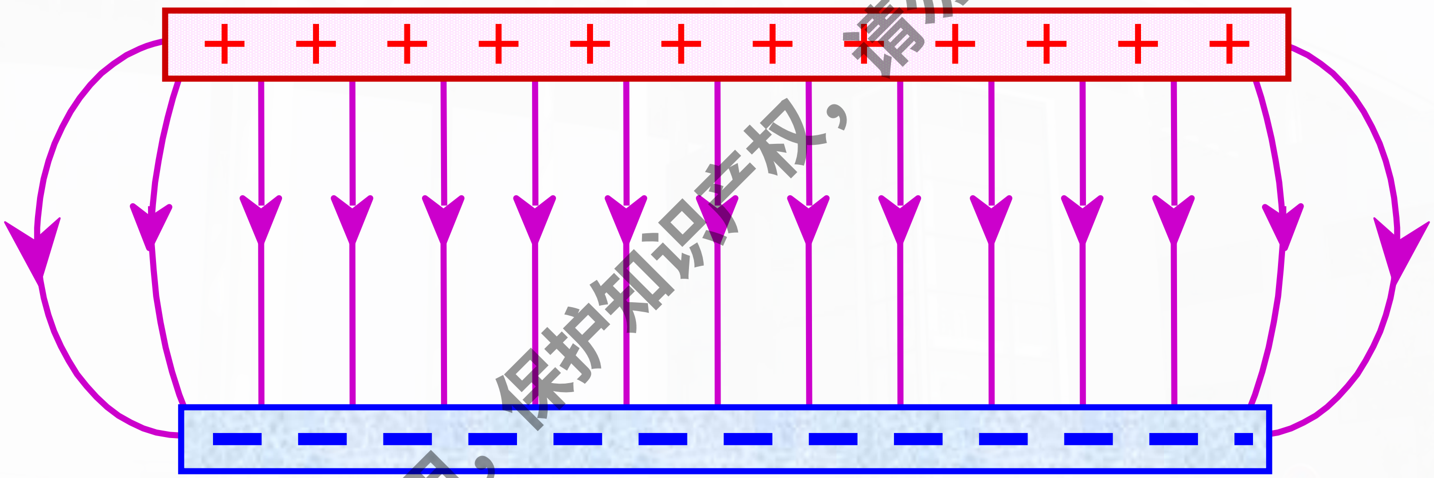
一对等量正点电荷的电场线



一对不等量异号点电荷的电场线



带电平行板电容器的电场线



电场线特点

1) 始于正电荷,止于负电荷(或来自无穷远,去向无穷远).

2) 任意两条电场线都不可能相交.

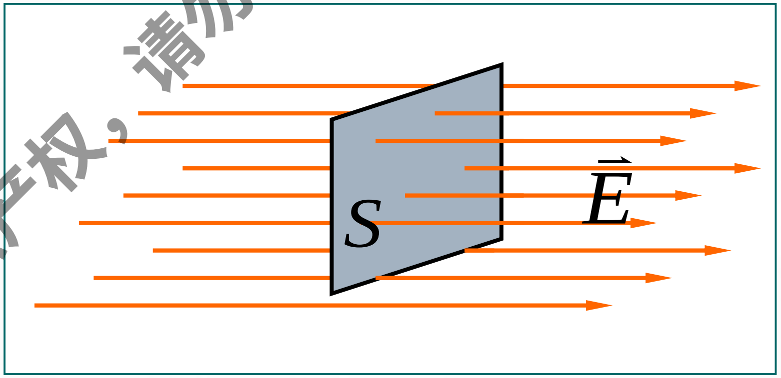
3) 静电场电场线不闭合.

4) 电场强处电场线密集, 电场弱处电场线稀疏.

二、电通量(electric flux)

通过电场中某一给定面的电场线的总条数叫做通过该面的**电通量**.

$$\boxed{\Phi_e = ES_{\perp}}$$

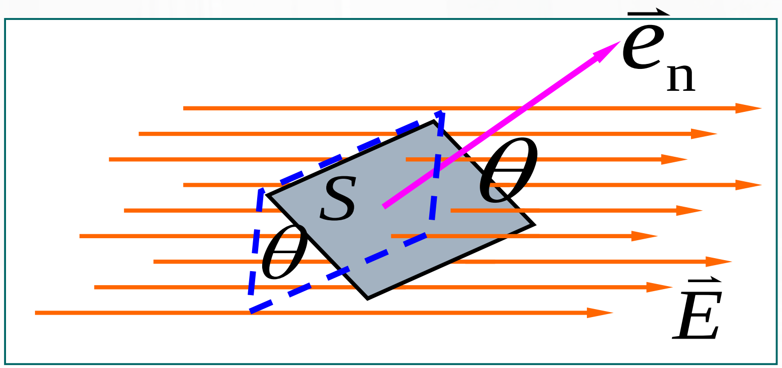


均匀电场，$\vec{E}$垂直平面

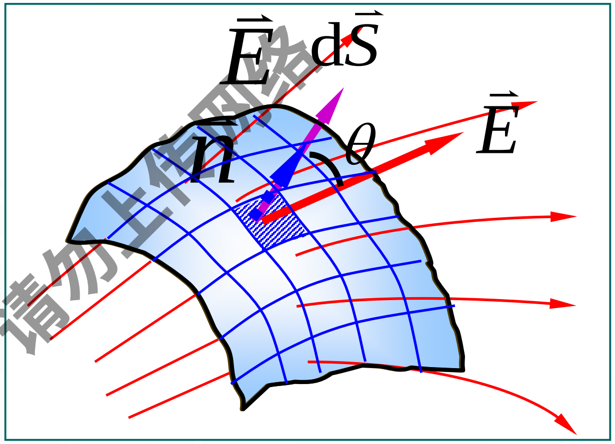
$$\Phi_{\mathrm{e}} = ES$$

均匀电场，$\vec{E}$与平面不垂直

$$\Phi_{\mathrm{e}} = ES\cos\theta$$



非均匀电场，S 为任意曲面



$$\Phi_e = \int \mathrm{d}\Phi_e = \int_S E\cos\theta \mathrm{d}S$$

$$\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

非均匀电场，S为闭合曲面，则规定外法线方向为正.

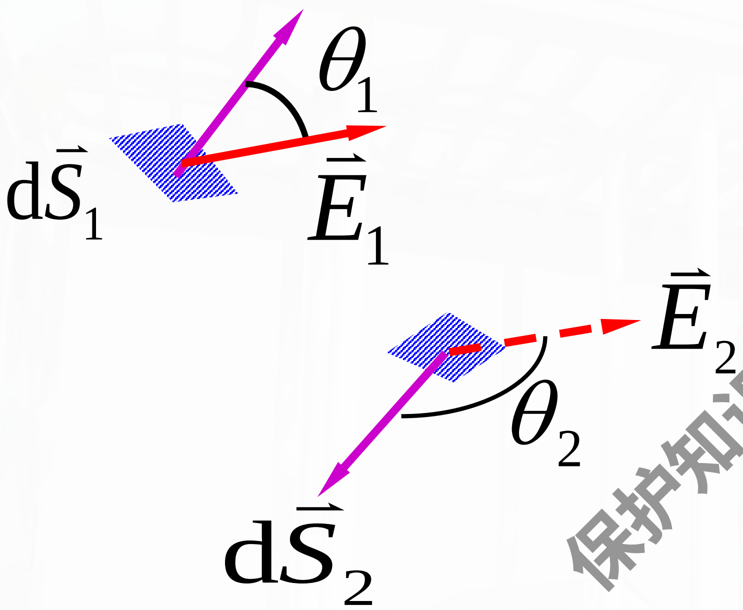
$$\boxed{\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\cdot\vec{n}}$$

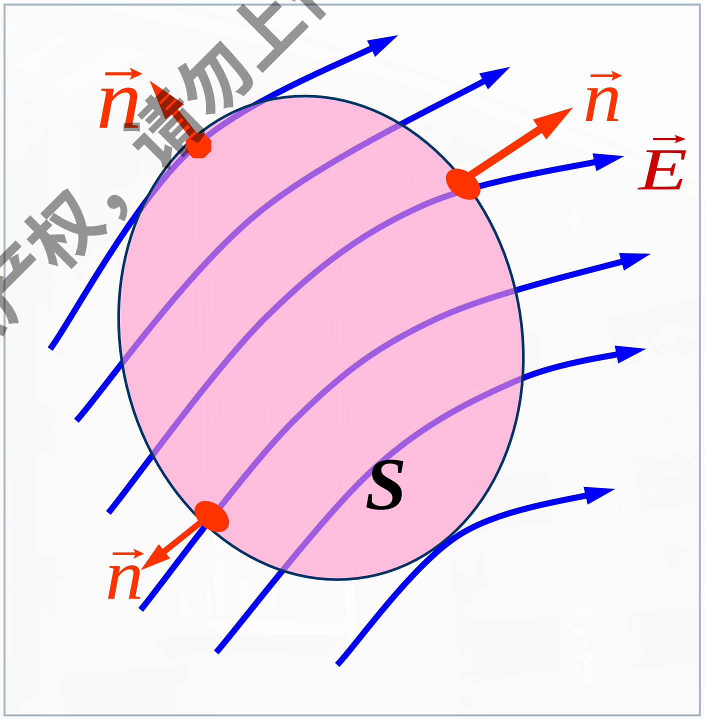
$$\theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_e > 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_e = E\cos\theta \mathrm{d}S = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\theta_2 > \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_e < 0$$

所以 电场线穿入曲面通量为负, 穿出曲面通量为正.





$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

三、高斯定理 (Gauss theorem)

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

穿过静电场中任一闭合面S的电通量$\varPhi_\mathrm{e}$，等于包围在该闭合面内所有电荷之代数和的$1/\varepsilon_0$倍, 而与闭合面外的电荷无关. 这一结论称为真空中静电场的高斯定理.

注意 1) 高斯定理反映场和源的关系, 说明静电场是有源场.

2) 高斯定理反映了库仑定律的平方反比关系.

3) 高斯定理反映了静电场的电场线不会中断或闭合.

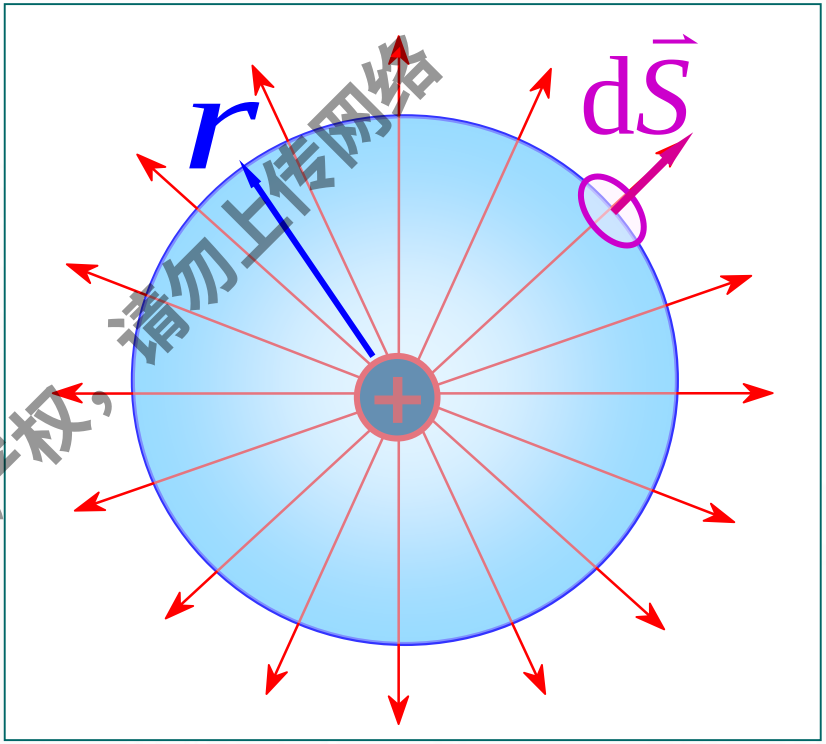
高斯定理的证明

1) 点电荷位于球面中心

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS$$

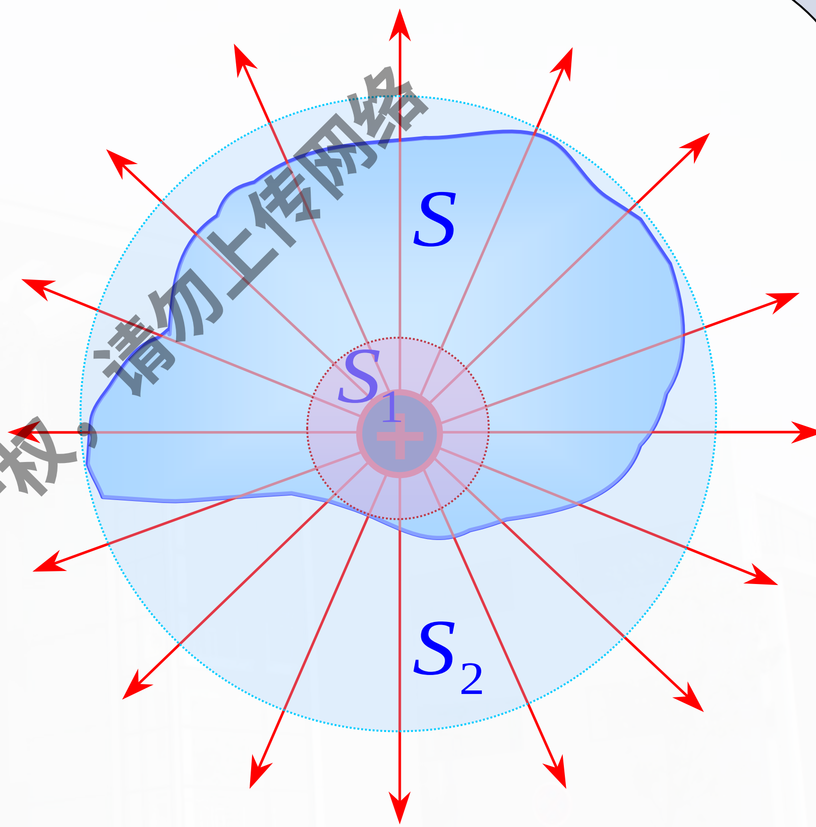
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_S dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$$



通过此球面的电通量与球面的半径无关。

2) S为包围点电荷的闭合曲面

以q所在点为中心，分别作两个同心球面S_1和S_2，并使S_1和S_2分别处于闭合曲面S的内部和外部，如图所示.

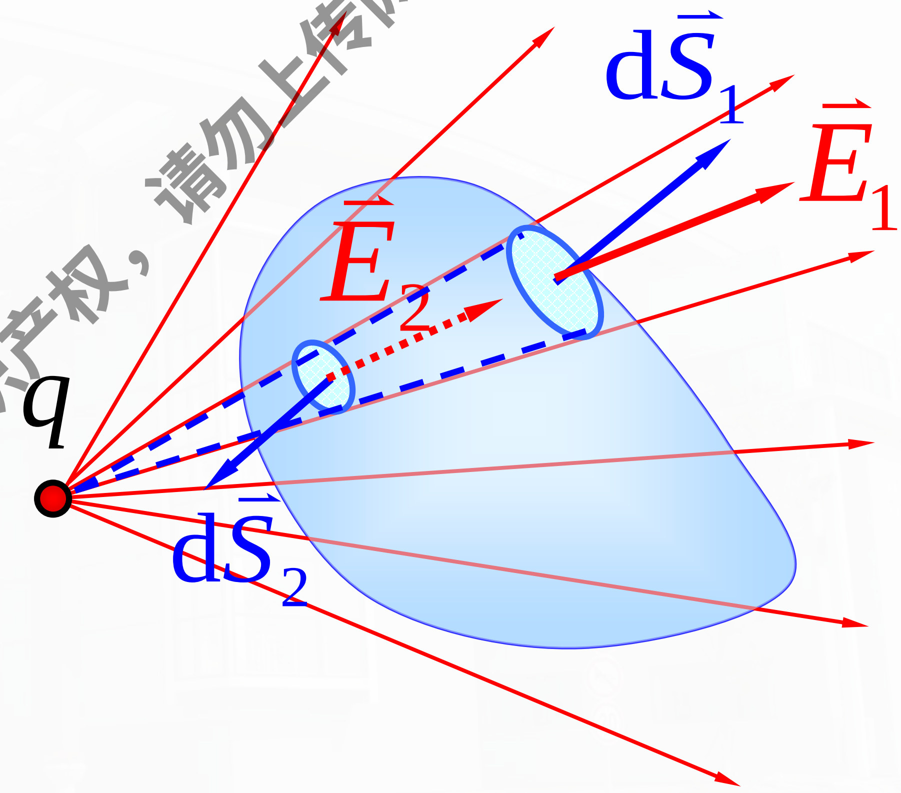


根据前面的结论，穿过球面S_1和S_2的电场线的条数都为q/ε_0，穿过球面S_1又穿过球面S_2的电场线，必定也穿过闭合曲面S. 所以穿过任意闭合曲面S的电场线条数，即电通量必然为

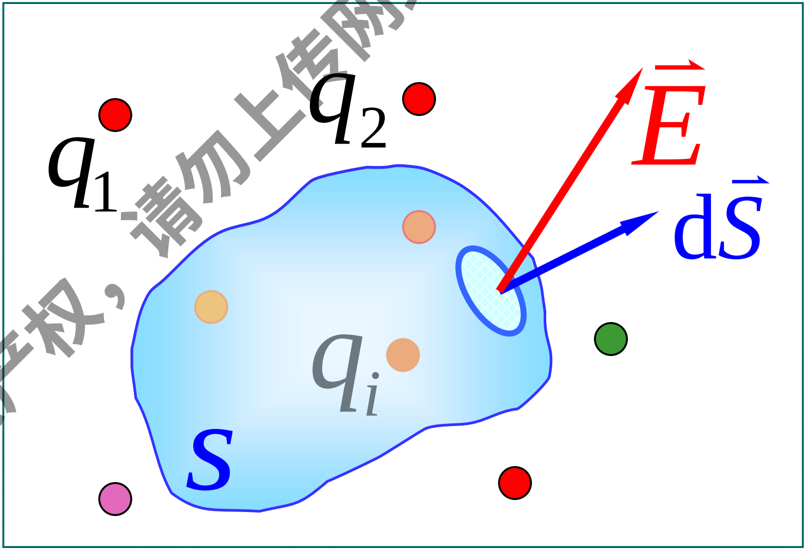
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

3) S为不包围点电荷的闭合曲面

前面的讨论中已经得出结论，电场线不在没有电荷的地方中断，而一直延伸到无限远. 所以由q发出的电场线，凡是穿入S面的，必定又从S面穿出，如图所示. 于是穿过S面的电场线净条数必定等于零，即曲面S的电通量必定等于零 .



4) *S*为包围部分点电荷的闭合曲面



根据(3)的证明，闭合曲面*S*外的*n-k*个电荷对*S*面的电通量无贡献，*S*面的电通量只决定于其内部的*k*个电荷，根据电通量的定义和电场强度的叠加原理，通过闭合曲面*S*的电通量可以表示为

$$\therefore \Phi_e = \sum_k \oint_S \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_k q_i$$

5) S为包围任意形状的带电体的闭合曲面

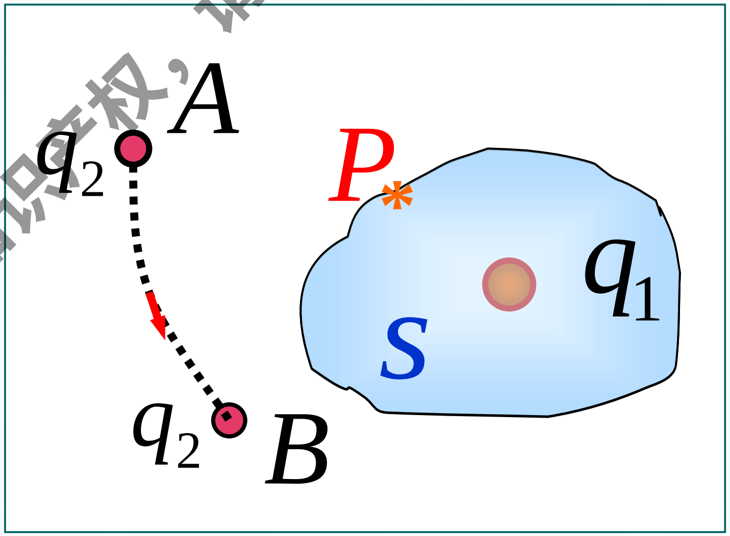
把带电体划分成很多很小的体元dV, 体元所带的电荷$dq=\rho dV$可看作点电荷, 与(3)的结果一致, 这时S的电通量可表示为

$$\therefore \Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

总结

1) 高斯定理反映电通量与闭合曲面内电荷的量值关系, 通常并非是指闭合曲面上场强闭合曲面内电荷的关系.
2) 高斯面上的电场强度为所有内外电荷的总电场强度.
3) 仅高斯面内的电荷对高斯面的电场强度通量有贡献.

思考 点电荷如图$A\rightarrow B$移动，那么P点电场强度是否变化？穿过高斯面S的电通量有否变化？为什么？



高斯定理的应用

*用高斯定理求解的静电场必须具有一定的对称性

常见类型：场源电荷分布球对称性, 轴对称性和面对称性.

根据对称性选择恰当的高斯面, 可以使 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 中的 $\vec{E}$ 能够以标量形式提到积分号外，从而简便地求出 $\vec{E}$ 分布.

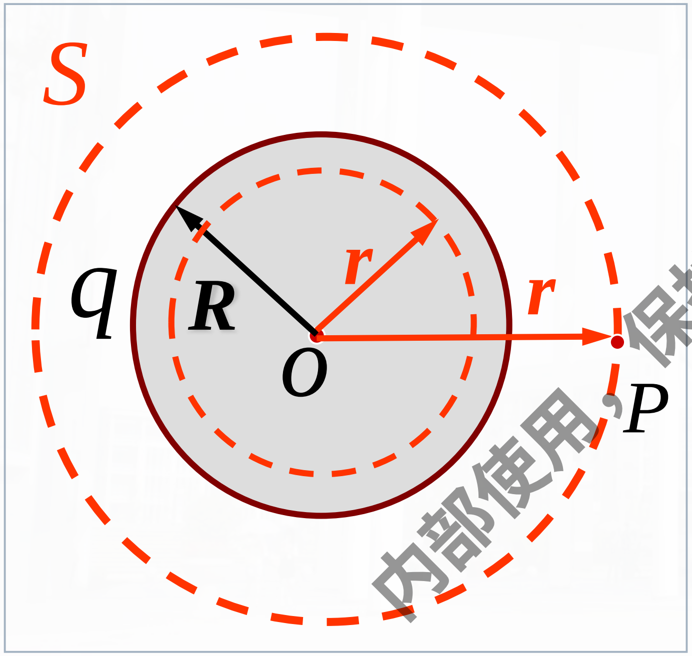
步骤　1) 对称性分析;

2) 根据对称性选择合适的高斯面;

3) 应用高斯定理计算.

例1 如图，电荷均匀分布在一半径为 R 的球形区域内，体电荷密度为 ρ . 求空间各点的场强.

解: (1)先求球外空间任意一点 P 的电场强度，如图，取半径为 r $(r>=R)$ 的球面为高斯面，则根据对称性，球面上各点的电场强度大小相等，方向都沿球面在该点的法线方向. 由高斯定理



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_{内}$$

$$\because \sum q_{内} = q \quad \therefore E_{外} = q/4\pi\varepsilon_0 r^2 \quad (r \geq R)$$

求球内空间任意一点*P* 的电场强度, 取半径为*r* (*r*<*R*)的球面为高斯面, 同理可得:

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_{内}$$

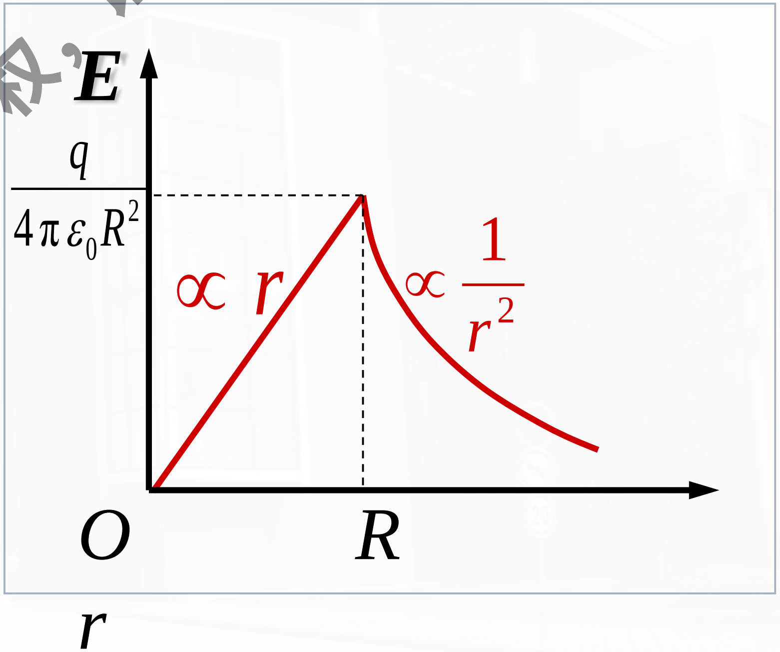
$$\because \sum q_{内} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \therefore E_{内} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (r \leq R)$$

可知, 球体内区域 $E \propto r$

球体外区域　与电量集中于球心时的场强分布等效

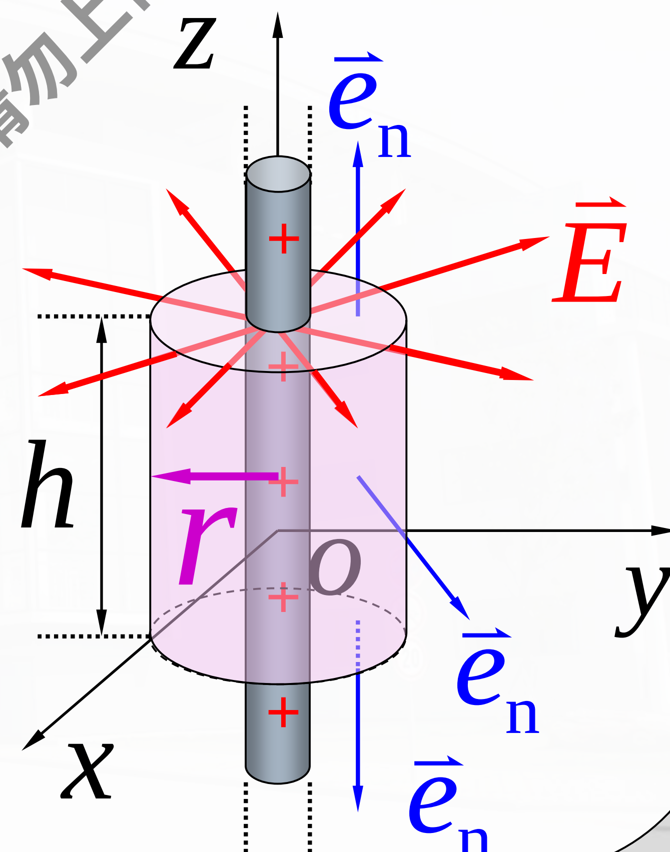
$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r\le R)\\[2ex] \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r\ge R)\end{cases}$$

坐标图给出了均匀带电球体在空间各点产生的电场强度随到球心距离的变化情形.



例2 一无限长均匀带电细棒，其线电荷密度为λ．求距细棒为a 处的电场强度.

解: (1) 轴对称, 选择如图所示同心圆柱面为高斯面, 则



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(上)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{s(下)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{s(侧)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

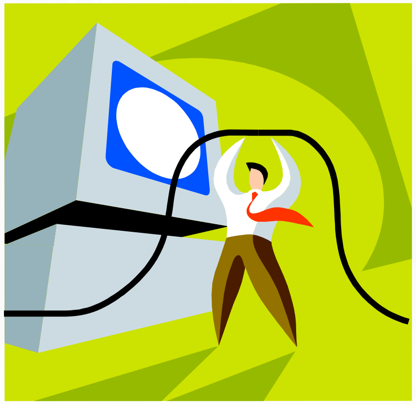
$$= \int_{s(上)} E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S + \int_{s(下)} E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S$$

$$+ \int_{s(侧)} E\cos 0\,\mathrm{d}S$$

$$= E \cdot 2\pi a l = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

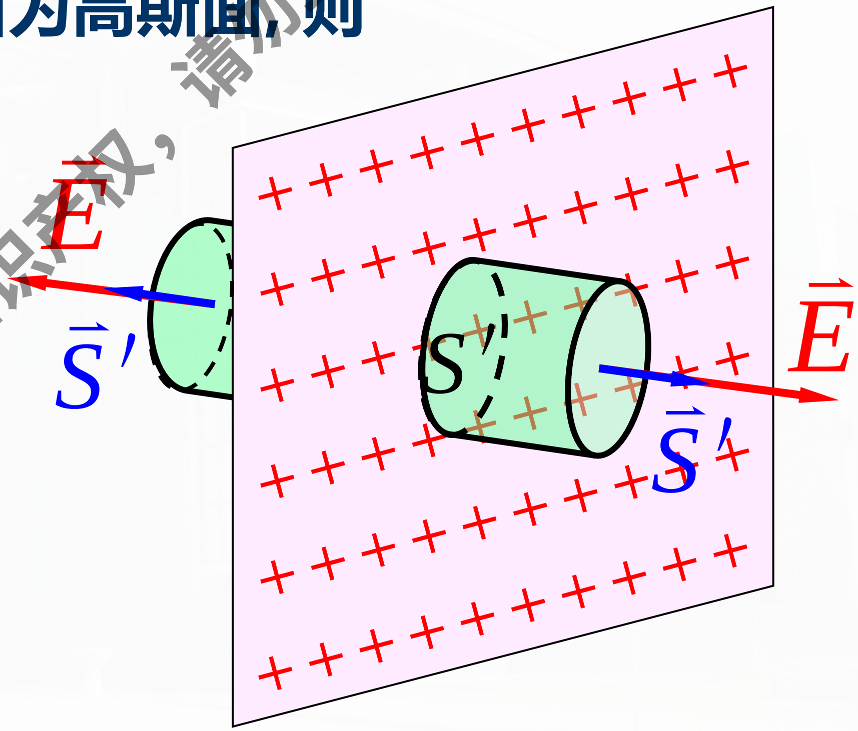
有此可求得,与细棒相距a处的电场强度的大小为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$ **方向如图所示**



例3 求无限大均匀带电平面的电场, 电荷面密度σ.

解: (1) 对称性分析,离带电平面距离相等的场点彼此等价，选择如图所示圆柱面为高斯面,则



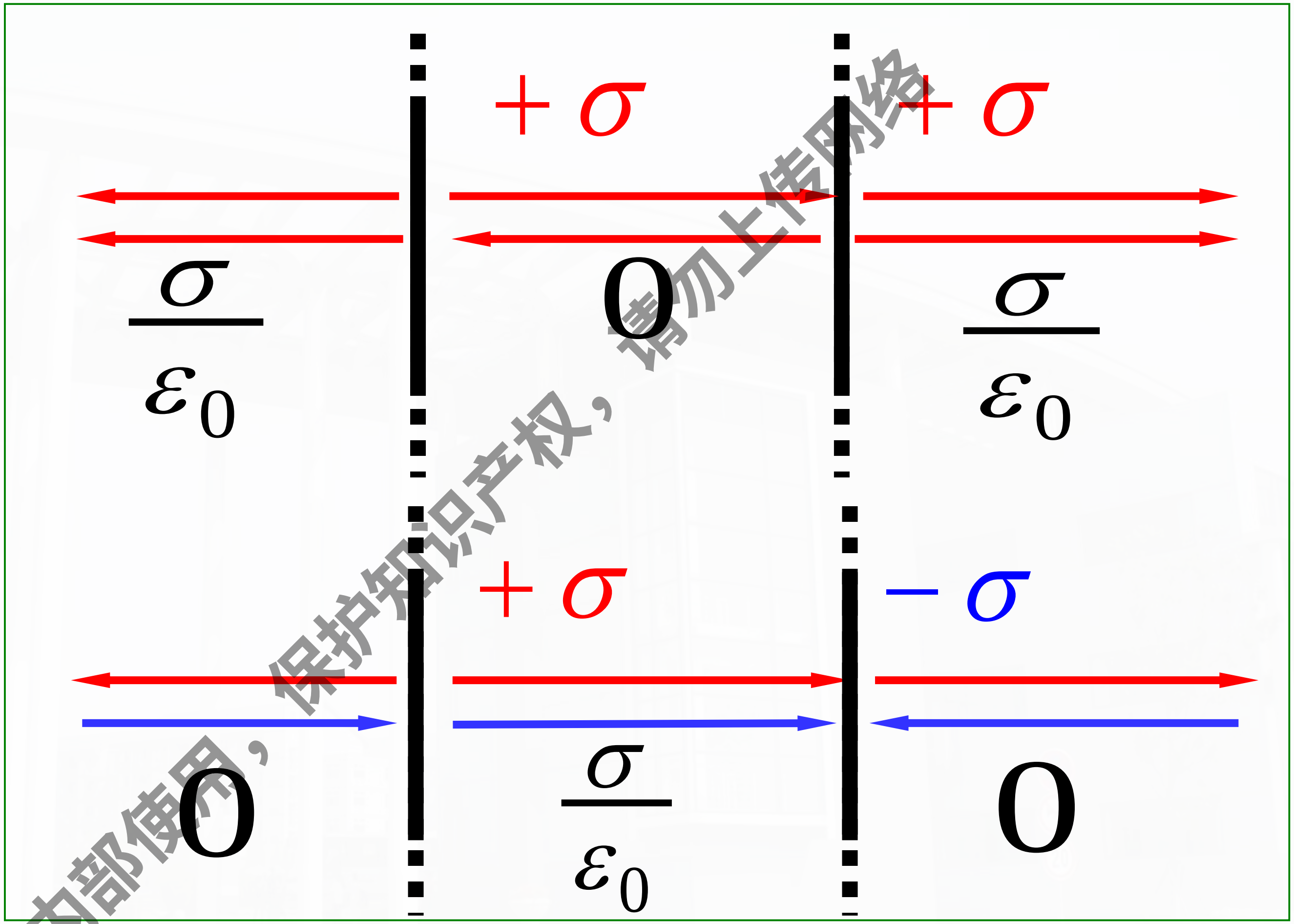
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{s(左)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$+ \int_{s(右)} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{s(侧)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= 2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

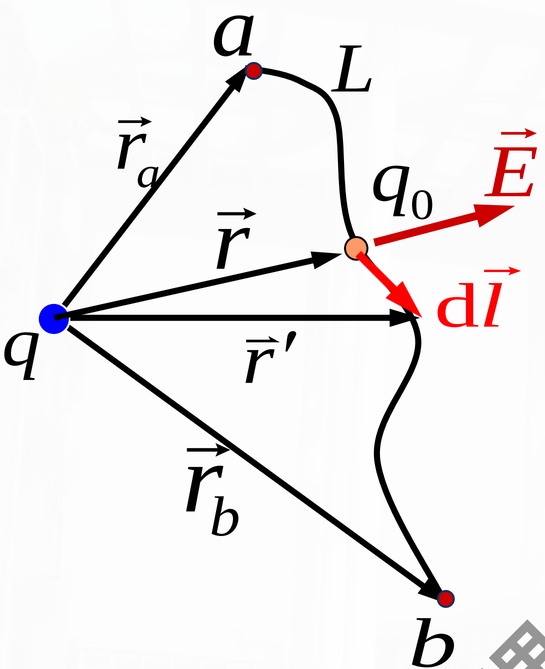
$\therefore E = \sigma/2\varepsilon_0$ **是匀强电场**

无限大带电平面的电场叠加问题



12-4 静电场的环路定理 电势

一、电场力的功 静电场的环路定理



如图所示，当试探电荷q_0在静电场中移动一段有限的路程ab时，静电场力对电荷所作的功为

$$A=\int_l \mathrm{d}A=q_0\int_l \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

场源电荷是正电荷q，则

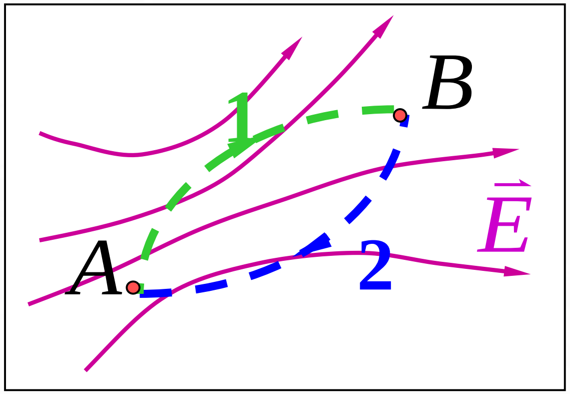
$$A_{ab}=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_{r_a}^{r_b}\frac{q_0 q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

可以看出，在点电荷产生的电场中，静电场力所作的功只与始点和终点的位置以及试探电荷的量值有关，而与试探电荷在电场中所经历的路径无关. 此结论可通过叠加原理推广到任意带电体产生的电场.

结论 **静电力作功与路径无关.静电力是保守力,静电场是保守场.**

试探电荷沿任意闭合路径运行一周，则静电场力作功为

$$A_l = \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q_0 \int_{A1B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + q_0 \int_{B2A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



静电场力作功与路径无关, 所以

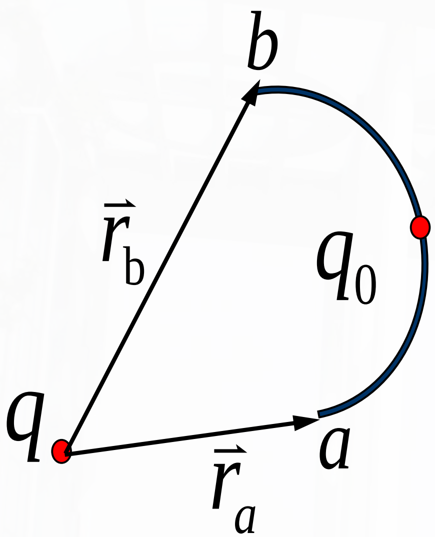
$$q_0\int_{A1B}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_{A2B}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-q_0\int_{B2A}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore\ A_l=\oint\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_{A1B}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}+q_0\int_{B2A}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

$$\therefore\ \oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

静电场的环路定理，在静电场中, 电场强度沿任一闭合路径的线积分恒为零. 这是静电场保守性的另一种表述, 说明静电场是有势场.

1.静电势能



仿照重力场, 定义 W_a, W_b 分别为试探电荷q_0 在a, b 两点的静电能, 则

$$W_a - W_b = -(W_b - W_a) = A_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

场源电荷为有限带电体, 通常就取无限远处作为静电能的零点, 即

$$W_b = W_\infty = 0$$

则此时q_0在a点的静电能为

$$W_a = A_{a\infty} = q_0 \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

静电能属于系统, W_a为静电场和q_0共同拥有.

2.电势 (electric potential)

W_a / q_0：取决于电场分布. 场点位置和零势点选取与场中检验电荷 q_0无关. 可用以描述静电场自身的特性.

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

无限远处为电势零点

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{b} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

b点为电势零点(实际中常选地球)

静电场中某点**电势**等于单位正电荷在该点具有的电势能，或将单位正电荷由该点移至电势零点过程中静电力所作的功.

SI制中, 电势的单位 /库仑(J·C^{-1})，也称为伏特(V)

静电场中某点的电势具有相对意义。要确定某点的电势，必须选择一个电势零点。

3. 电势差(electric potential difference)（电压）

$$U_{ab}=U_a-U_b=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}-\int_b^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_a^{b}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

点电荷q_0在静电场中a沿任意路径移至b过程中静电力作的功

$$A_{ab}=q_0(U_a-U_b)=q_0U_{ab}$$

注意 1. U 为空间标量函数.

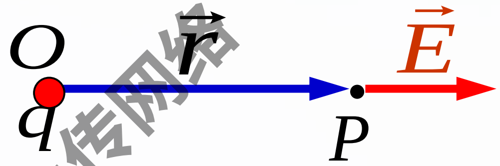
2. U 具有相对意义, 其值与电势零点选取有关, 但U_{ab}与电势零点选取无关.

3.电势遵从叠加原理 (电势零点相同).

4.电势的计算

1) 点电荷电场中的电势

空间有一点电荷 q，求与它相距 r 的点P 的电势 .

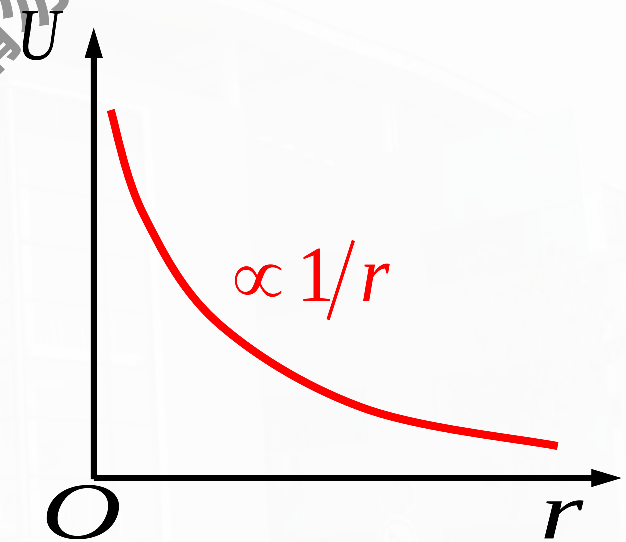


$$U=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

沿OP 的延长线积分, 得

$$U=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{\infty}\frac{q\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$=\int_r^{\infty}\frac{q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



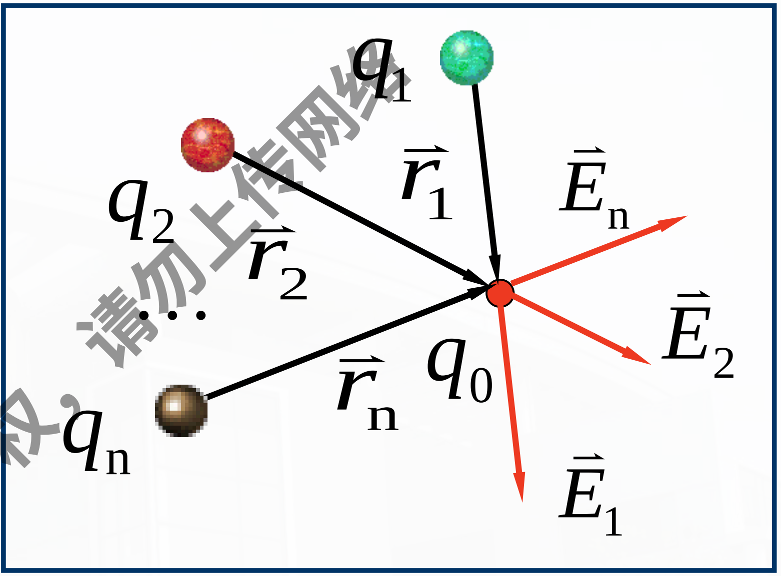
2) 点电荷系电场中的电势

$$U=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_P^{\infty}(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_P^{\infty}\vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_P^{\infty}\vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$+\cdots\int_P^{\infty}\vec{E}_n\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_{i=1}^{n}\int_P^{\infty}\vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_{i=1}^{n}U_i$$



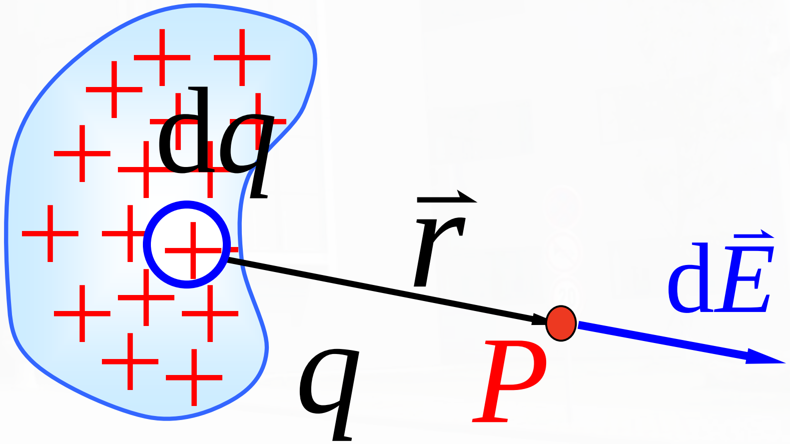
电势的叠加原理 多个点电荷产生的电场中, 任意点的电势等于各个点电荷在该点产生的电势的代数和.

$$U_i=\int_P^{\infty}\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

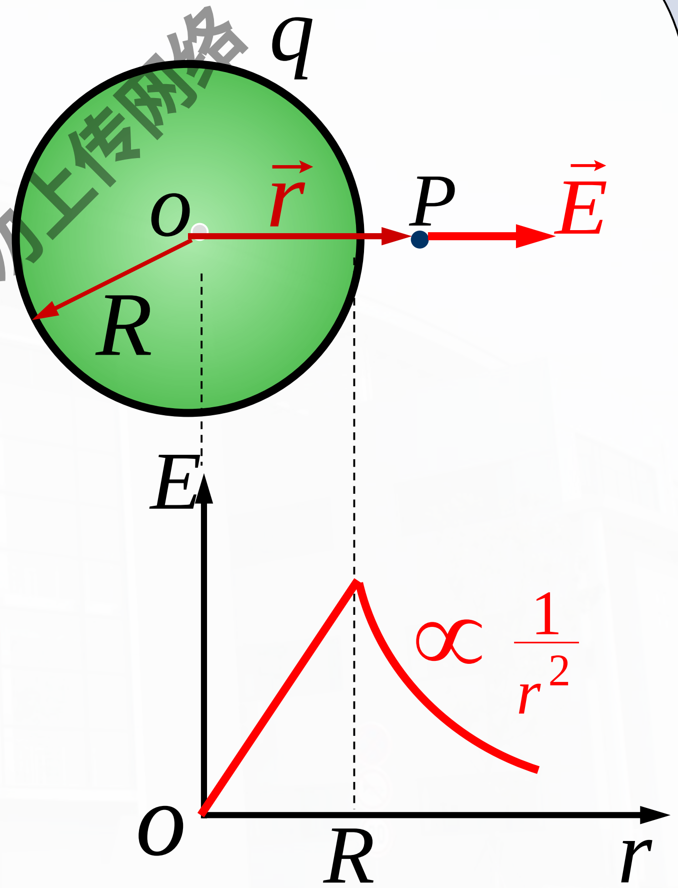
$$\therefore U_P=\sum_{i=1}^{n}U_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

3) 任意带电体的电场中的电势

$$\therefore U_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r}$$



例1 一半径为R的均匀带电球体，电荷为q，求球外，球面及球内各点的电势.



解: 由高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

知

$$\vec{E}_1 = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad r < R$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad r > R$$

$\boxed{r<R}$

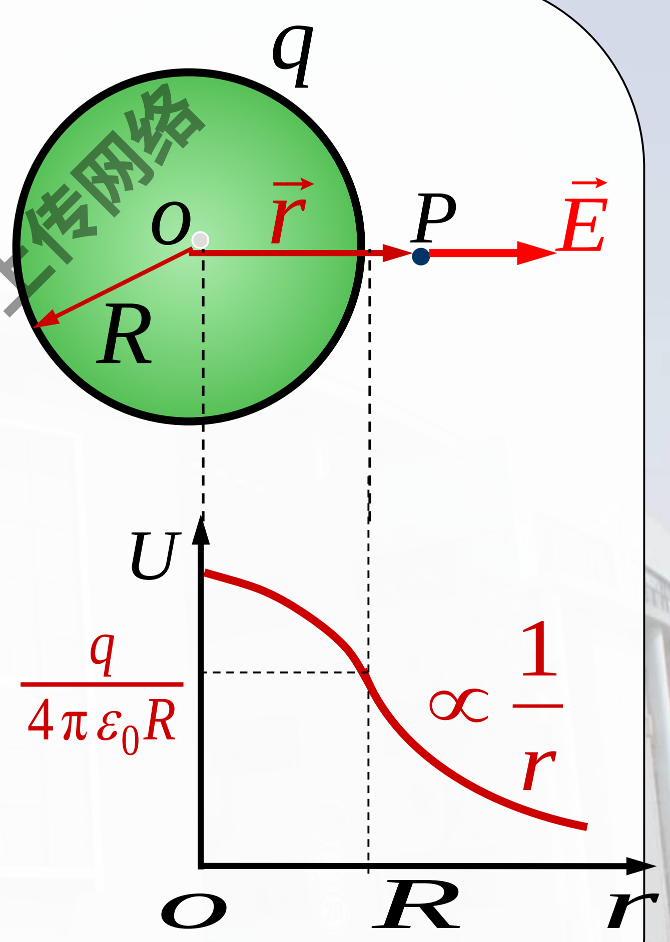
$$U_1=\int_r^R \vec{E}_1\cdot d\vec{r}+\int_R^\infty \vec{E}_2\cdot d\vec{r}$$
$$=\int_r^R \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dr+\int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$
$$=\frac{q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$\boxed{r=R}$

$$U_2=\int_R^\infty \vec{E}_2\cdot d\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$\boxed{r>R}$

$$U_3=\int_r^\infty \vec{E}_2\cdot d\vec{r}=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



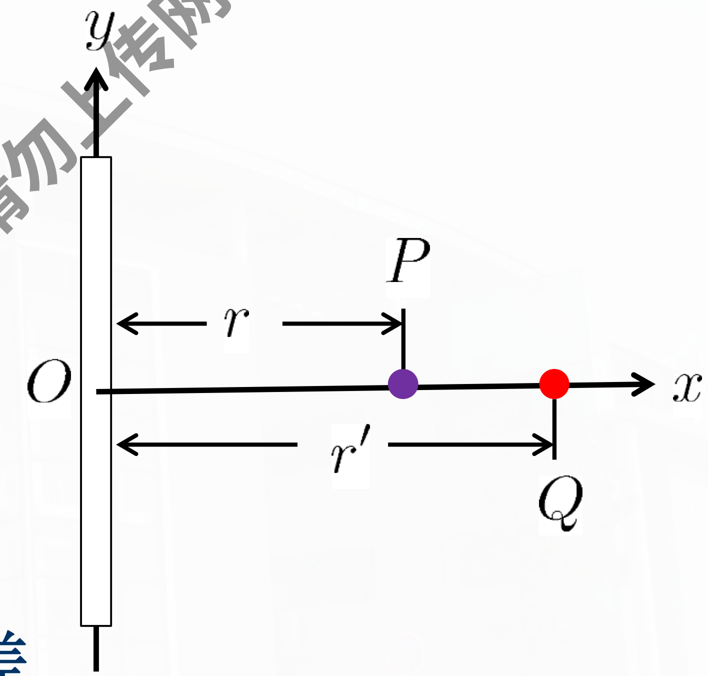
例2 计算无限长均匀带电直线的电势分布。

解: **令无限长直线的电荷线密度为** λ .

计算 x **轴上距直线为** r **的任一点** P**处的电势。**

已知无限长均匀带电直线在 x 轴上的场强为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$ 方向沿 x 轴



于是，可算得 P 点与参考点 Q 的电势差

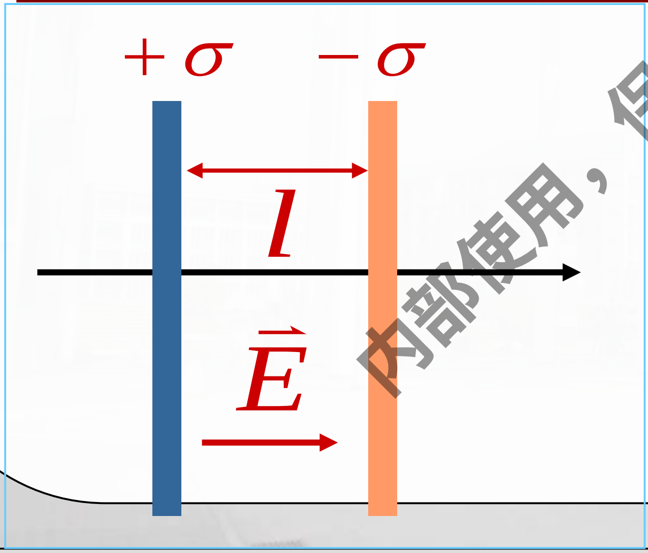
$$U_p - U_Q = \int_r^{r'} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_r^{r'} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r'}{r}$$

由于$\ln 1 = 0$，所以选离直线为 $r' = 1\,\mathrm{m}$ 处作为电势零点，则可得 P 点的电势为

$$U_p = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$$

由上式可知，在$r > 1\,\mathrm{m}$处，U_p为负值；在$r < 1\,\mathrm{m}$处，U_p为正值。

例3 两块无限大平行带电金属板，电荷面密度分别为 $\pm\sigma$ 距离为l，求两板之间的电势差．



解：由前面得到的结论

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

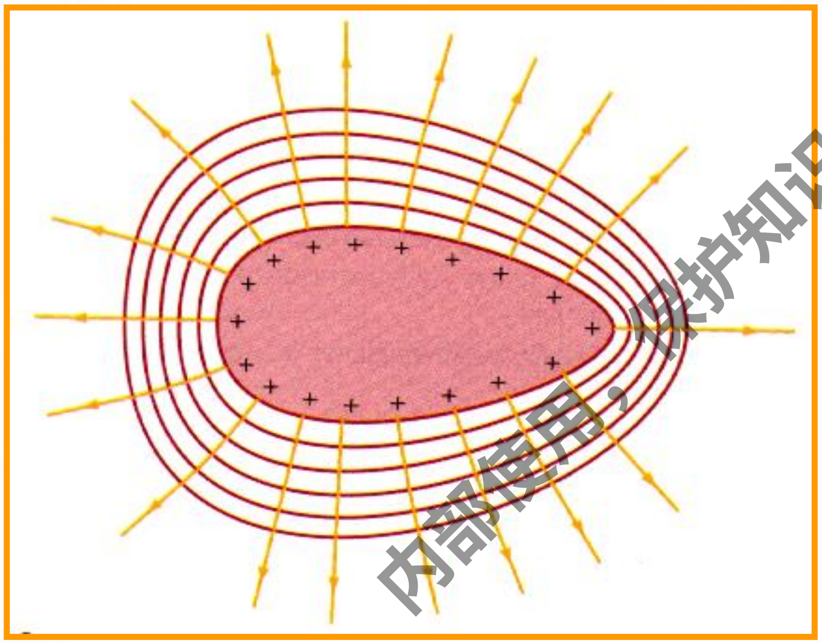
电势差为

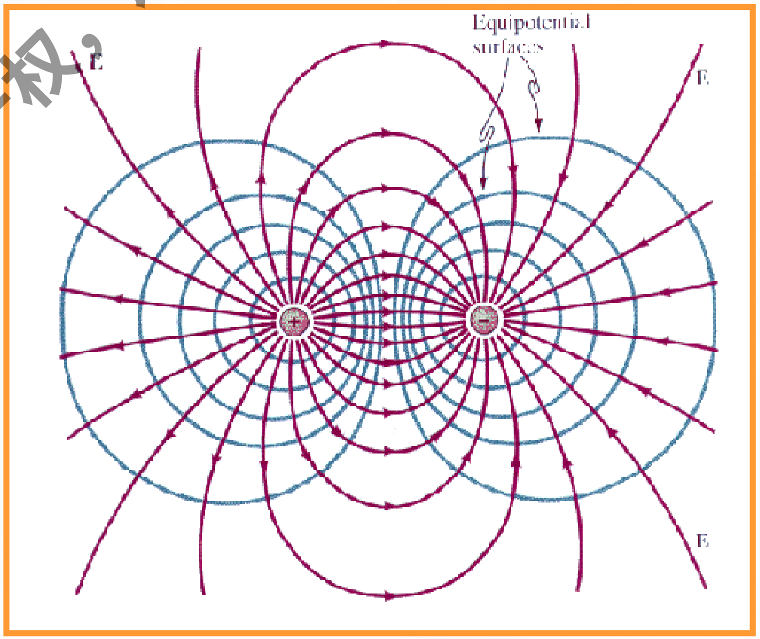
$$U = \int_0^l E\mathrm{d}l = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}l$$

12－5 电场强度与电势梯度的关系

一 等势面 (equipotential surface)

空间电势相等的点连接起来所形成的曲面称为**等势面**. 为了描述空间电势的分布, 规定任意**两相邻等势面间的电势差相等**.





1) 等势面与电场线处处正交, 电荷沿等势面移动, 静电力作功为零.

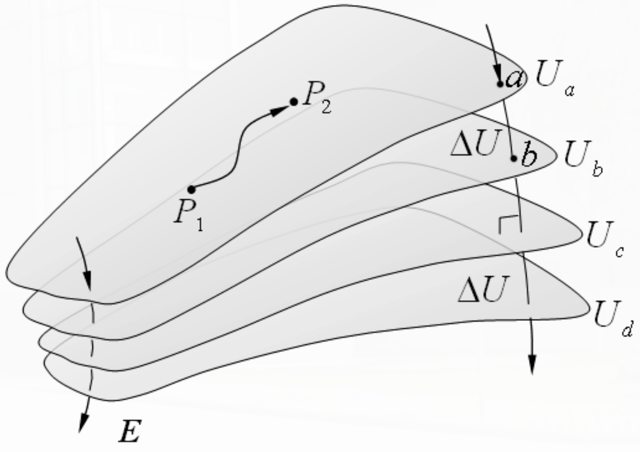
$$\mathrm{d}A = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0E\mathrm{d}l\cos\theta = q_0\mathrm{d}U = 0$$ ➡ 正交!

2) 等势面与电场线密集处场强的量值大, 稀疏处场强的量值小.

3) 电场线指向电势降落的方向.

$$A_{ab} = q_0(U_a - U_b) = q_0El > 0$$

➡ $U_a > U_b$



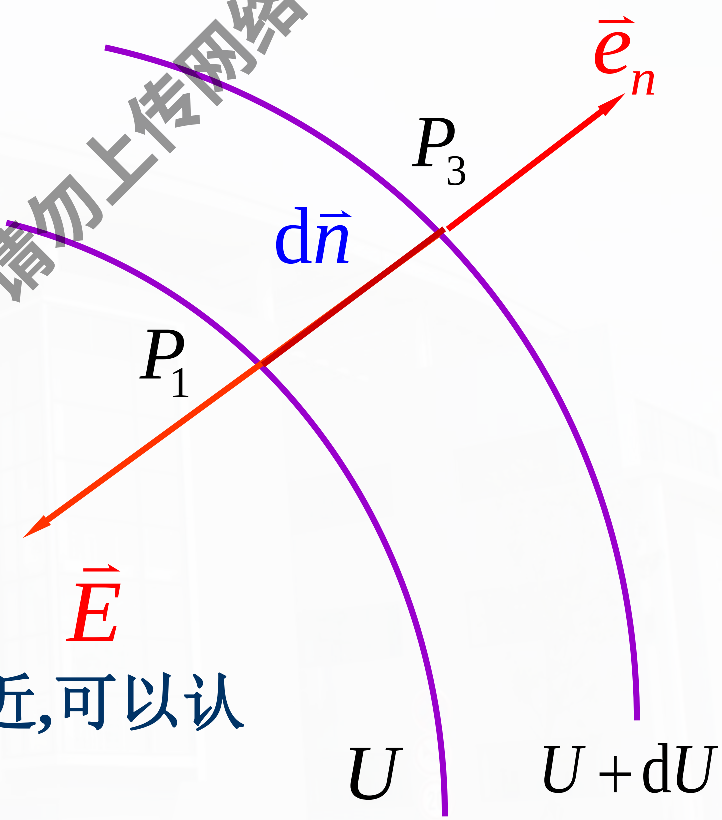
二、场强与电势的微分关系

如图，电势分别为U和$U+\mathrm{d}U$的邻近等势面，$\vec{e}_n$为等势面单位法向且指向电势升高的方向.

P_1和P_3两点间的电势差为

$$U-(U+\mathrm{d}U)=\int_{P1}^{P3}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{n}$$

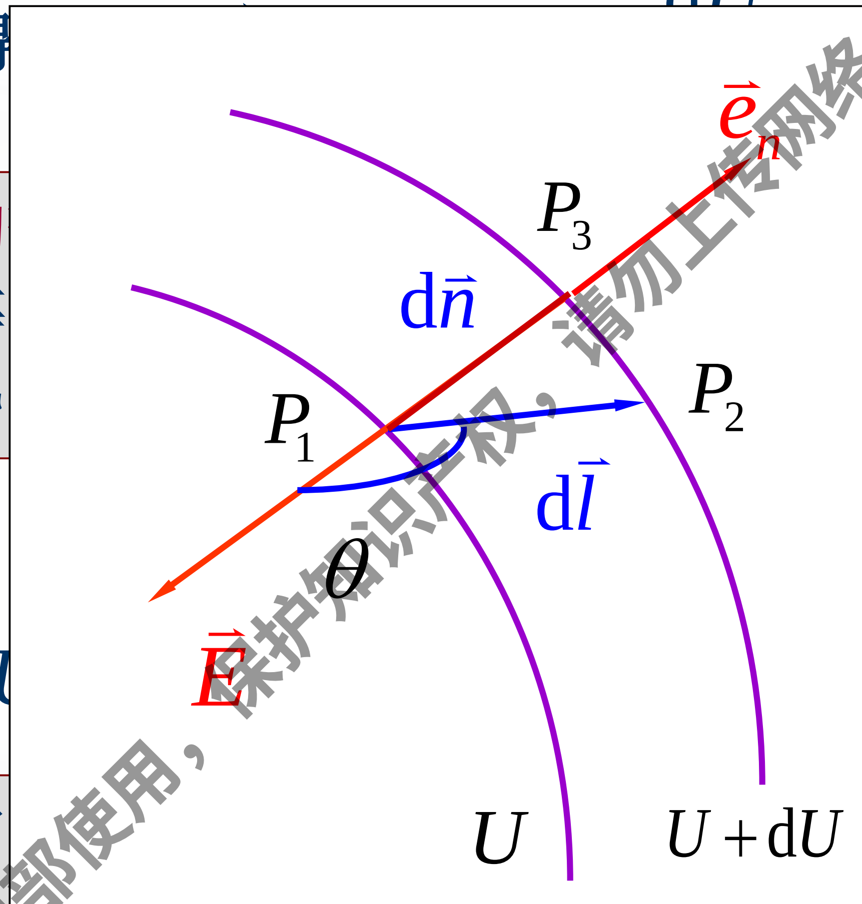
$$=\int_{P1}^{P3}E_n\vec{e}_n\cdot\mathrm{d}\vec{n}$$



沿 $\vec{e}_n$ 方向积分，考虑 P_1, P_3 很靠近，可以认为连线上各点场强相同，可得到

$$-\mathrm{d}U=\int_{P1}^{P3}E_n\vec{e}_n\cdot\mathrm{d}\vec{n}=E_n\mathrm{d}n \quad 或 \quad E_n=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}$$

进一步可得 … $\mathrm{d}U$



电势与场强的 … 强度等于这一
点的电势沿等 … 值. 负号表示场
强方向沿电势 …

再考虑 P_1, P_2 …

$U-(U+\mathrm{d}U$ … $= E_l \mathrm{d}l$

电场中某点的 …
于这一点的电势沿该方向的方向导数的负值.

$$E_l = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}$$

电势梯度矢量

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{e}_n \text{ 记为 } \mathrm{grad}\,U \text{ 或 } \nabla U$$

电势梯度的大小等于电势在某点的**最大空间变化率(最大方向导数)**, 方向沿等势面法向, 指向电势增加的方向.

$$\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\,U = -\nabla U}$$

场强的分量式

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

场强的矢量式

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k})$$

∇U 的单位 $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$，场强也常用这个单位

$$1\mathrm{V \cdot m^{-1}} = 1\mathrm{N \cdot C^{-1}}$$

现在有三种求 $\vec{E}$ 的方法

1) 利用电场强度叠加原理

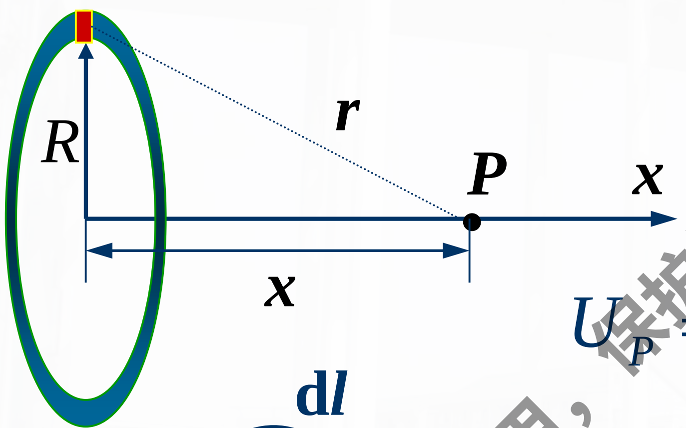
2) 利用高斯定理

3) 利用电势与电场强度的关系

思考
适用的条件

例 如图，一半径为 R 的的细圆环均匀地带有电荷 q，求垂直于环面的轴上一点 P 的电势和电场强度.

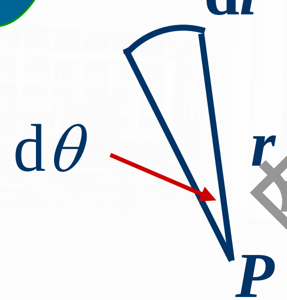
解: 取如图所示电荷元,则



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{q}{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$ 得到

$$U_P = \int_l \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R \mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

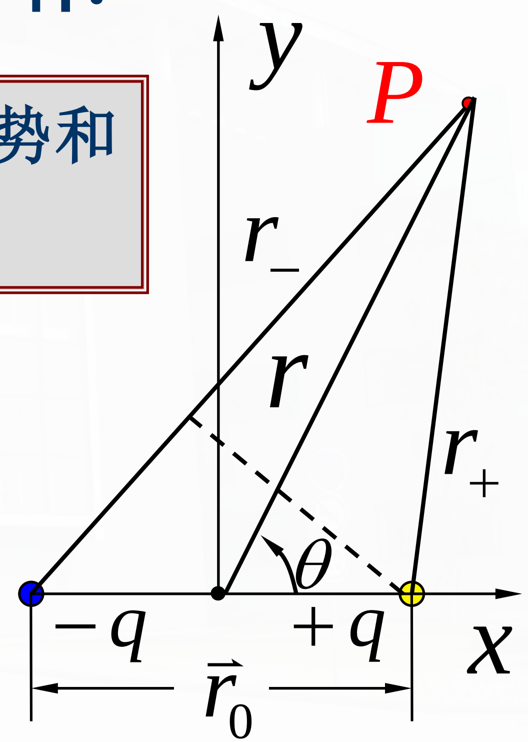


$$= \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$\vec{E}=E_x\vec{i}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\vec{i}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\vec{i}$$

与前面用叠加原理得到的结果完全一样.

例 求电偶极子电场中任意一点P的电势和电场强度.



解: 如图,正负电荷在P点产生的电势为

$$U_+=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+},\quad U_-=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-}$$

则电偶极子在P点产生的电势为

$$U=U_{+}+U_{-}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_{-}-r_{+}}{r_{+}r_{-}}\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_0\cos\theta}{r^2}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

用坐标表示电势,则 $U=\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$$\begin{cases}E_x=-\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}\\[2ex] E_y=-\dfrac{\partial U}{\partial y}=\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}\end{cases}$$

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4x^2+y^2)^{1/2}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$x=0,\ E=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y^3}$$

$$y=0,\ E=\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^3}$$

与前面对电偶极子的讨论结果完全一样.

✓**本章作业：**

12-13，12-15，12-18

✓**本章小结**