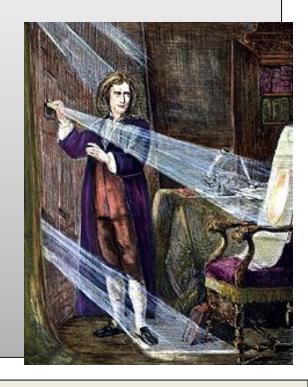
# 第十八章 几何光学

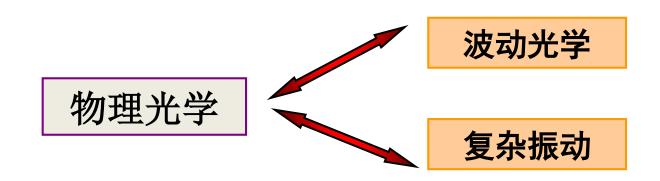
- 18-1 几何光学的基本定律
- 18-2 光在球面上的反射和折射
- 18-3 薄透镜



**几何光学** 以光的直线传播性质为基础,研究光在透明介质中的传播问题的光学.

**波动光学** 以光的波动性质为基础,研究光的传播及 其规律的光学理论.

量子光学 以光和物质相互作用时表现出的粒子性和量子性为基础而建立的光学理论.



18-1 几何光学的基本定律

# 一、几何光学的基本定律

- 1. 光的直线传播定律:光在真空或均匀介质中沿直线传播.
- 2. 光的独立传播定律:来自不同方向或不同物体发出的光线相交,对每一条光线的独立传播不发生影响.



# 3. 光的反射与折射定律:

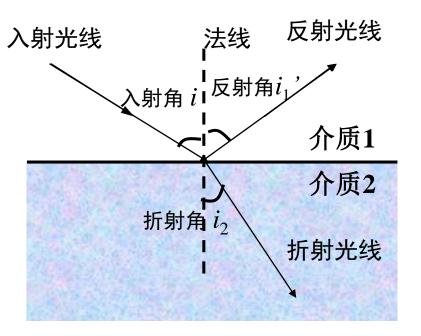
(1) 反射线与折射线均在入射面内.

$$i_1'=i_1$$

- (2) 反射角等于入射角.
- (3) 折射角与入射角正弦之比 与入射角无关,是一个与媒介 有关的常数.

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

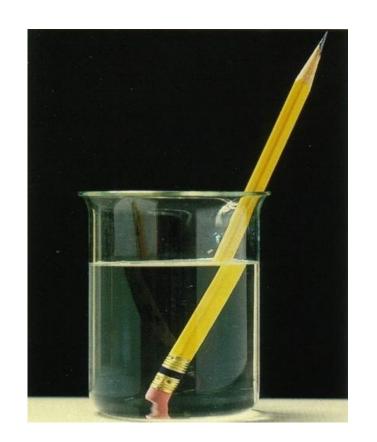


$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

 $n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$  第2种媒质相对于第一种媒质的折射率.

$$\therefore n_1 = \frac{c}{v_1}, n_2 = \frac{c}{v_2}$$

$$\therefore \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_1}{v_2}$$



几种介质的折射率

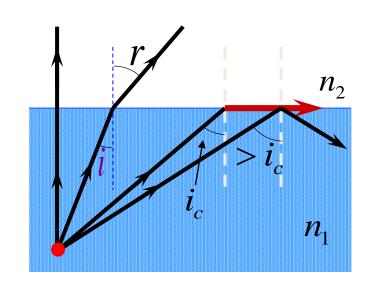
介 质	折射率	介 质	折射率
金刚石	2.42	水	1.33
玻 璃	1.50 ~ 1.75	酒 精	1.36
水晶	1.54 ~ 1.56	乙醚	1.35
岩 盐	1.54	水蒸气	1.026
冰	1.31	空 气	1.0003

介质折射率不仅与介质种类有关,而且与光波波长有关.在同一种介质中波长越短的光折射率越大.故同一介质对紫光折射率最大,对红方折射率最小.

# 二、全反射

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \quad$$
 当
$$n_1 > n_2 \quad$$
 有  $i < r$ 

**临界角**(critical angle)  $i_c$  相对于 $90^\circ$  折射角的入射角.

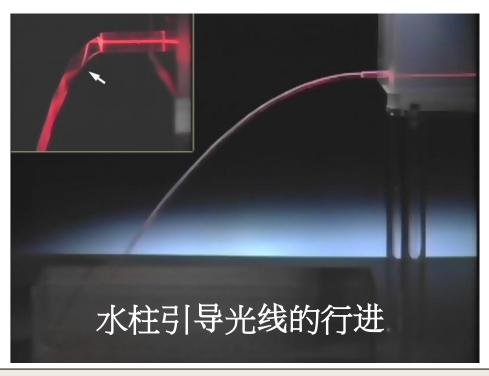


**全反射**(total reflection) 当入射角 i 大于临界角 ic 时,将不会出现折射光,入射光的能量全部反射回原来介质的现象.

$$i_{\rm c} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

# 产生全反射的条件:

- 1. 光需由光密介质射向光疏介质.
- 2. 入射角大于临界角.





# 18-2 光在球面上的反射和折射

# 一、实像与虚像 实物与虚物

- 1. 同心光束:各光线本身或其延长线相交于一点,这样的光束称为同心光束(concentric beam).
- 2. 光具组:变换入射同心光束的反射面或折射面的组合叫做光具组.

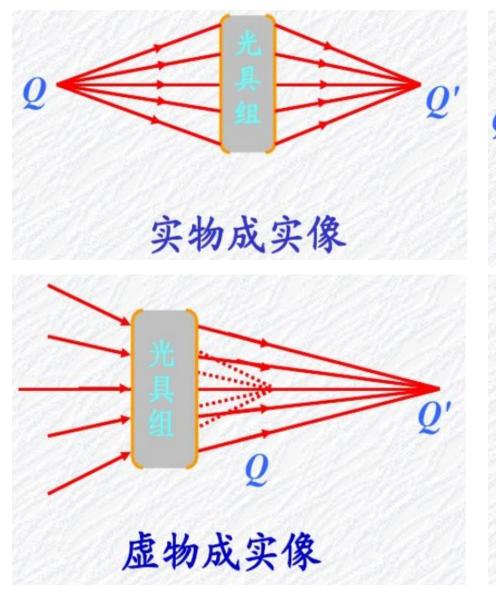
### 3. 物和像

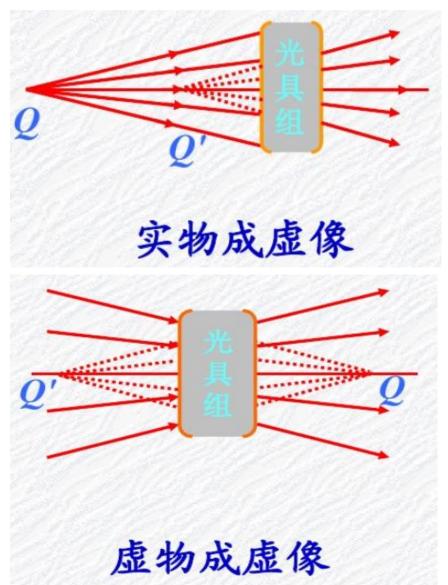
实物: 未经光学系统变换的入射的发散同心光束的中心.

虚物: 未经光学系统变换的入射的会聚同心光束的中心.

实像: 经光学系统变换后出射的会聚同心光束的中心.

虚像: 经光学系统变换后出射的发散同心光束的中心.

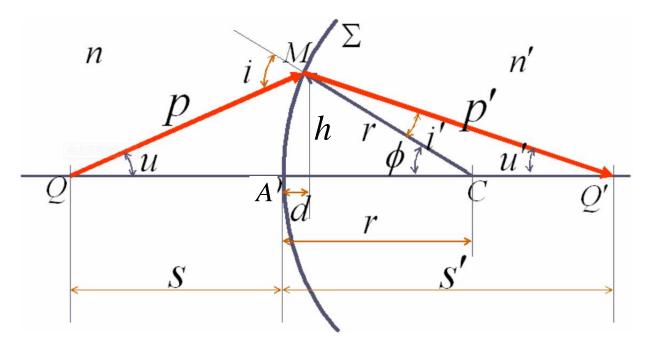




#### 二、光在单球面上的折射

傍轴光线(paraxial ray) 与光轴夹角较小,并靠近光轴的光线.

傍轴光线条件下,近似成像是可能的.

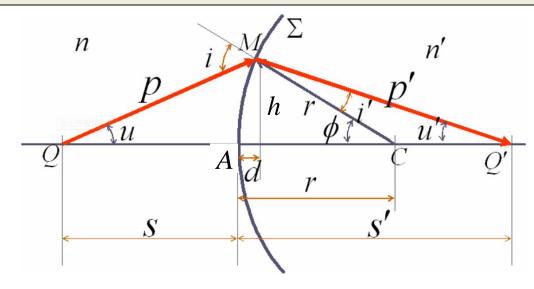


傍轴条件 
$$h^2 << s^2, s'^2, r^2;$$
  $u^2, u'^2, \varphi^2 << 1$ 

$$u^2, u'^2, \varphi^2 << 1$$

物距s: 物点Q到球面顶点A的距离;

像距s':像点Q'与球面顶点A的距离。



$$i = u + \phi$$
  $n \sin i = n' \sin i'$ 

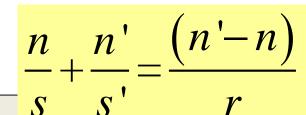
 $\phi = i' + u'$ 

$$\therefore u \approx \tan u \approx \frac{h}{s}$$
  $u' \approx \tan u' \approx \frac{h}{s'}$ 

 $ni = n'i' \implies n(u + \phi) = n'(\phi - u')$ 

考虑傍轴光线, 所有角度都很小

$$nu+n'u'=(n'-n)\phi$$



 $\phi \approx \sin \phi \approx \frac{h}{}$ 

**Page** 

傍轴区域(paraxial region) 的物象关系:

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{r}$$

光焦度(focal power): 表征球面屈折光线本领的常数.

$$\Phi = \frac{n' - n}{r}$$
 单位:屈光度(m<sup>-1</sup>)

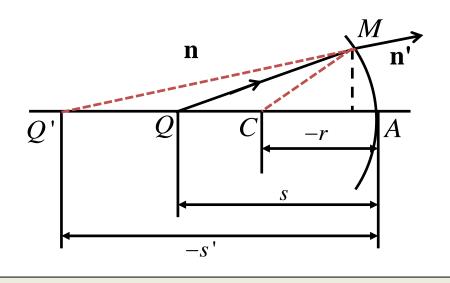
 $\Phi > 0$ 表示折射球面对平行光轴的平行光束是会聚的  $\Phi < 0$ 表示折射球面对平行光轴的平行光束是发散的

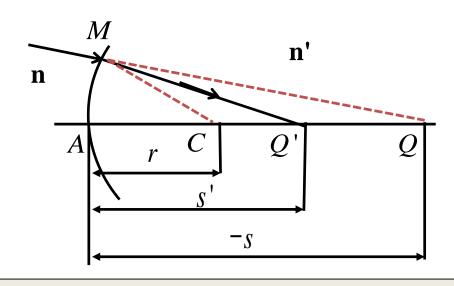
$$r \to \infty$$
,  $\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = 0$  单个平面折射成像公式

几何光学常用的符号规则: 实正虚负

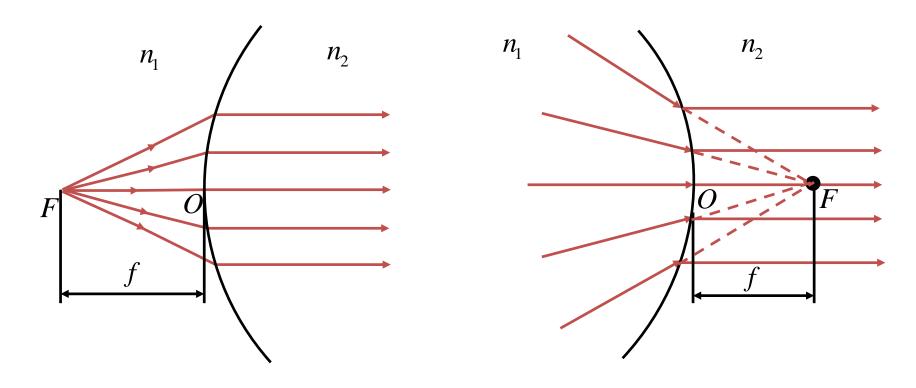
# 入射光从左到右:

- (1) 点Q在顶点A左侧(实物),s>0;右侧(虚物),s<0;
- (2) 点Q'在顶点A左侧(虚像),s'<0;右侧(实像),s'>0;
- (3) 球心C在顶点A左侧, 半径r<0;右侧, r>0;
- (4) 焦距的正负号与物距s 和像距s' 定义相同: 实正虚负.



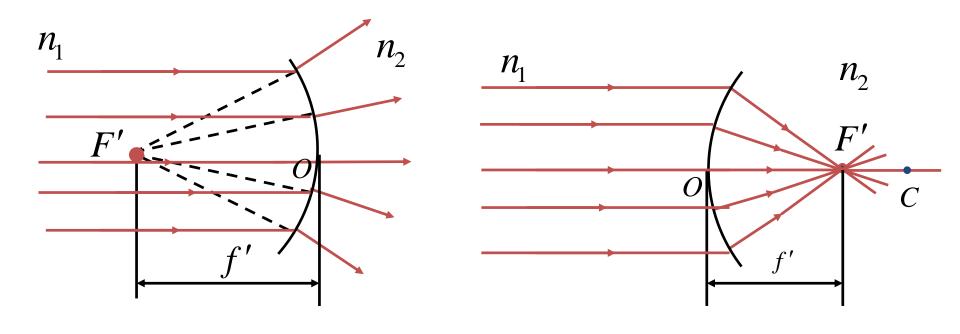


ightharpoonup轴上无穷远像点的共轭点称为物方焦点,记作F,  $S' = \infty$  S = f 它到顶点O的距离为物方焦距f



物方焦距 
$$f = s = \frac{n}{n'-n}r$$

ightharpoonup轴上无穷远物点的共轭点称为像方焦点,记作F',  $s = \infty$  s' = f' 它到顶点O的距离为像方焦距f'



像方焦距 
$$f'=s'=\frac{n'}{n'-n}r$$

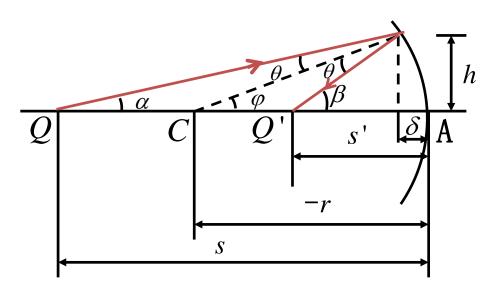
物方焦距 
$$f = s = \frac{n}{n'-n} r$$
像方焦距  $f' = s' = \frac{n'}{n'-n} r$ 

$$f' = \frac{n'}{n'-n} r$$

$$\therefore \frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1$$

### 对于反射情况,反射光从右到左:

点Q'在顶点A左侧(实像),s'>0;点Q'在顶点A右侧(虚像),s'<0.



由图中可得 
$$\beta = \varphi + \theta$$
,  $\varphi = \alpha + \theta \implies \alpha + \beta = 2\varphi$ 

$$\tan \alpha = \frac{h}{(s - \delta)}$$
  $\tan \beta = \frac{h}{(s' - \delta)}$   $\tan \varphi = \frac{h}{-r - \delta}$ 

由于是傍轴光线,所有角度都很小,

$$\alpha = \frac{h}{s}, \beta = \frac{h}{s'}, \varphi = \frac{h}{-r}$$

代入  $\alpha + \beta = 2\varphi$  得

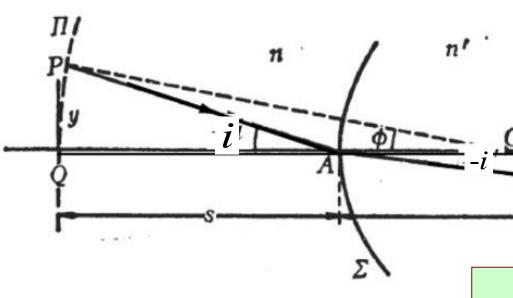
反射球面成像的物像公式

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{r}$$

$$r \to \infty, \quad \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = 0$$

平面镜成像公式





如图,P点和P'点共轭 轴外共轭点的傍轴条件  $y^2, y'^2 << s^2, s'^2, r^2;$ 

横向放大率: 像高与物高之比

$$V = \frac{y'}{y}$$

若P或P'点在光轴之上,y或y'大于零,反之小于零.

V > 0 像与物同侧,像正立

|V| > 1 像放大

V < 0 像与物不同侧,像倒立

|V| < 1 像缩小

显然 
$$\tan i' \approx i' = -\frac{y'}{s'}, i = \frac{y}{s}$$

$$n \sin i = n \sin i', ni \approx n'i'$$

# 折射球面横向放大率

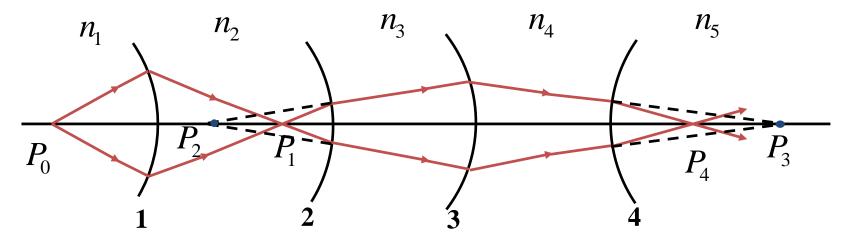
$$V = -\frac{ns'}{n's}$$

球面反射 
$$n=n'$$
  $V=-\frac{s'}{s}$ 

$$V = -\frac{s'}{s}$$

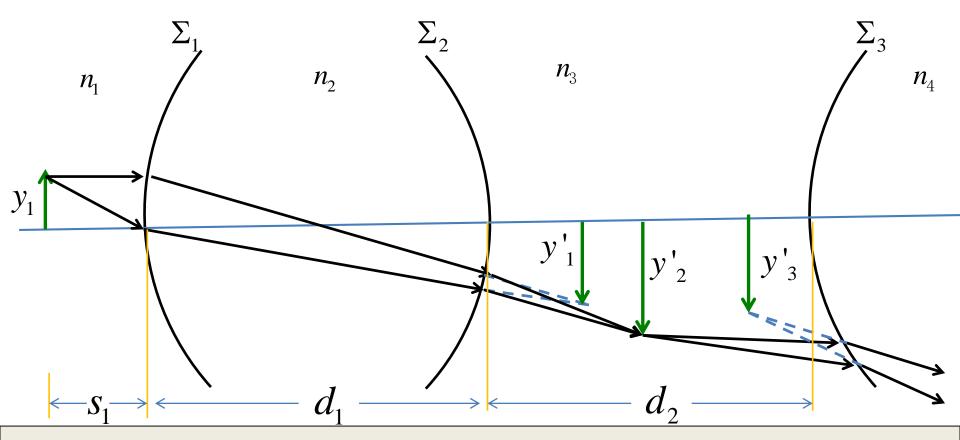
# ■共轴球面系统成像:**逐次成像法**

经共轴球面系统成像的问题,可依次重复利用单球面成像公式而得出结果。要注意各次的物距像距等有不同的起算顶点 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、...。



共轴球面系统的总的横向放大率等于各个球面放大率的乘积,即  $V = V_1 V_2 V_3 \cdots$ 

例题1: 如图所示为三个折射球面组成的共轴系统, $n_{1}=1$ ,  $n_{2}=1.3$ ,  $n_{3}=1.5$ ,  $n_{4}=1$ ,  $r_{1}=3$ cm,  $r_{2}=8$ cm,  $r_{3}=10$ cm,  $d_{1}=26$ cm,  $d_{2}=30$ cm, 物高5cm置于第一折射面前15cm处,求经过该系统后,像的位置、大小和虚实。



解:对于第一折射球面 
$$\Sigma_1$$

$$s_1 > 0, r_1 > 0$$

$$\frac{n_2}{s_1'} + \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}, \implies s_1' = 39 \text{cm}()$$

$$V_1 = \frac{y'_1}{y_1} = -\frac{n_1 s'_1}{n_2 s_1} = -\frac{1 \times 39}{1.3 \times 15} = -2(\cancel{1})$$

$$\therefore y'_1 = -2 \times 5 = -10$$
cm

对于第二折射球面  $\Sigma$ ,  $s_2 < 0$ (虚物),  $r_2 < 0$ 

$$s_2 < 0$$
(虚物),  $r_2 < 0$ 

$$\frac{n_3}{s'_2} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_3 - n_2}{r_2}, \quad \frac{1.5}{s'_2} + \frac{1.3}{-13} = \frac{1.5 - 1.3}{-8}, s'_2 = 20 \text{cm}()$$

$$V_2 = \frac{y'_2}{y_2} = -\frac{n_2 s'_2}{n_3 s_2} = \frac{4}{3} (\vec{x})$$

对于第三折射球面 
$$\Sigma_3$$
  $s_3 > 0, r_3 > 0$ 

$$s_3 > 0, r_3 > 0$$

$$\frac{n_4}{s'_3} + \frac{n_3}{s_3} = \frac{n_4 - n_3}{r_3}, \qquad \frac{1}{s'_3} + \frac{1.5}{10} = \frac{1 - 1.5}{10}, s'_3 = -5 \text{cm}($$
 虚像)

$$V_3 = -\frac{n_3 s_3'}{n_4 s_3} = -\frac{1.5 \times (-5)}{1 \times 10} = \frac{3}{4} (\text{IE})$$

### 因此,对于共轴球面系统

$$V = V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 = -2 \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = -2$$

$$y' = Vy_1 = -2 \times 5 = -10 \text{cm}(倒立)$$

例题2: 如图所示,一平行平面的玻璃板厚d=2cm,n=1.5,物点P距离第一板面5cm,当人眼沿垂直于玻璃板方向隔着玻璃板看物点P,则P移动了多远?

解: P点经第一折射平面  $\Sigma_1$ ,则

$$\frac{n'}{s'_1} + \frac{n}{s_1} = 0$$

$$s'_1 = -n's_1 = -7.5$$
cm(虚像)

P1点经第二折射平面  $\Sigma_2$ ,则

$$s_2 = 9.5 \text{cm} > 0$$
  $\frac{1}{s'_2} + \frac{1.5}{9.5} = 0$ ,  $s'_2 = -6\frac{1}{3} \text{cm}($ £\$\psi\)

$$\therefore \Delta P = PP_2 = 7 - 6\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{cm}(移近)$$

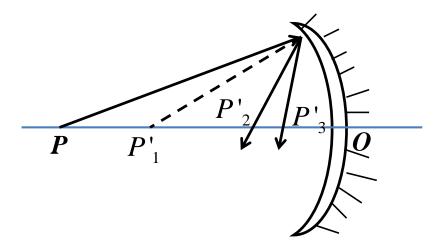
例题3:如图所示,一个薄凸透镜的两球表面半径分别为 $r_{1}=20$ cm, $r_{2}=15$ cm,其折射率n=1.5,并在 $r_{2}$ 后表面镀铝,在前表面前40cm的轴上放高1cm的像,求最终的成像。

分析:由于是薄凸透镜,两表面的顶点重合,记作*O*,本题成像过程包括两次折射和一次反射。

解: 经第一表面折射成像,则

$$s_1 > 0, r_1 < 0$$

$$V_1 = -\frac{ns'_1}{n'_1 s_1} = \frac{1}{2} (\vec{\mathbb{E}} \vec{\Sigma})$$



 $P_1$ 经后凸镜反射成像,因为反射光线从右到左,则  $s_2 > 0, r_2 < 0$ 

$$\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{s_2} = -\frac{2}{r_2} \longrightarrow \frac{1}{s'_2} + \frac{1}{30} = -\frac{2}{-15}, s'_2 = 10cm(实像)$$

$$V_2 = -\frac{s'_2}{s_2} = -\frac{1}{3}$$
(倒立)

 $P'_2$ 再经前表面折射成像,此时入射光线从右到左,则  $s_3 < 0, r_1 > 0$ 

$$\frac{1}{s'_{3}} + \frac{1.5}{-10} = \frac{1 - 1.5}{20}, s'_{3} = 8cm(实像) \qquad V_{3} = \frac{6}{5} \quad (正立)$$

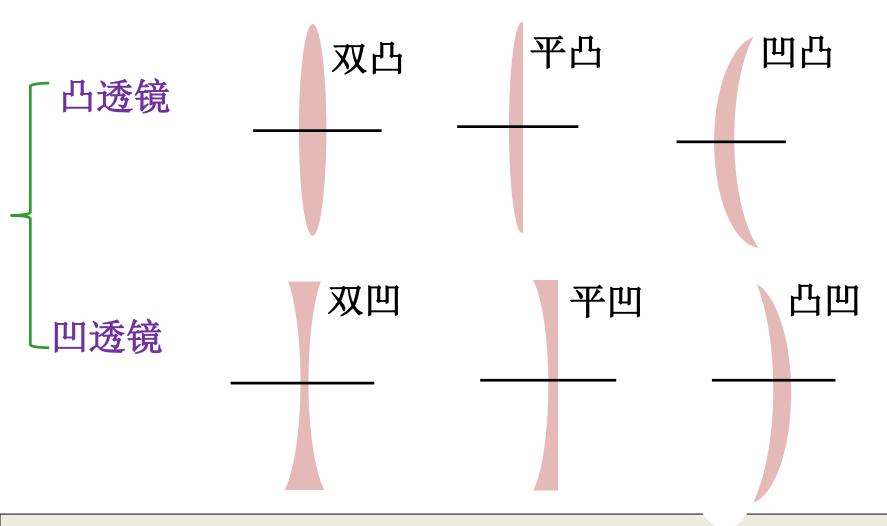
因此,

$$V = V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 = -\frac{1}{3}$$
 (倒立、缩小、实像)  
 $y' = yV = -\frac{1}{3}$  cm

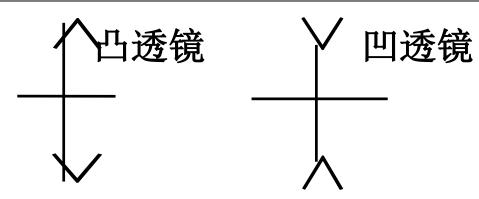
**Page** 

# 18-3 薄透镜

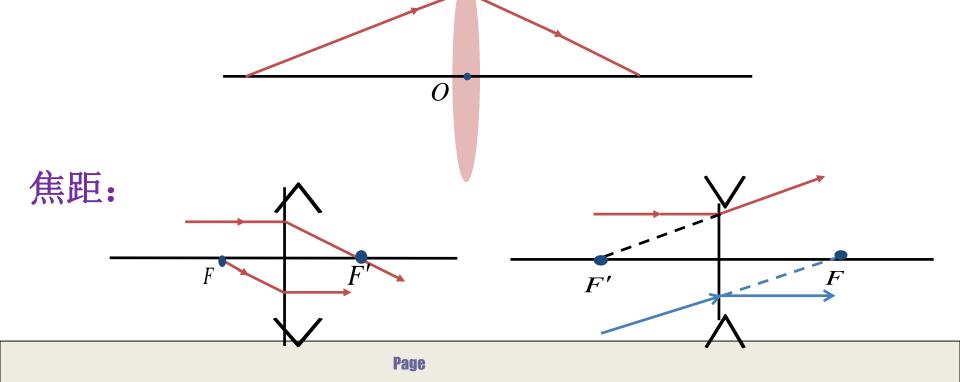
由两个折射曲面为界面组成的透明光具组称为透镜



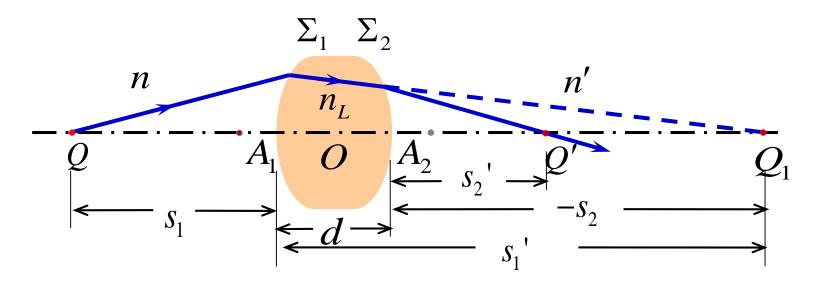




光心: 薄透镜的两球面的主光轴重合, 两顶点重合为一点



### 一、焦距公式



 $d = \overline{A_1 A_2}$  为透镜厚度,d 很小时,称为薄透镜.

$$d \to 0$$
  $\overline{A_1 A_2}$  重合为 $O($ 光心 $)$ 

$$-s_2 = s_1' - d \longrightarrow -s_2 = s_1'$$

### 由两折射球面的物像公式

即得薄透镜的**焦距** 
$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1' + f_2}, f' = \frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1' + f_2}$$
 (1)

把单球面的焦距公式用于透镜两界面,有

$$f_{1} = \frac{nr_{1}}{n_{L} - n}$$

$$f_{2} = \frac{n_{L}r_{2}}{n' - n_{L}}$$

$$f_{1}' = \frac{n_{L}r_{1}}{n_{L} - n}$$

$$f_{1}' = \frac{n' r_{2}}{n' - n_{L}}$$

# 代入到(1), 得薄透镜的焦距公式

$$f = \frac{n}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}}, f' = \frac{n'}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}},$$

$$r_1 = \frac{n'}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}}, f' = \frac{n'}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}},$$

$$r_1 = \frac{n'}{r_2}$$

在物、像方折射率 
$$n=n'\approx 1$$
 时  $f=f'=\frac{1}{(n_L-1)(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})}$ 

上式为薄透镜焦距 f 与其折射率和曲率半径的关系,称为**磨镜** 者公式。

### 二、成像公式

$$\begin{cases}
f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1' + f_2}, f' = \frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1' + f_2} \\
f' = \frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1' + f_2}, f' = \frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1' + f_2}
\end{cases}$$

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

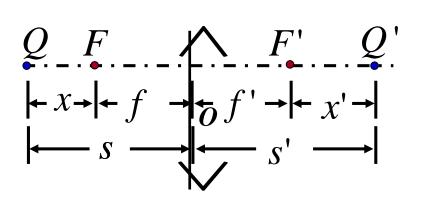
$$\frac{f'_1 \cdot f_2'}{s'} + \frac{f_1 \cdot f_2}{s} = f_1' + f_2$$

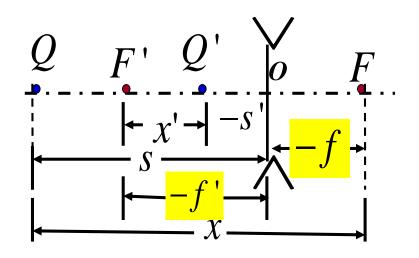
当两侧媒质相同,即 n = n', ∴ f' = f

$$\implies \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

# 薄透镜物像公式的高斯形式

注意:各个量的正负与单个折射球面物像公式中的符号法则一致,各个量从光心算起!





# ■ 薄透镜物像公式的牛顿形式

如果两焦点分别作为计算物距和像距的起点,可得薄透镜物像公式的牛顿形式

$$xx' = ff'$$

## 三、薄透镜的放大率

透镜两球面的横向放大率  $V_1 = -\frac{ns_1'}{n_L s_1}, V_2 = -\frac{n_L s_2'}{n_1' s_2}$ 

总的横向放大率  $(s = s_1, s' = s_2', -s_2 = s_1')$ 

$$V = V_1 \cdot V_2 = -\frac{ns'}{n's} = -\frac{fs'}{f's}$$

若用x, x'来表示,则有  $V = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$ 

如果物、像方折射率相等,即f = f'时,上式化为

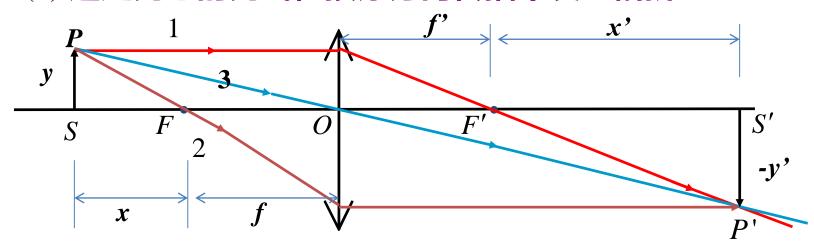
$$V = -\frac{S'}{S}$$

薄透镜横向放大率公式

#### 四、薄透镜成像的作图法

#### □ 薄透镜成像作图法的三条特殊光线:

- (1) 与主光轴平行的入射光线,折射后通过像方焦点F';
- (2) 通过物方焦点F 的光线,折射后平行于主光轴;
- (3) 通过光心的光线,按原方向传播不发生偏折.

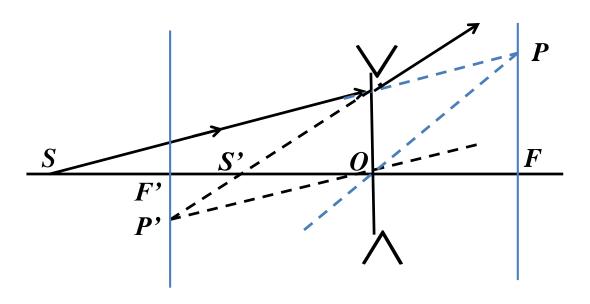


#### 根据三角形相似原理,薄透镜的横向放大率为

$$V = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x}$$

# 口 物点位于光轴上,可以利用焦平面和副光轴的性质来确定像点:

(1) 与副光轴(通过光心的任一条直线)平行的入射光线,折射后会聚在副光轴和像方焦平面的焦点上 (图中P'点);



(2) 而物方焦平面上任意点P 发出的光,经透镜折射后,出射光线与过P点的副光轴平行(图中的 OP).

## 五、密接薄透镜组

考虑最简单的两个薄透镜紧密接触的情况(假定相互粘合的两个表面的的曲率吻合),使用高斯公式两次,两次的成像公

式分别为

$$\frac{1}{s_1'} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f_1}, \quad \frac{1}{s_2'} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f_2}$$

紧密接触,所以  $s_2 = -s_1$ 

$$\therefore \frac{1}{s_2'} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

与 $s_2' = \infty$ 对应的 $s_1$ 即为复合透镜的焦距f为

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

即密接复合透镜焦距的倒数是组成它的透镜焦距倒数之和。

通常把焦距的倒数  $\frac{1}{f}$  称为透镜的光焦度  $\Phi$ 

密接复合透镜的光焦度是组成它的透镜光焦度之和,即

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2$$

光焦度的单位是屈光度,用D表示。若透镜焦距以m为单位, 其倒数的单位就是D

上述关于光焦度的定义是假定透镜的物像折射率n,n'都等于1的情形。对于更普遍的透镜光焦度的定义为

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = \frac{n}{f}$$

单个折射球面的光焦度定义为  $\Phi = \frac{n'}{f'} = \frac{n}{f} = \frac{n'-n}{r}$ 

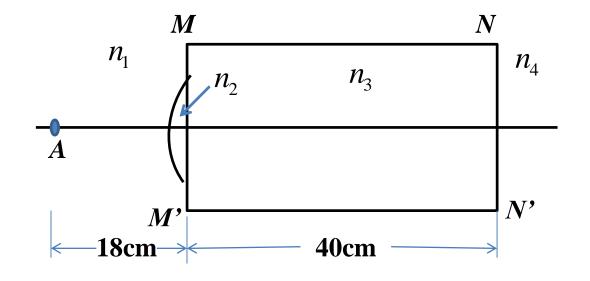
例题1 一平凸透镜的光焦度为2D,已知透镜的折射率为1.5,透镜至于空气中,求凸面的曲率半径及焦距.

解: 
$$f = f' = \frac{1}{(n_L - 1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})}$$
.  $\mathbf{z}$   $r_1 = \infty$ ,

$$\therefore r_2 = 0.25 \text{m}, f = f' = \frac{1}{\Phi} = 0.5 \text{m}.$$

**例题2** 如图所示,有一长40cm的玻璃箱(壁厚不计),箱内装水,在箱的一端开一个圆孔,在圆孔处放一凸透镜,它在空气中焦距f0=12cm,如果在箱的外面距透镜18cm处有一物体A,则A的像在何处?放大率位多大?  $n_{\chi} = \frac{4}{3}$ ,  $n_{\text{tym}} = \frac{3}{2}$ 

解: A的成像过程,可以看成先经凸透镜折射成像,再经过NN'平面折射成像



根据单球面成像公式和薄透镜的厚度 $d \rightarrow 0$ ,可得薄透镜的物像公

式为

$$\frac{n_3}{s'_3} + \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_L - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_L}{r_2}$$

由题意知,  $r_1 > 0, r_2 = \infty$ , 故

$$\frac{4/3}{s_1} + \frac{1}{18} = \frac{1.5 - 1}{r_1}$$

**(1)** 

$$f_0 = \frac{1}{(n_L - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

所以

$$12 = \frac{1}{(1.5 - 1)\frac{1}{r_1}}$$

**(2)** 

由(1)和(2)得  $s'_1 = 48$ cm

## 再经过NN'平面折射成像

$$s_2 < 0, s_2 = -8cm$$

$$\frac{n_3}{s_2} + \frac{n_4}{s_2'} = 0$$

$$\frac{4/3}{-8} + \frac{1}{s'_2} = 0, s'_2 = 6$$
cm(实像,在NN'右侧,距NN'为6cm)

$$V = \left(-\frac{n_1 s'_1}{n_3 s_1}\right) \cdot \left(-\frac{n_3 s'_2}{n_4 s_2}\right) = \left(-\frac{1 \times 48}{\frac{4}{3} \times 18}\right) \left(-\frac{\frac{4}{3} \times 6}{1 \times (-8)}\right) = -2$$

例题3 凸透镜 $L_1$ 和凹透镜 $L_2$ 的焦距分别为 $L_2$ 0cm和 $L_3$ 0cm, $L_4$ 0cm, $L_4$ 1 右方 $L_4$ 1 右方 $L_4$ 1 右方 $L_4$ 2 在 $L_4$ 2 一方 $L_4$ 3 。

解法一: 利用高斯公式求解

第一次成像 
$$\frac{1}{s_1'} + \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f_1}$$

其中,  $s_1 = 30$ cm,  $f_1 = 20$ cm, 得  $s'_1 = 60$ cm(实像)

因此,横向放大率 
$$V_1 = -\frac{s'_1}{s_1} = -2$$
(倒立)

第二次成像 
$$\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f_2}$$

其中,d = 40cm, $s_2 = -20$ cm(虚像), $f_2 = -40$ cm,得  $s'_2 = 40$ cm(实像)

因此,横向放大率 
$$V_2 = -\frac{s'_2}{s_2} = 2(正立)$$

## 解法二:利用牛顿公式求解

第一次成像 
$$x_1 \cdot x'_1 = f_1 \cdot f'_1$$
  
其中,  $x_1 = 10$ cm,  $f_1 = f'_1 = 20$ cm, 得 $x'_1 = 40$ cm, 则  $V_1 = -\frac{x'_1}{f'_1} = -2$ (倒立) 第二次成像  $x_2 \cdot x'_2 = f_2 \cdot f'_2$   
其中,  $x_2 = 20$ cm,  $f_2 = f'_2 = -40$ cm, 得 $x'_2 = 80$ cm, 则  $V_2 = -\frac{x'_2}{f'_2} = 2$ (正立)

所以,两次成像得横向放大率为

$$V = V_1 \cdot V_2 = -4$$
(倒立)

# 本章作业:

18-8, 18-9, 18-10, 18-12