北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

韩家骅 汪洪 主编

大学物理学（第三版）

电子教案

第十四章 真空中的恒定磁场

第十四章　真空中的恒定磁场

1—1 恒定电流

一、电流 电流密度

携带电荷并形成电流的带电粒子, 统称为载流子(carrier). 金属内的载流子是电子.

电流

传导电流(conducing current) 载流子（可以是自由电子, 正负离子, 电子-空穴对, 库柏对, 孤子等）在导体中的定向运动形成的电流.

对流电流(convection current) 带电体作机械运动形成.

位移电流(displacement current)

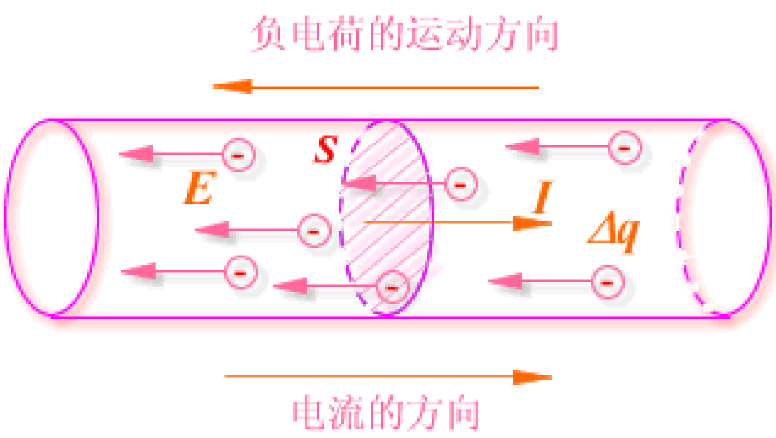
导体中形成电流的条件

1) 有可以自由移动的电荷

2) 有维持电荷作定向移动的电场.

电流(强度) 单位时间内通过导体任一截面的电量为电流强度(electric current strength), 简称电流 .

$$I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}$$



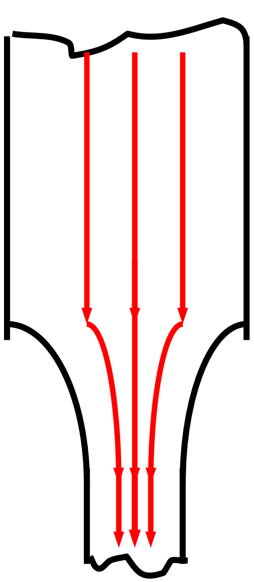
电流强度是标量. 习惯上规定正电荷定向运动的方向流动方向为电流的方向.

单位: 安培(A) 在SI制中, 规定电流强度为基本量, 1s内通过导体任一截面的电荷为1C的电流强度称为1A，即

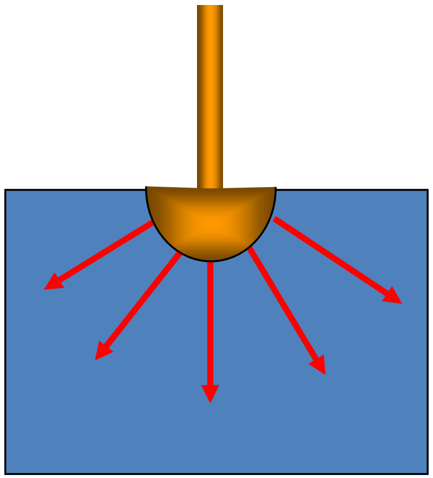
$$\boxed{1\mathrm{A}=1\mathrm{C}/1\mathrm{s}}$$

恒定电流（直流）：电流的大小和方向不随时间而变化。

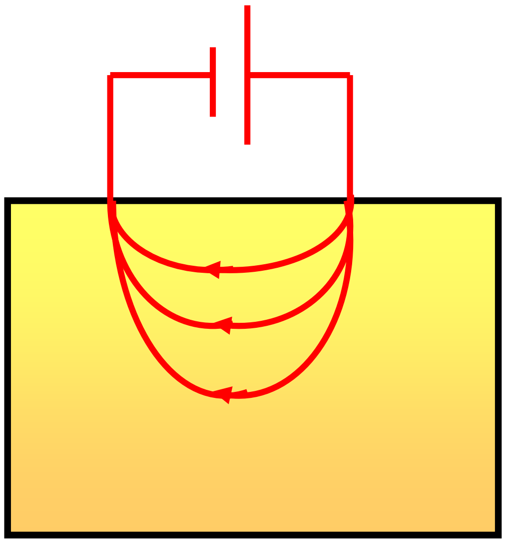
几种典型的电流分布（电流线）：



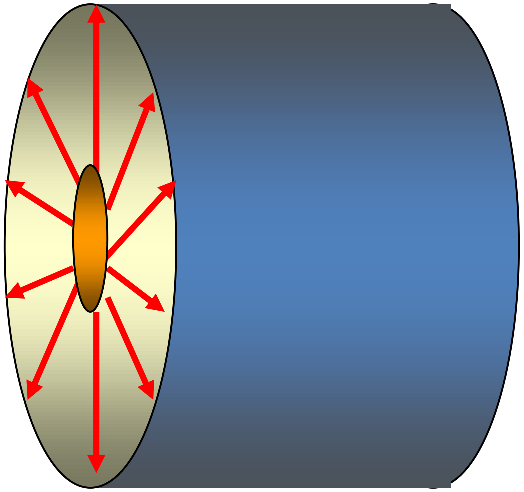
粗细不均匀
的金属导线



半球形接地电
极附近的电流



电阻法勘探
矿藏时的电流

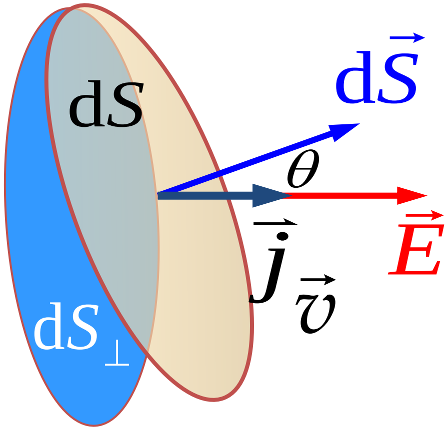


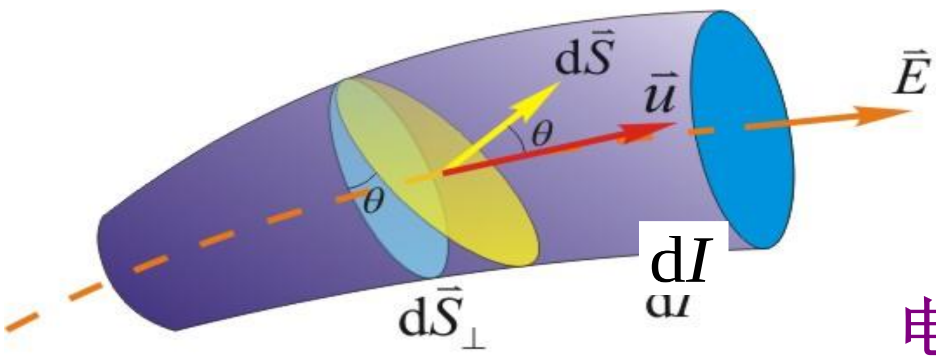
同轴电缆中
的漏电流

形状不规则，内部各处电流强度的大小和方向不完全相同。可见，导体中不同部分电流分布不同，电流强度I 不能细致反映导体中各点电流分布。

电流密度(current density)

电流密度：电流密度是矢量，它在导体中任意一点的方向与正电荷在该点的运动方向相同，它的大小等于通过该点并垂直于电流的单位截面的电流强度.





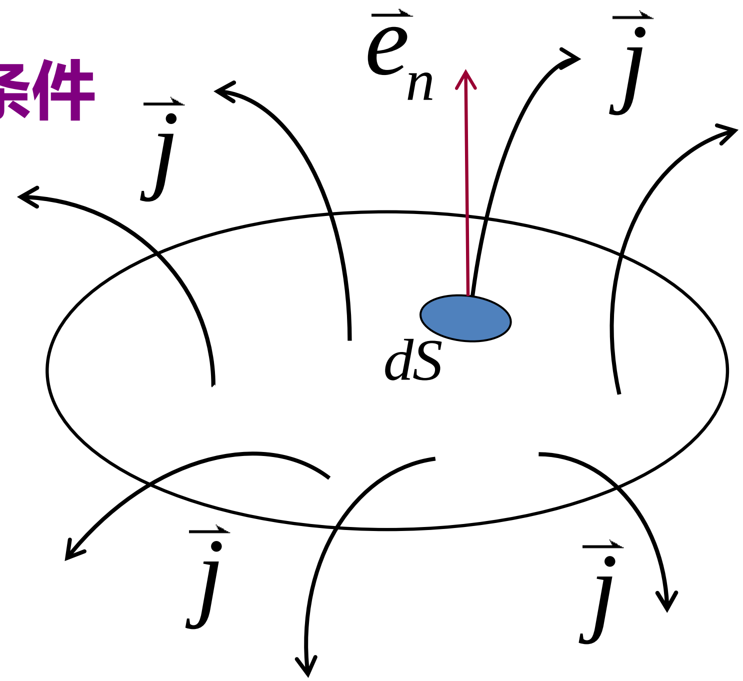
$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}}\vec{n}$$

电流密度单位：安培·米$^{-2}$ (A·m^{-2})

通过导体中任一曲面 *S* 的电流 *I* 可以表示为

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{e}_n dS = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

二、电流的连续性方程 恒定电流条件



如图所示为闭合曲面，并规定外法线方向为正。在单位时间内，从闭合曲面内向外流出的电荷，即通过闭合曲面向外的总电流为

$$\frac{dQ}{dt}=I=\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

根据电荷守恒定律，在单位时间内通过闭合曲面向外流出的电荷，应等于此闭合曲面内单位时间内所减少的电荷，即

$$\frac{dQ}{dt}=-\frac{dQ_i}{dt}$$

代入上式，即得 $$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=-\frac{dQ_i}{dt}$$ （电流的连续性方程）

在电流场中选一闭合曲面*S*, 单位时间内进入 *S* 面的电量等于从曲面流出的电量, 即闭合曲面的电量保持不变, 即

$$\frac{dQ_i}{dt}=0$$

根据电流的连续性方程，有 $\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$

当导体中任意闭合曲面满足上式时，从闭合曲面**S**上某一部分流入的电流，等于从闭合曲面**S**其他部分流出的电流。因此，闭合曲面内没有电荷增加或减少，此时导体中任意点电流密度是恒定的，因此上式为恒定电流条件。

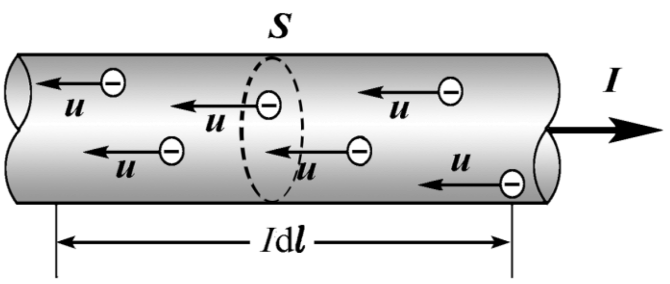
注意： 1. 在恒定电流情况下, 导体中电荷分布不随时间变化而形成恒定电场;

2. 恒定电场与静电场具有相似性质 (高斯定理和环路定理), 恒定电场可引入电势的概念;

3. 恒定电场的存在伴随能量的转换.

稳恒电流的电流密度

如图所示, 设电子数密度为n, 定向移动的平均速率为u, 则单位时间内通过截面的电量为$Q = neuS$, 因此电流密度大小为



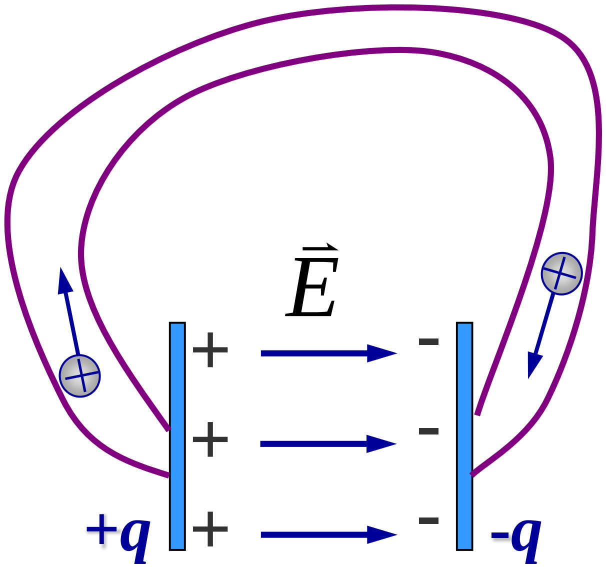
$$j = neu$$

一般情况下, 设载流子带电量为q, 则可得矢量式

$$\vec{j} = nq\vec{u} \quad \begin{cases} \text{正电荷} & \vec{j}, \vec{u} \text{ 同向} \\ \text{负电荷} & \vec{j}, \vec{u} \text{ 反向} \end{cases}$$

三、电源 电动势

图示为电容器放电产生的电流. 这种随时间减少的电荷分布不可能产生稳恒电场, 也不可能形成稳恒电流.



非静电力 能不断分离正负电荷使正电荷逆静电场力方向运动.

非静电力 → 维持稳定电荷分布 → 稳恒电场 → 稳恒电流

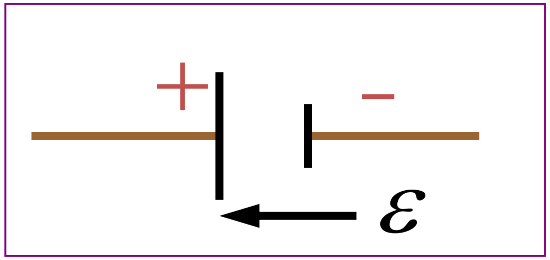
电源 (power supply) 能够提供非静电力以把其他形式的能量转化为电能的装置.

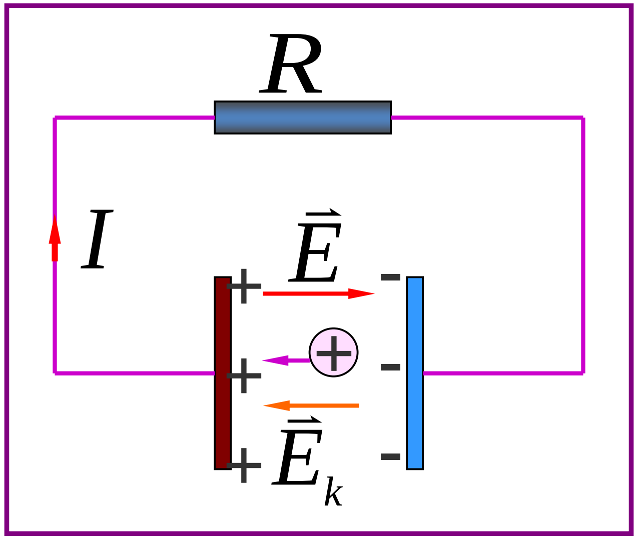
电源电动势 (electromotive force, EMF) 把单位正电荷经电源内部从负极移到正极，非静电力所作的功.

$$\varepsilon = \frac{A}{q}$$

单位：伏特(V)

规定指向：





如图, 研究非静电力 F_K 作功.

非静电场强：
$$\vec{E}_K = \frac{\vec{F}_K}{q}$$

静电力和非静电力搬运单位正电荷绕闭合回路一周作功：

$$A = \oint_L (q\vec{E}_K + q\vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q\oint_L (\vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l})$$

因为稳恒电场是保守场

$$\therefore \oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\therefore A = q\oint_L \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{A}{q} = \oint_L \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电动势在量值上等于非静电力移动单位正电荷绕闭合回路运动一周所作的功．或者说等于非静电场强在闭合回路上的环流．

$\vec{E}_K$只存在于内电路(电源内部), 则

$$\therefore \varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

如图通路中：

外电路: 静电力作用，将+*q*由正极→负极.

内电路: 静电力和非静电力共同作用, 非静电力作用较大, 将+*q*由负极→正极.

$\left.\right\}$ 形成稳恒电流

说明：

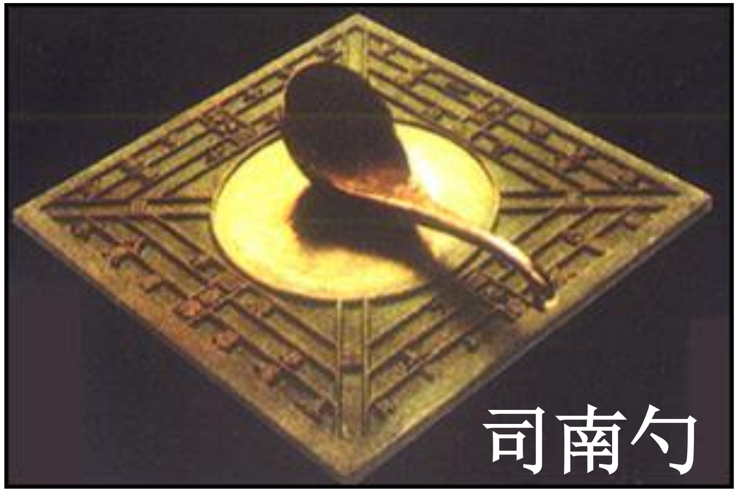
1) ε反映电源做功本领，与外电路闭合否无关.

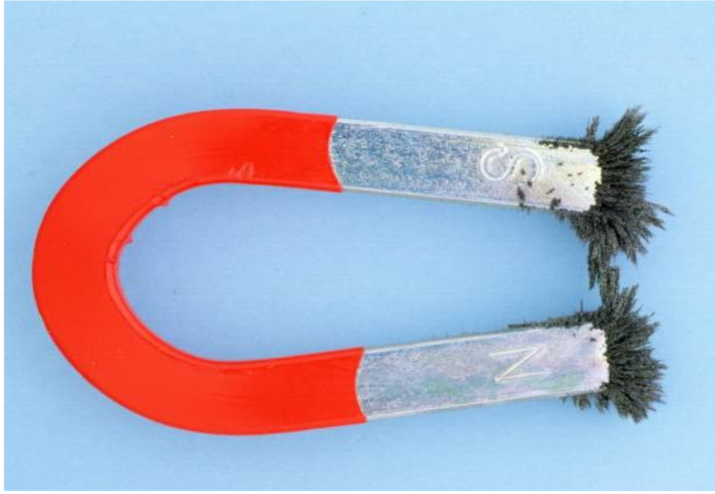
2）ε是标量，遵循代数运算法则. 通常把电源内部电势升高的方向，即从负极经电源内部到正极的方向规定为电动势的正方向。

14—2 恒定磁场 磁感应强度

一、基本磁现象

1. 磁铁的磁性(magnetism)



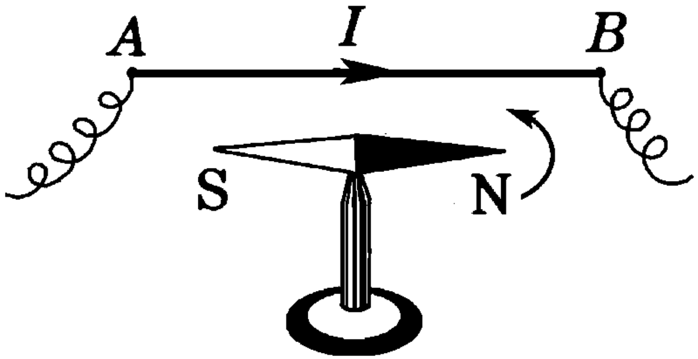


早期对磁铁基本现象的认识

1) 磁铁具有磁性. 磁铁上磁性特别强的区域称为磁极(pole). 磁极间存在着相互作用力, 称为磁力(magnetic force). 同种磁极相互排斥, 异种磁极相互吸引.

2) 磁极不能单独存在.

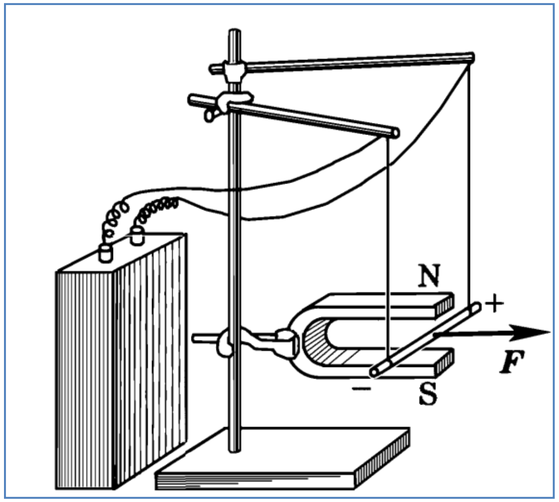
2. 电流的磁效应

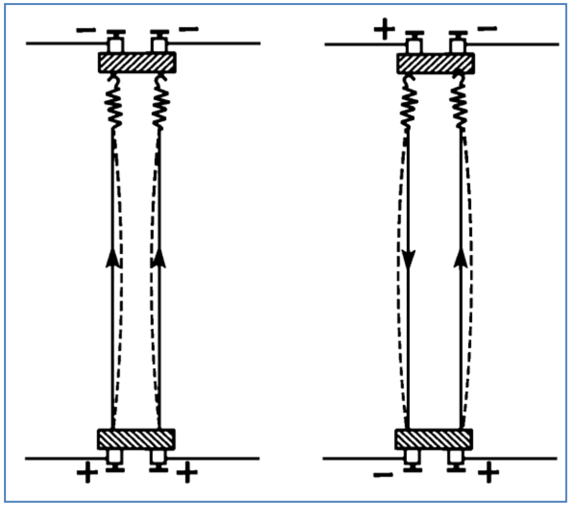


奥斯特1819年的实验表明：电流对磁极有力的作用

安培1820年及以后相关实验表明

磁铁对电流有作用，电流与电流间有相互作用.





等效分子电流观点

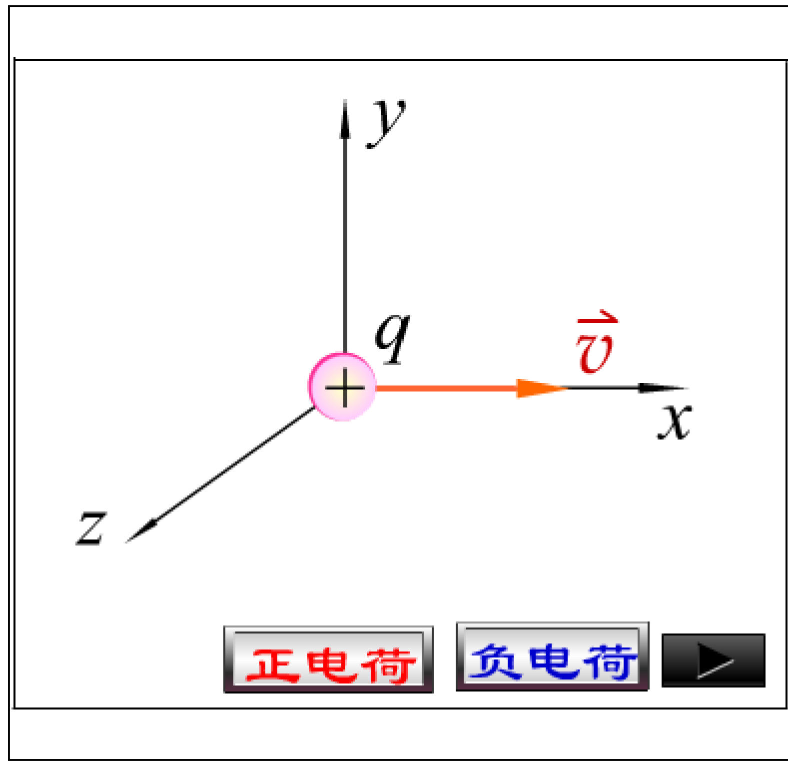
二、磁场(magnetic field)

电流(磁铁) $\Leftrightarrow$ 磁场 $\Leftrightarrow$ 电流(磁铁)

运动电荷 $\Leftrightarrow$ 磁场 $\Leftrightarrow$ 运动电荷

三、磁感应强度(magnetic induction)

我们可以利用磁场对试探的运动点电荷有磁场力作用来描述磁场中各点的方向和强弱.



实验证明:

1. 当点电荷沿磁场方向运动时, 它不受磁场力作用 $F=0$

2. 当点电荷以速度v沿不同于磁场方向运动时，它所收到的磁场力F的大小与点电荷的电荷量q和速度v的乘积成正比，F的方向总是垂直于速度与磁场方向做组成的平面。

3. 当点电荷沿垂直磁场方向运动, $F = F_{max}$

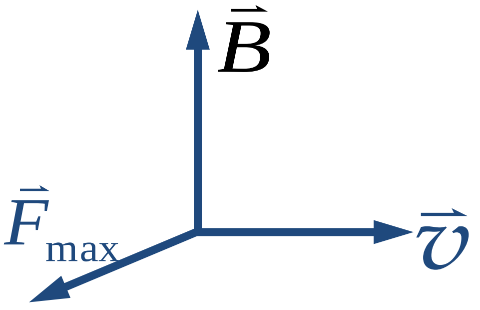
定义磁感应强度 $\vec{B}$:

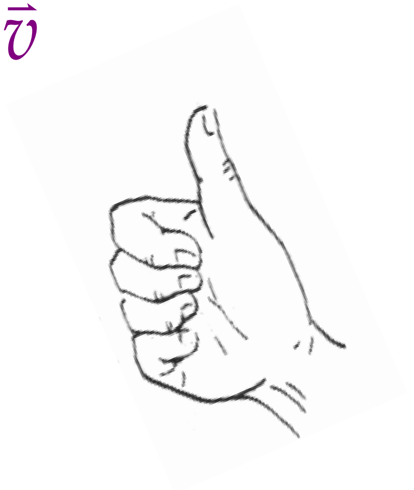
大小: $$B = \frac{F_{max}}{|q|v}$$

单位: 特斯拉(Tesla)

方向: $\vec{F}_{max} \times \vec{v}$

磁感应强度 $\vec{B}$ 矢量是表述磁场中各点磁场强弱和方向的物理量.





10－3 毕奥—萨伐尔定律 (Biot-Savart law)

一、磁场叠加原理

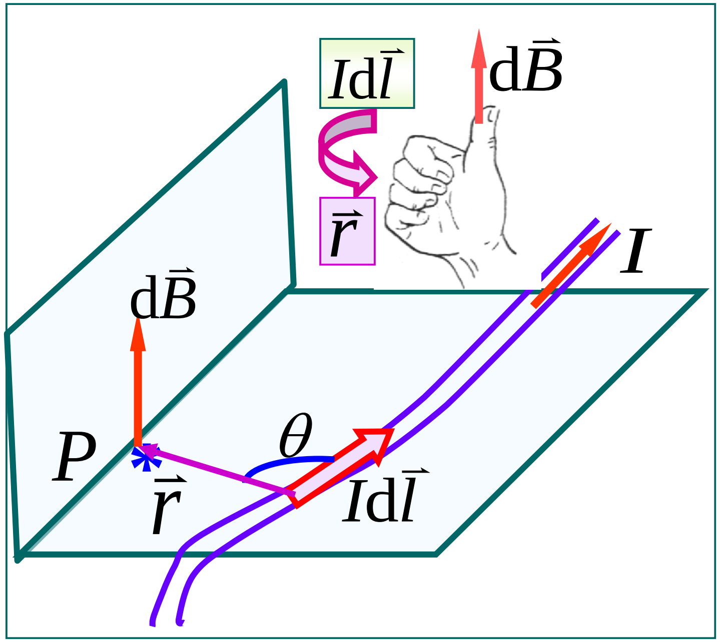
磁场叠加原理 整个载流导线回路在空间中某点所激发的磁感应强度，就是这导线上所有**电流元**在该点激发的磁感应强度的叠加(矢量和)，即

$$\vec{B} = \int_L \mathrm{d}\vec{B}$$

二、毕奥—萨伐尔定律

定律给出 $$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$



真空中的磁导率(permeability): $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$

三、毕奥—萨伐尔定律的应用

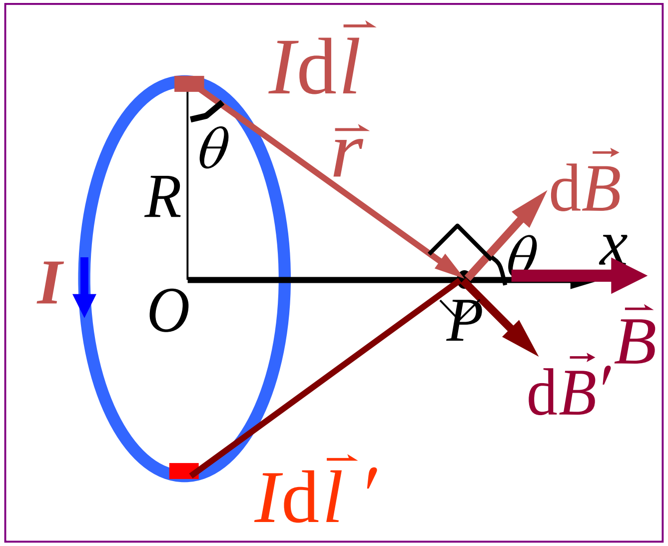
步骤：

1. 首先, 将载流导线划分为一段段电流元, 任选一段电流元, 并标出电流元到场点的位矢, 确定两者的夹角;
2. 根据毕奥-萨伐尔定律, 求出电流元在场点所激发的磁感应强度的大小dB, 并由右手螺旋法则确定dB的方向;
3. 建立坐标系, 将dB在坐标系中分解, 并用磁场叠加原理做对称性分析, 以简化计算步骤;
4. 最后, 求出总磁感应强度大小和方向, 对结果进行分析.

例 用毕奥-萨伐尔定律计算一半径为R, 通有稳恒电流I的圆线圈, 在轴线上任一点P 所激发的磁感应强度B .

解：如图, 在圆电流上取电流元, 则

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l\sin 90^\circ}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi r^2}$$



各电流元在P点 $\mathrm{d}\vec{B}$大小相等, 方向不同, 由对称性：

$$B_\perp=\int \mathrm{d}B_\perp=0 \qquad B=B_{//}$$

$$=\int \mathrm{d}B\cos\theta=\int_0^{2\pi R}\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi r^2}\frac{R}{r}==\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

讨论

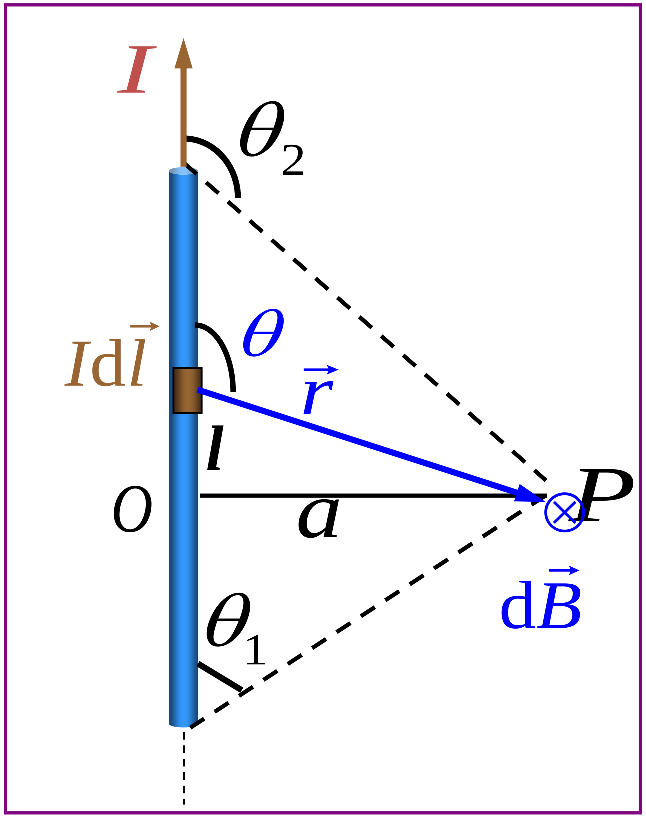
1) 若线圈有N 匝 $$B=\frac{\boxed{N}\ \mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

2) $x<0$ $\vec{B}$的方向不变(I 和 $\vec{B}$ 成右螺旋关系)

3) $x=0$ $$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2R}}$$

4) $x>>R$ $$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2x^3},\qquad B=\frac{\mu_0 I S}{2\pi\, x^3}$$

例 一长度为L的载流直导线, 电流强度为I, 导线两端到P点的连线与导线的夹角分别为θ_1和θ_2．求距导线为a处P点的磁感应强度.



解：如图, 在直电流上距离O点l处取电流元. 则由定律,

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}l \sin\theta}{4\pi r^2}$$ **方向**$\otimes$

分析可知,各电流元在P点激发的磁场同向. 统一变量

$$l = -a\cot\theta \qquad \mathrm{d}l = \frac{a\,\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta} \qquad r = \frac{a}{\sin\theta}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

B的方向与直电流成右手螺旋关系.

讨论：(1) "无限长"载流导线

$$\theta_1=0,\quad \theta_2=\pi \qquad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

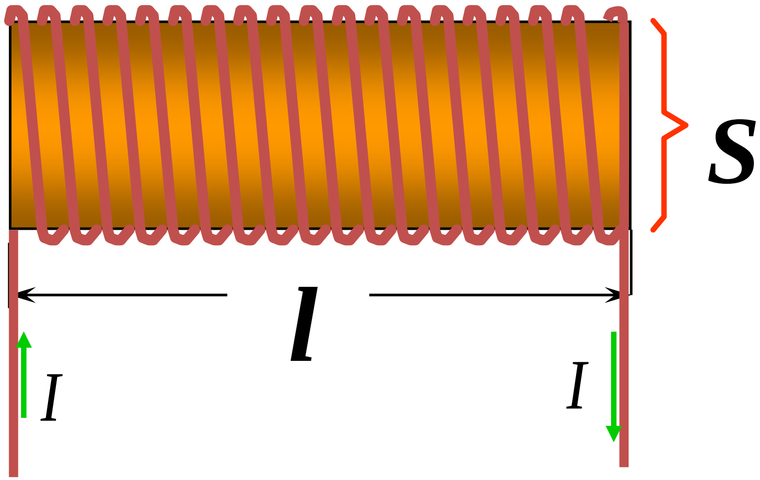
(2) "半无限长"载流导线

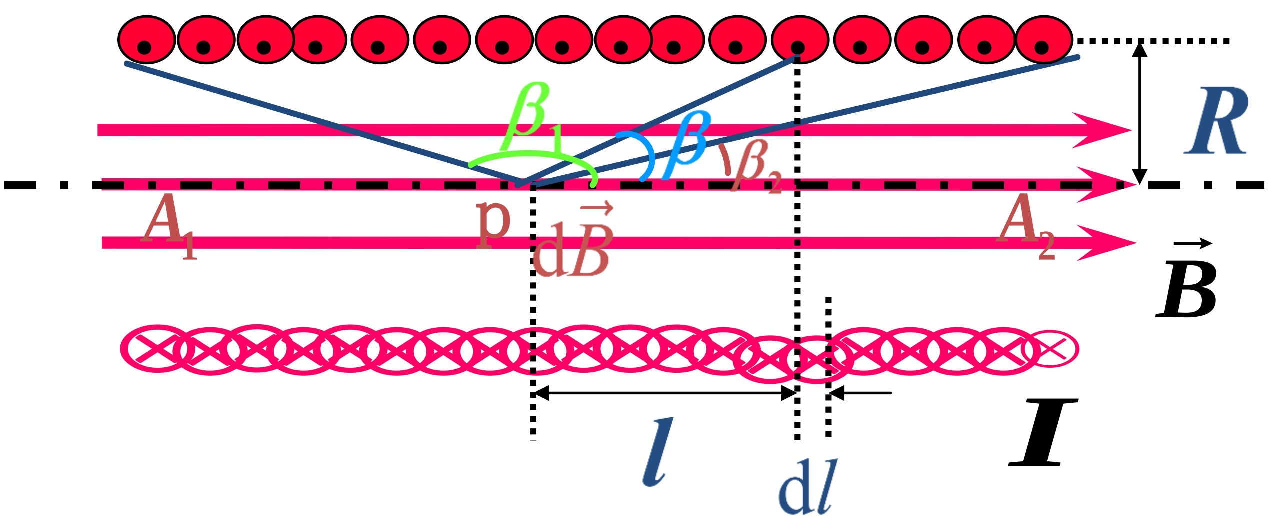
过端点垂直导线距离为 a 处

$$\theta_1=\pi/2,\quad \theta_2=\pi \qquad B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

(3) P点在导线的延长线上 $\quad B=0$

例　载流直螺线管内部的磁场。设螺线管的半径为R，电流为I，每单位长度有线圈n匝。计算螺线管内轴线上P点的电磁感应强度。





在螺线管上任取一小段**d*l***由于每匝可作平面线圈处理， ***n*d*l***匝线圈可作***In*d*l***的一个圆电流，在***P***点产生的磁感应强度：

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 R^2 nI \,\mathrm{d}l}{2(R^2 + l^2)^{3/2}} \qquad B = \int_L \mathbf{d}B = \int_L \frac{\mu_0 R^2 nI \,\mathrm{d}l}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$\because l = R\cot\beta \qquad \therefore \mathrm{d}l = -R\csc^2\beta \,\mathrm{d}\beta$$

$$\text{又} \because R^2 + l^2 = R^2\csc^2\beta$$

$$B = \int_L \frac{\mu_0 R^2 nI \,\mathrm{d}l}{2(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} nI \int_{\beta_1}^{\beta_2} [-\sin\beta] \mathrm{d}\beta$$

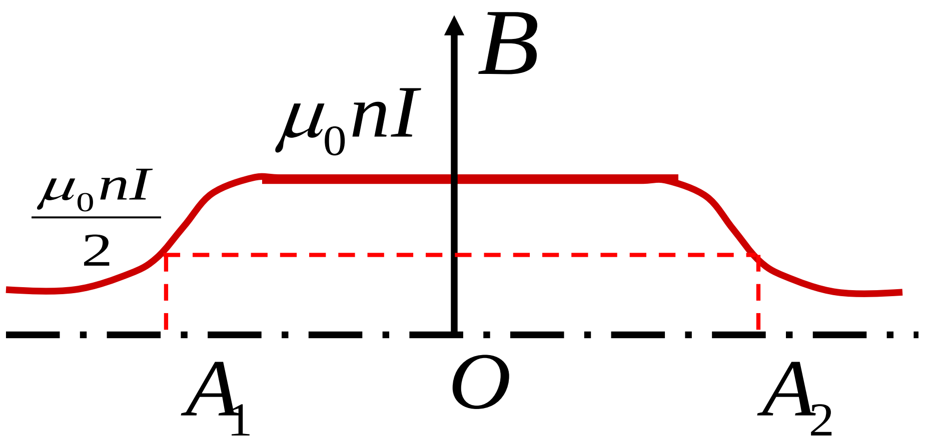
$$= \frac{\mu_0}{2} nI (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

讨论: $B=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$

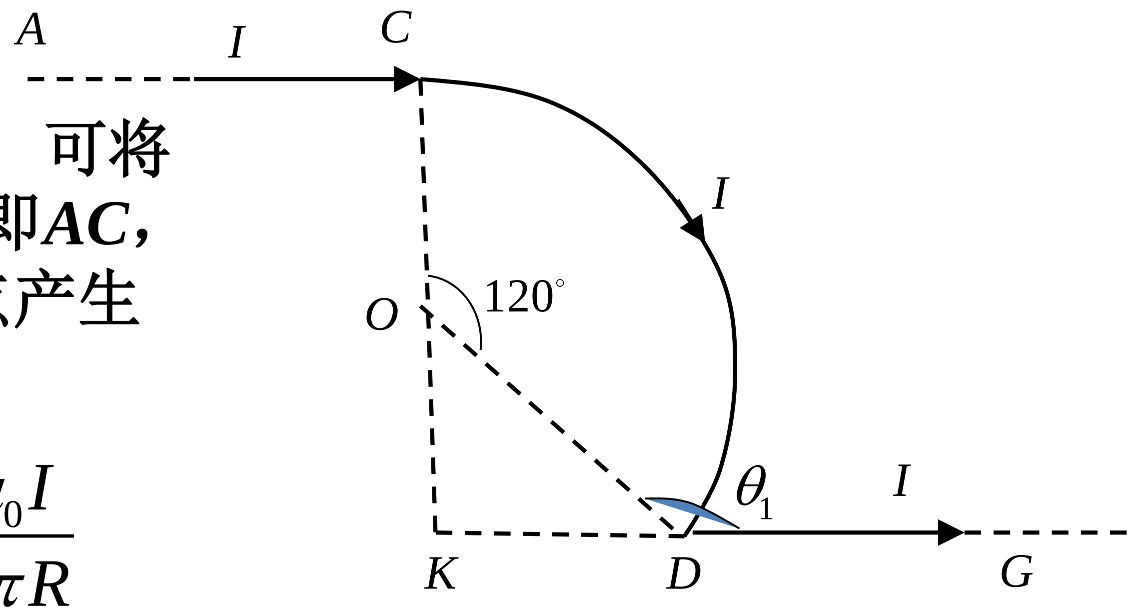
（1）螺线管无限长 $\beta_1\to\pi,\beta_2\to 0$ $\boxed{B=\mu_0 nI}$

（2）半无限长螺线管的端点圆心处 $B=\mu_0 nI/2$

实际上，$L>>R$ 时，螺线管内部的磁场近似均匀，大小为 $\mu_0 nI$



例　一无限长直载流导线，其中*CD*部分被完成120°圆弧，*AC*与圆弧相切。已知电流I=5.0A，圆弧半径R=0.02m，求圆心*O*处的磁感应强度。



解：根据磁场的叠加性，可将载流导线分成三部分，即*AC*，*CD*，*DG*段，它们在*O*点产生的磁感应强度分别为

*AC*段：$B_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$

*CD*段：$B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int dl = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\dfrac{2}{3}\pi R = \dfrac{\mu_0 I}{6R}$

***DG*段：** $B_3 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

$a = \overline{OK} = R\cos 60^\circ \quad \theta_1 \to 150^\circ, \theta_2 \to 180^\circ$ 代入上式得

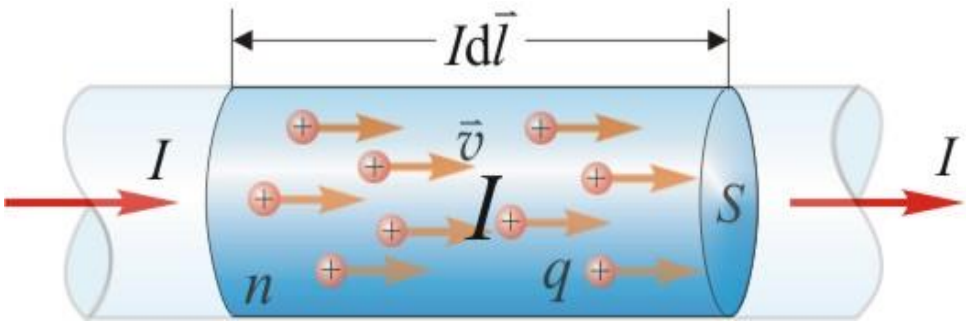
$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

因此，电流*I*在*O*点产生的磁感应强度大小为

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} - 1\right)$$

代入数据，得 $B = 1.7\times 10^{-5}T$ 方向垂直于纸面向里。

四、运动电荷的磁场



S：电流元横截面积

n：单位体积载流子数

q：载流子电量

v：定向运动的平均速度

电流是单位时间通过S的电量： $I = qnvS$

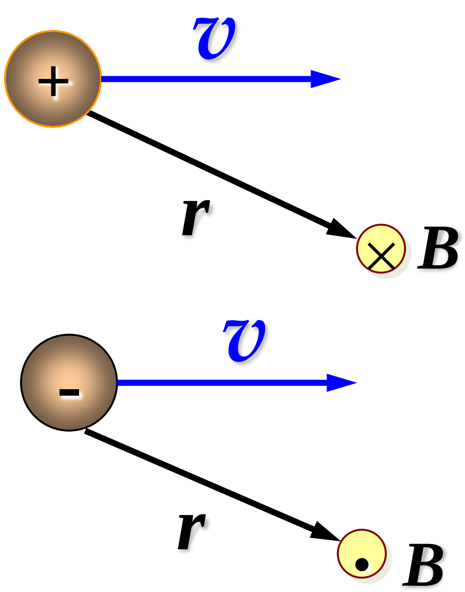
电流元体积中粒子数： $dN = nSdl$

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin(d\vec{l}, \vec{r})}{4\pi r^2} \xrightarrow{I=qnvS} B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin(\vec{v}, \vec{r})}{r^2}$$

一个运动电荷的磁场

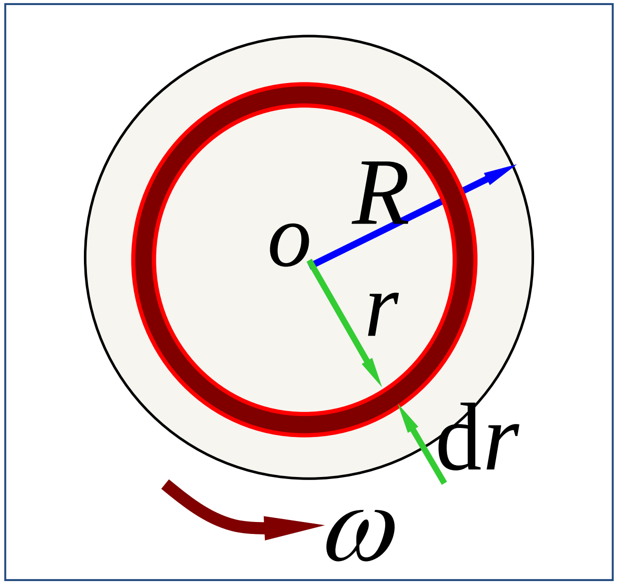
$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

如图所示，运动电荷磁场 ***B***的方向垂直于***v*** 和***r*** 所组成的平面，其指向亦适合右手螺旋法则 .



例　一个塑料圆盘半径为R，电荷q均匀分布于表面，圆盘绕通过圆心垂直盘面的轴转动，角速度为ω . 求圆盘中心处的磁感应强度.

解法一　圆电流的磁场叠加



圆盘上取半径为r，宽度为$\mathrm{d}r$ 的同心圆环，其带电量为

$$\mathrm{d}q=\frac{q}{\pi R^2}2\pi r\mathrm{d}r$$

圆环上的电流为

$$\mathrm{d}I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{dq}{T}=\frac{q\omega}{\pi R^2}r\mathrm{d}r$$

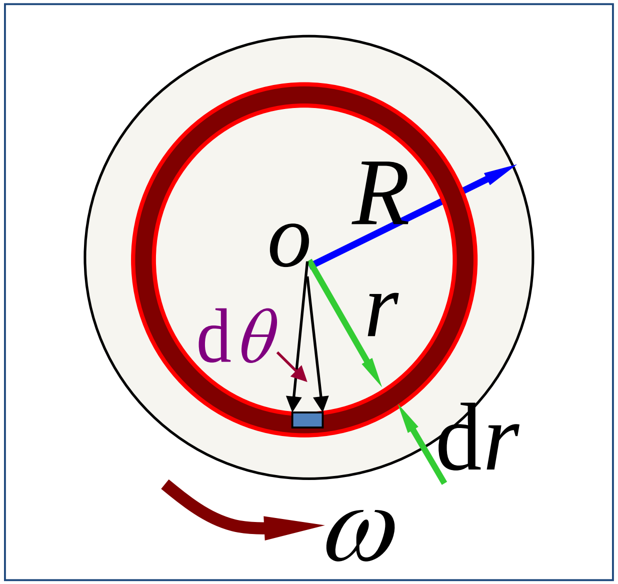
由前例可知,圆环在圆心处激发的磁感应强度大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}=\frac{\mu_0}{2r}\frac{q\omega}{\pi R^2}r\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\mathrm{d}r$$

圆心处磁感应强度大小为

$$B=\int_0^R \mathrm{d}B=\int_0^R \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R}$$

方向垂直于纸面.



解法二　运动电荷磁场叠加

圆盘上取距圆心r，径向宽度为$\mathrm{d}r$，对同心张角$\mathrm{d}\theta$的微元, 则其带电量为

$$\mathrm{d}q=\frac{q}{\pi R^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

运动速度为　$v=\omega r$

$$\therefore \mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{\pi R^2} \frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\omega r}{r^2}$$

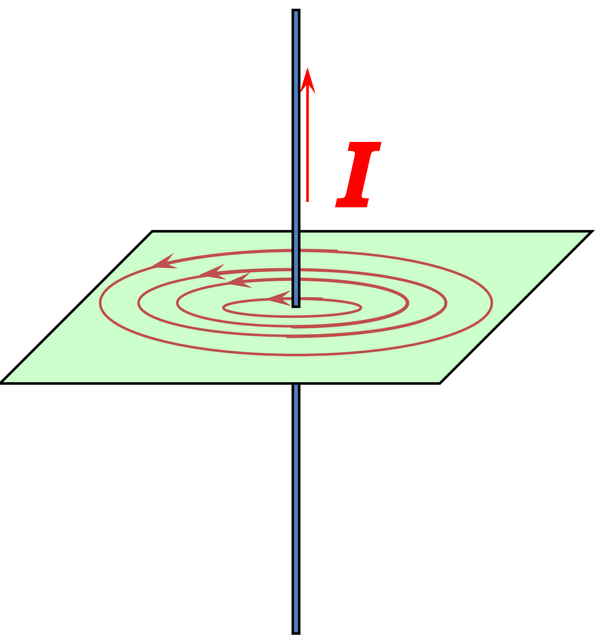
对整个圆盘积分

$$B = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{\pi R^2} \omega \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R}$$

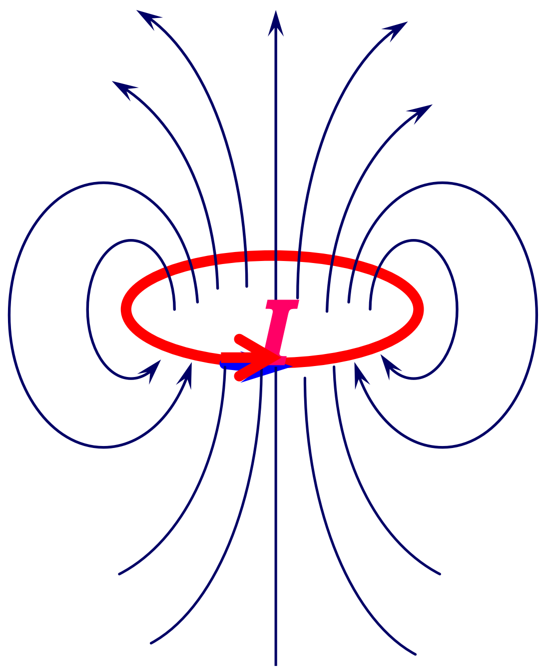
方向垂直于纸面.

14－4 磁场的高斯定理

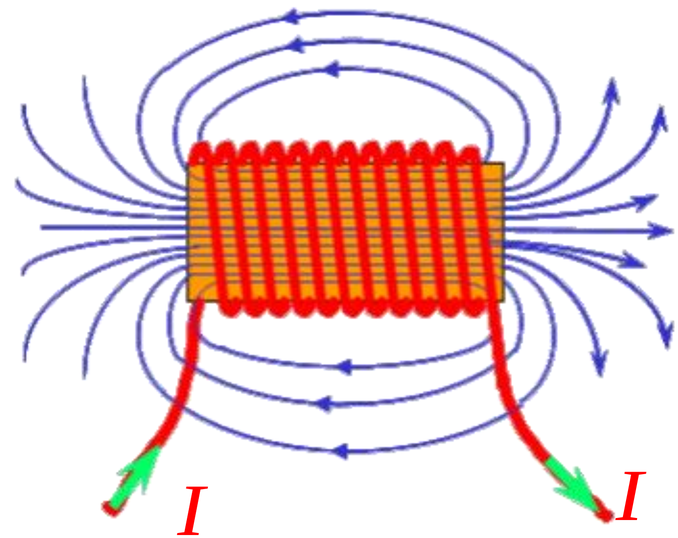
一、磁感应线(magnetic induction line)



直电流



圆电流

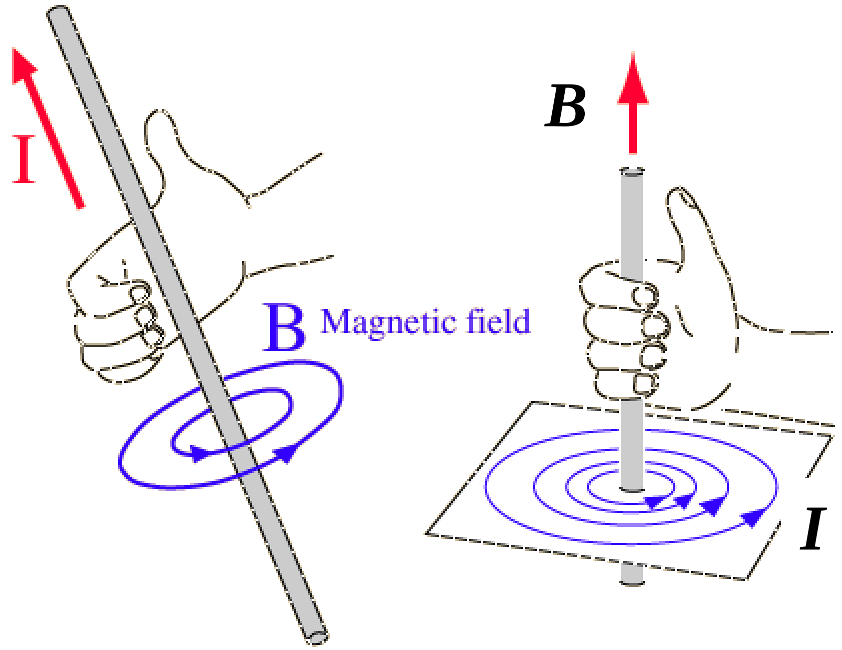


螺线管电流

磁感应线具有如下特性:

1) 在任何磁场中每一条磁感应线都是环绕电流的无头无尾的闭合线, 这表明沿磁感应线的环路积分不为零, 即磁场是有旋场而不是保守场, 不存在类似于电势那样的标量函数.

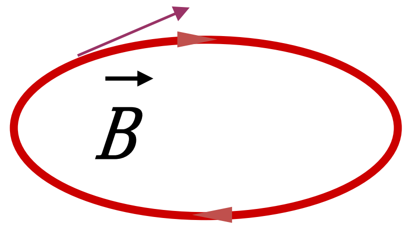
2) 在任何磁场中, 每一条闭合的磁感应线的方向与该闭合磁感应线所包围的电流流向服从右手螺旋法则.



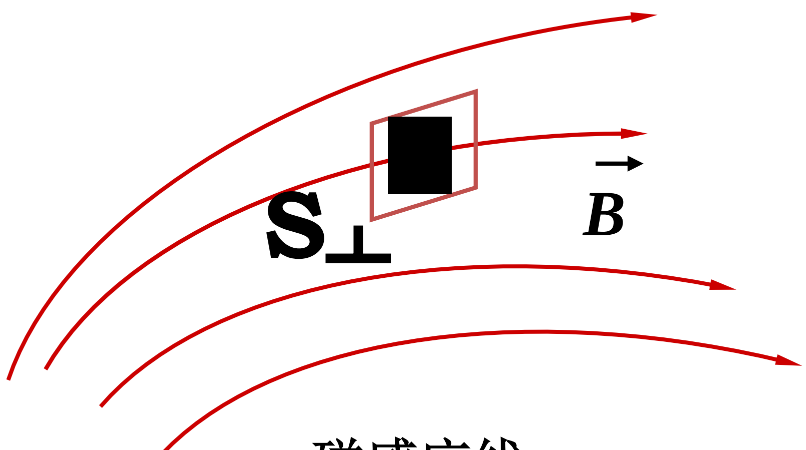
3）磁感应线互不相交。

规定：

(1) 磁感应线上任意一点的切向代表该点***B***的方向；



(2) 垂直通过某点单位面积上的磁感应线数目等于该点***B*** 的大小



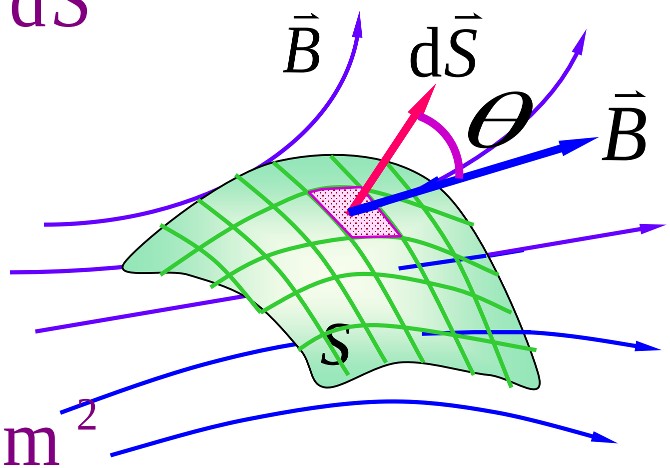
磁感应线

（3）磁感应线密集处磁场强；磁感应线稀疏处磁场弱。

二、磁通量(magnetic flux)

通过磁场中某一曲面的磁感应线数为通过此曲面的**磁通量.**

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}} = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = B\cos\theta\,\mathrm{d}S$$



对整个曲面

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \int_{s}\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}} = \int_{s}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

单位 韦伯(Wb) $1\,\mathrm{Wb} = 1\,\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^{2}$

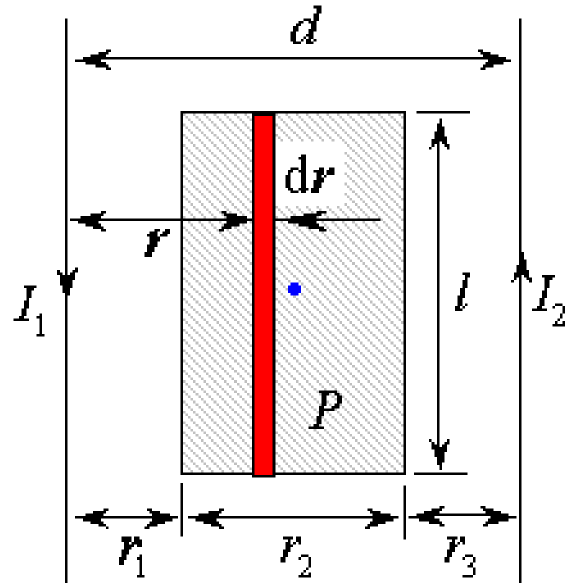
三、磁场的高斯定理

通过任何闭合曲面的总磁通量必为零.

即 $$\oint_{s}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

磁场是“无源场”

例　两平行长直导线相距d=40cm，通过导线的电流$I_1=I_2$=20A，电流流向如图所示. 求：1) 两导线所在平面内与两导线等距的一点P处的磁感应强度；2) 通过图中斜线所示面积的磁通量($r_1=r_3$=10cm，l=25cm).



解：(1)两导线电流的P点激发的磁感强度分别为

$$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\frac{d}{2}},\ B_2=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi\frac{d}{2}}$$

方向均垂直于纸面向外,可得P点的磁感应强度大小为

$$B=B_1+B_2=2\times\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\frac{d}{2}}=2\times\frac{4\pi\times10^{-7}\times20}{2\pi\times0.20}=4\times10^{-5}(T)$$

(2) 在矩形面上, 距离左边导线电流为r 处取长度为l，宽度为dr的矩形面元, 电流I_1激发的磁场，通过矩形面元的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi_1 = B_1 \mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} l \mathrm{d}r$$

电流I_1激发的磁场，通过矩形面积的磁通量为

$$\Phi_1 = \int \mathrm{d}\Phi_1 = \int_{r_1}^{r_1+r_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} l \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln \frac{r_1 + r_2}{r_1}$$

$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times 0.25}{2\pi} \ln \frac{0.30}{0.10}$$

$$= 10^{-6} \ln 3 = 1.1 \times 10^{-6} (\mathrm{Wb})$$

同理可得 $\Phi_2 = \Phi_1$

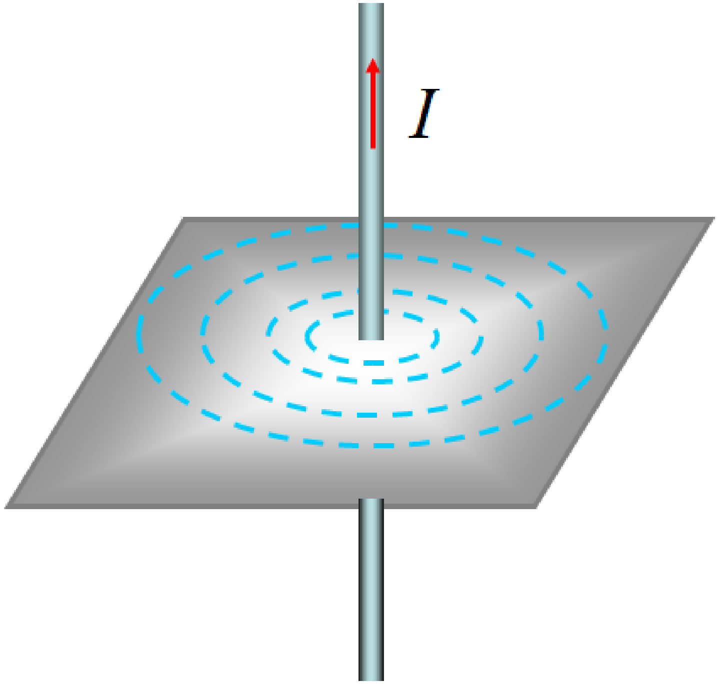
通过矩形面积的磁通量为 $\Phi = \Phi_2 + \Phi_1 = 2.2 \times 10^{-6} (\mathrm{Wb})$

10－5 安培环路定理

一、安培环路定理(Ampere circuital theorem)

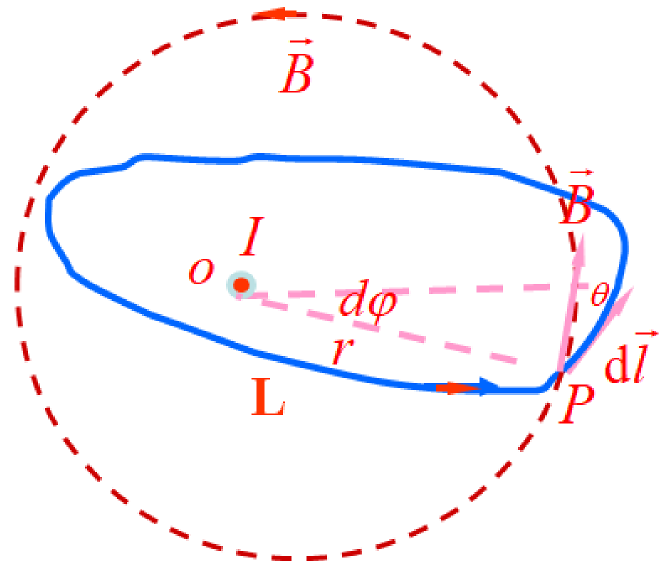
在恒定电流的磁场中，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 矢量沿任一闭合路径 L 的线积分（即环路积分），等于什么?

长直电流的磁场



1、在垂直于导线的平面内任作的环路上取一点，到电流的距离为**r**，磁感应强度的大小：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



由几何关系得：

$$\mathrm{d}l\bullet\cos\theta=r\mathrm{d}\varphi$$

$$\oint_L \vec{B}\bullet\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L B\cos\theta\mathrm{d}l=\oint_L Br\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}r\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\mu_0 I$$

如果沿同一路径但改变绕行方向积分：

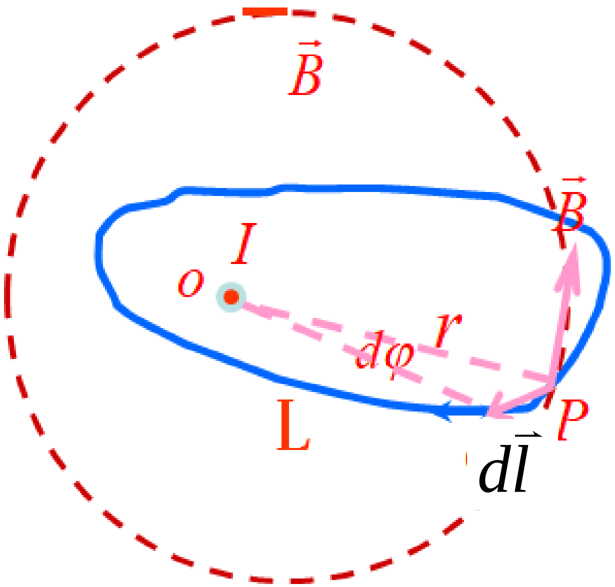
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos(\pi-\theta)\,\mathrm{d}l$$

$$= \oint_L -B\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$= -\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

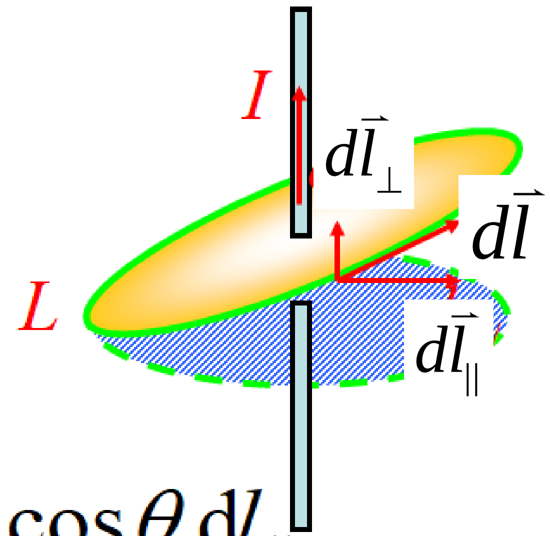
$$= -\mu_0 I \cdots$$

结果为负值！



若认为电流为 $-I$ 则结果可写为 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(-I)$

2、如果闭合曲线不在垂直于导线的平面内：



$$\oint_L \vec{B}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{B}\cdot(\mathrm{d}\vec{l}_\perp + \mathrm{d}\vec{l}_{//})$$

$$= \oint_L B\cos 90^\circ \,\mathrm{d}l_\perp + \oint_L B\cos\theta \,\mathrm{d}l_{//}$$

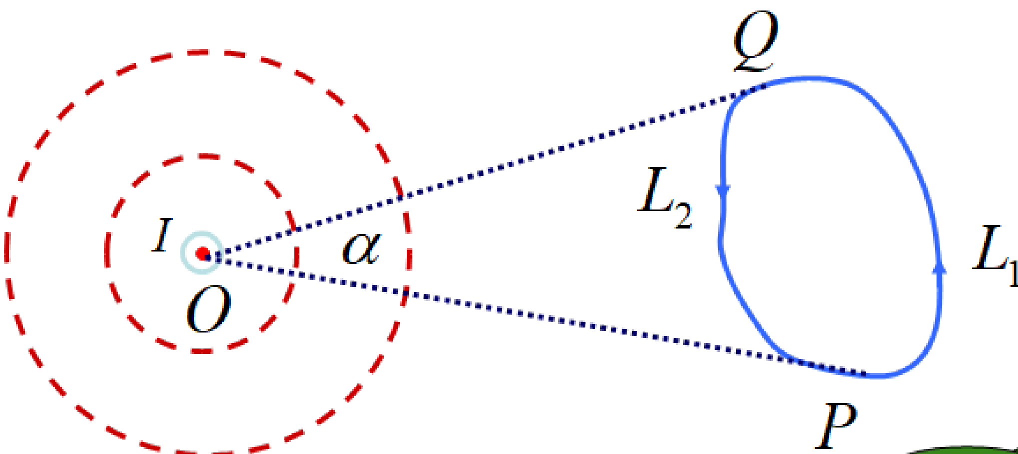
$$= 0 + \oint_L Br\,\mathrm{d}\alpha$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} r\,\mathrm{d}\alpha$$

$$= \mu_0 I$$

结果一样！

3、环路不包围电流



$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_{L_2} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{L_1} \mathrm{d}\,\alpha - \int_{L_2} \mathrm{d}\,\alpha\right) = 0$$

表明：闭合曲线不包围电流时，磁感应强度矢量的环流为零。

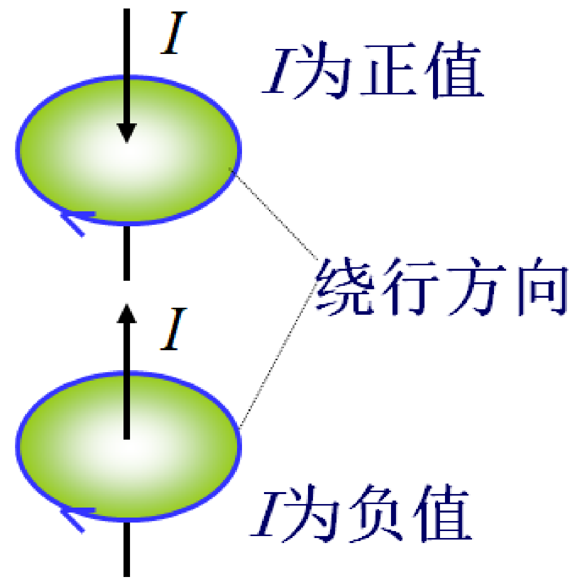
上述结论虽是从长直载流导线磁场得来，却具普遍性。

安培环路定理

在磁场中，沿任一闭合曲线 $\vec{B}$ 矢量的线积分（也称 $\vec{B}$ 矢量的环流），等于真空中的磁导率 μ_0 乘以穿过以这闭合曲线为边界所张任意曲面的各恒定电流的代数和。

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I}$$

电流I的正负规定：积分路径的绕行方向与电流成右手螺旋关系时，电流I为正值；反之I为负值。



$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

物理意义：

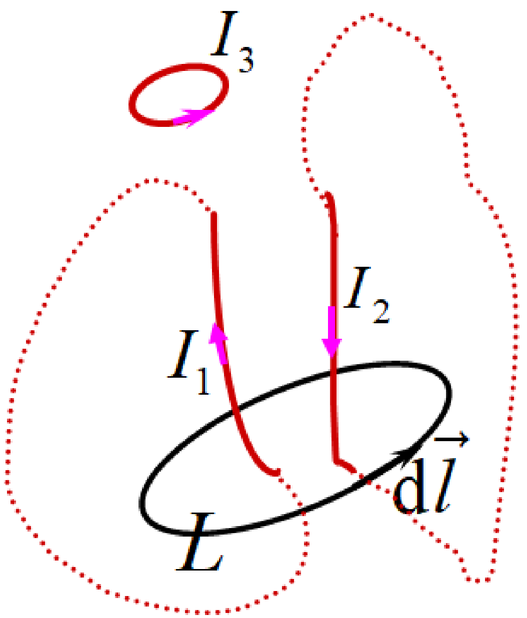
$\vec{\mathrm{B}}$…空间所有电流共同产生的磁场

L… 在场中任取的一闭合线，任意规定一个绕行方向

$\mathrm{d}\vec{l}$ …L上的任一线元

I… 空间中的电流

$\sum I$… 环路所包围的所有电流的代数和



几点注意：

- 任意形状稳恒电流，安培环路定理都成立。
- 环流虽然仅与所围电流有关，但磁场却是所有电流在空间产生磁场的叠加。
- 安培环路定理仅仅适用于恒定电流产生的恒定磁场，恒定电流本身总是闭合的，因此安培环路定理仅仅适用于闭合的载流导线。
- 静电场的高斯定理说明静电场为有源场，环路定理又说明静电场无旋；稳恒磁场的环路定理反映稳恒磁场有旋，高斯定理又反映稳恒磁场无源。

二、安培环路定理的应用

1.利用安培环路定理求磁场的前提条件

闭合环路l上的磁感强度大小处处相等, 方向和环路的绕行方向也处处同向. 这时可作如下简化:

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\oint_L \mathrm{d}l = \mu_0 \sum I_i \Rightarrow B = \mu_0 \sum I_i \Big/ \oint_L \mathrm{d}l$$

2. 利用安培环路定理求磁场的适用范围

1) 电流的分布具有无限长轴对称性

2) 电流的分布具有无限大面对称性

3) 各种圆环形均匀密绕螺绕环

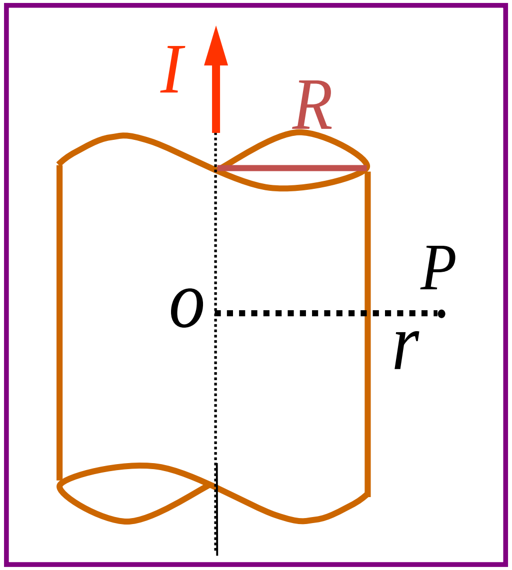
3. 利用安培环路定理求磁场的基本步骤

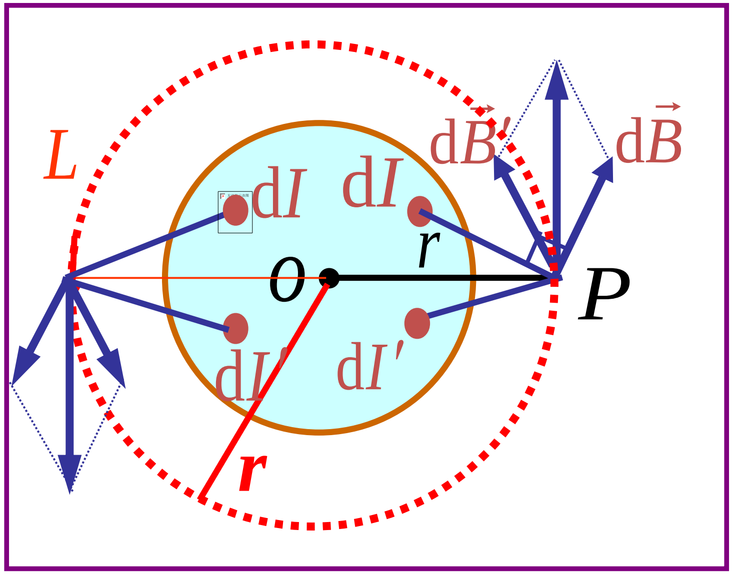
1) 首先用磁场叠加原理对载流体的磁场作对称性分析；

2) 根据磁场的对称性和特征，选择适当形状的环路；

3) 利用公式求磁感强度.

例　如图, 求无限长载流圆柱形导体的磁场分布.





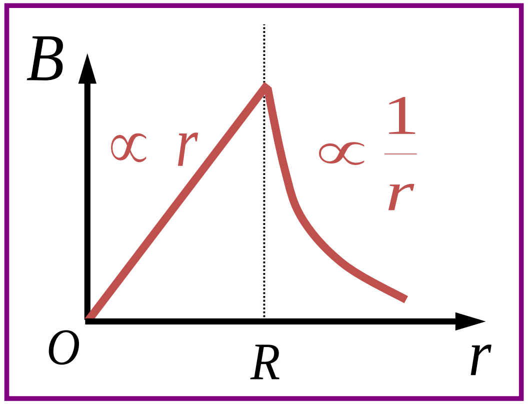
解: 在垂直于载流圆柱平面内, 作以O为中心, 半径r的圆环L; 由轴对称性可知, L上各点等价, B大小相等, 方向沿切向. 以L为安培环路, 逆时针绕向为正, 则

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_{内} \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\sum I_{内}$$

$$r \geq R: \sum I_{内} = I \qquad B_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$

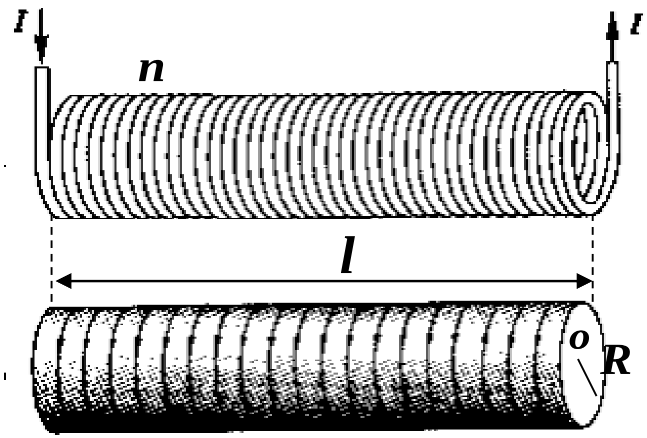
$$r \leq R: \sum I_{内} = \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2 = \frac{Ir^2}{R^2}$$

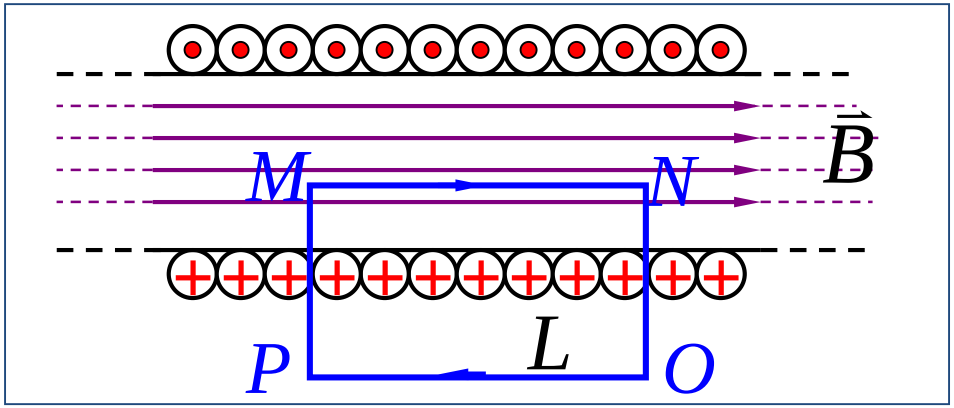
$$B_{内} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \propto r$$



$\vec{B}$方向与I指向满足右手螺旋关系

例 求长直螺线管内的磁感应强度(I , n已知).





解: 对称性分析螺旋管内为均匀场, 方向沿轴向, 外部磁感应强度趋于零. 如图所示, 选取闭合回路L作为安培环路, 利用安培环路定理得:

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{MN} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{NO} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{OP} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{PM} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{MN}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{NO}\cancel{\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \int_{OP}\cancel{\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \int_{PM}\cancel{\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

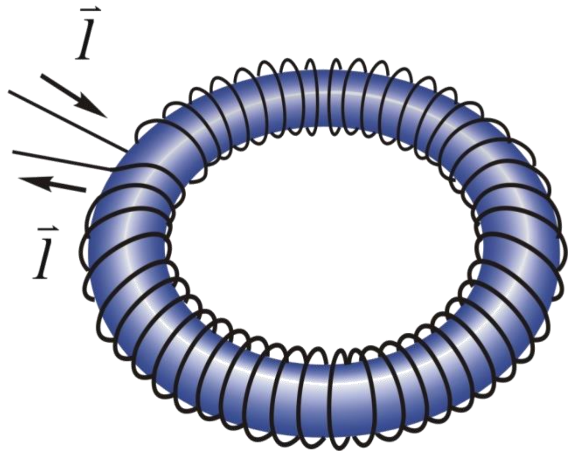
$$B\cdot\overline{MN} = \mu_0 n\overline{MN} I$$

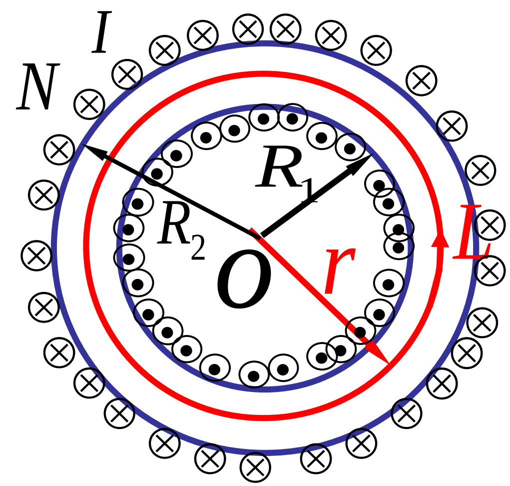
可以解得螺线管内的磁感强度为 $B=\mu_0 nI$

推广 无限长载流螺线管内部磁场处处相等,外部磁场为零.

例 如图所示, 为一螺绕环, 环上均匀地密绕着N 匝线圈, 线圈内通有电流I, 求螺绕环内的磁场.

解: 由于整个电流的分布具有中心轴对称性，因而磁场的分布也应具有轴对称性, 因此, 可取如图所示的安培环路L, 利用安培环路定理可得:



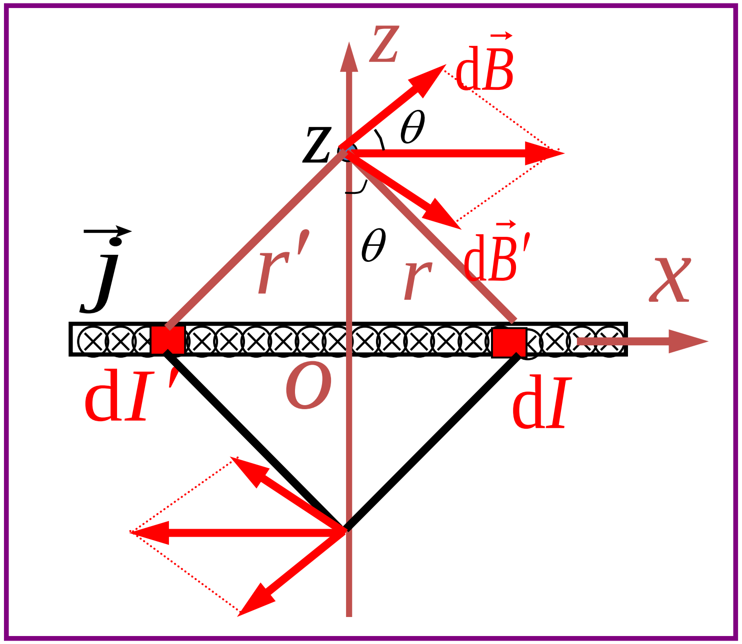


$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_{内}$$

$$r < R_1 ,\quad r > R_2 : \quad \sum I_{内} = 0, \quad B_{外} = 0$$

$$R_1 < r < R_2 : \quad \sum I_{内} = NI, \quad B_{内} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

例 无限大薄导体板均匀通过电流 I 时的磁场分布.



解: [方法一]利用磁场叠加原理　如图所示, 建立坐标系, 并将无限大薄导体板看成一根根载流直导线, 每一根载流导线中电流为$\mathrm{d}I$, 在 z 点产生的磁场大小为$\mathrm{d}B$, 方向如图示, 令电流密度为 $\vec{j}$, 则

$$\mathrm{d}I = j\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi r}$$

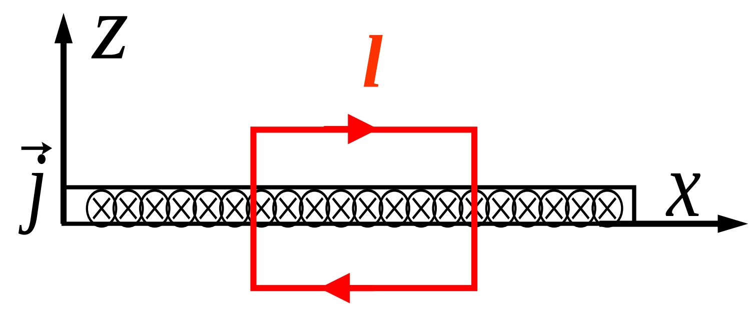
由于电流分布具有对称性

$$B_z = \int \mathrm{d}B_z = 0$$

$$B = \int \mathrm{d}B_x = \int \mathrm{d}B\cos\theta = \int \frac{\mu_0 j\mathrm{d}x}{2\pi r}\cdot\frac{z}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 zj}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+z^2} = \frac{\mu_0 zj}{2\pi}\cdot\frac{1}{z}\mathrm{arctg}\frac{x}{z}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0 j}{2}$$

解：[方法二]利用安培环路定理　如图所示，取安培环路L，由于电流分布具有对称性，磁场只有x方向分量，对回路L应用安培环路定理得：



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2lB = \mu_0 jl \qquad \therefore B = \frac{\mu_0 j}{2}$$

思考： 如果载流平面不是无限宽，

能否用叠加原理求解？能

能否用安培环路定理求解？不能

14－6 带电粒子在电磁场中的运动

一、洛伦兹力

实验证明，在磁感强度为 $\vec{B}$ 的磁场中，电荷为 q，运动速度为 $\vec{v}$ 的带电粒子，所受的磁场力为

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

洛伦兹力

洛伦兹力垂直于电荷的速度，因而不作功，它只改变电荷速度的方向，不改变速度的大小.

带电粒子还受到电场的作用力 $\vec{F}_e = q\vec{E}$

电场与磁场对运动电荷的作用力

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

二、带电粒子在磁场中的运动

1. 纵向匀强磁场

磁感强度 $\vec{B}$ 与带电粒子的速度 $\vec{v}$ 互相平行的磁场称为纵向磁场.

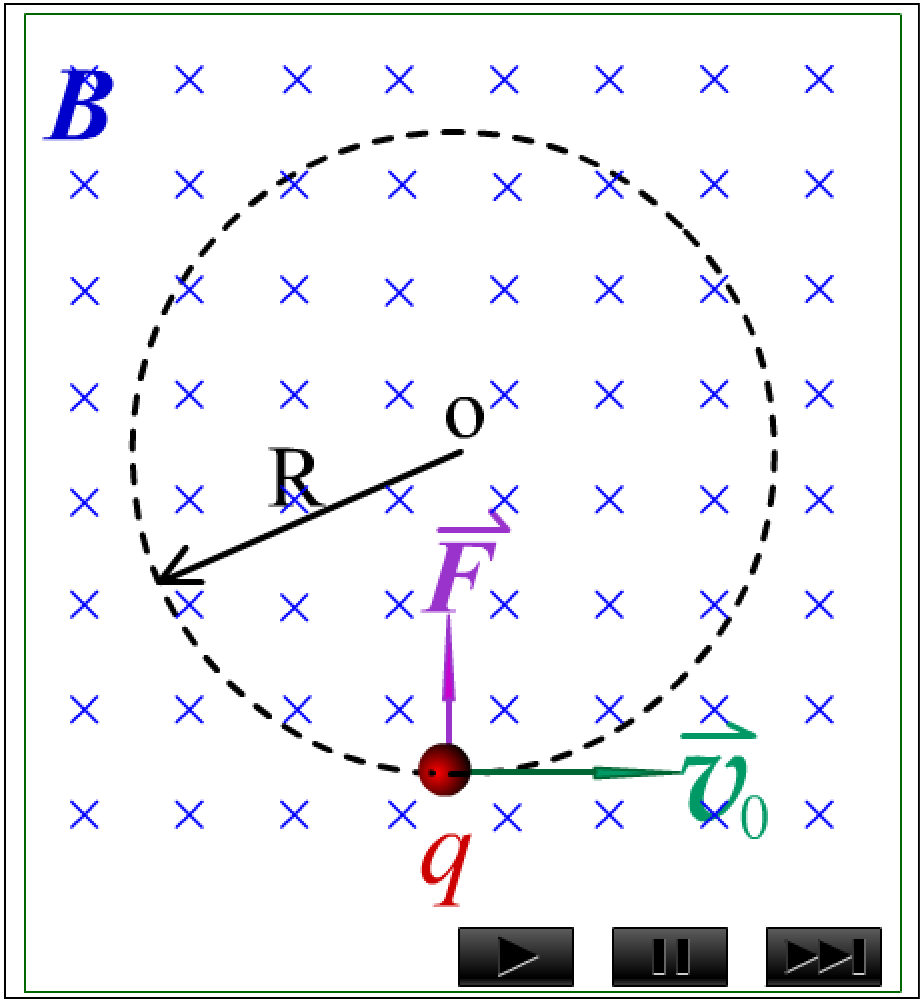
$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\sin\theta \qquad \theta = 0$$

$\therefore F = 0$ 带电粒子作匀速直线运动.

2. 横向匀强磁场

磁感强度 $\vec{B}$ 与带电粒子的速度 $\vec{v}$ 互相垂直的磁场称为横向磁场.

运动方程 $$qvB = m\frac{v^2}{R}$$



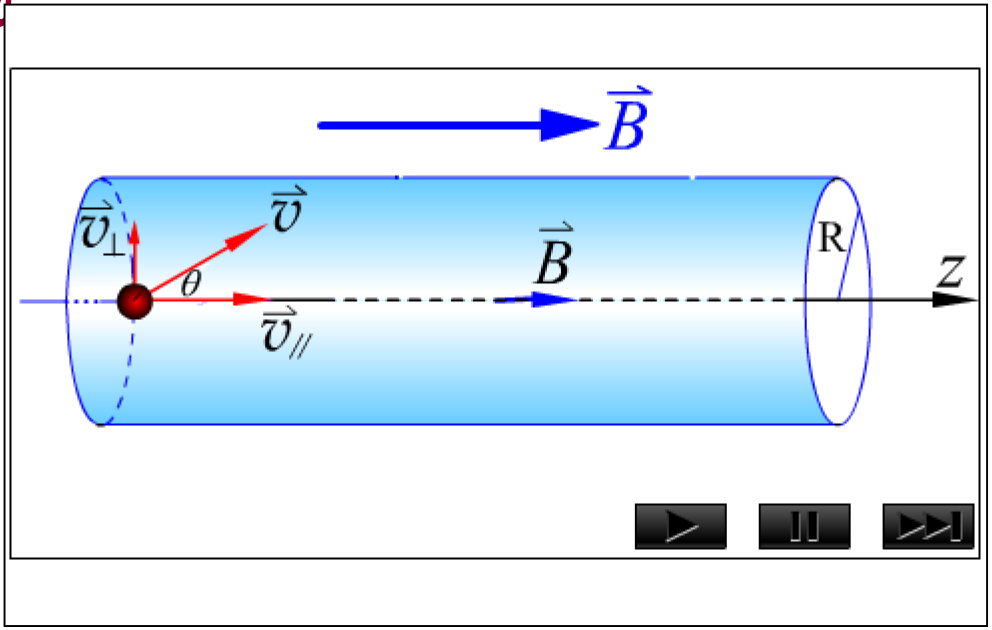
半径 $$R=\frac{mv}{qB}$$

周期 $$T=\frac{2\pi m}{qB}$$

带电粒子在磁场中作匀速圆周运动，其周期和频率与速度无关.仅取决于磁感强度和带电粒子的荷质比．因此可以应用于测定带电粒子的荷质比.

3. 任意方向的匀强磁场

$\vec{B}$与 $\vec{v}$成任意夹角



$$\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}$$

$$v_{//} = v\cos\theta$$

$$v_{\perp} = v\sin\theta$$

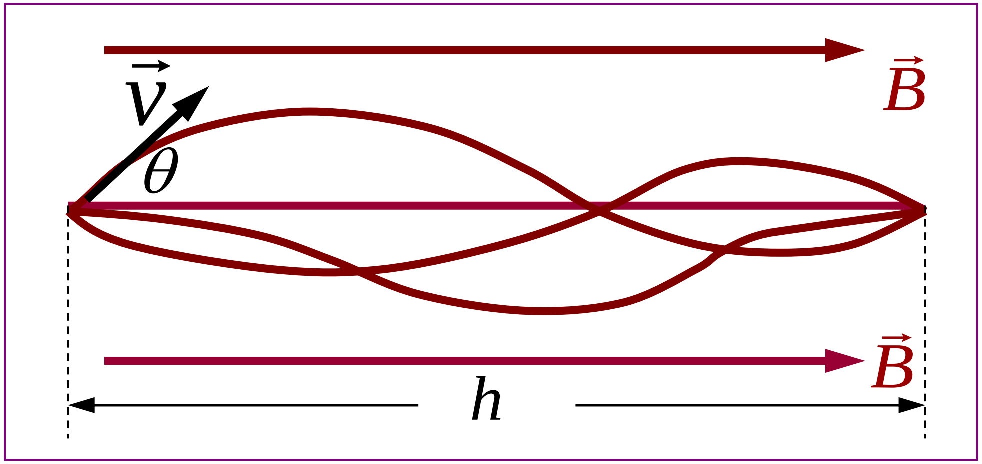
带电粒子作螺旋线运动. $R = \dfrac{mv\sin\theta}{qB}$ $T = \dfrac{2\pi m}{qB}$

螺距 $h = \dfrac{2\pi m}{qB} v\cos\theta$

当θ很小时, $h \approx \dfrac{2\pi m v}{qB}$

磁聚焦(magnetic focus)

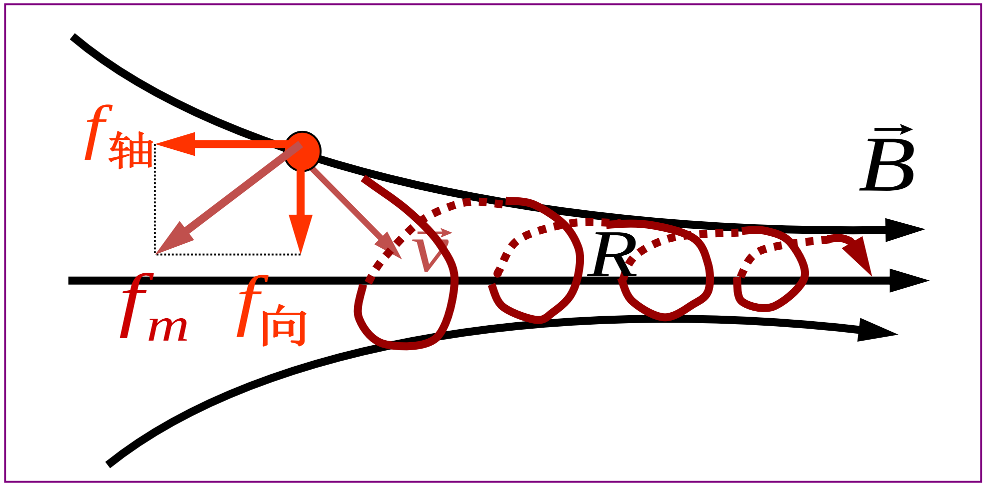
轴对称磁场(短线圈) —
磁透镜(电子显微镜)



磁约束(magnetic leash)

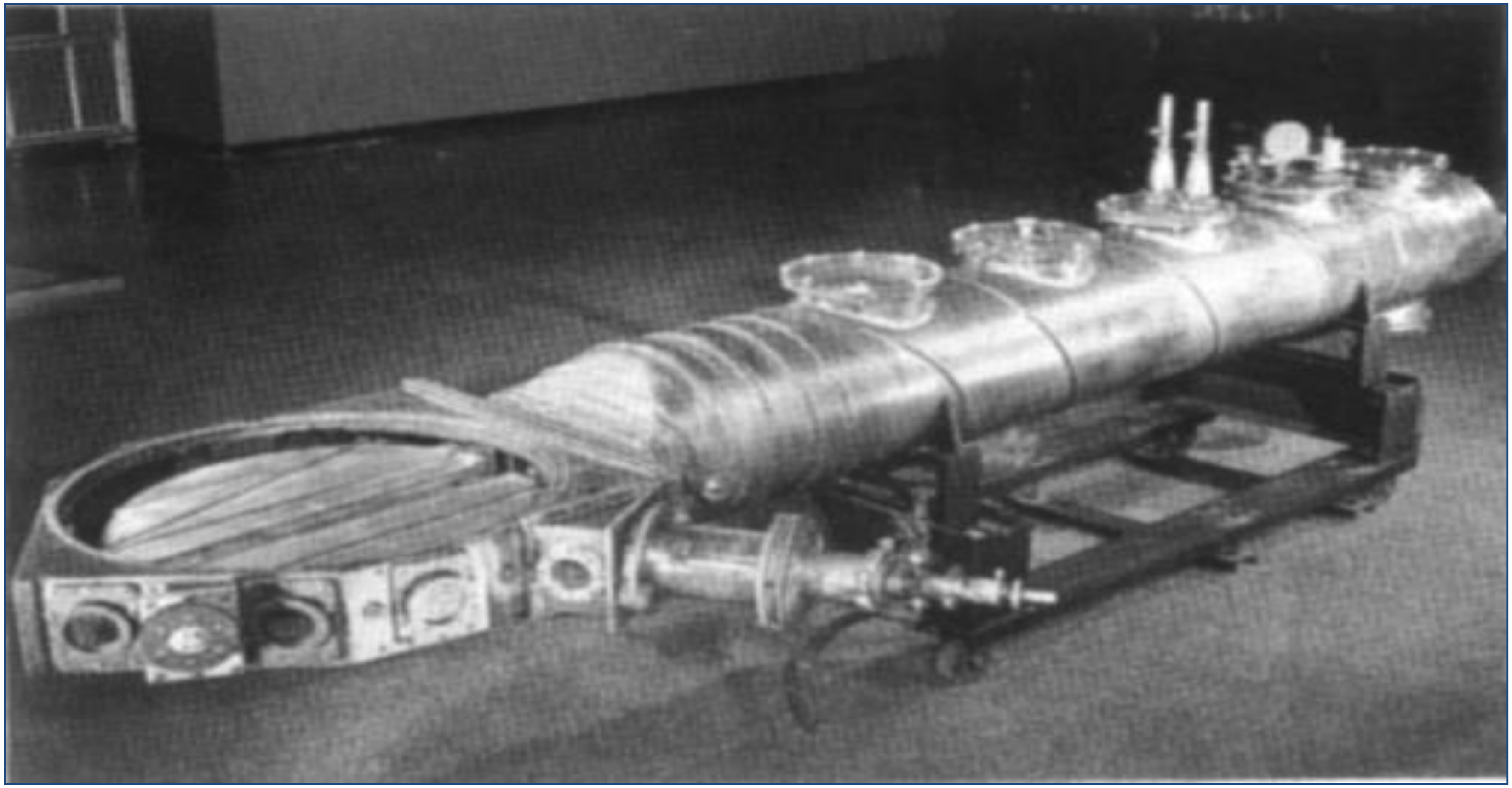
应用于受控热核聚变

(磁约束、惯性约束)



三、带电粒子在电场和磁场中的运动

1. 回旋加速器(cyclotron)



通过半圆盒的时间：

$$\tau = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{qB}$$

振荡周期：

$$T = 2\tau = \frac{2m\pi}{qB}$$

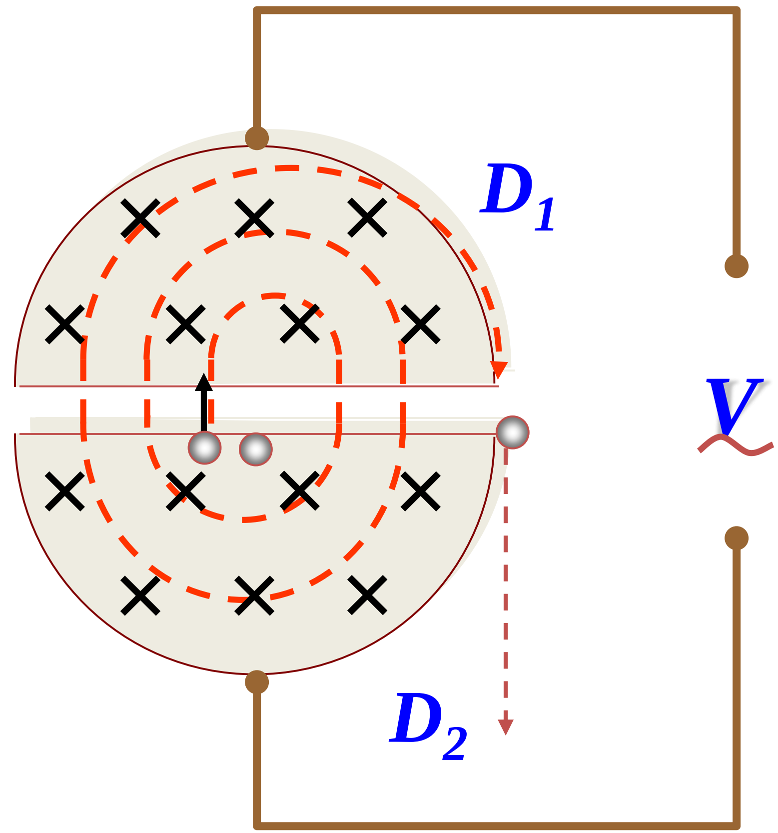
振荡频率：

$$\nu = \frac{qB}{2m\pi}$$

到达半圆盒边缘时速率：$$v = \frac{qBR}{m}$$

粒子动能：

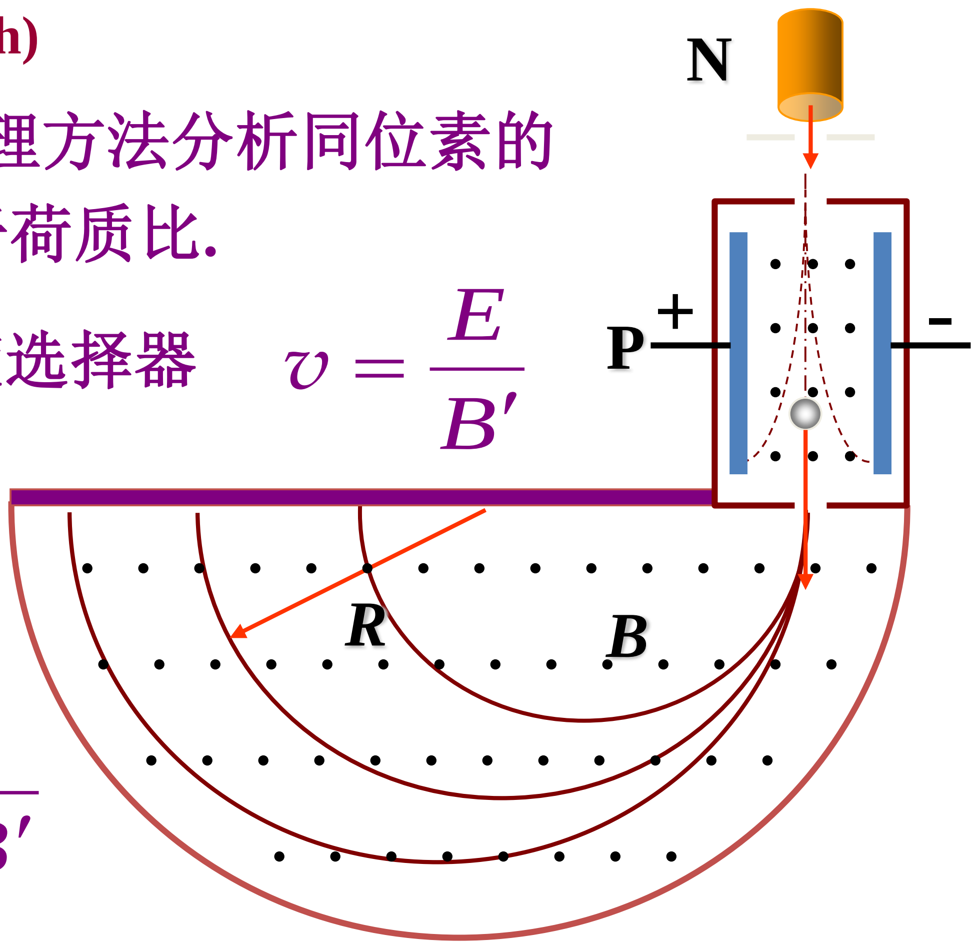
$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}}$$



4. 质谱仪(mass spectrograph)

质谱仪是一种用物理方法分析同位素的仪器, 也可用于测定离子荷质比.

N： 离子源　　**P：** 速度选择器　$v=\dfrac{E}{B'}$



$$R=\frac{mv}{qB}$$

荷质比： $$\frac{q}{m}=\frac{E}{RBB'}$$

q、v、***B***不变，***R***与***m***成正比，同位素按质量大小排列.

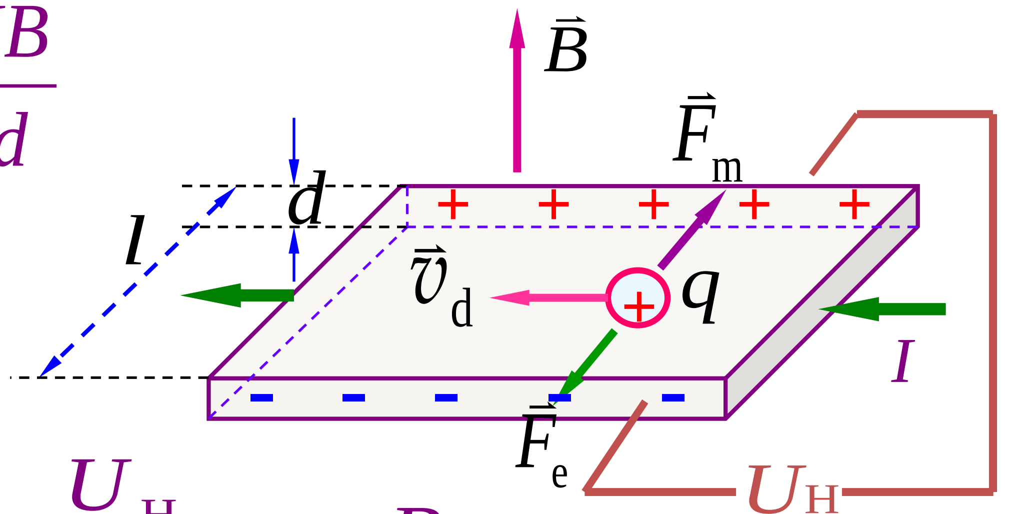
5. 霍耳效应(Hall effect)

1879年霍耳(E. H. Hall)发现, 将通有电流 *I* 的金属板(或半导体板) 置于磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中，当电流的方向垂直于磁场时．在垂直于磁场和电流方向的导体板的两端面之间会出现电势差，这一现象称为霍耳效应.

霍耳电压 $U_{\mathrm{H}} = R_{\mathrm{H}} \dfrac{IB}{d}$

R_{H} 称为霍耳系数

用洛伦兹力来说明



动态平衡时 $qE = q\dfrac{U_{\mathrm{H}}}{l} = qvB$

考虑到 $I = ldnqv \quad \therefore U_{\mathrm{H}} = \dfrac{IB}{nqd}$

所以, 霍耳系数 $\boxed{R_{\mathrm{H}} = \dfrac{1}{nq}}$

霍耳效应可用于测量磁场的磁感强度, 亦可用于测量电流, 特别是测量较大的电流. 利用霍耳效应, 还可实现磁流体发电.

14－7 磁场对载流导线的作用

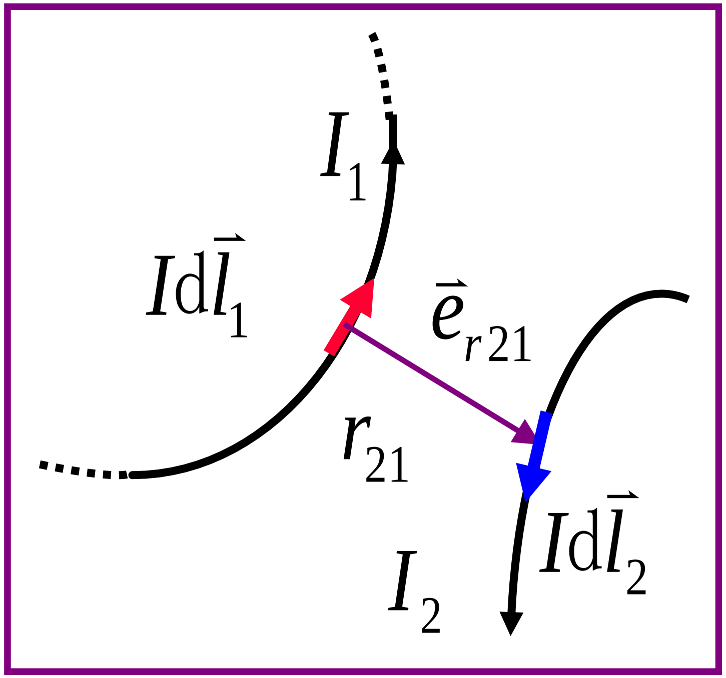
一、安培定律

载流导线在磁场中受到磁场力的本质是: 导线中作定向运动的电子在洛伦兹力的作用下, 通过导线内部的自由电子与晶格的作用, 使导线在宏观上看起来受到了磁场的作用力.

安培在1821－1825年, 在实验工作的基础上首先导出了电流元相互作用的公式

$$\mathrm{d}\vec{F}_{21} = k\frac{I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times (I_1\mathrm{d}\vec{l}_1 \times \vec{e}_{r21})}{r_{21}^{\ 2}}$$

其中 $k = \dfrac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{A}^{-2}$ **(SI制)**

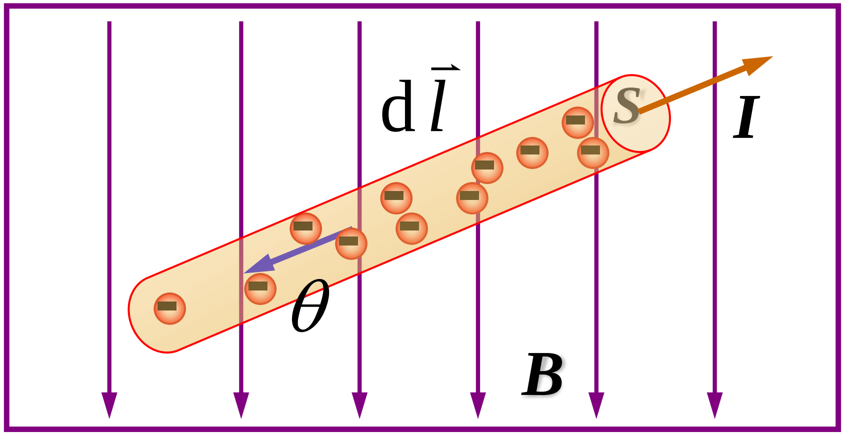


结合毕奥—萨伐尔定律式，并对L_1回路积分，可以将上式改写为**安培力公式**：

$$\mathrm{d}\vec{F}_{21} = I_2 \mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{B}$$

其中 $\vec{B}$为载流回路L_1在电流元 $I_2\mathrm{d}\vec{l}_2$ 处产生的磁感应强度.

从洛仑兹力公式也可以导出安培力公式



设导线单位体积内有 n 个载流子, 横截面积为 S, 每个载流子所带电量为 q , 定向运动速度为 v, 则在电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 中运动的载流子有 $\mathrm{d}N = nS\mathrm{d}l$ 个. 则所有载流子所受合力为:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}Nq\vec{v}\times\vec{B} = nS\mathrm{d}lq\vec{v}\times\vec{B}$$

$I = nSqv$, 并把正电荷运动的方向定为电流元方向

可得到 $$nS\mathrm{d}lq\vec{v} = I\mathrm{d}\vec{l}$$

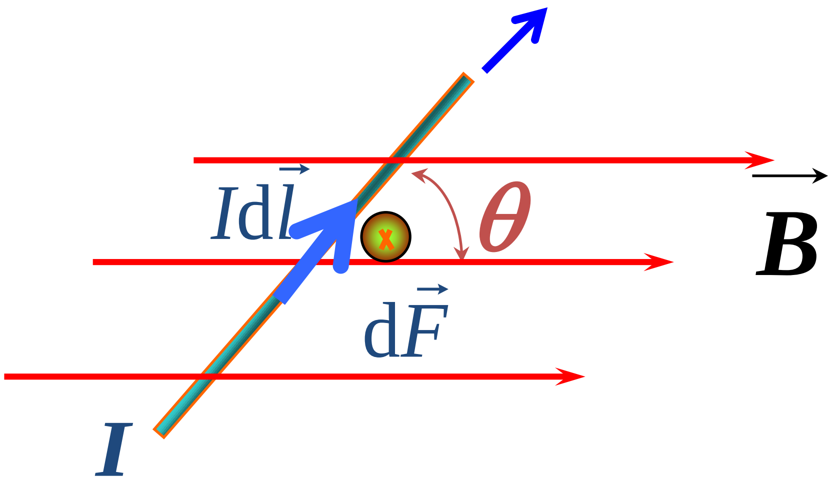
$$\therefore\ \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

安培定律

二、载流导线在磁场中受力

1、载流长直导线在均匀磁场中所受安培力

取电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$



受力大小 $\mathrm{d}F = BI\mathrm{d}l\sin\theta$

方向：垂直纸面向里

$$\vec{F} = \int_l \mathrm{d}\vec{F} = \int_l I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

2、如果载流导线所处为非均匀磁场，可取电流元，每段受力 $d\vec{F}$ **可分解为** $\mathrm{d}\vec{F}_x$ $\mathrm{d}\vec{F}_y$ $\mathrm{d}\vec{F}_z$

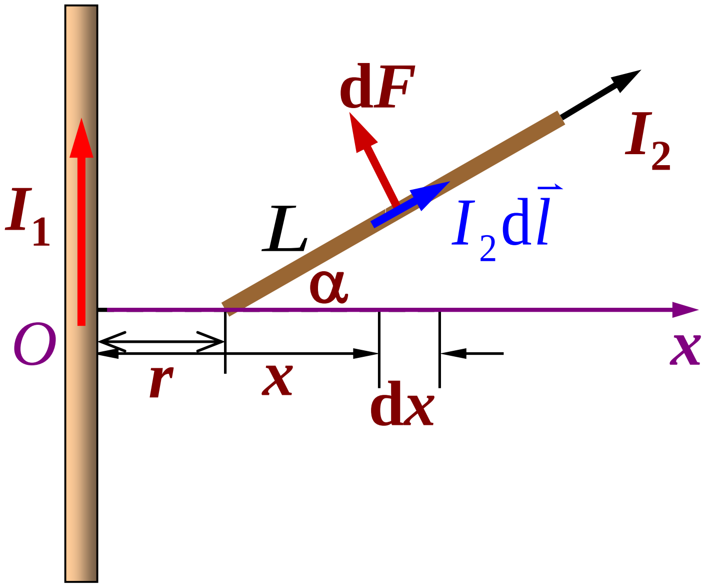
$$\vec{F}_x = \int \mathrm{d}\vec{F}_x \qquad \vec{F}_y = \int \mathrm{d}\vec{F}_y \qquad \vec{F}_z = \int \mathrm{d}\vec{F}_z$$

然后，求出合力即可。

例　无限长直载流导线通有电流 I_1,在同一平面内有长为L的载流直导线,通有电流I_2,如图所示. r, α已知，求长为L的导线所受的磁场力.

解：建立坐标系,考察I_2上电流元 $I_2\mathrm{d}\vec{l}$ 受力:

$$\mathrm{d}F = I_2\mathrm{d}lB = I_2\mathrm{d}l\,\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \qquad x = r + l\cos\alpha, \qquad \mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}$$



$$\mathrm{d}F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}$$

$$F = \int \mathrm{d}F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha}\int_r^{r+L\cos\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha}\ln\frac{r+L\cos\alpha}{r}$$

三、载流线圈在磁场中受到的磁力矩

1. 在匀强磁场中的载流线圈

根据安培定律, 分别计算载流线圈四条边受到的磁场力

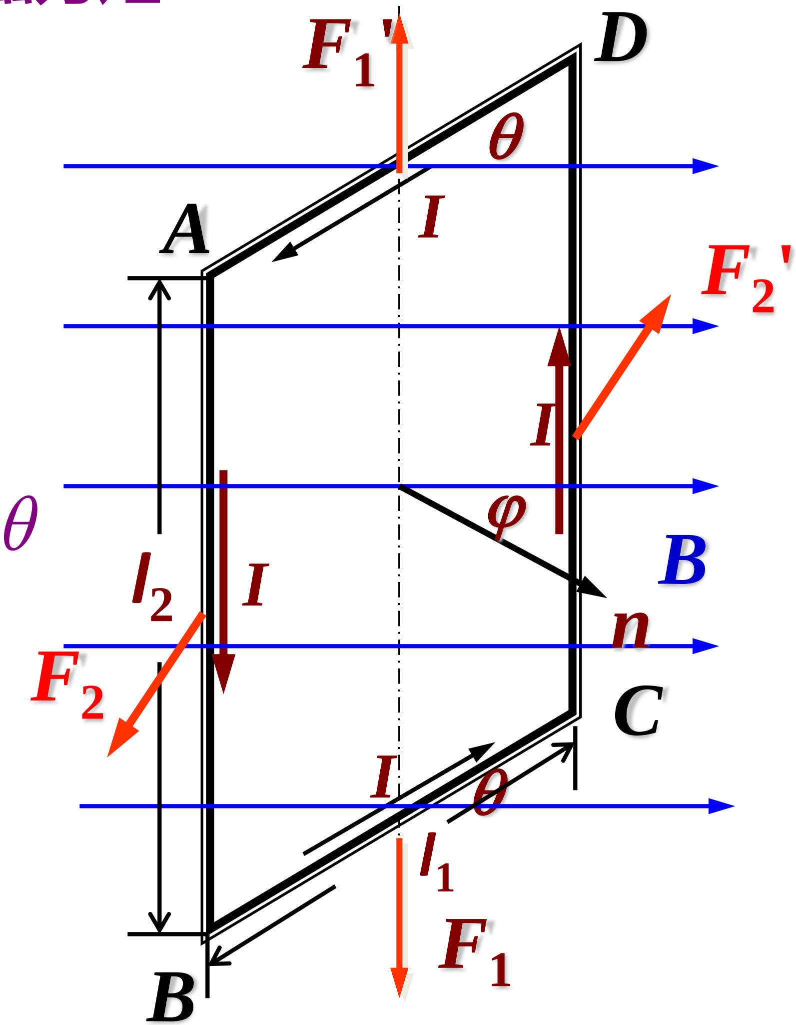
$$F_1 = BIl_1 \sin\theta$$

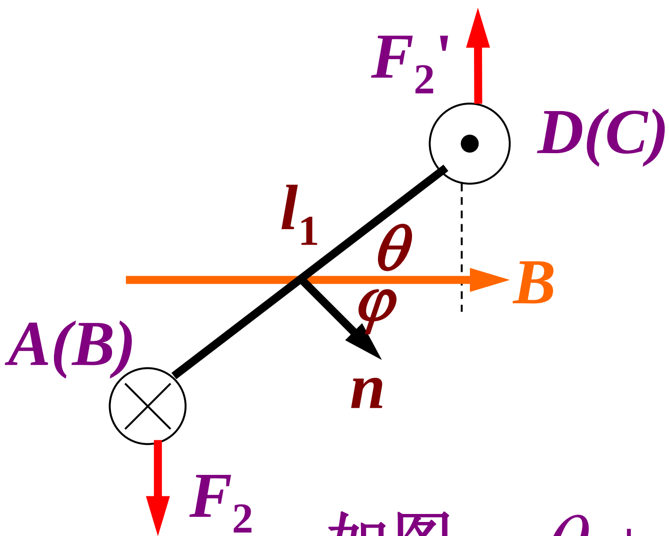
$$F_1' = BIl_1 \sin(\pi - \theta) = BIl_1 \sin\theta$$

$$F_1 = F_1'$$

$$F_2 = F_2' = BIl_2$$

F_2 和 F_2'形成一“力偶”.





力臂为: $l_1 \cos\theta$

它们作用在线圈上的力偶矩为

$$M = F_2 l_1 \cos\theta$$

$$= BIl_1 l_2 \cos\theta = BIS\cos\theta$$

如图 $\theta + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$ $\therefore M = BIS\sin\varphi$

如果线圈有*N*匝 $M = NBIS\sin\varphi = p_m B\sin\varphi$

线圈的磁矩 $p_m = NIS$,磁矩是矢量,方向是线圈平面法线的正方向（由线圈中电流流向按右手螺旋定则确定）,所以矢量式:

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

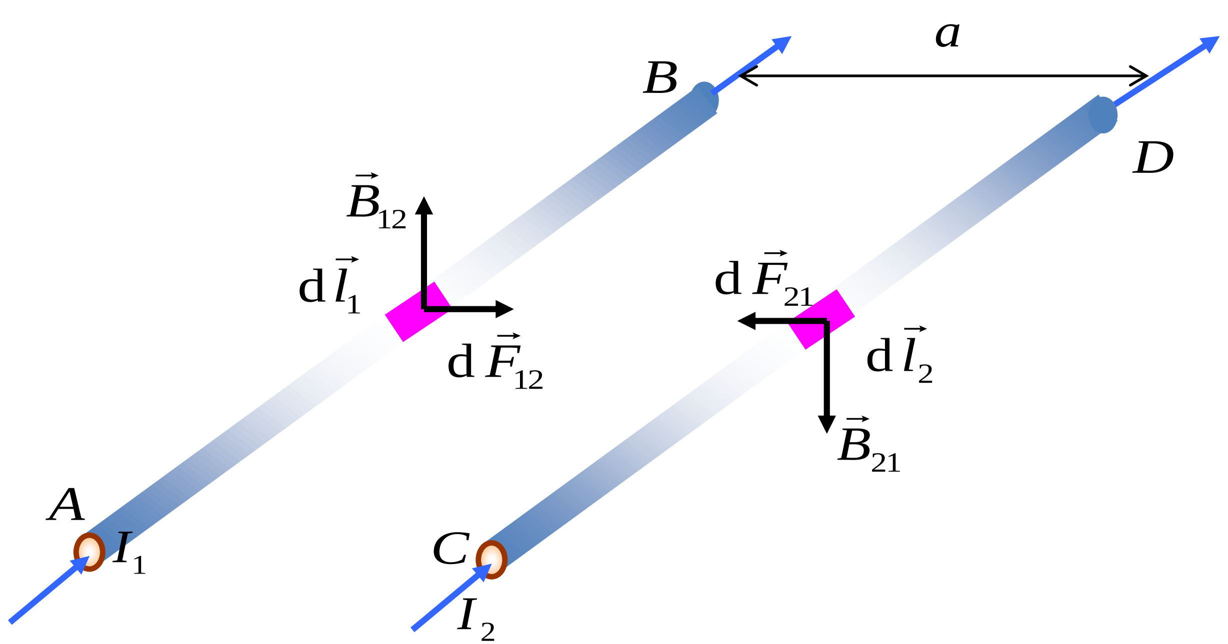
说明:

1. 磁力矩公式适用于任何闭合线圈, 但要求线圈所在处的磁场均匀.
2. 均匀磁场中, 闭合线圈所受的合力为零, 但合力矩不为零. 线圈转动.
3. 磁场对任意形状弯曲导线的作用合力等于从起点到终点间的载有同样电流的直导线所受的磁场力.

2. 在非匀强磁场中的载流线圈

非均匀磁场中, 闭合线圈所受的合力与合力矩一般不为零. 线圈平动, 转动或形变.

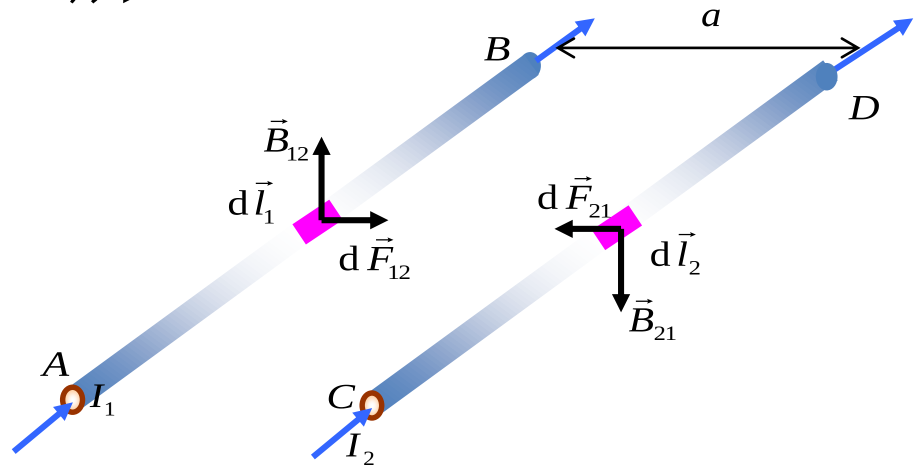
四、电流单位“安培”的定义



B_{21} 为载流导线 AB 在 $I_2\mathrm{d}l_2$ 激发的磁感应强度 $B_{21}=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I_1}{a}$

θ 为二者之间夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

计算CD受到的力，CD上所任取电流元受力：



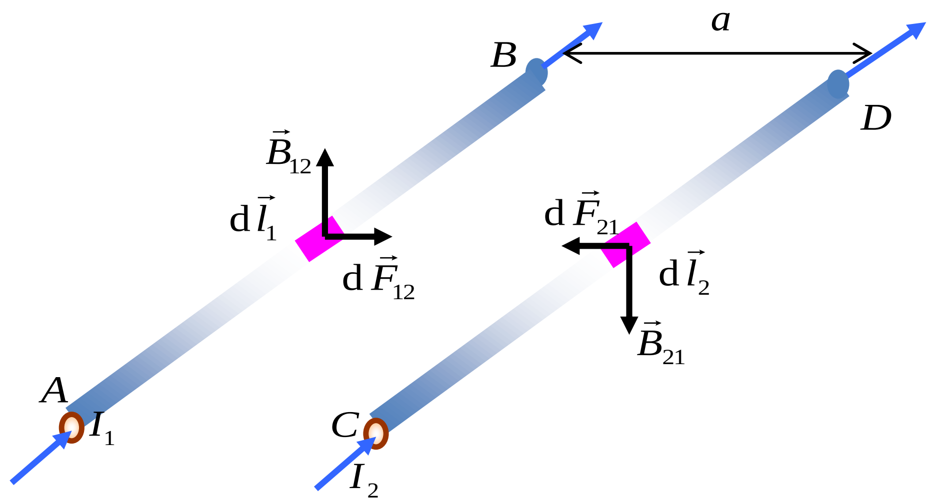
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}F_{21} &= B_{21} I_2 \,\mathrm{d}l_2 \sin\theta \\ B_{21} &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{a} \\ \sin\theta &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}F_{21} = B_{21} I_2 \,\mathrm{d}l_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{a}\mathrm{d}l_2$$

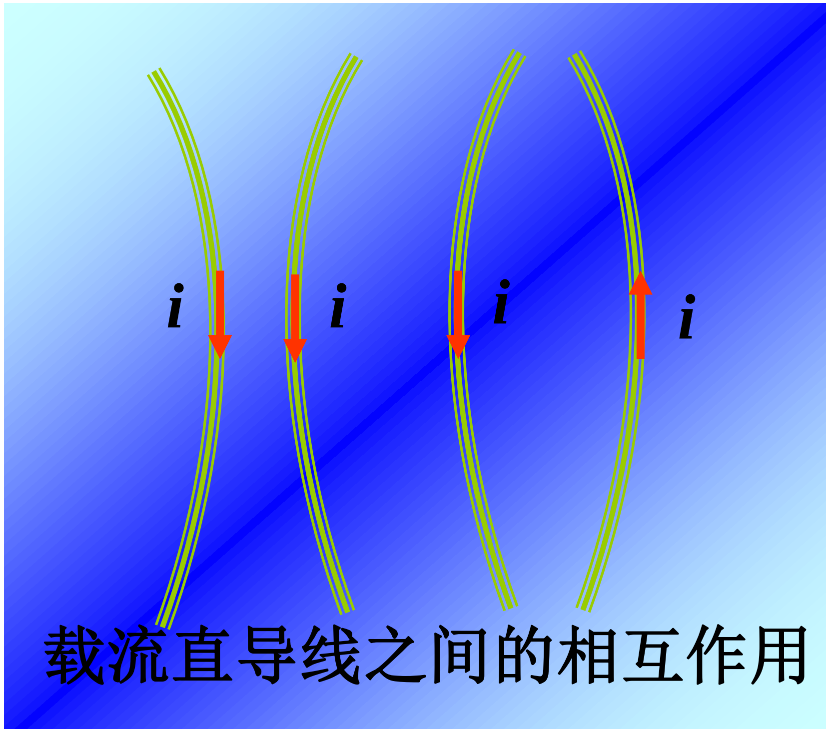
载流导线CD所受的力方向指向 $A\,B$

载流导线CD单位长度所受的力 $\boxed{\therefore \dfrac{\mathrm{d}F_{21}}{\mathrm{d}l_2} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I_1 I_2}{a}}$

同理可以证明载流导线***AB***单位长度所受的力的方向指向导线***CD***，大小为 $\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$



表明：两个同方向的平行载流直导线，通过磁场的作用，将相互吸引。反之，两个反向的平行载流直导线，通过磁场的作用，将相互排斥，而每一段导线单位长度所受的斥力的大小与这两电流同方向的引力相等。



“安培”的定义：真空中相距1m的二无限长而圆截面极小的平行直导线中载有相等的电流时，若在每米长度导线上的相互作用力正好等于2×10^{-7} N，则导线中的电流定义为1A。

14—8 磁力的功

一、磁力对运动载流导线做功

磁场力：$F = BIL$

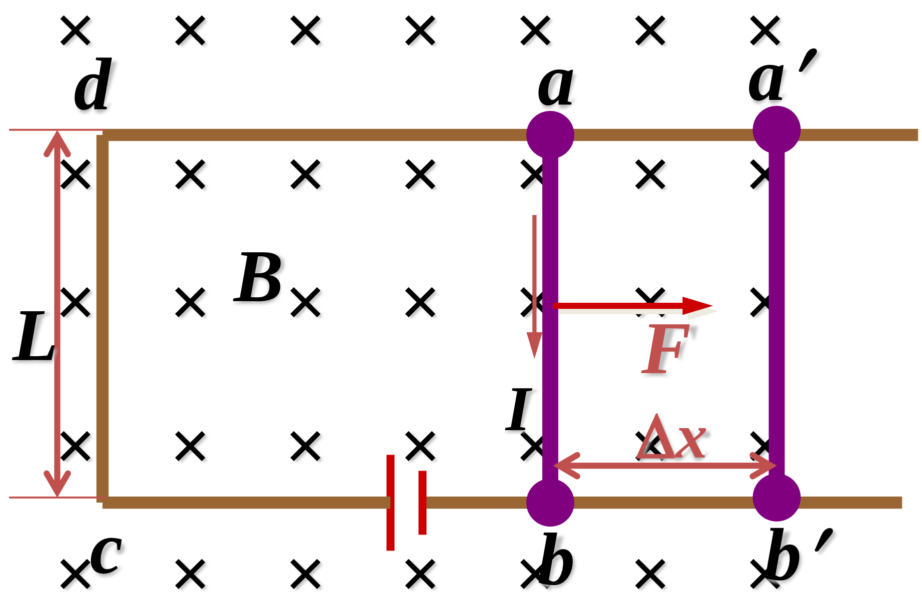
磁场力的功：

$$A = F\Delta x = BIL\Delta x$$

其中 $BL\Delta x = B\Delta S = \Delta\Phi$

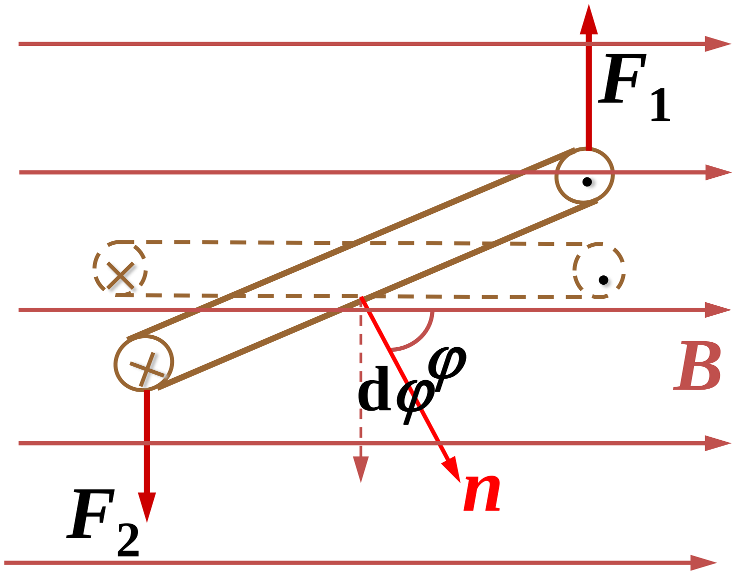
所以, 磁场力的功：

$$\boxed{A = I\Delta\Phi}$$



磁场力对运动载流导线作的功等于电流强度与闭合回路所包围面积的磁通量的增量的乘积.

二、载流线圈在磁场中转动时磁场力做功



如图所示，载流线圈位于匀强磁场中，线圈中电流为I，当线圈平面的法向方向与 $\vec{B}$ 之间夹角为 φ 时，所受到的磁力矩为

$$M = p_m B \sin\varphi = BIS \sin\varphi$$

当线圈从φ转至 $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ 时，磁力矩所作的功为

$$\mathrm{d}A = -M\mathrm{d}\varphi = -BIS\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = I\mathrm{d}(BS\cos\varphi) = I\mathrm{d}\Phi_m$$

负号表示磁力矩作负功时将使 φ 角增大.

当线圈从 φ_1转到 φ_2时，相应穿过线圈的磁通量由 Φ_{m1} 变为Φ_{m2}，磁力矩作的总功为

$$A = \int dA = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} I\mathrm{d}\Phi_m = I\Delta\Phi_m$$

注意

1) 可以证明, 对任意形状的平面闭合电流回路, 在均匀磁场中, 产生形变或处在转动过程中, 磁力或磁力矩作功均可用上式计算.

2) 当回路中电流变化时 $$A=\int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} I\mathrm{d}\,\Phi_m$$

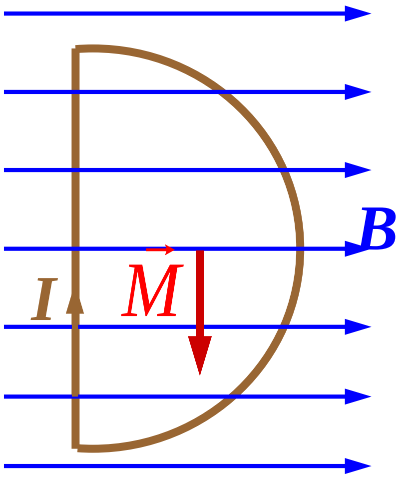
3）恒定磁场不是保守力场，磁力的功不等于磁场能的减少，而且，洛伦兹力是不做功的，磁力所作的功是消耗电源的能量来完成的。

例　一半径为R的半圆形闭合载流线圈，线圈中电流为I，放在磁感应强度为$\vec{B}$的均匀磁场中，其方向与线圈平面平行，求：(1) 求以直径为转轴，线圈所受磁力矩的大小和方向；(2) 在力矩作用下，线圈转过90°，力矩作了多少功？

解：(1) 载流线圈的磁矩为

$$p_{\mathrm{m}} = I \cdot \frac{\pi R^2}{2}$$

方向垂直线圈平面向里



载流线圈在磁场中所受的磁力矩为：

$$\vec{M} = \vec{p}_{\mathrm{m}} \times \vec{B}$$

$$M = p_m B \sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi IBR^2$$ **方向如图所示.**

(2) 线圈向外转过90°时，磁通量的增量为：

$$\Delta\Phi_m = \frac{\pi R^2}{2}B$$

所以, 磁力矩作的功：

$$A = I\Delta\Phi_m = \frac{\pi R^2}{2}IB$$

线圈向内转时，做负功。

本章作业：

14-14，14-16，14-17，14-18