院系　　　　班级　　　　姓名　　　　学号

第八章 微分方程

习题 8.1 和 8.2

微分方程的基本概念及几类简单的微分方程

1. 验证函数 $y=Ce^x$ 是方程 $y''-2y'+y=0$ 的解（C 是任意常数）.

解：$y''-2y'+y=Ce^x-2Ce^x+Ce^x=0$，即 $y=Ce^x$ 是 $y''-2y'+y=0$ 的解。

2. 求初值问题 $y'+y=0$，$y(3)=2$ 的解. 已知其通解解为 $y=Ce^{-x}$，其中 C 为任意常数.

解：$y=Ce^{-x}$ 则 $2=Ce^{3}$，$C=2e^{3}$ 即特解为：$y=2e^{3-x}$.

3. 求下列微分方程的解.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2y-y}{y+1}$；　　　　(2) $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2}$；

解：(1) $y=0$ 是解，$y\neq 0$ 时 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y+1}(x^2-1)$，$\int\frac{y+1}{y}dy=\int(x^2-1)dx+C$

即通解为：$y+\ln|y|=\frac{1}{3}x^3-x+C$，奇解为：$y=0$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}\operatorname{sgn}x$，令 $u=\frac{y}{x}$ 则 $u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{1-u^2}\operatorname{sgn}x$

当 $u\neq\pm1$ 时 $x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}\operatorname{sgn}x$，$\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\operatorname{sgn}x\int\frac{dx}{x}+C$，即通解为：

$\arcsin\frac{y}{x}=\operatorname{sgn}x\cdot\ln|x|+C$，奇解为：$y=\pm x$.

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+5}{x-y-2}$； (4) $y''-y'-x=0$；

解：(3) 令 $x-y=u$，则 $\frac{du}{dx}=1-\frac{dy}{dx}=1-\frac{u+5}{u-2}=-\frac{7}{u-2}$ 则

$\int(u-2)du=-\int 7dx+C$ 即 $\frac{1}{2}u^2-2u=-7x+C$，通解为：$\frac{1}{2}(x-y)^2+5x+2y=C$

(4). 两边积分得：$y'-y=\frac{1}{2}x^2+C_1$ 则 $y=e^x[C_2+\int(\frac{1}{2}x^2+C_1)e^{-x}dx]$

$=C_2e^x+e^x[-e^{-x}(\frac{1}{2}x^2+C_1)+\int xe^{-x}dx]=C_2e^x-\frac{1}{2}x^2-C_1-x-1$

$=C_2e^x-\frac{1}{2}x^2-x+(-C_1-1)$ 即通解为：$y=C_2e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_1$

(5) $y''+\frac{a^2}{y^2}=0(a>0)$； (6) $yy''+(y')^2=0$.

解：(5). 求解过程较复杂，通解为：

$\sqrt{y(1+C_1y)}-\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln(\sqrt{C_1y}+\sqrt{1+C_1y})=\pm\sqrt{2}C_1ax+C_2$

(6) 令 $y'=p$，则原方程化为：$y\cdot p\frac{dp}{dy}+p^2=0$，解得：$p=0$，即 $y=C$

或 $y\frac{dp}{dy}+p=0$ 解得：$p=\frac{1}{y}\times\frac{1}{2}C_1$ 即 $2ydy=C_1dx$ 则通解为：

$y^2=C_1x+C_2$，因 $y=C$ 已包含在 $y^2=C_1x+C_2$ 中，因而原方程的

通解为：$y^2=C_1x+C_2$.

院系　　　　　　班级　　　　　　姓名　　　　　　学号

习题 8.3　一阶微分方程

1. 解下列方程.

(1) $y'+y\cos x=e^{2x}$；　　(2) $y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$；

解：(1). $y=e^{-\int\cos x dx}(C+\int e^{2x}\cdot e^{\int\cos x dx}dx)=e^{-\sin x}(C+\int e^{2x+\sin x}dx)$

(2). $y=e^{-\int\cos x dx}(C+\int\frac{1}{2}\sin 2x e^{\int\cos x dx}dx)$

$=e^{-\sin x}[C+\int\sin x\cos x e^{\sin x}dx]=e^{-\sin x}[C+(\sin x-1)e^{\sin x}]$

$=-1+\sin x+Ce^{-\sin x}$

(3) $y'\cos x+y\sin x=1$.

解：$y'+\tan x\cdot y=\frac{1}{\cos x}$，$y=e^{-\int\tan x dx}(C+\int\frac{1}{\cos x}e^{\int\tan x dx}dx)$

$=e^{\ln\cos x}(C+\tan x)=\sin x+C\cos x$　即：$y=\sin x+C\cos x$

2. 求下列初值问题的解.

(1) $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$，$y(\pi)=1$；　　(2) $y'+\frac{y}{x}+e^{x}=0$，$y(1)=0$.

解：(1) $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(C+\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx)=\frac{1}{x}(C+\int\sin x dx)$

$=\frac{1}{x}(C-\cos x)$. 由$y(\pi)=1$ 知 $C=\pi-1$ 则 $y=\frac{\pi-1-\cos x}{x}$

(2). $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(C-\int e^{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx)=\frac{1}{x}(C-\int xe^{x}dx)$

$=\frac{1}{x}[C-(x-1)e^{x}]$，由 $y(1)=0$ 知 $C=0$，则 $y=\frac{1-x}{x}e^{x}$.

3. 求下列微分方程的解.

(1) $3y^2y'-ay^3=x+1$；

解：令 $y^3=u$ 则 $\frac{du}{dx}-au=x+1$

$u=e^{ax}[C+\int(x+1)e^{-ax}dx]=e^{ax}[C-\frac{1}{a}\int(x+1)de^{-ax}]$

$=e^{ax}[C-\frac{1}{a}(x+1)e^{-ax}-\frac{1}{a^2}e^{-ax}]$. 则通解为：

$y^3=Ce^{ax}-\frac{1}{a}x-\frac{a+1}{a^2}$

(2) $yy'\sin x=(\sin x-y^2)\cos x$.

解：令 $y^2=u$，则 $\sin x\cdot\frac{du}{dx}=2(\sin x-u)\cos x$

$\frac{du}{dx}=-2\cot x\cdot u+2\cos x$，$u=e^{-\int 2\cot x dx}(C+\int 2\cos x e^{\int 2\cot x dx}dx)$

$=e^{-2\ln\sin x}(C+2\int\cos x\cdot\sin^2 x dx)=\frac{1}{\sin^2 x}(C+\frac{2}{3}\sin^3 x)$，则

通解为：$y^2=\frac{C}{\sin^2 x}+\frac{2}{3}\sin x$

院系　　　　班级　　　　姓 名　　　　学号

习题 8.4 和 8.5

全微分方程与积分因子及二阶常系数线性微分方程

求下列方程通解.

(1) $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=e^x x^n$，$n$为常数；　　(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$；

解：(1). $\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x}y+x^n e^x$ 则 $y=e^{\int\frac{n}{x}dx}\left(C+\int x^n e^x\cdot e^{-\int\frac{n}{x}dx}dx\right)$

$=x^n(C+e^x)$，即通解为：$y=x^n(e^x+C)$

(2). $y=0$是其解，当$y\neq 0$时 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}x+y^2$，则有：

$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(C+\int y^2\cdot e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy\right)=y\left[C+\int y\,dy\right]=y\left(C+\frac{1}{2}y^2\right)$，则

其通解为：$x=Cy+\frac{1}{2}y^3$，特解为：$y=0$

(3) $x\frac{dy}{dx}+y=x^3$；　　(4) $(x+\sin y)dx+(x\cos y-2y)dy=0$；

解：(3) $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^2$，则 $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(C+\int x^2 e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right)$

$=\frac{1}{x}\left(C+\int x^3dx\right)=\frac{1}{x}\left(C+\frac{1}{4}x^4\right)=\frac{C}{x}+\frac{1}{4}x^3$，即其通解为：

$y=\frac{C}{x}+\frac{1}{4}x^3$

或：$xdy+ydx=x^3dx$ 则 $d(xy)=d\left(\frac{1}{4}x^4\right)$ 则 $xy=\frac{1}{4}x^4+C$ 为其通解。

(4). $M=x+\sin y$，$N=x\cos y-2y$，则 $\frac{\partial M}{\partial y}=\cos y=\frac{\partial N}{\partial x}$，原方程为全微分方程，左边$=(xdx-2ydy)+(\sin y\,dx+x\cos y\,dy)$

$=d\left(\frac{1}{2}x^2-y^2\right)+(\sin y\,dx+x\,d\sin y)=d\left(\frac{1}{2}x^2-y^2+x\sin y\right)=$右边$=0$，

则其通解为：$\frac{1}{2}x^2-y^2+x\sin y=C$

(5) $y' = 2xy - x$.

(6) $y'' - y' - 30y = 0$；

解：(5). $y=e^{\int 2x dx}(C-\int x e^{-\int 2x dx}dx)=e^{x^2}(C-\int x e^{-x^2}dx)$

$=e^{x^2}(C+\frac{1}{2}e^{-x^2})=\frac{1}{2}+Ce^{x^2}$，通解为：$y=\frac{1}{2}+Ce^{x^2}$

(6). 特征方程为：$\lambda^2-\lambda-30=0$，$\lambda_1=-5$，$\lambda_2=6$，

则其通解为：$y=C_1e^{-5x}+C_2e^{6x}$

(7) $y'' - y' - 2y = 4x^2$；

(8) $y'' - y' - 2y = 8\sin 2x$；

解：(7). $y''-y'-2y=0$ 特征方程为 $\lambda^2-\lambda-2=0$，则 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，则其通解为 $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$。令 $y''-y'-2y=4x^2$ 的一个特解为 $y_0=ax^2+bx+c$，代入并比较系数得 $a=-2$，$b=2$，$c=-3$，则 $y_0=-2x^2+2x-3$，则原方程的通解为：$y=\bar{y}+y_0=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-2x^2+2x-3$。

(8). $y''-y'-2y=0$ 的特征方程为：$\lambda^2-\lambda-2=0$ 则 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，其通解为：$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$。令 $y''-y'-2y=8\sin 2x$ 的一个特解为：$y_0=a\cos 2x+b\sin 2x$ 代入并比较系数得：$a=\frac{2}{5}$，$b=-\frac{6}{5}$，则 $y_0=\frac{2}{5}\cos 2x-\frac{6}{5}\sin 2x$。则原方程的通解为：$y=\bar{y}+y_0=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+\frac{2}{5}\cos 2x-\frac{6}{5}\sin 2x$

院系　　　　　　班级　　　　　　姓名　　　　　　学号

自 测 题

一、选择题

1. 识别方程 $x(y')^2 + yy' - x = 0$，它属于　　　　（B）

（A）二阶微分方程.　　　　（B）一阶微分方程.

（C）一阶线性微分方程.　　　　（D）二阶线性微分方程.

2. 设微分方程 $y = xy' + f(y')$，则函数 $y = Cx + f(C)$　　　　（A，B）

（A）是该方程的解.　　　　（B）是该方程的通解.

（C）是该方程的特解.　　　　（D）不是该方程的解.

3. 具有特解 $y_1 = 2e^{-x}, y_2 = 3e^{x}$ 的二阶常系数齐次微分方程是　　　　（A）

（A）$y'' - y = 0$.　　　　（B）$y'' - y' - y = 0$.

（C）$y'' + y = 0$.　　　　（D）$y'' + y' = 0$.

4. 设线性无关的函数 $y_1(x)$，$y_2(x), y_3(x)$ 均是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x) = f(x)$ 的解，C_1，C_2 是任意常数，则该非齐次方程的通解是　　　　（D）

（A）$C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$.　　　　（B）$C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$.　　　　（C）$C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$.

（D）$C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

5. 微分方程 $y'' - y = e^{x} + 1$ 的一个特解应具有形式　　　　（B）

（A）$ae^{x} + b$.　　（B）$axe^{x} + b$.　　（C）$ae^{x} + bx$.　　（D）$axe^{x} + bx$.

二、解答题

1. 求微分方程 $y'''-y''+4y'-4y=0$ 的通解.

解：特征方程为：$\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0$，解得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2i$，$\lambda_3=-2i$

则原方程通解为：$y=C_1e^{x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$.

2. 设函数 $f(x)$ 满足条件 $\begin{cases} y''+4y'+4y=0 \\ y(0)=2, y'(0)=-4 \end{cases}$，求广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

解：$\lambda^2+4\lambda+4=0$，$\lambda_{1,2}=-2$，则 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$，$y'=[(C_2-2C_1)-2C_2x]e^{-2x}$

由 $y(0)=2$，$y'(0)=-4$ 得：$C_1=2$，$C_2=0$，则 $f(x)=2e^{-2x}$

则 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}2e^{-2x}dx=-e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=1$

3. 设 $f(x)=e^x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，其中 $f(t)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

解：$f(x)=e^x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$，则 $f(0)=1$，$f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt$

$f'(0)=1$，$f''(x)=e^x-f(x)$ 即 $f''(x)+f(x)=e^x$，解得 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$ $+\frac{1}{2}e^x$，由 $f(0)=f'(0)=1$ 得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$，则 $f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}e^x$.

2. 设函数 $f(x)$ 满足条件 $\begin{cases} y''+4y'+4y=0 \\ y(0)=2, y'(0)=-4 \end{cases}$，求广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

① $\lambda^2+4\lambda+4=0$

$\lambda_1=\lambda_2=-2$

$Y=C_1e^{-2x}+C_2x\cdot e^{-2x}$

② $Y'=-2C_1e^{-2x}+C_2e^{-2x}-2C_2xe^{-2x}$

$\begin{cases} Y(0)=C_1=2 \\ Y'(0)=-2C_1+C_2=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=2 \\ C_2=0 \end{cases}$

即 $y=f(x)=2e^{-2x}$

③ $\int_0^{+\infty} 2e^{-2x}dx$

$=-e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(-e^{-2x})+1$

$=1$

3. 设 $f(x)=e^x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$，其中 $f(t)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

$f(x)=e^x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$

$f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)$

即 $f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt$

故 $f''(x)=e^x-f(x)$

且 $f(0)=1$, $f'(0)=1$

即 $\begin{cases} y''+y=e^x \\ f(0)=1 \\ f'(0)=1 \end{cases}$ $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}e^x$

① $y''+y=0$

$\lambda^2+1=0$

$Y=A\cos x+B\sin x$

② $y''+y=e^x$

$y^*=ke^x$ 代入 $\Rightarrow k=\frac{1}{2}$

$y^*=\frac{1}{2}e^x$

③ $y=A\cos x+B\sin x+\frac{1}{2}e^x$

$\begin{cases} y(0)=A+\frac{1}{2}=1 \\ y'(0)=B+\frac{1}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$

4. 设函数 $f(x)$， $g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$， $g'(x)=2e^x-f(x)$，且

$f(0)=0$， $g(0)=2$，求 $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$.

$f''(x)=g'(x)=2e^x-f(x)$ 即 $y''+y=2e^x$

又 $f(0)=0$, $f'(0)=2$

① $y''+y=0$ $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

② $y''+y=2e^x$ $y^*=ke^x$ 代入 $\Rightarrow k=1$

③ $y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x$

故 $\begin{cases} C_1+1=0 \\ C_2+1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-1 \\ C_2=1 \end{cases}$

即 $f(x)=\sin x-\cos x+e^x$.

$$\text{而}\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{(1+x)\cdot f'(x)-f(x)}{(1+x)^2}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x)}{1+x}\right]'dx$$

$$=\frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi}=\frac{e^{\pi}+1}{1+\pi}$$

$$=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-\frac{f(0)}{1+0}$$

$$=\frac{e^{\pi}+1}{1+\pi}-\frac{0}{1}$$

5. 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，由方程

$$f(x)=e^{-x}-\frac{1}{2}\int_0^x[f''(t)+f'(t)+t]dt$$

所确定，求 $f(x)$.

$$f'(x)=-e^{-x}-\frac{1}{2}[f''(x)+f'(x)+x]$$

即 $f''(x)+3f'(x)=-2e^{-x}-x$

又 $f'(0)=0$. 且 $f(0)=e^0-\frac{1}{2}\int_0^0[f''(t)+f'(t)+t]dt=1$.

故 $y=f(x)$ 满足：

$$\begin{cases}y''+3y'=-2e^{-x}-x\\ y(0)=1\\ y'(0)=0\end{cases}$$

对于 $y''+3y'=-2e^{-x}-x$

1° 求 $y''+3y'=0$

特征方程 $\lambda^2+3\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=-3$

其通解 $Y=C_1+C_2e^{-3x}$

2° 对于 $y''+3y'=-2e^{-x}$ 设其特解 $y_1^*=ke^{-x}$

代入 $ke^{-x}-3ke^{-x}=-2e^{-x}\Rightarrow k=1$ 即 $y_1^*=e^{-x}$

对于 $y''+3y'=-x$，设其特解 $y_2^*=x\cdot(ax+b)$

代入 $(y_2^*)'=2ax+b$ $(y_2^*)''=2a$

有 $2a+6ax+3b=-x\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{6}\\ b=\frac{1}{9}\end{cases}$ 即 $y_2^*=-\frac{x^2}{6}+\frac{x}{9}$

3° 故 $y''+3y'=-2e^{-x}-x$ 通解为 $y=C_1+C_2e^{-3x}+e^{-x}-\frac{x^2}{6}+\frac{x}{9}$

又 $f(0)=1$, $f'(0)=0$ $\left(y'=-3C_2e^{-3x}-e^{-x}-\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)$

即 $\begin{cases}1=C_1+C_2+1\\ 0=-3C_2-1+\frac{1}{9}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\frac{8}{27}\\ C_2=-\frac{8}{27}\end{cases}$

所以 $f(x)=-\frac{8}{27}e^{-3x}+e^{-x}-\frac{x^2}{6}+\frac{x}{9}+\frac{8}{27}$