第十九章 波动光学

19－1 光源 单色光 光的相干性

一、光源

光源 (light source)：　**发光的物体**

两大类光源：**普通光源**　**激光光源(laser)**

（1）普通光源按光的激发分为以下几种：

热光源:利用热能激发的光源

电致发光(electroluminescence):由电能直接转换为光能

光致发光(photoluminescence):由光激发引起的发光现象

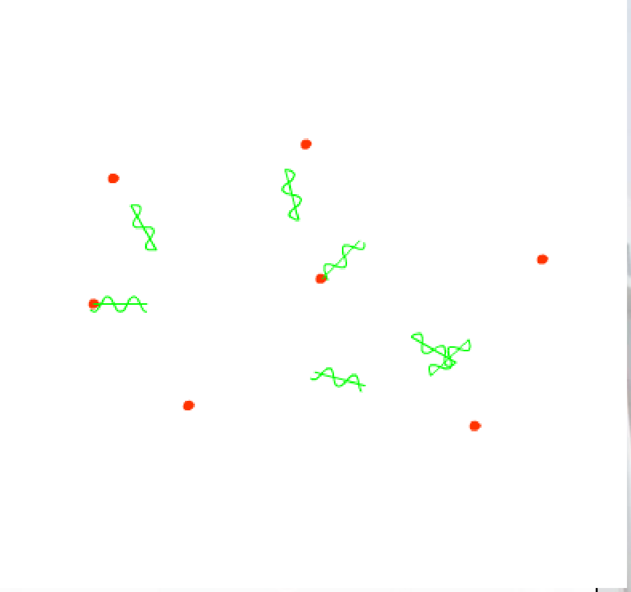
化学发光(chemiluminescence):由化学反应引起的的发光现象

普通光源发光的间歇性(intermittence)

各原子发光是间歇的，平均发光时间Δt约为10^{-9}～10^{-10}s，所发出的是一段长为 $L=c\Delta t$的光波列(**light wave train**)。

普通光源发光的随机性(randomness)

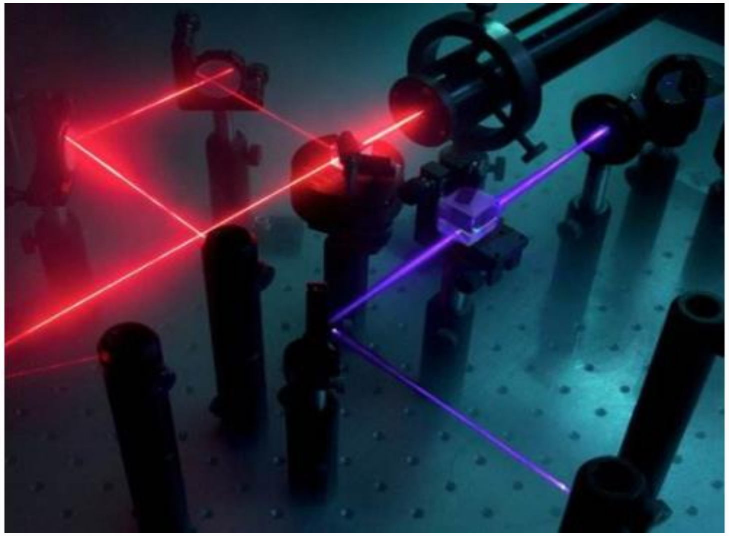
每次发光是随机的，所发出各波列的振动方向、频率和振动初相位都不相同。



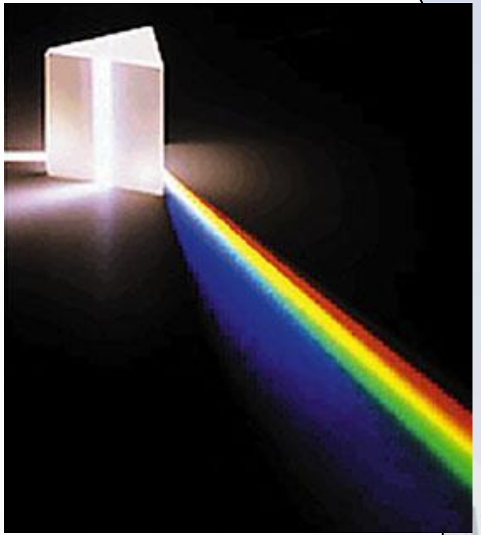
- 两独立光源发出的光不可能产生干涉
- 来自同一光源两个部分的光也不可能产生干涉

（2） 激光光源(laser)

- 具有高单色性和高相干性
- 方向性好
- 亮度高，亮度能达到太阳亮度的 10^{10} 倍



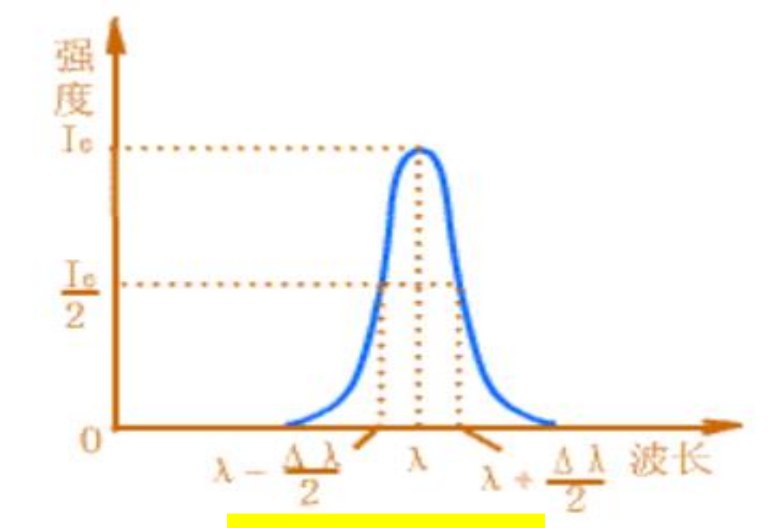
二、单色光



- 光是某一波段的电磁波
- 可见光(visible light)的波长为400 ~760nm
- 具有一定频率的光称为单色光
- 各种频率的光复合起来称为复合光

谱线宽度

强度下降到峰值一半的两点之间的波长范围叫做谱线宽度，是标志单色性好坏的物理量。



光谱曲线

三、相干光

光波描述

$$E = E_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \varphi)$$

光强(intensity of light)正比于光矢量(light vector)振幅的平方，即

$$\boxed{I \propto |E|^2}$$

干涉定义：

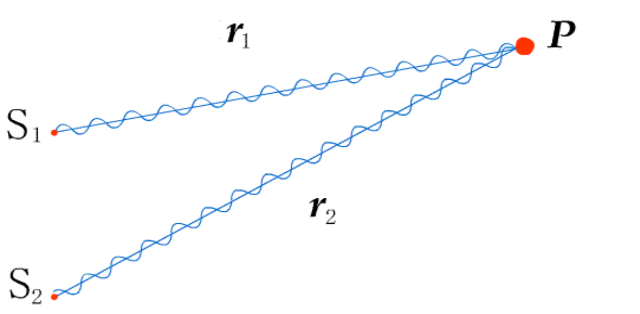
满足相干条件的两列或两列以上的光波，它们在空间的重叠区域内各点相遇时，将发生干涉现象。

相干条件： 频率相同
振动方向相同
相遇点有恒定的相位差

相干光(coherent light)：能产生干涉现象的光。

相干光源(coherent source)：能产生相干光的光源。

干涉场中光强度的分布

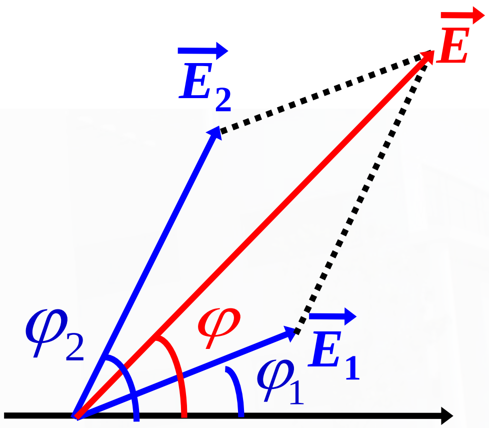


$$S_1: \quad E_1 = E_{10}\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$S_2: \quad E_2 = E_{20}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$E = E_1 + E_2 = E_0\cos(\omega t + \varphi)$$

$$I = E_0^2 = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20}\cos\delta$$



观测时间内的**平均强度**：

$$\bar{I} = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\cos\delta \mathrm{d}\tau$$

相位差： $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$

如果在观测时间内，相干光波的相位差迅速且无规则变化，则有

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\cos\delta \mathrm{d}\tau = 0$$

$$\bar{I} = E_{10}^2 + E_{20}^2 = I_1 + I_2$$

如果在观测时间内，相干光波的相位差固定不变，则有

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\cos\delta \mathrm{d}\tau = \cos\delta$$

$$\bar{I} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$$

- **相长干涉（明）**

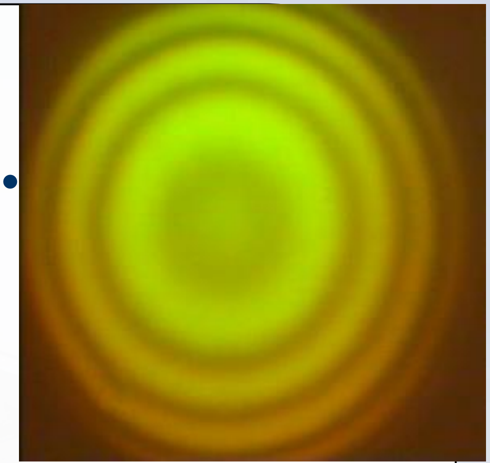
$$\delta = \pm 2k\pi,\quad \cos\delta = 1 \quad (k = 0,1,2,3\ldots)$$

$$I = I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

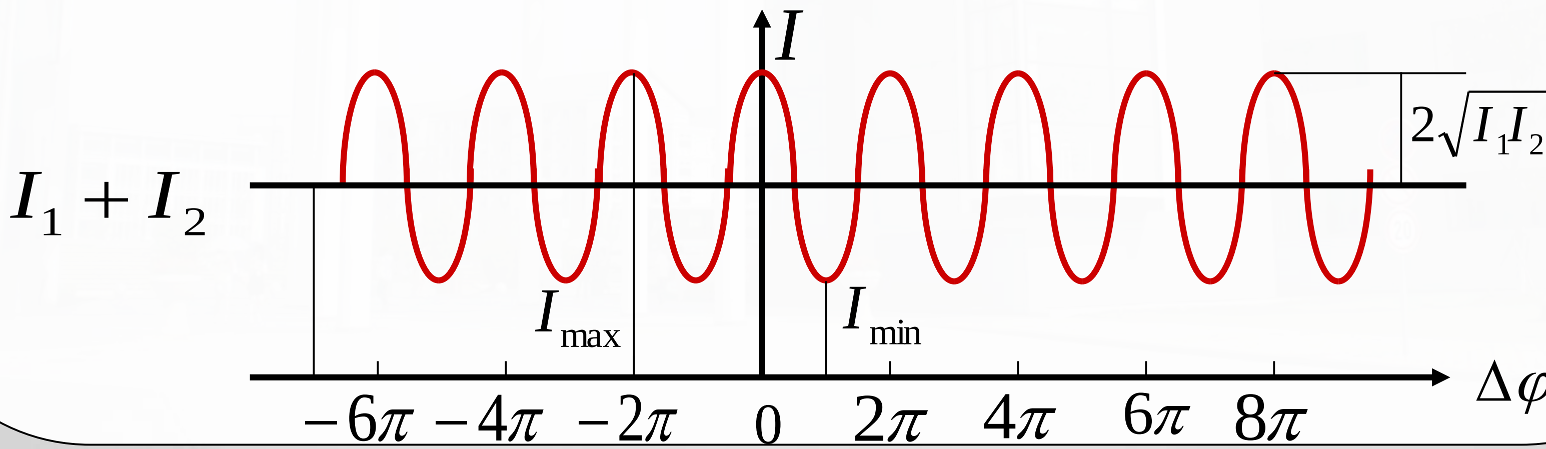
- **相消干涉（暗）**

$$\delta = \pm(2k+1)\pi,\quad \cos\delta = -1 \quad (k = 0,1,2,3\ldots)$$

$$I = I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

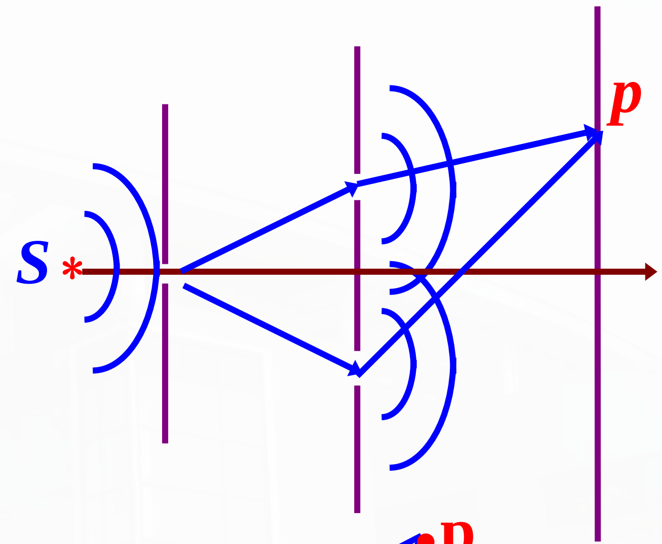


干涉图

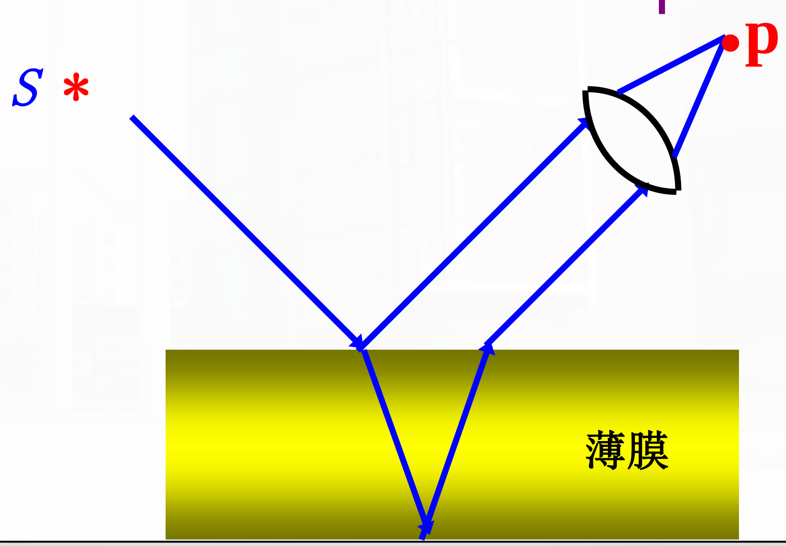


相干光的获得方法

分波面法



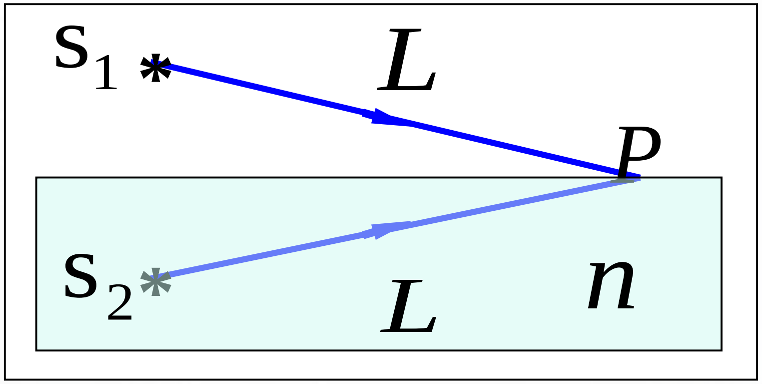
分振幅法



19－2 光程 光程差的概念

一、光程

真空中相位差



$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{L}{\lambda_0}$$

同样的光在折射率为n的媒质中传播了x的路程，其相位的变化正好也是 $\Delta\varphi$ ，则有

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{x}{\lambda'} \qquad \therefore L = \frac{\lambda_0}{\lambda'} x$$

$$n=\frac{c}{v}$$ 光波频率 $$\nu=\frac{c}{\lambda_0}=\frac{v}{\lambda'}$$

$$\therefore n=\frac{\lambda_0}{\lambda'}$$ 考虑到 $$L=\frac{\lambda_0}{\lambda'}x$$

$$\therefore L=nx$$

光程 光传播的路程与所在介质折射率的乘积.

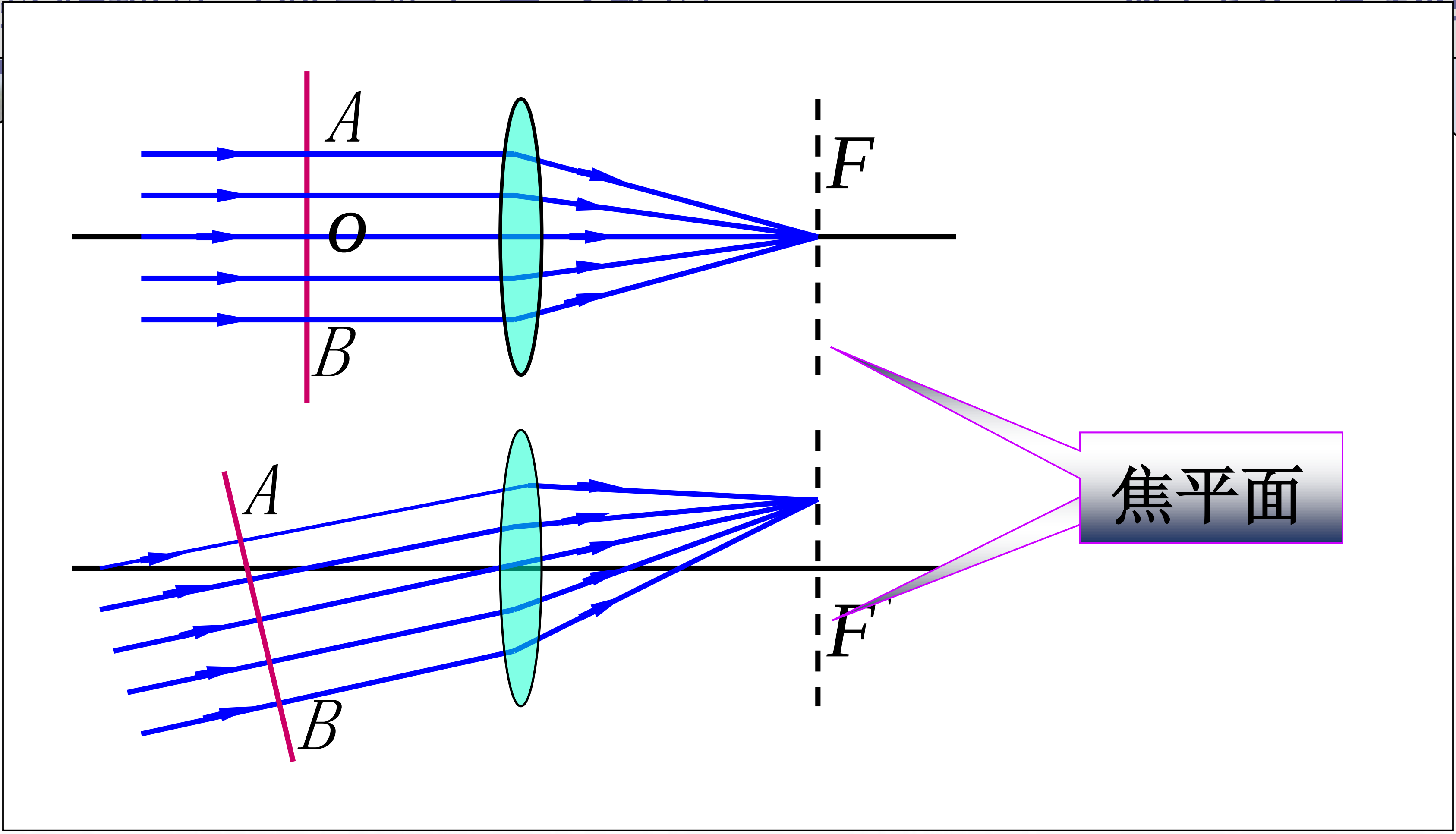
$$L=\sum_i n_i x_i$$

物理意义 光程就是光在介质中通过的几何路程，按波数相等折合到真空中的路程.

二、光程差

两相干光分别通过不同的介质在空间某点相遇时，所产生的干涉情况与两者的光程差 $\varDelta$ 有关。光程差与相位差的关系为

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\varDelta}{\lambda_0}$$

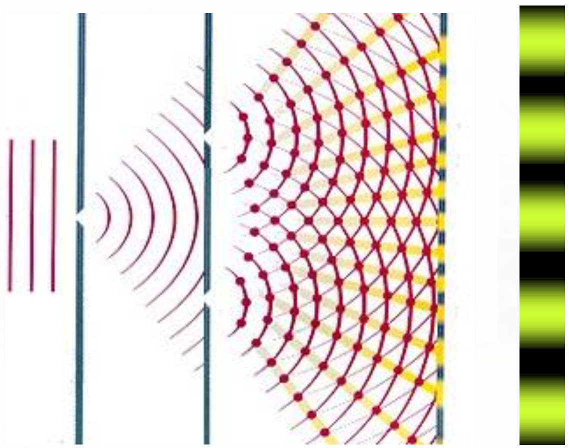


因为光经过相同的光程所需要的时间是相等的，物点与像点之间各光线的光程差相等，即物像之间的等光程性。所以，**透镜或其他光学仪器不引起附加的光程差。**

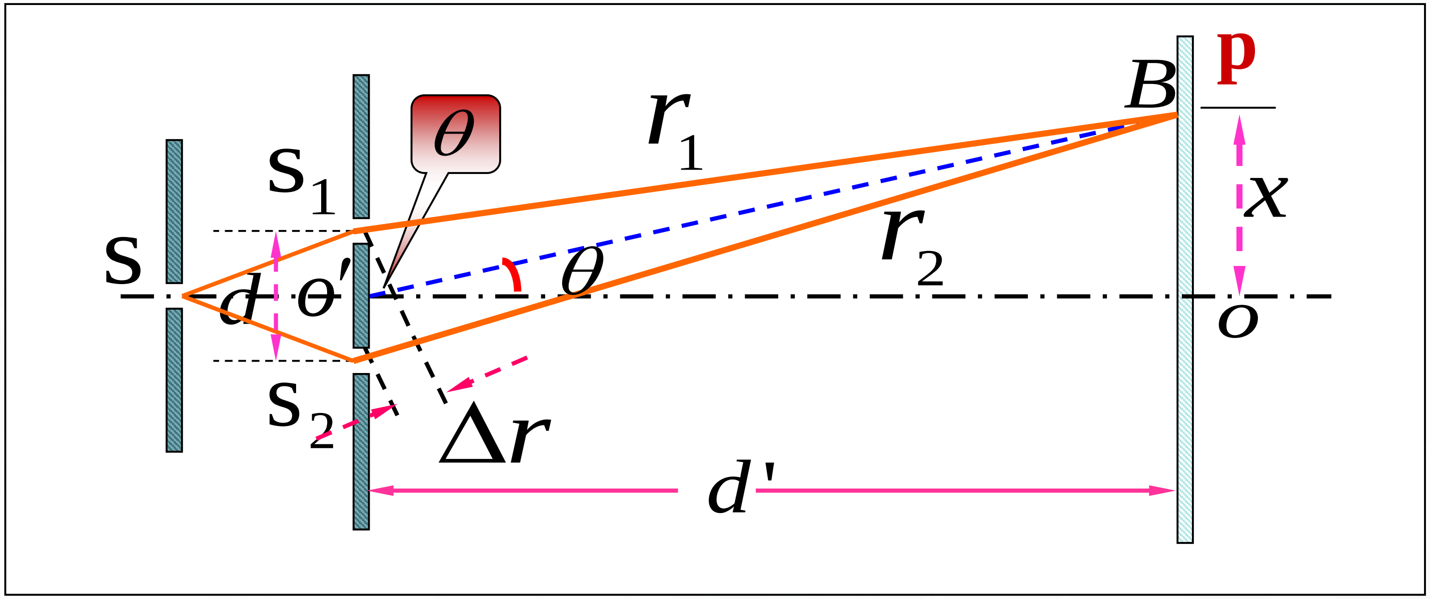
19－3 分波面干涉

一、杨氏双缝干涉实验

获取相干光方法一 让光波通过并排的两个小孔或利用反射和折射方法将其波阵面分割成两个部分，即**波阵面分割法**。



英国医生兼物理学家托马斯·杨于1801年首先成功地进行了光干涉实验。



$$\Delta r \approx d\sin\theta = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{加强} \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{减弱} \end{cases} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

$$d\frac{x}{d'} = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{明纹} \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

干涉条纹在屏幕上的分布

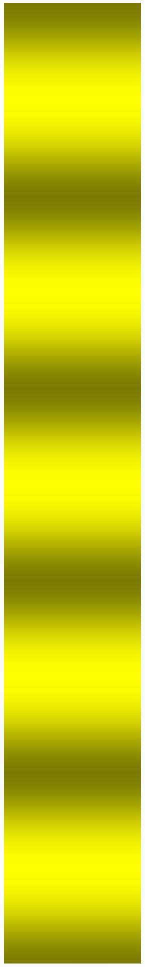
明纹： $x = \pm k\dfrac{d'\lambda}{d} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$

暗纹： $x = \pm(2k+1)\dfrac{d'\lambda}{2d} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$

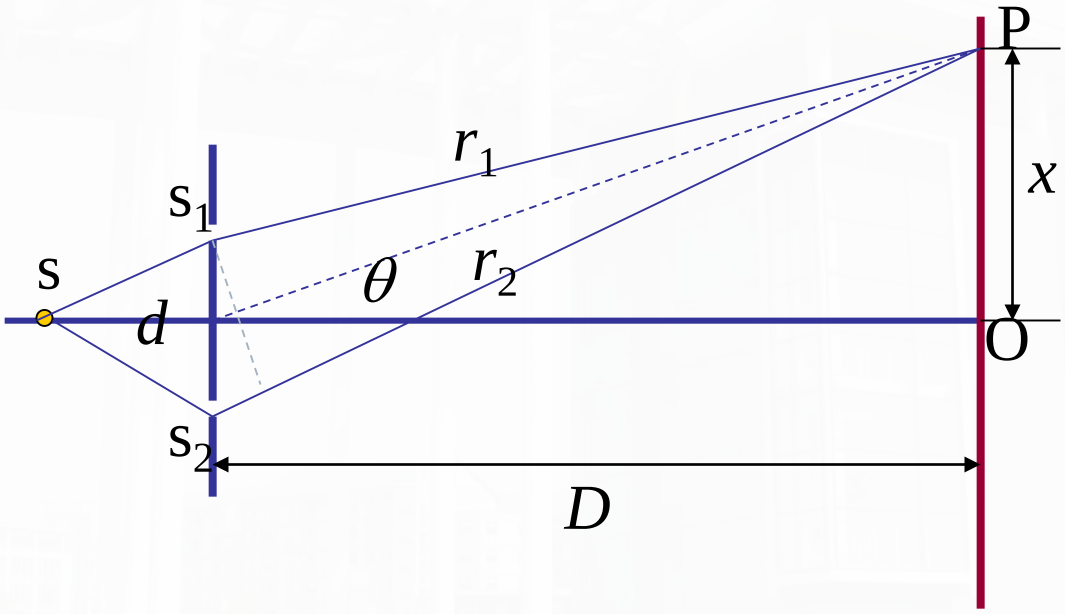
屏幕中央（x = 0）为中央明纹

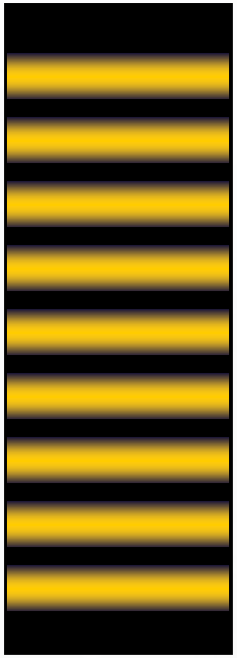
相邻明纹或暗纹的等间距性

$$\boxed{\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{d'}{d}\lambda}$$



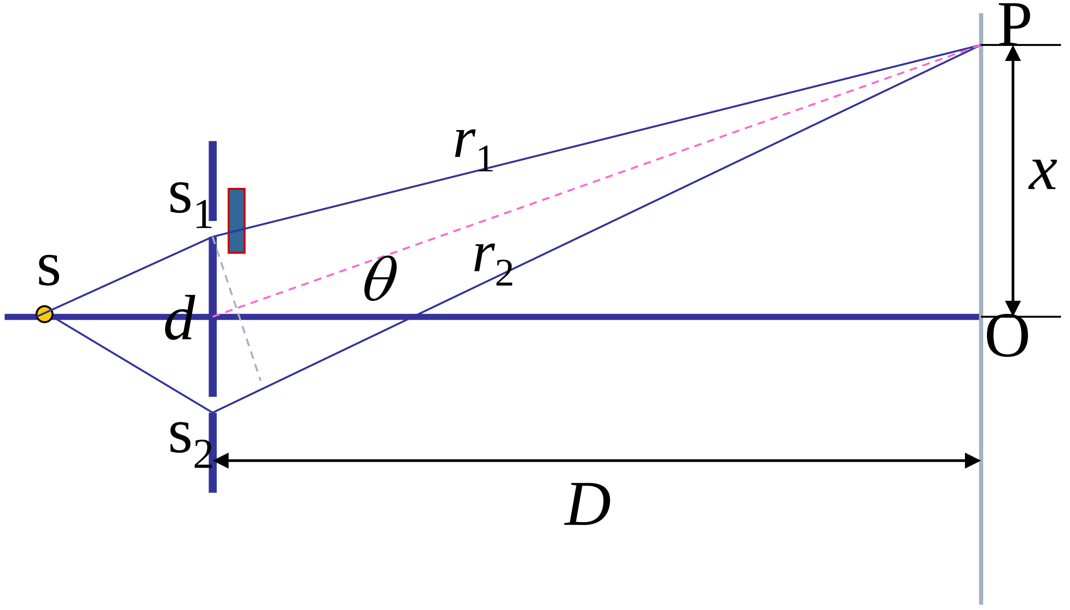
- 在缝后加一薄玻璃片，观察条纹的移动

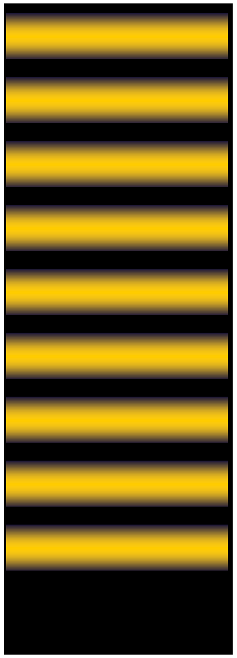




• 在缝后加一薄玻璃片，观察条纹的移动

薄玻璃片盖住上缝时：则

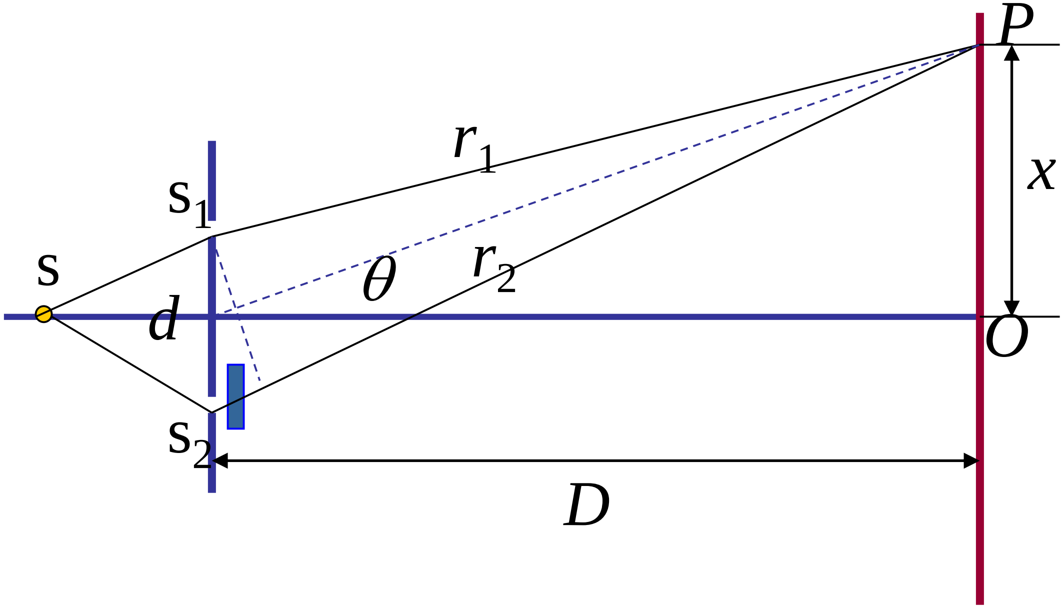


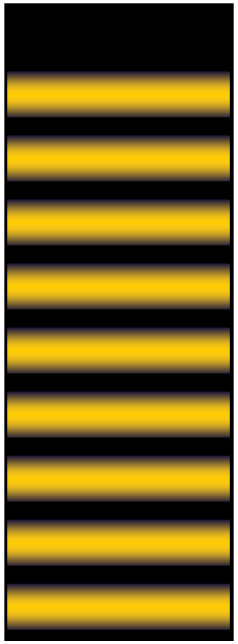


中央明纹上移

• 在缝后加一薄玻璃片，观察条纹的移动

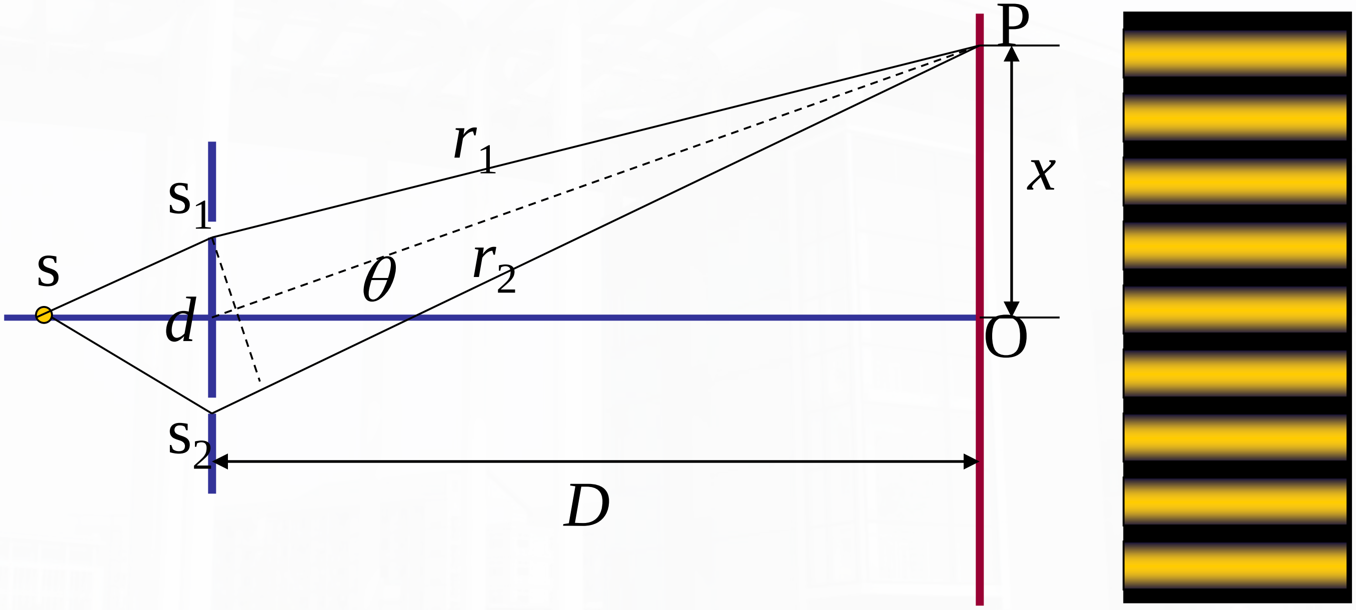
薄玻璃片盖住下缝时：则





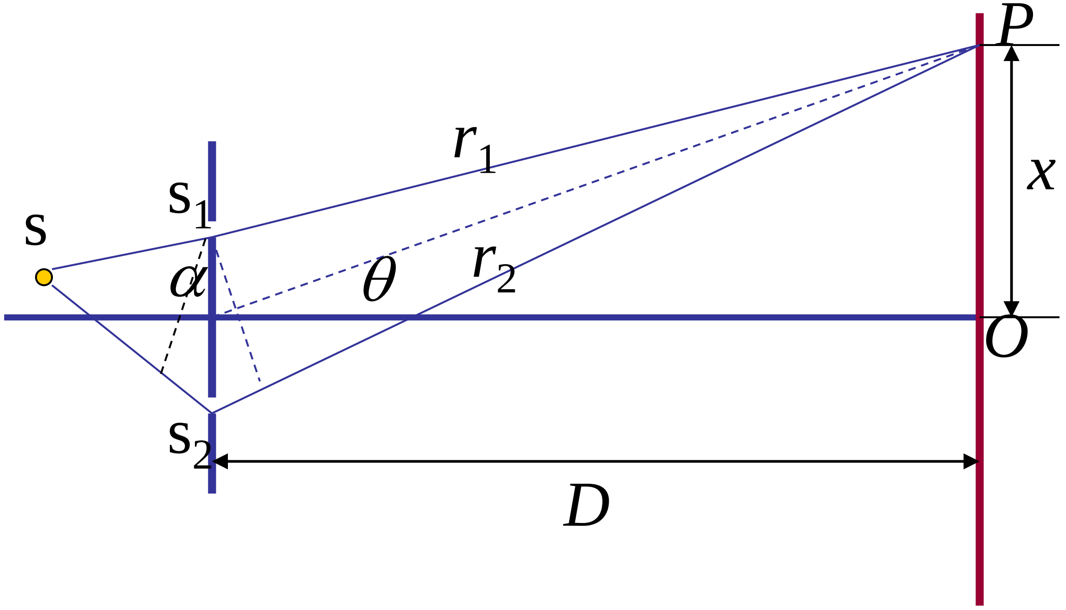
中央明纹下移

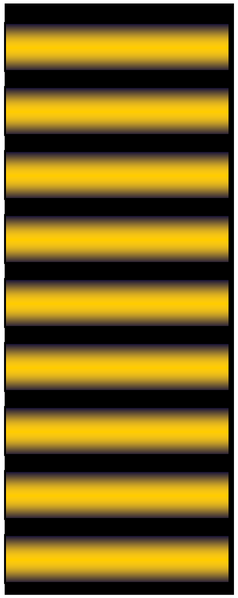
- 上下移动光源时，观察条纹的移动



• 上下移动光源时，观察条纹的移动

向上移动光源时，则：

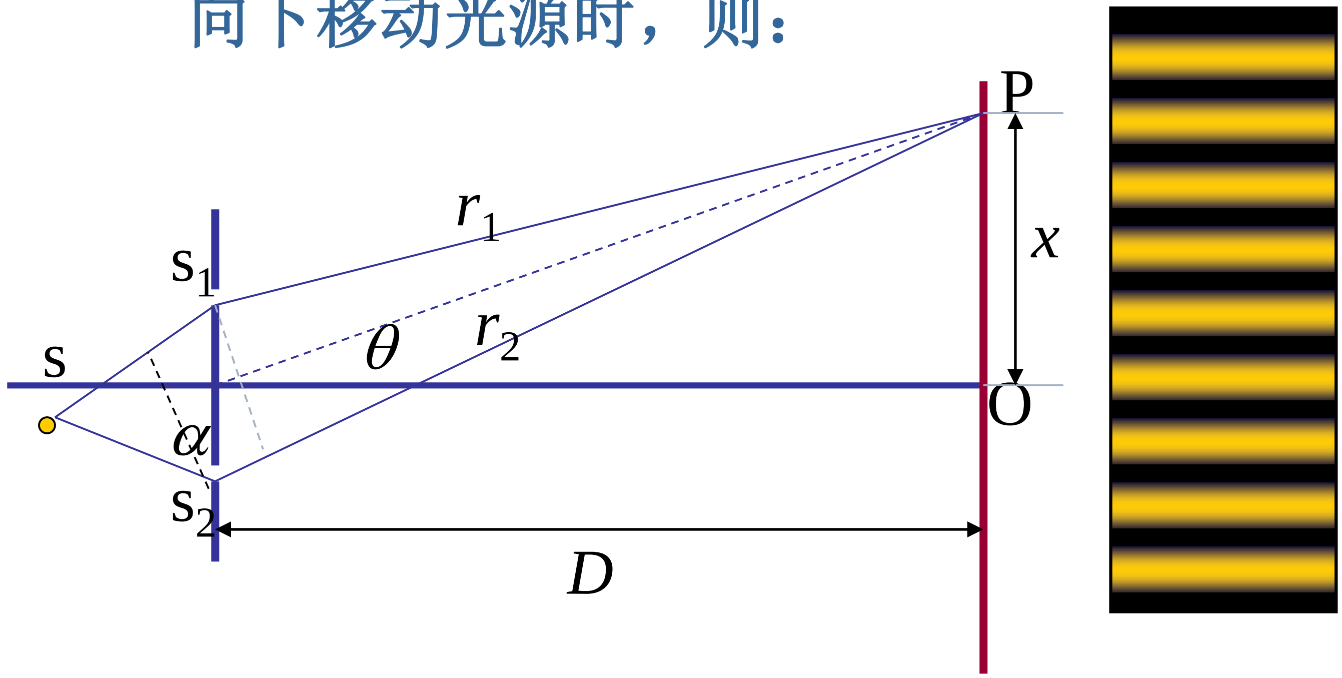




中央明纹下移

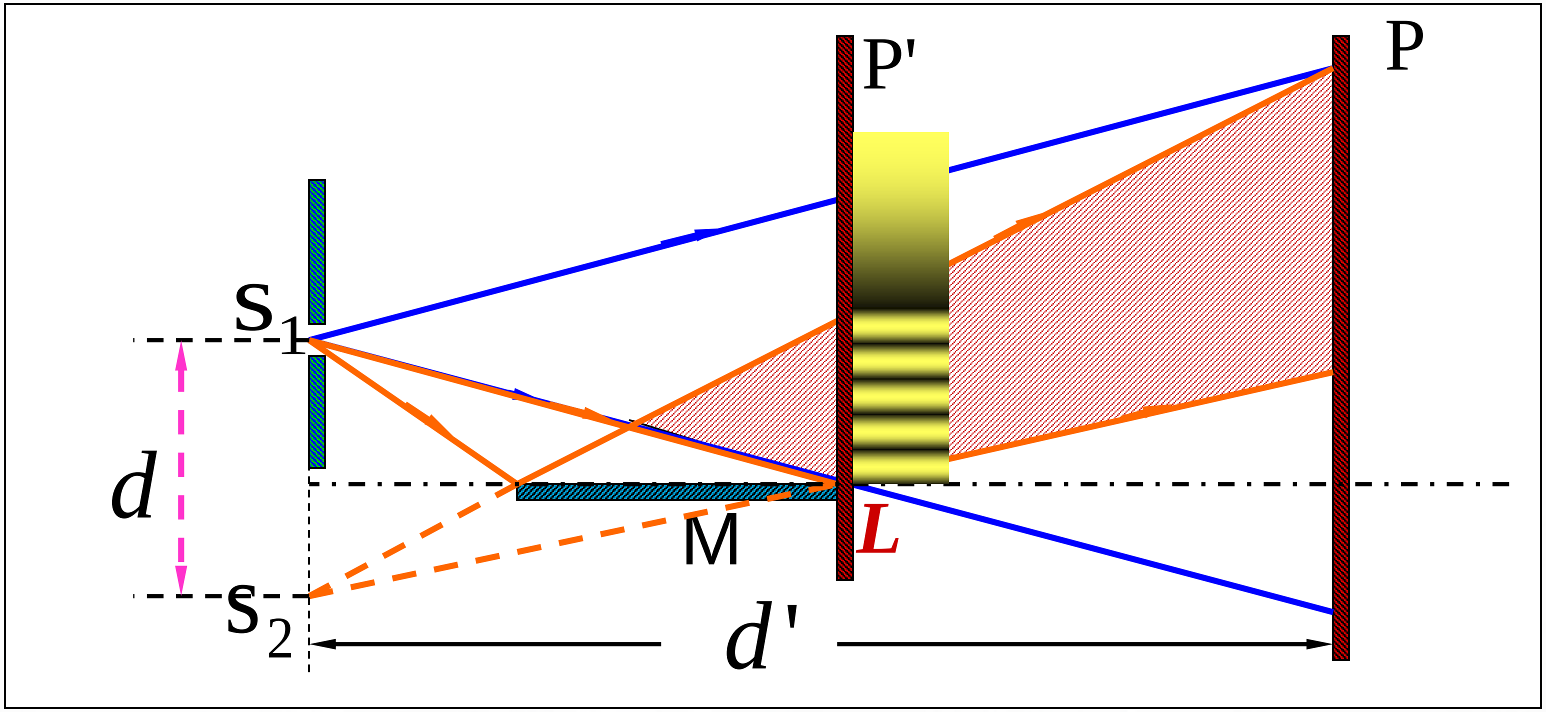
- 上下移动光源时，观察条纹的移动

向下移动光源时，则：



中央明纹上移

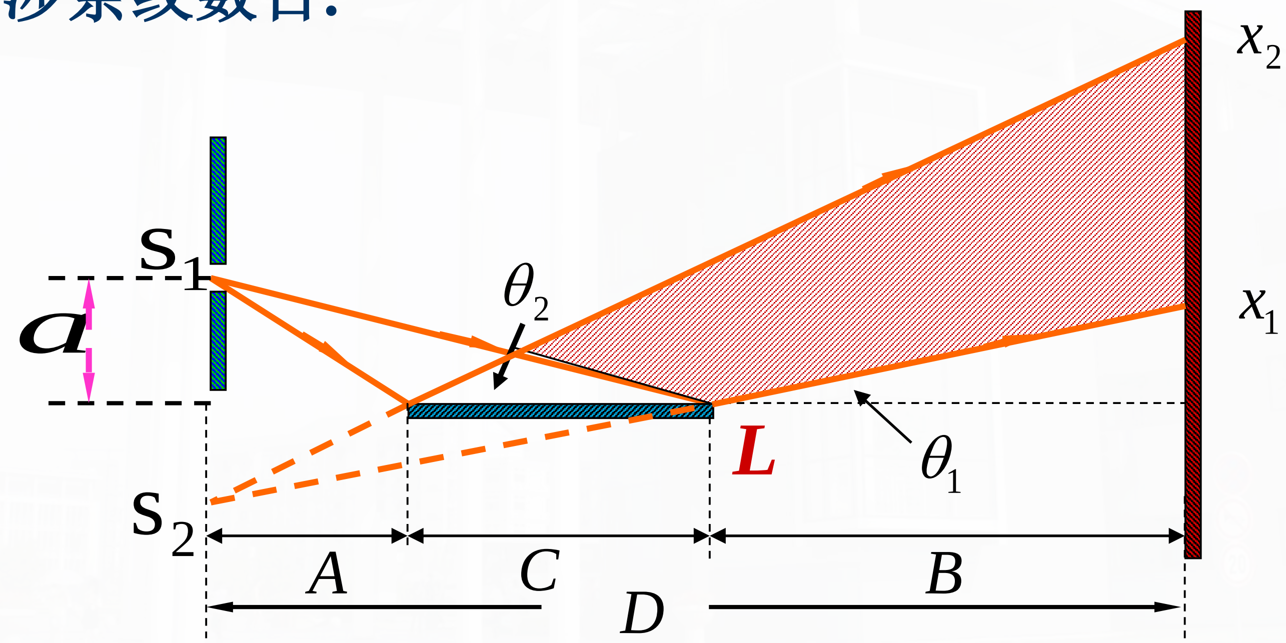
二、洛埃镜



半波损失(half-wave loss) 当光由光疏介质射向光密介质，在界面上发生反射时，在反射点处反射光的光矢量相对于入射光光矢量的相位发生大小为π的突变。

$$d\frac{x}{d'}+\frac{\lambda}{2}=\begin{cases}\pm k\lambda \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}\end{cases} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

例1　设洛埃镜的长度为C=5.0cm，屏幕与镜边的距离B=3.0m，缝光源与镜边缘的距离A=2.0cm，离镜面高度为a=0.5mm，光波长5893 Å ,求屏幕上的条纹间距和出现的干涉条纹数目.



解: **已知洛埃镜为双像干涉装置，双像间隔为**

$$d=2a$$

按条文间距公式

$$\Delta x=\frac{D\lambda}{d}=\frac{A+B+C}{2a}\lambda\approx\frac{B}{2a}\lambda\approx 1.8\text{mm}$$

$$\therefore \Delta l=x_1x_2=(C+B)\text{tg}\,\theta_2-B\text{tg}\,\theta_1$$

且

$$\text{tg}\,\theta_2=\frac{a}{A},\text{tg}\,\theta_1=\frac{a}{A+C}$$

考虑到 $B >> A, C$

$$\therefore \Delta l = \frac{aBC}{A(A+C)} \approx 54\text{mm}$$

条纹数目

$$\Delta N = \frac{\Delta l}{\Delta x} \approx 30$$

例2　用很薄的云母片（n=1.58）覆盖在双缝实验中的一条缝上，这时零级明条纹移到原来的第七级明条纹位置上，如果入射光波长为550nm，求云母片厚度.

解: 覆盖云母片之前的零级明纹位置处光程差

$$r_1 - r_2 = 0$$

设云母片厚度为*e*，覆盖云母片后*x*=0处的光程差

$$(r_1 - e) + ne - r_2 = 7\lambda$$

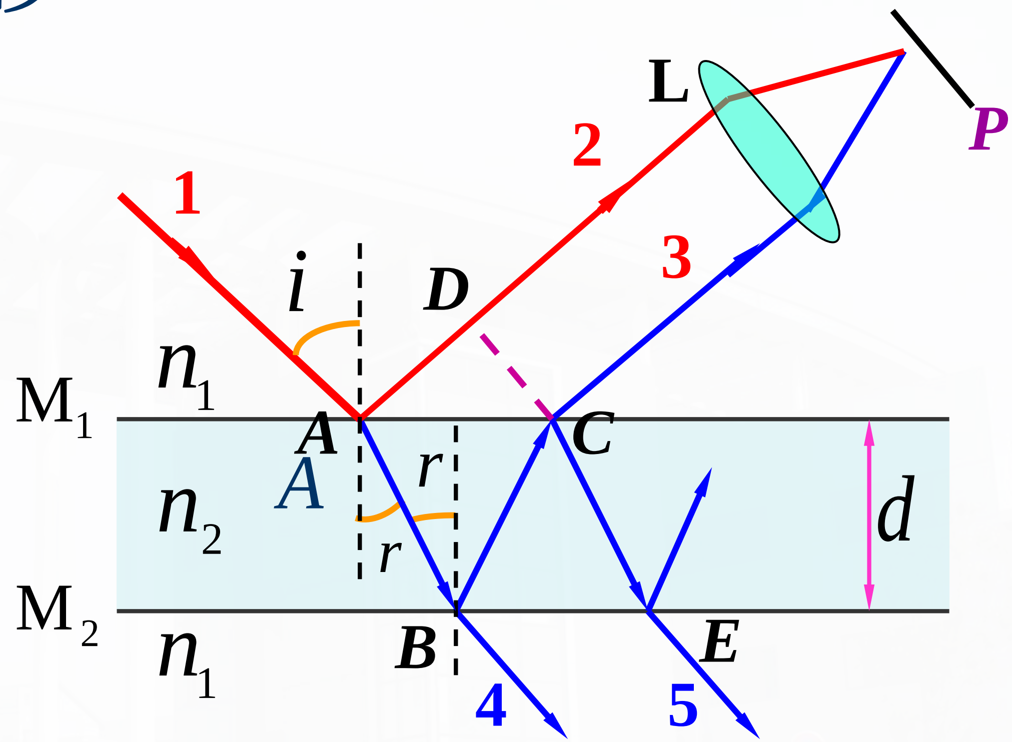
$$e = \frac{7\lambda}{n-1} = 6.64 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm}$$

19－4 分振幅干涉

一、薄膜干涉

获取相干光方法二

利用两部分的反射表面，产生两个反射光波（或两个透射光波），即**分振幅法**。



计算 光线2和光线3的光程差

$$n_2 > n_1 \qquad CD \perp AD \qquad AB = BC = \frac{d}{\cos r}$$

$$AD = AC\sin i = 2d\tan r\sin i \qquad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Delta' = n_2(AB + BC) - n_1 AD$$

$$= \frac{2d}{\cos r}(n_2 - n_1\sin r\sin i) = \frac{2d}{\cos r} n_2\left(1 - \sin^2 r\right)$$

$$= 2n_2 d\cos r$$

或$\Delta' = 2n_2 d\sqrt{1 - \sin^2 r} = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i}$

当 $n_1 < n_2 > n_3$ 或 $n_1 > n_2 < n_3$ 考虑附加光程差，则

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \boxed{\frac{\lambda}{2}}$$

干涉条件

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & \text{加强} \quad (k = 1,2,\cdots) \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{减弱} \quad (k = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$

而透射光的光程差

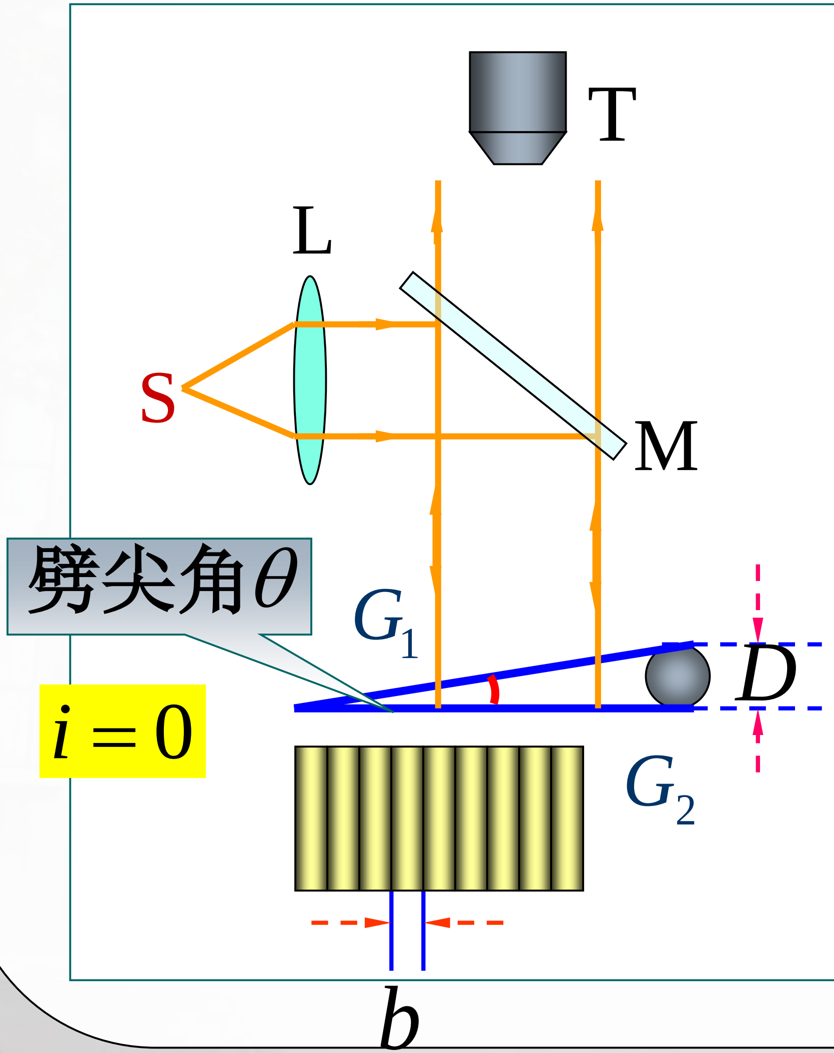
$$\Delta_t = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}$$

注意： 透射光无半波损失。透射光和反射光干涉具有互补性，符合能量守恒定律.

等倾干涉： 相同入射角的入射光所形成的反射光到达相遇点的光程差相同，必定处于同一级次k的干涉条纹上，即条纹级次取决于入射角的干涉。

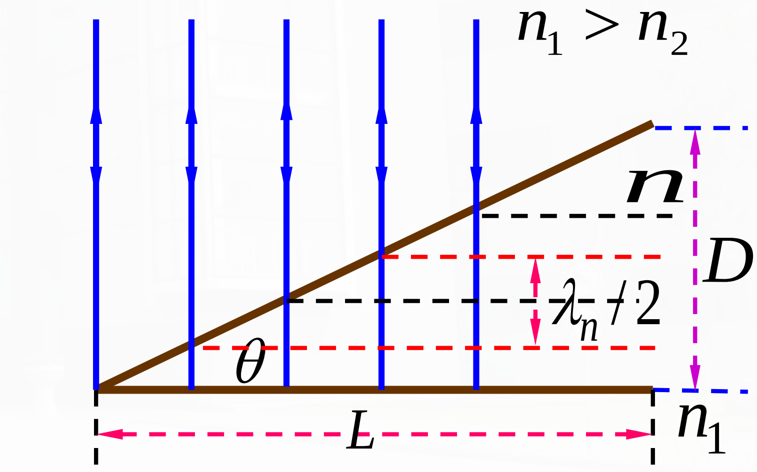
等厚干涉： 相同厚度d的两束反射光具有相同的光程差，组成同一级次k的干涉条纹，即条纹级次取决于薄膜厚度的干涉。

二、劈尖



$$\Delta = 2n_2 d + \boxed{\frac{\lambda}{2}} \Leftarrow \boxed{\because n_2 < n_1}$$

$$\Delta = \begin{cases} k\lambda, \quad k = 1,2,\cdots & \text{明} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, \quad k = 0,1,\cdots & \text{暗} \end{cases}$$



●相邻明纹（暗纹）间的厚度差 $d_{k+1}-d_k=\dfrac{\lambda}{2n_2}=\dfrac{\lambda_{n_2}}{2}$

光在介质中（n_2）的波长：$\lambda_{n_2}=\dfrac{\lambda}{n_2}$

当$n_2=1$时, $d_{k+1}-d_k=\dfrac{\lambda}{2}$

●条纹间距（明纹或暗纹）:等间隔性

$$b\sin\theta=\frac{\lambda_{n_2}}{2}=\frac{\lambda}{2n_2},\sin\theta\approx\theta$$

$$\boxed{b=\frac{\lambda}{2n_2\theta}}$$

$\because\theta\approx D/L$，　$\therefore$ 细丝直径为 $D=\dfrac{\lambda}{2n_2 b}L$

例1 白光垂直照射在空气中厚度e=0.40 um的玻璃片上，其折射率n_2=1.50，试问在可见光范围内（波长400-700nm),哪些波长的光在反射中增强？哪些波长的光在透射中增强？

解: 存在半波损失，所以

$$2en_2+\frac{\lambda}{2}=k\lambda \quad k=1,2,3\ldots$$

在可见光范围内，只能取k=3，所以

$$\lambda=480\text{nm}$$

透射光加强时，应有

$$2en_2 = k\lambda \quad k = 0,1,2,3\ldots$$

$$\lambda = \frac{2n_2 e}{k}$$

在可见光范围内，只能取*k*=2或者*k*=3，

$$k = 2, \lambda = \frac{2n_2 e}{2} = 600\text{nm};$$

$$k = 3, \lambda = \frac{2n_2 e}{3} = 400\text{nm}$$

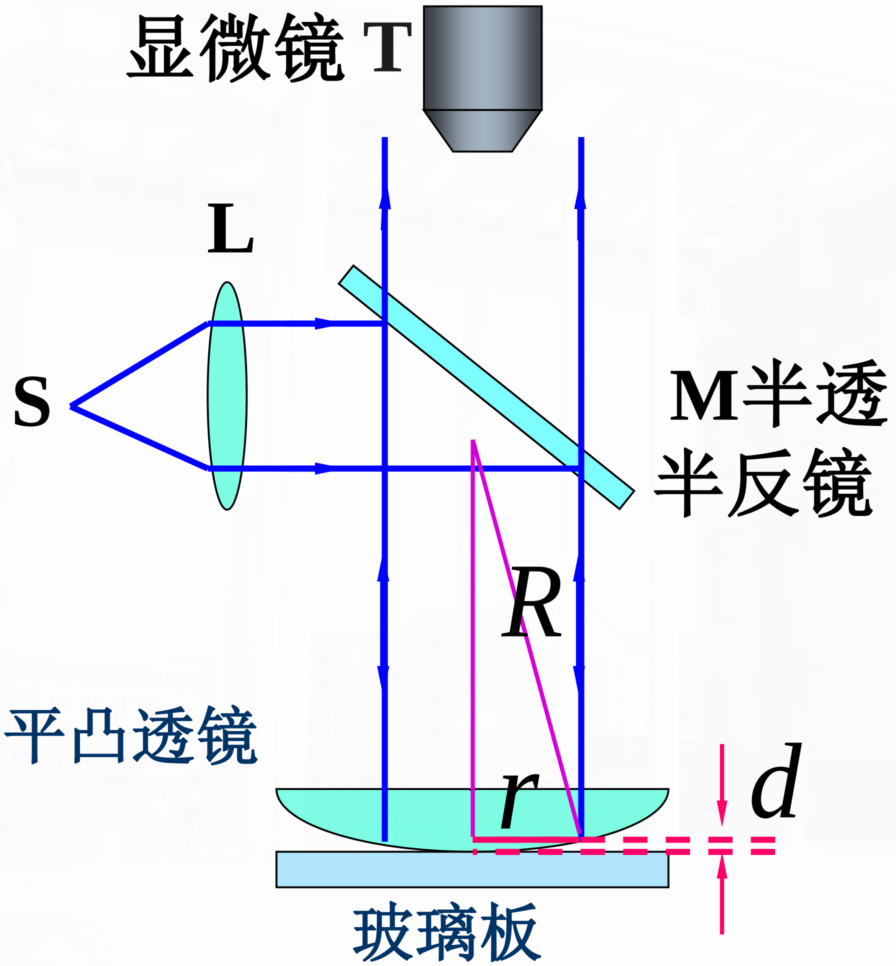
例2 在很薄的劈尖玻璃板上$n_2=1.52$，垂直地射入波长为5893A的钠光，条纹间距为5.0mm，求此劈尖的夹角.

解:

$$\because b=\frac{\lambda}{2n_2\theta}$$

$$\therefore \theta=\frac{\lambda}{2n_2 b}=2.22\times10^{-3}\,\text{rad}=8''$$

三、牛顿环



干涉图样:牛顿环

中央疏边缘密的
同心圆环条纹

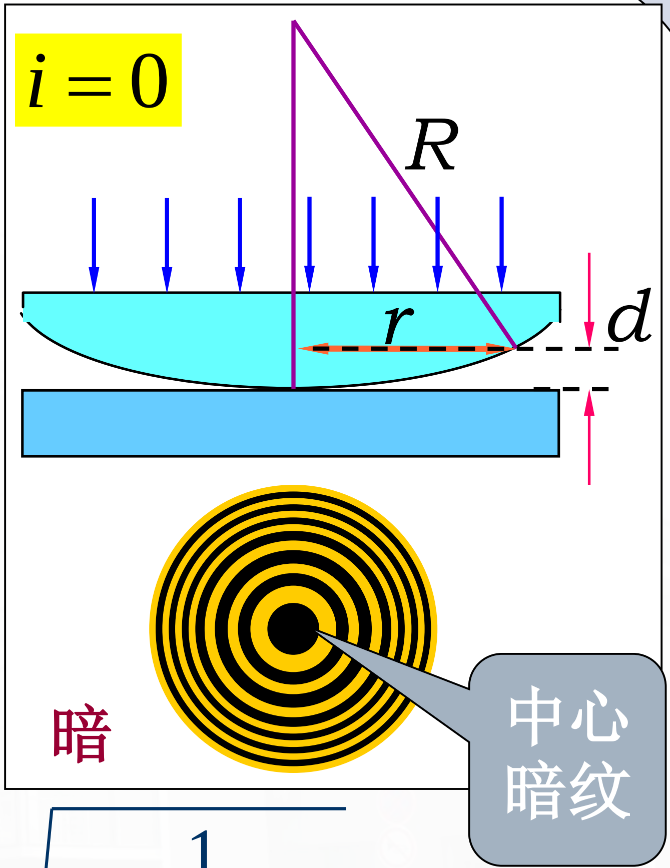
由图知

$$r^2 = R^2 - (R-d)^2 = 2dR - d^2$$

$$\because R >> d \quad \therefore d^2 \approx 0$$

$$r = \sqrt{2dR}$$

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, \quad k = 1,2,\cdots & \text{明} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, \quad k = 0,1,\cdots & \text{暗} \end{cases}$$



$$r = \sqrt{2dR} = \sqrt{(\Delta - \frac{\lambda}{2})R} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(k-\dfrac{1}{2})R\lambda} & \text{明环半径} \\ r = \sqrt{kR\lambda} & \text{暗环半径} \end{cases}$$

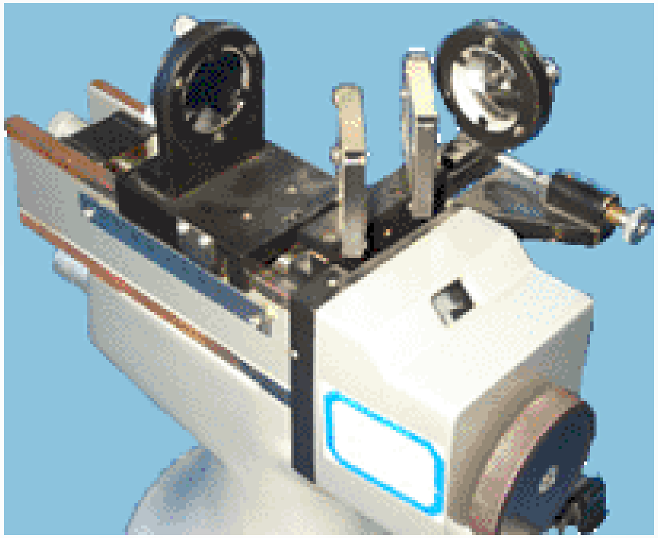
例　用氦氖激光器发出的波长为633nm的单色光做牛顿环实验，测得第个 k 暗环的半径为5.63mm，第 k+5 暗环的半径为7.96mm，求平凸透镜的曲率半径R.

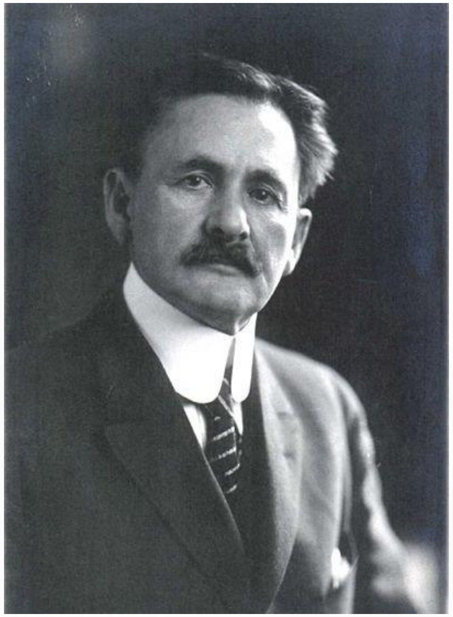
解　$r_k = \sqrt{kR\lambda}$　　$r_{k+5} = \sqrt{(k+5)R\lambda}$

$$5R\lambda = \left(r_{k+5}^2 - r_k^2\right)$$

$$R = \frac{r_{k+5}^2 - r_k^2}{5\lambda} = \frac{(7.96\text{mm})^2 - (5.63\text{mm})^2}{5\times 633\text{nm}} = 10.0\text{m}$$

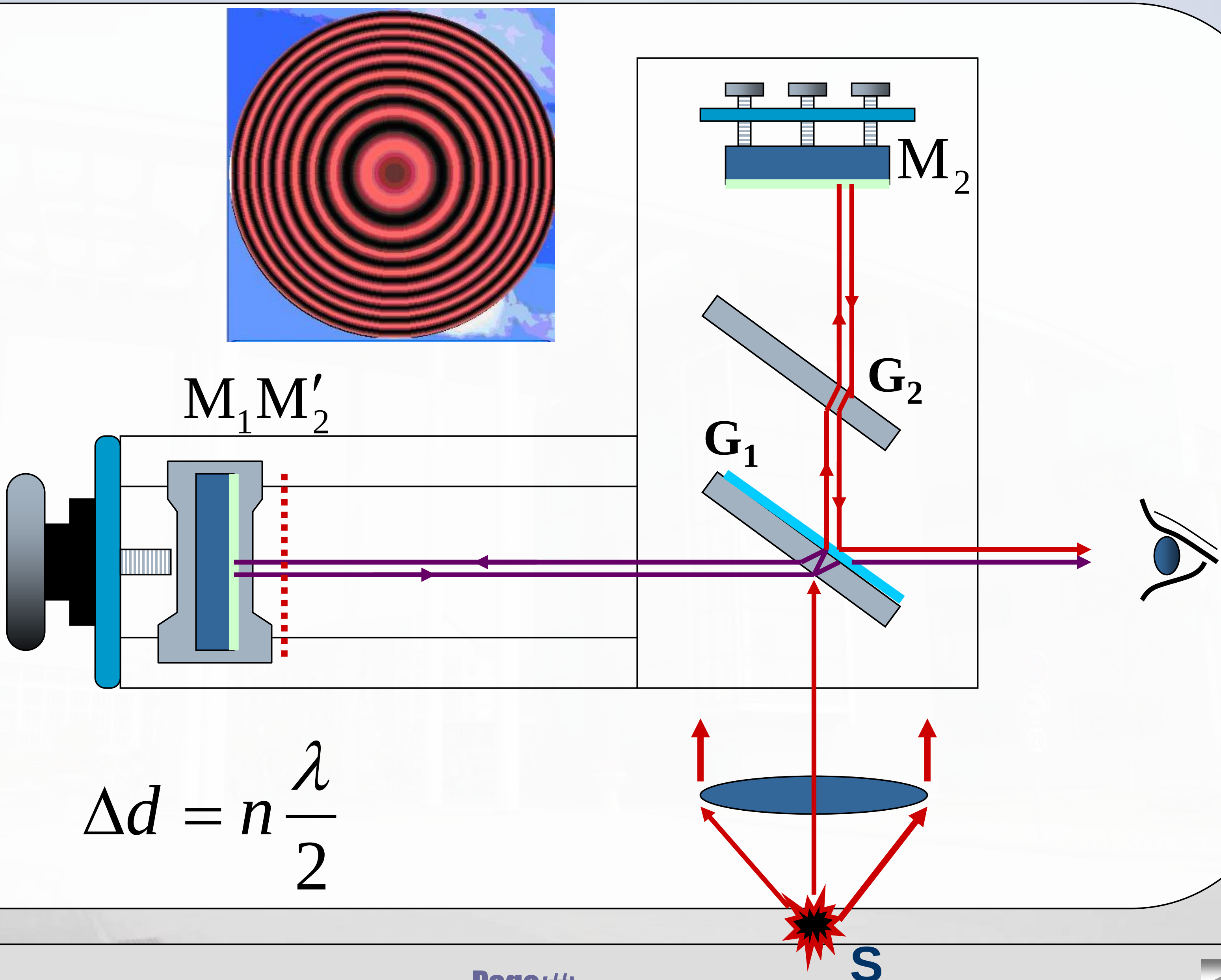
19－5 迈克耳逊干涉仪





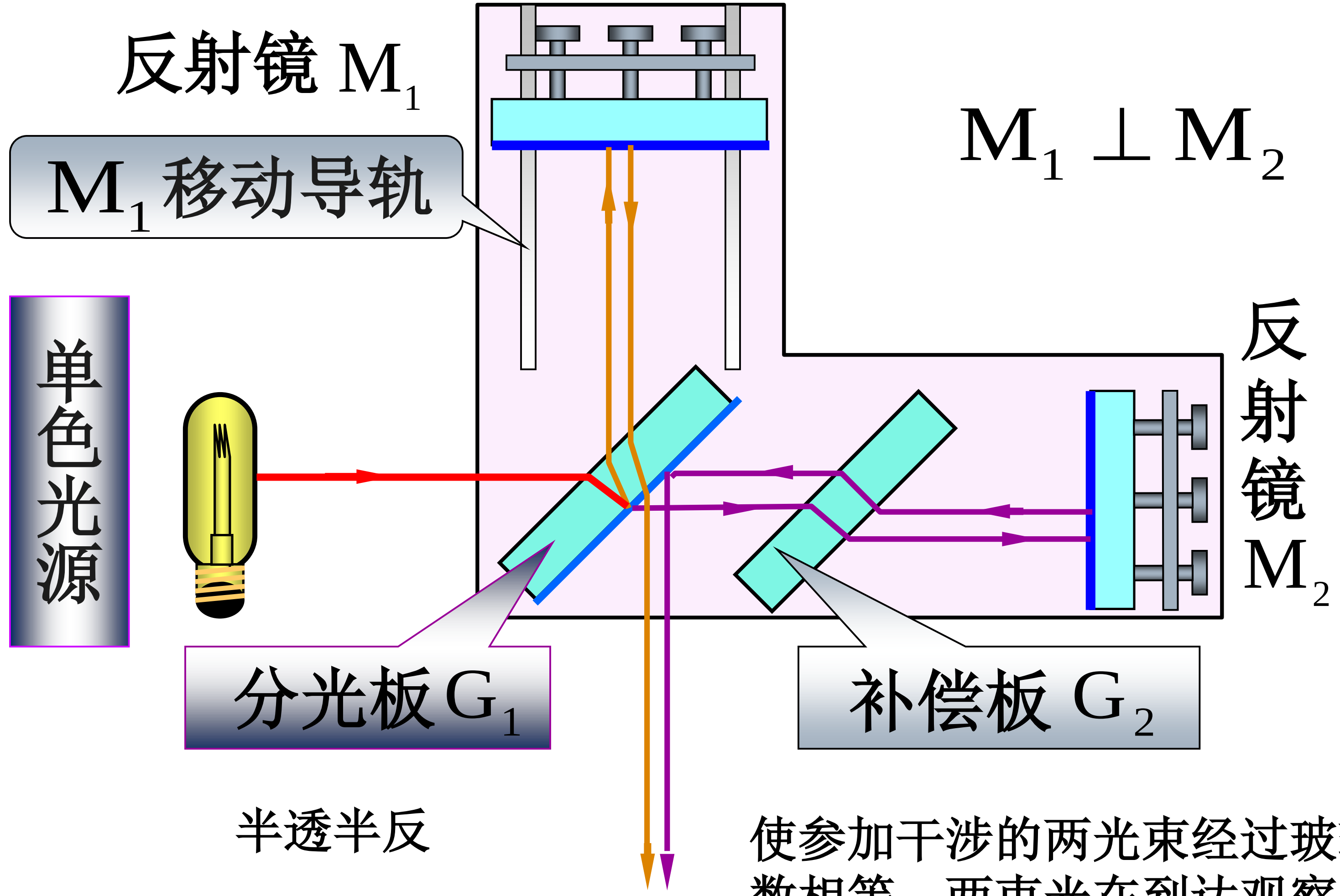
迈克耳逊干涉仪(Michelson interferometer)是利用光的干涉精确测量长度和长度变化的仪器。

迈克耳逊和莫雷曾利用它进行过著名的否定旧以太说的实验，在物理学中占有一定地位。

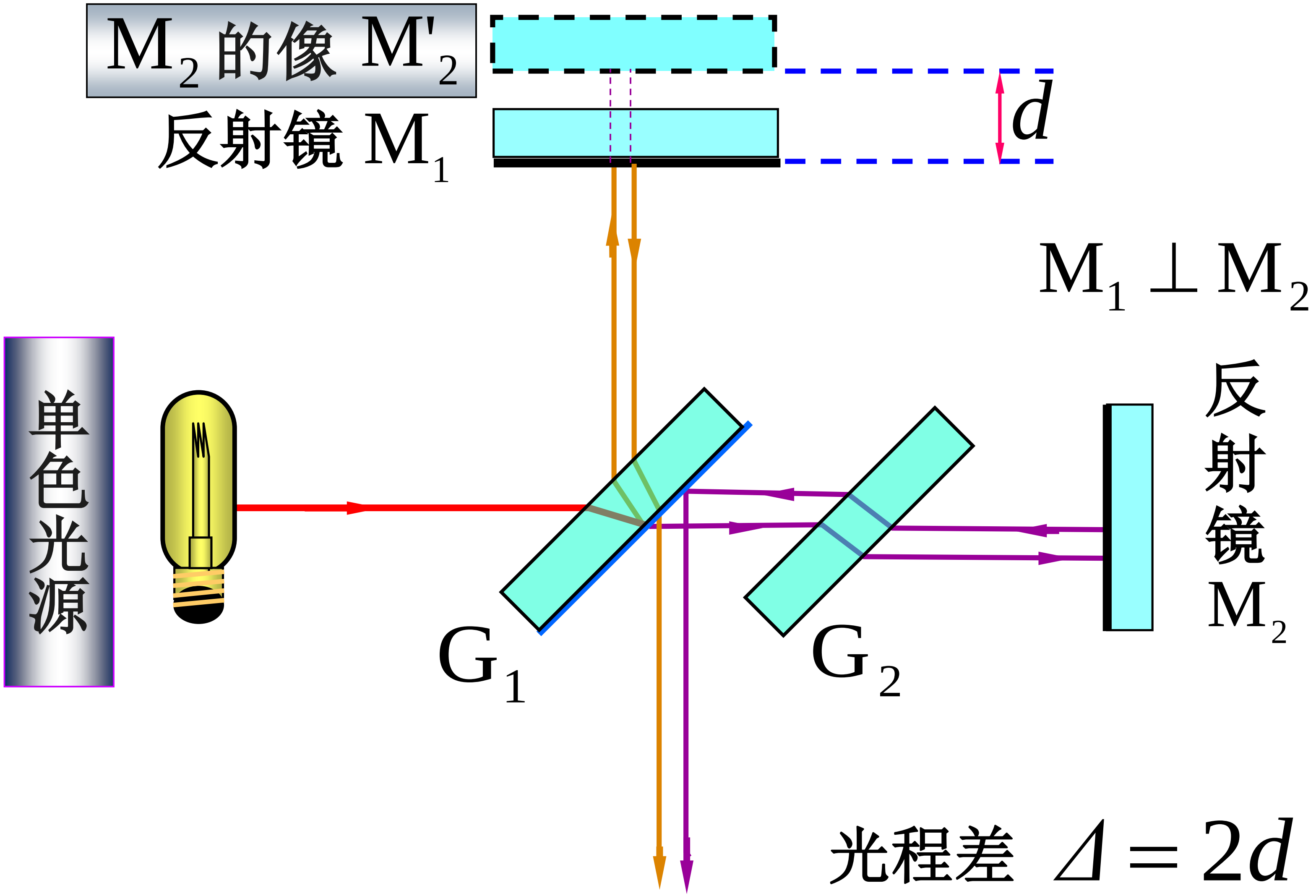


$$\Delta d = n\frac{\lambda}{2}$$

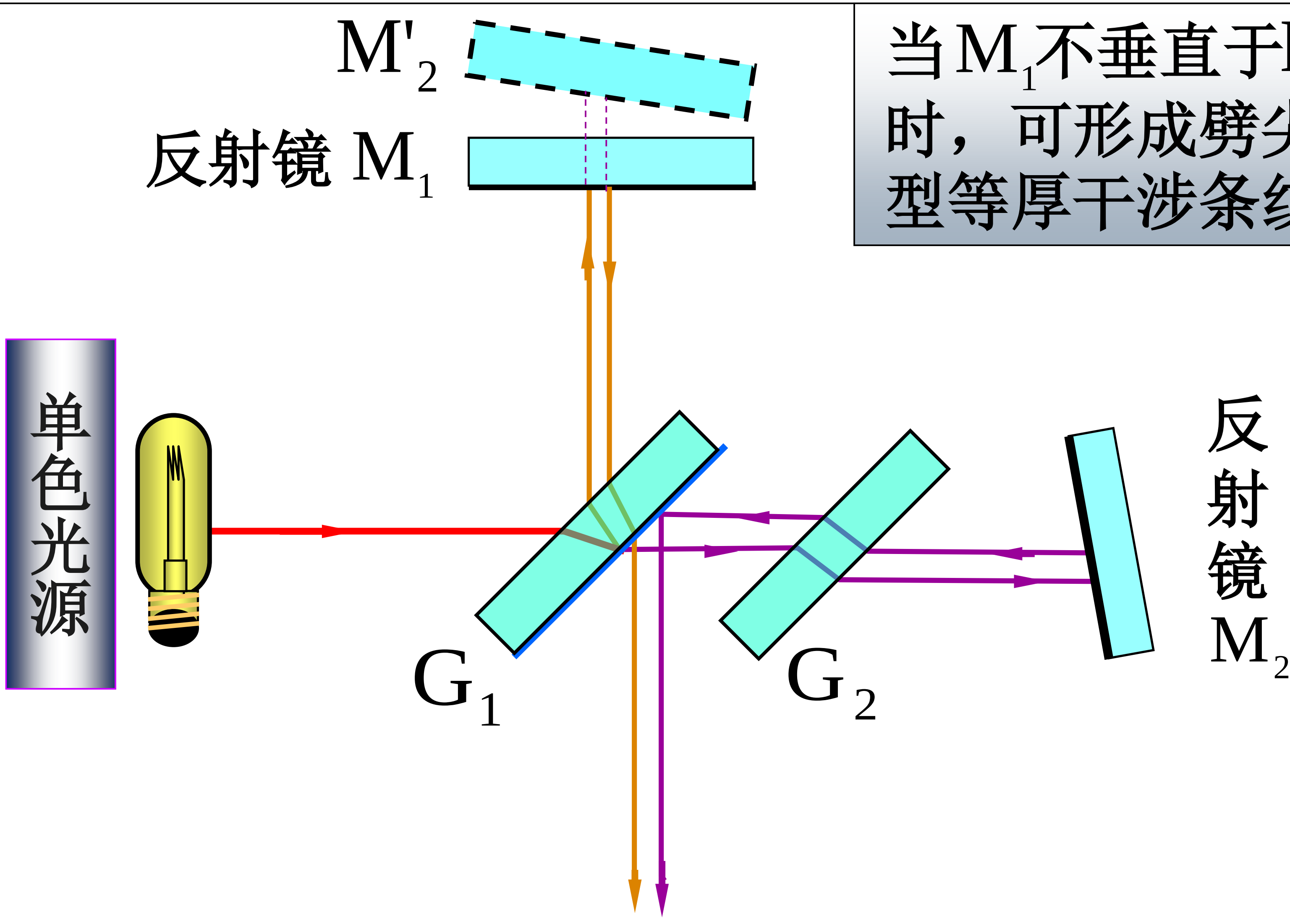
$G_1//G_2$ 与 M_1, M_2 成 45^0角



使参加干涉的两光束经过玻璃板的次数相等，两束光在到达观察区域时没有因玻璃介质而引入额外的光程差



光程差 $\Delta = 2d$



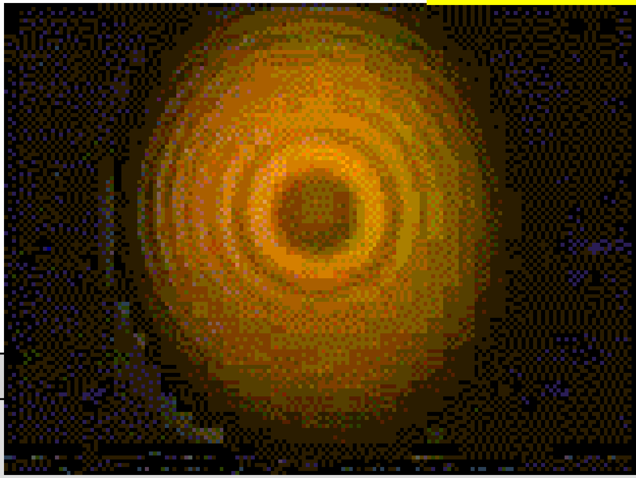
当M_1不垂直于M_2时，可形成劈尖型等厚干涉条纹.

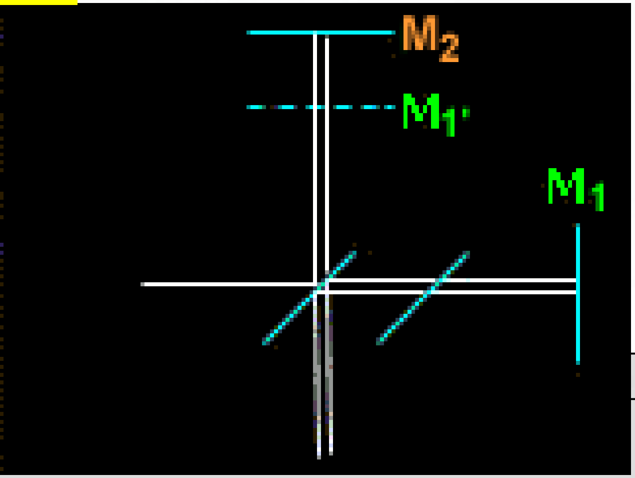
干涉条纹的移动

当 M_1 与 M_2' 之间距离变大时，圆形干涉条纹从中心一个个长出，并向外扩张，干涉条纹变密；距离变小时，圆形干涉条纹一个个向中心缩进，干涉条纹变稀．

M_1向前或后移动半波长距离时，干涉条纹就移动一条，如果视场中移动的条纹数为n，则M_1平移距离为

$$\Delta d = n\frac{\lambda}{2}$$





例 在迈克耳孙干涉仪的两臂中，分别插入$l=10.0\text{cm}$长的玻璃管，其中一个抽成真空，另一个则储有压强为$1.013\times10^{5}\text{Pa}$的空气，用以测量空气的折射率 n. 设所有的光波波长为546nm，实验时，向真空玻璃管中逐渐充入空气，直至压强达到 $1.013\times10^{5}\text{Pa}$ 为止.在此过程中，观察到107.2条干涉条纹的移动，试求空气的折射率n..

解

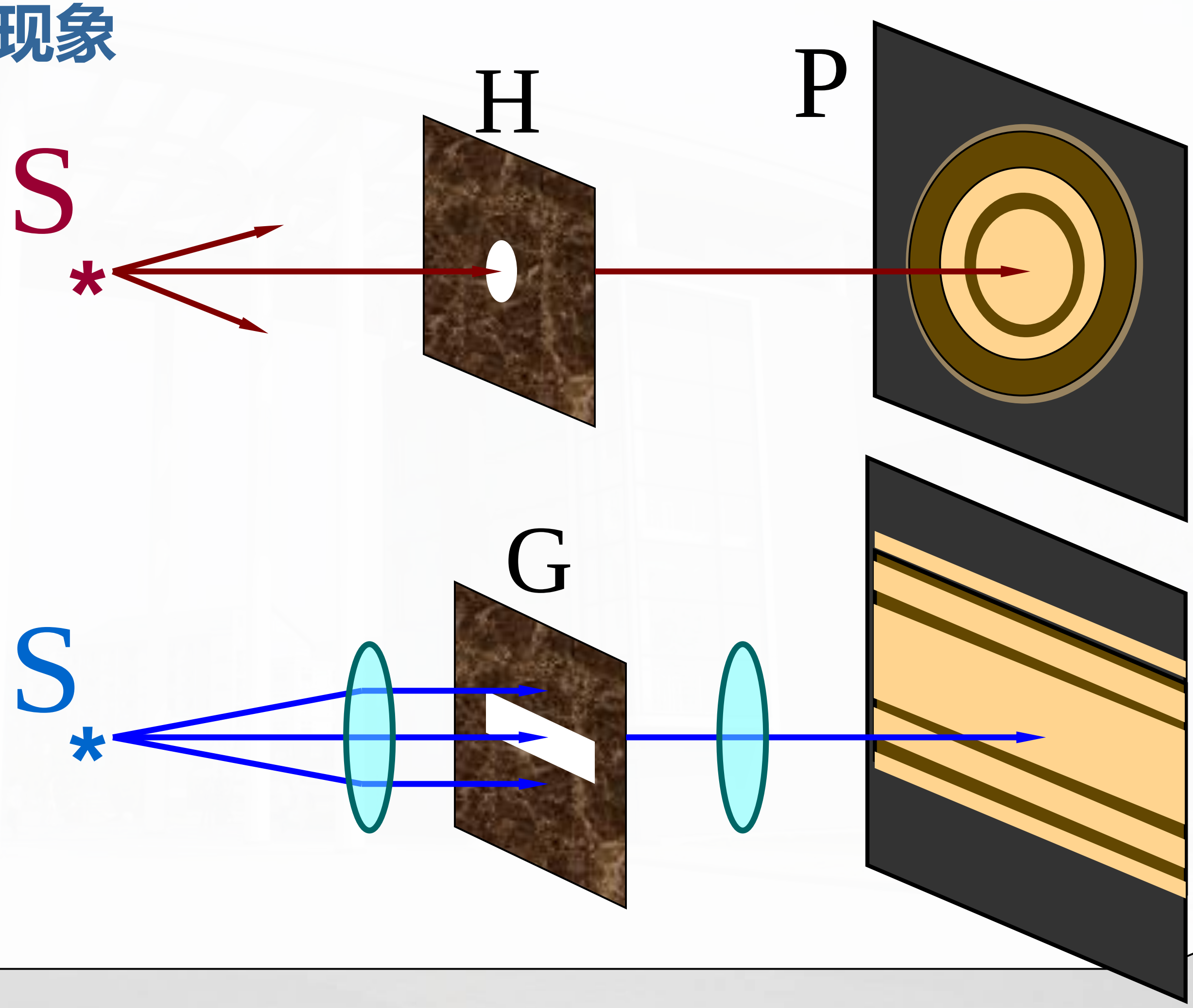
$$\Delta_1-\Delta_2=2(n-1)l=107.2\lambda$$

$$n=1+\frac{107.2\lambda}{2l}=1+\frac{107.2\times546\times10^{-7}\text{cm}}{2\times10.0\text{cm}}$$

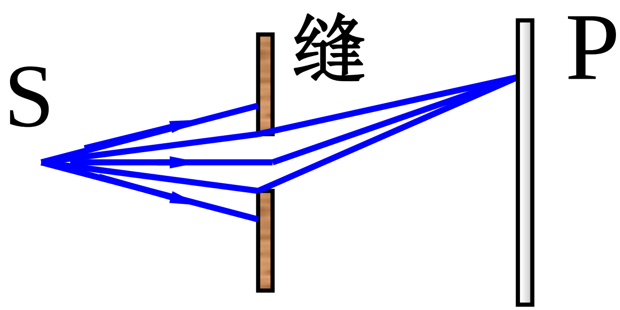
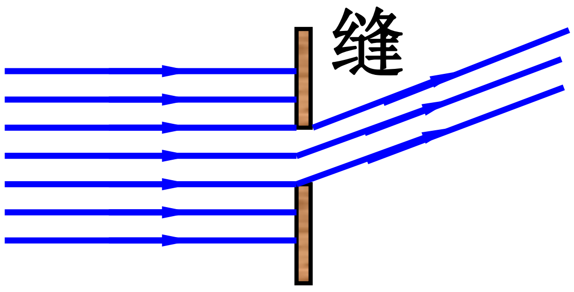
$$=1.00029$$

19—7 惠更斯-菲涅耳原理

一、光的衍射现象

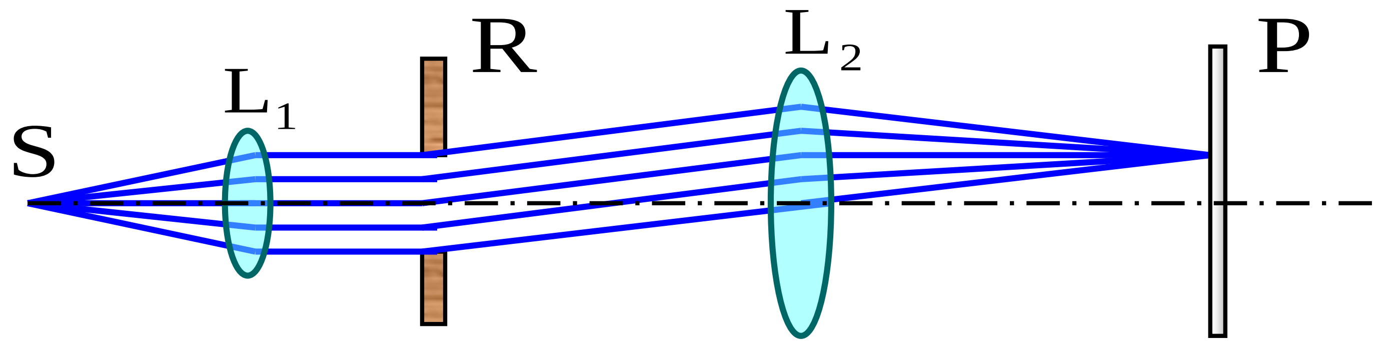


二、菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射

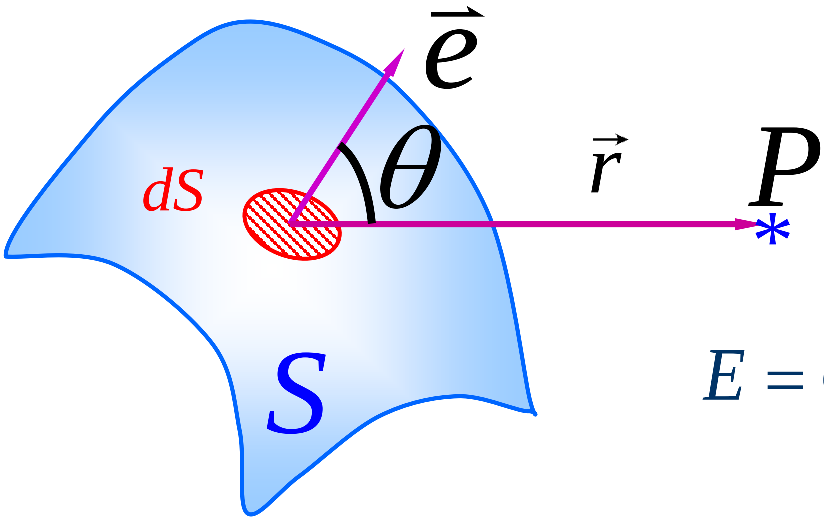
菲涅耳衍射	夫琅禾费衍射
	
光源、屏与缝相距有限远	光源、屏与缝相距无限远

夫琅禾费衍射

在实验中实现



三、惠更斯 — 菲涅耳原理



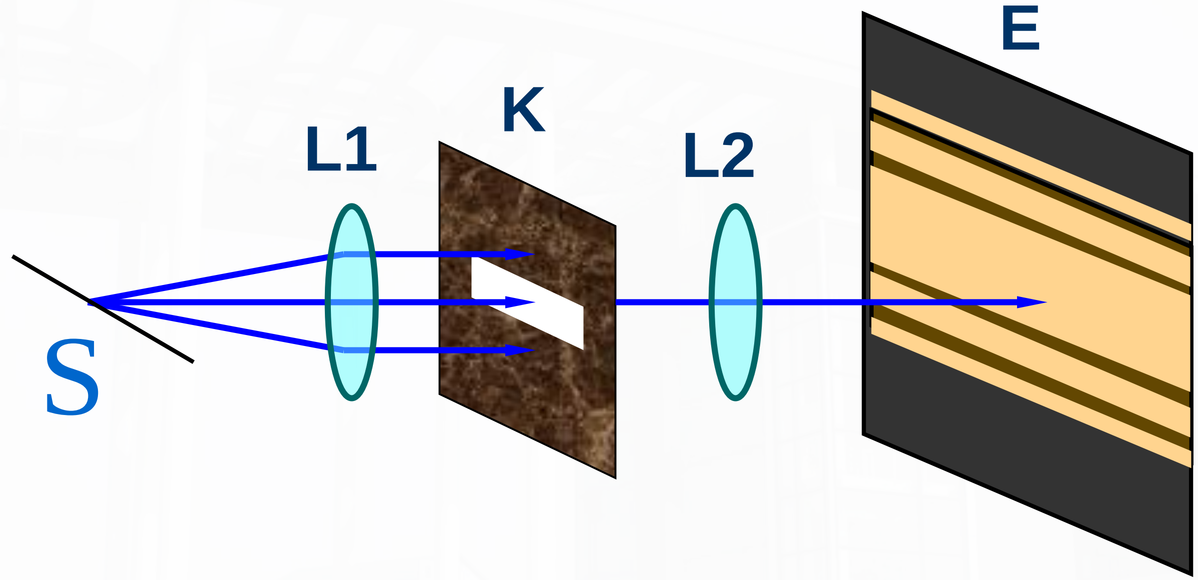
$$\mathrm{d}E = C\frac{k(\theta)}{r}\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda})]\mathrm{d}S$$

$$E = C\int_s \frac{k(\theta)}{r}\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda})]\mathrm{d}S$$

子波在 P 点引起的振动振幅 $\propto \dfrac{ds}{r}$ 并与 θ 有关.

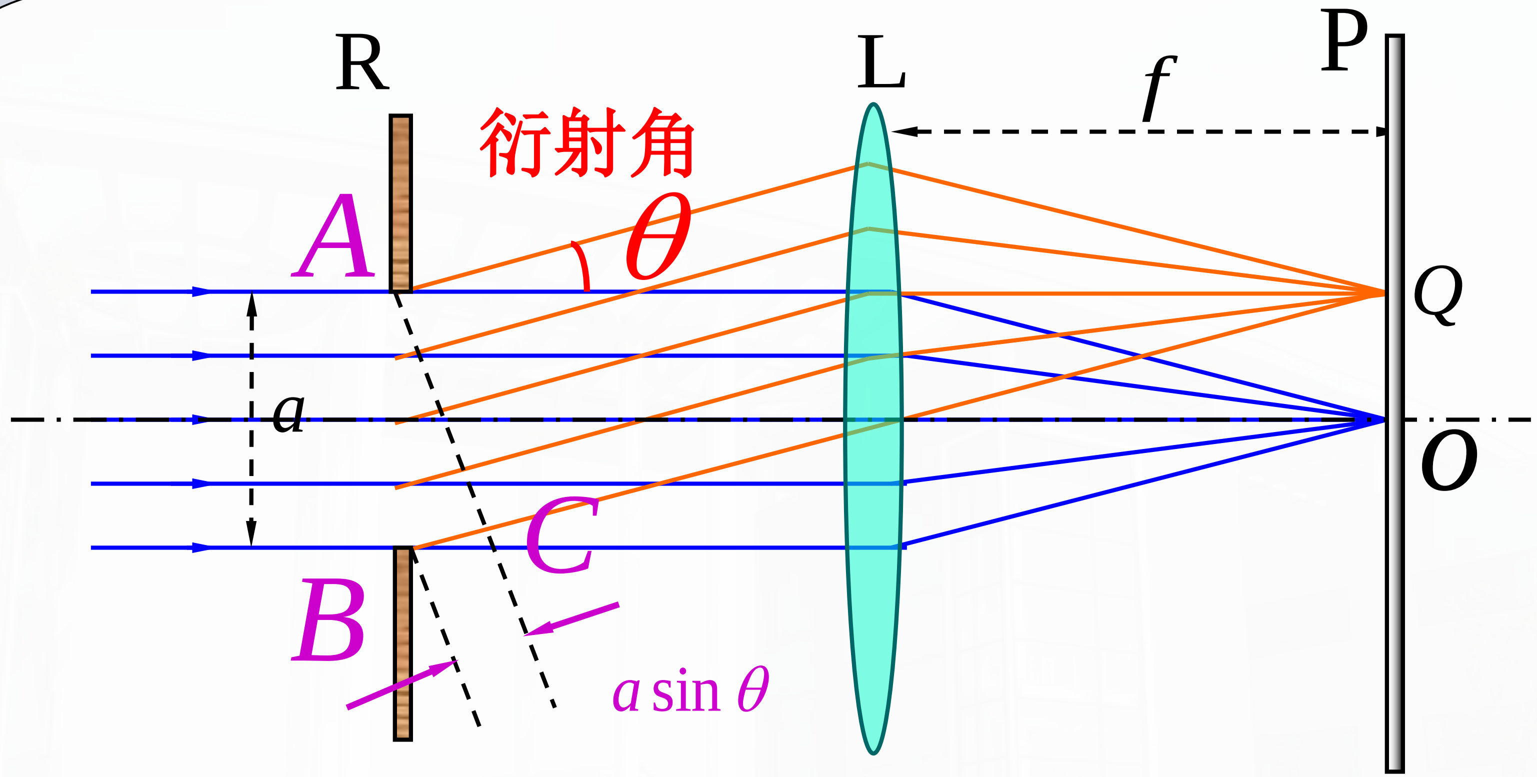
惠更斯-菲涅耳原理：从同一波面上各点发出的子波是相干波，在传播到空间某一点时，各子波进行相干叠加的结果，决定了该处波振幅。

19－8 夫琅禾费单缝衍射



1、明暗相间的平行直条纹，中央明纹又宽又亮，宽度约为两侧明纹的2倍

2、中央明纹两侧对称分布着明暗相间的条纹，它的强度比中央明纹弱很多



（衍射角 θ：向上为正，向下为负 .）

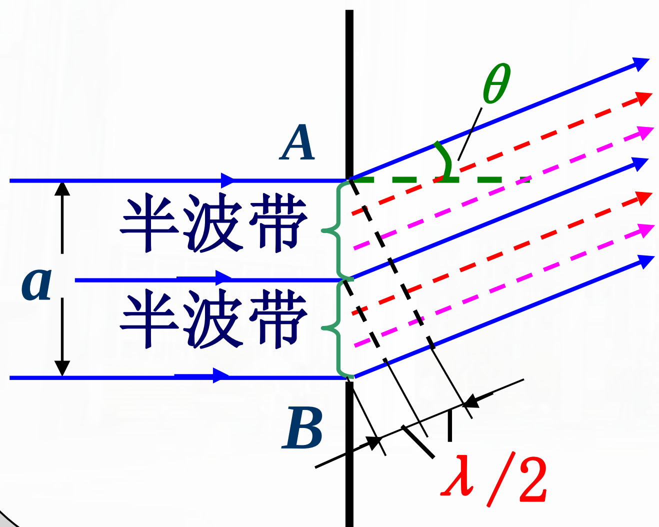
当θ=0时，光程差为0，屏中央出现明条纹，称为零级明纹（中央明纹）

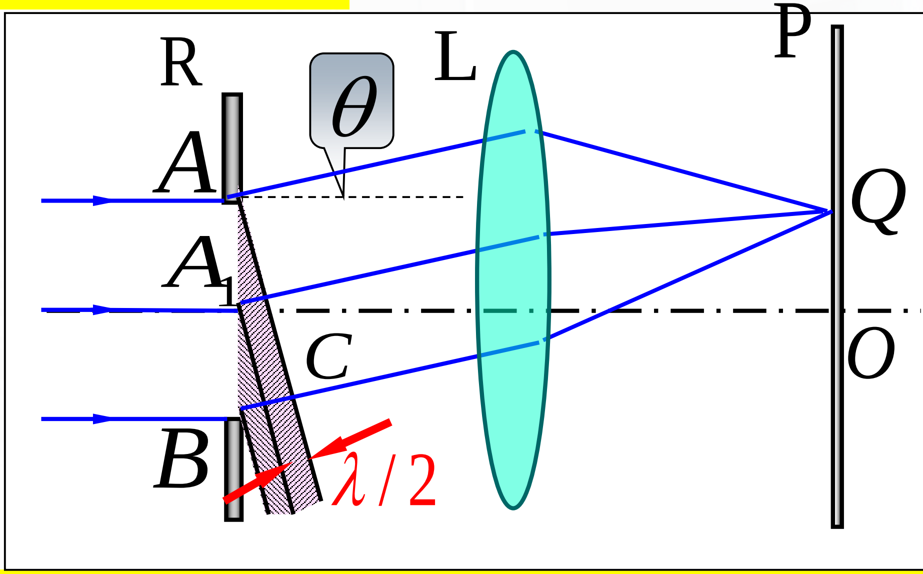
对于 $\theta \neq 0$时，菲涅尔半波带法

在波阵面上截取一个条状带，使它上下两边缘发的光在屏上Q处的光程差为$\lambda/2$，此带称为半波带。

光程差为 $BC = a\sin\theta = n\dfrac{\lambda}{2}(n = 1, 2, \cdots)$

（1）偶数个半波带 $a\sin\theta = \pm 2k\,\lambda/2$ $k = 1, 2, 3, \cdots$

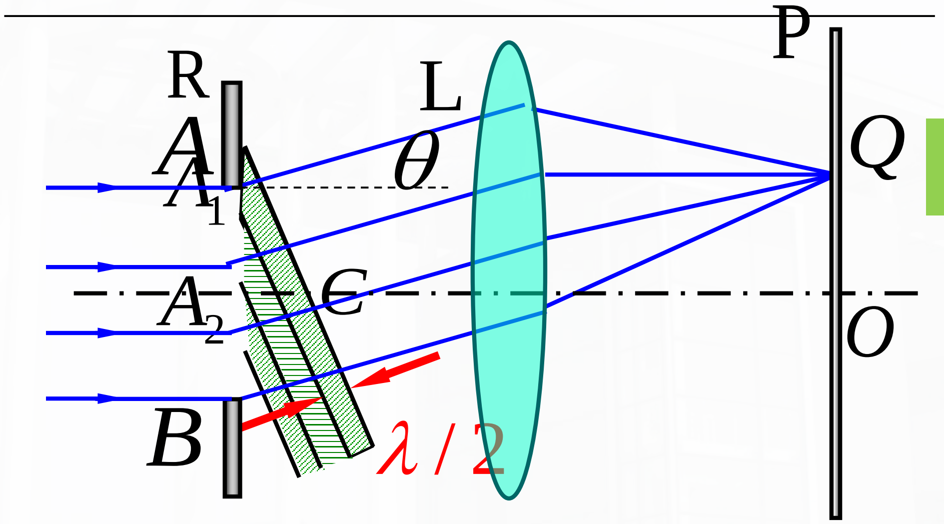




暗纹

两相邻半波带上对应点发出的光在Q处相互抵消形成暗纹。

（2）奇数个半波带 $a\sin\theta = \pm(2k+1)\lambda/2$ $k = 1,2,3,\cdots$



两相邻半波带上对应点发出的光相互抵消后还留下一个半波带，其在Q处干涉相长形成亮纹。

明、暗条纹的形成条件

a. 当$\theta=0$时， 光程差为0，**中央明纹（零级明纹）**。

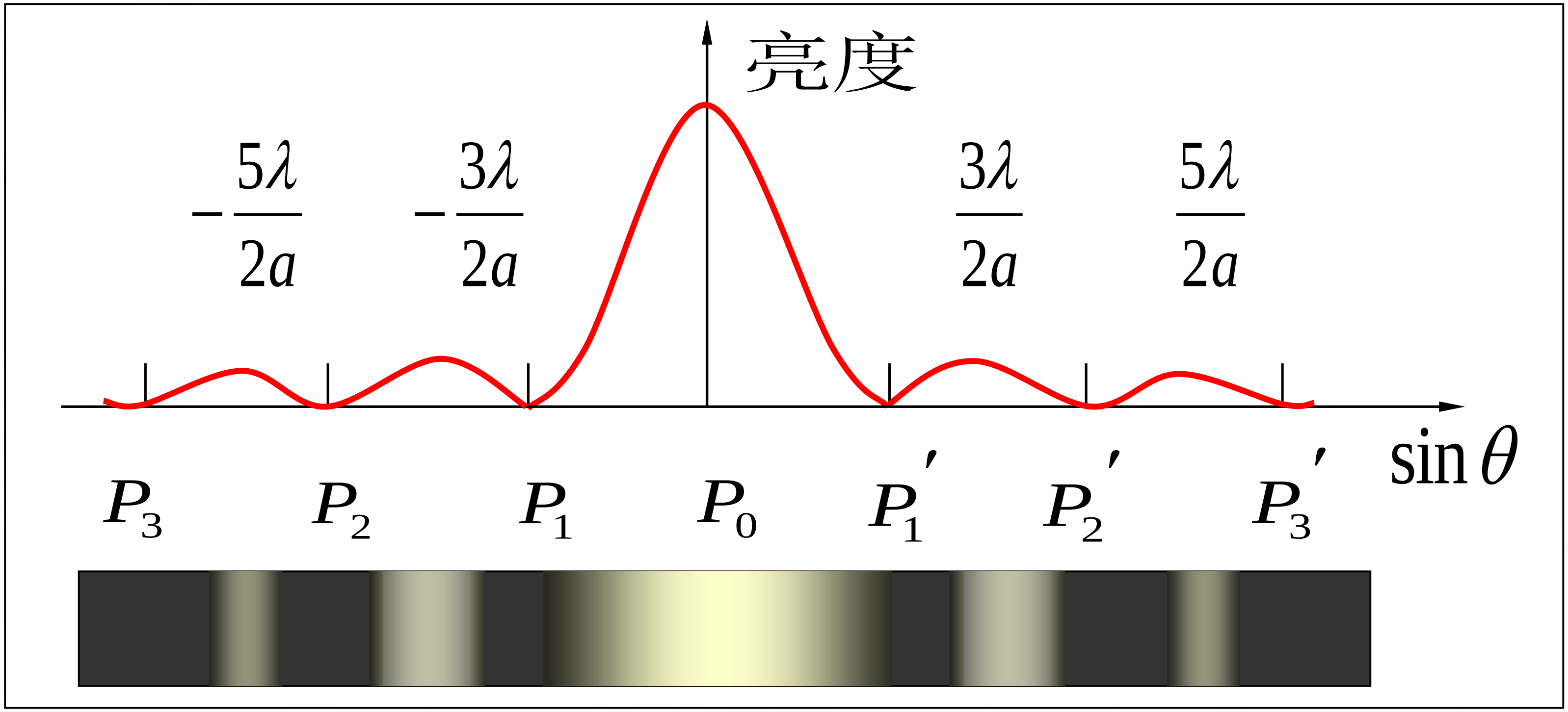
b. 当θ满足 $a\sin\theta = \pm 2k(\lambda/2) = \pm k\lambda$， $k=1，2，3\ldots\ldots$ 时，波面AB可分成$2k$个半波带，相消迭加，产生**暗纹**。

c. 当θ满足 $a\sin\theta = \pm(2k+1)(\lambda/2)$， $k=1，2，3\ldots\ldots$ 时，波面AB可分成$(2k+1)$个半波带，产生**明纹**。

d. 当$a\sin\theta \neq n\dfrac{\lambda}{2}$ （介于明暗之间）

"±"表示明、暗条纹关于中心点对称。

k的取值为条纹级数。



亮度
$-\frac{5\lambda}{2a}$
$-\frac{3\lambda}{2a}$
$\frac{3\lambda}{2a}$
$\frac{5\lambda}{2a}$
$\sin\theta$
P_3
P_2
P_1
P_0
P_1'
P_2'
P_3'

明纹宽度

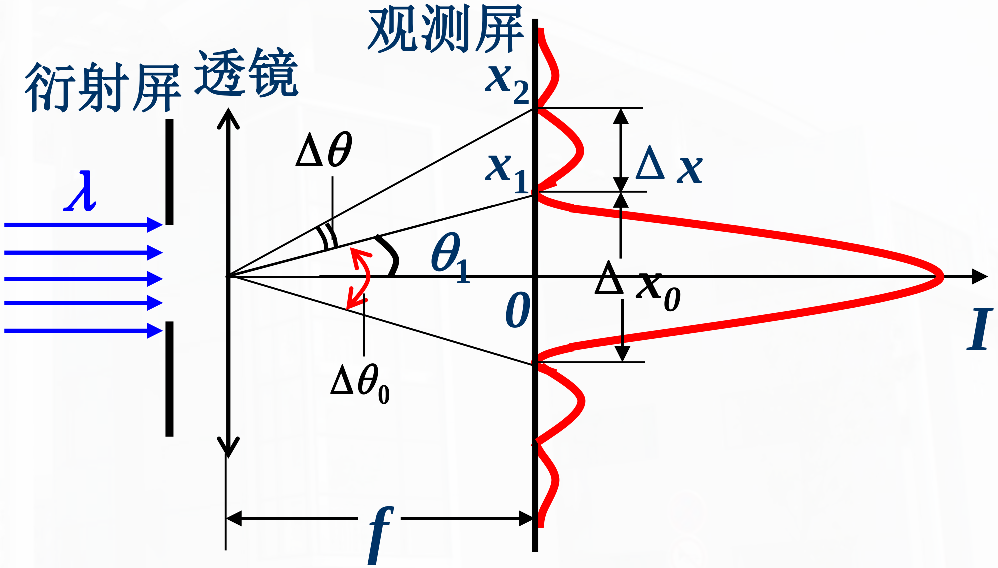
A. 中央明纹

当 $a << \lambda$ 时，第一级暗纹对应的衍射角 $\theta_1 \approx \sin\theta_1$

角范围 $-\dfrac{\lambda}{a} < \sin\theta < \dfrac{\lambda}{a}$

由 $a\sin\theta = \pm k\lambda$

得： $\theta_1 = \dfrac{\lambda}{a}$



中央明纹角宽度

$$\Delta\theta_0 = 2\theta_1 \approx 2\frac{\lambda}{a}$$

线宽度为 $\Delta x_0 = 2f\tan\theta_1 = 2f\theta_1 = 2f\dfrac{\lambda}{a}$

B.其它各级明/暗纹宽度

由各级暗纹中心到中央明纹中心的距离：

$$x = kf\frac{\lambda}{a}$$

或由各级明纹中心到中央明纹中心的距离：

$$x = \frac{(2k+1)}{2}f\frac{\lambda}{a}$$

得：各级明/暗纹宽度：

$$\Delta x = f\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{2}\Delta x_0$$ 前提仍然是θ很小

$$a\sin\theta = \pm 2k\, {}^{\lambda}\!/_{2}$$

$$a\sin\theta = \pm(2k+1)\, {}^{\lambda}\!/_{2}$$

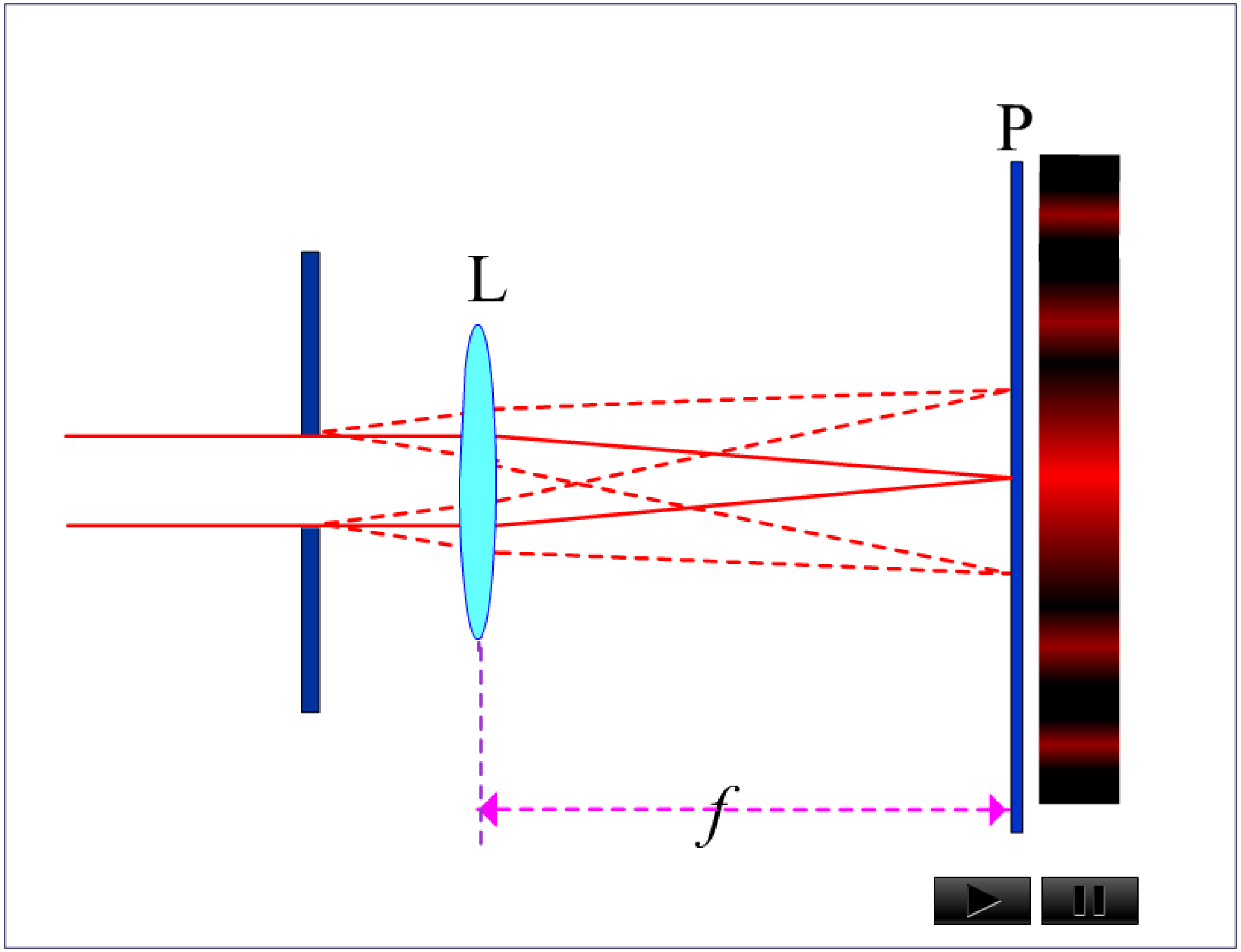
1. λ 一定

a 增大，θ 减小　$\dfrac{\lambda}{a} \Rightarrow 0,\ \theta \Rightarrow 0$　光直线传播

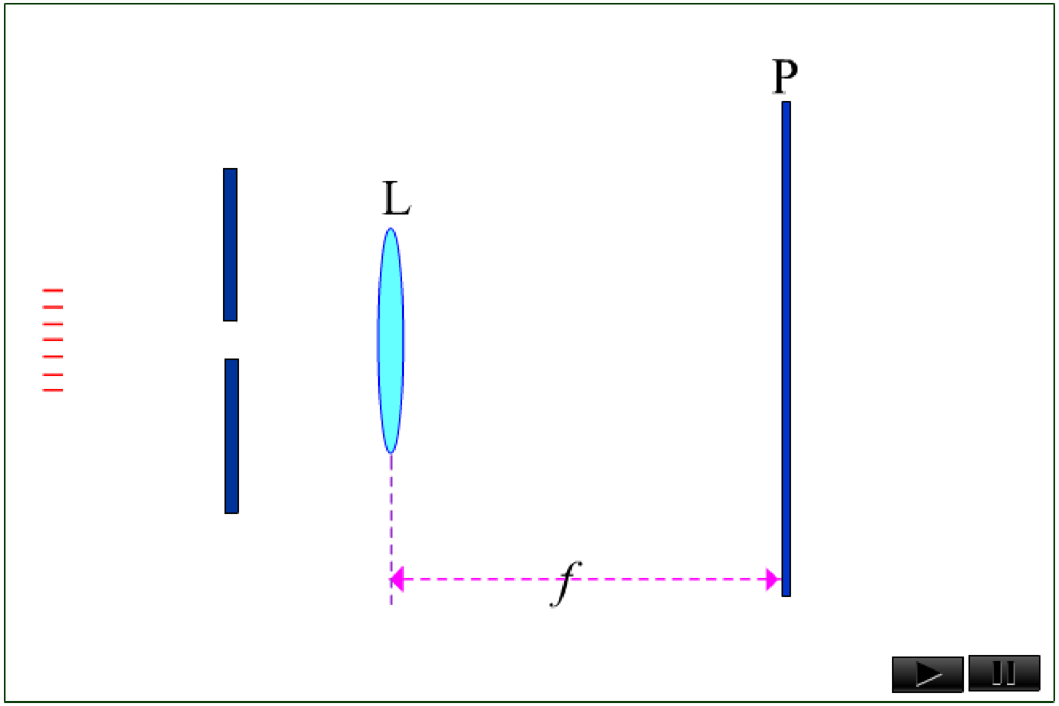
a 减小，θ 增大　$a \Rightarrow \lambda,\ \theta \Rightarrow \dfrac{\pi}{2}$　衍射最大

2. a 一定，λ 越大，θ 越大，衍射效应越明显.

单缝宽度变化



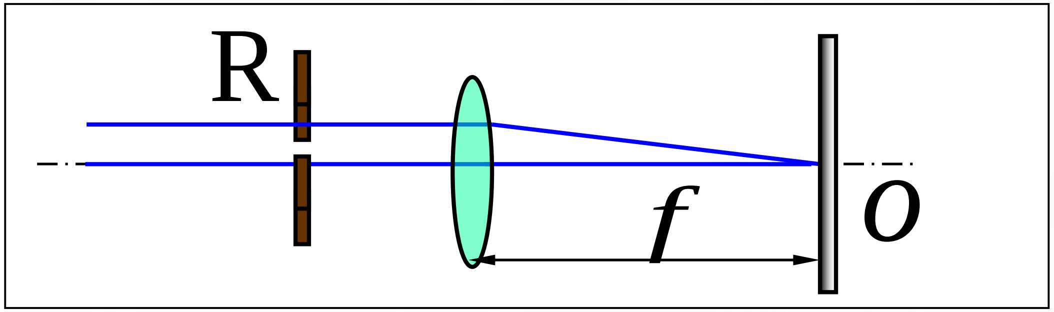
入射波长变化



λ越大，θ_1越大，衍射效应越明显.

单缝衍射的动态变化

单缝上下移动，根据透镜成像原理衍射图不变 .



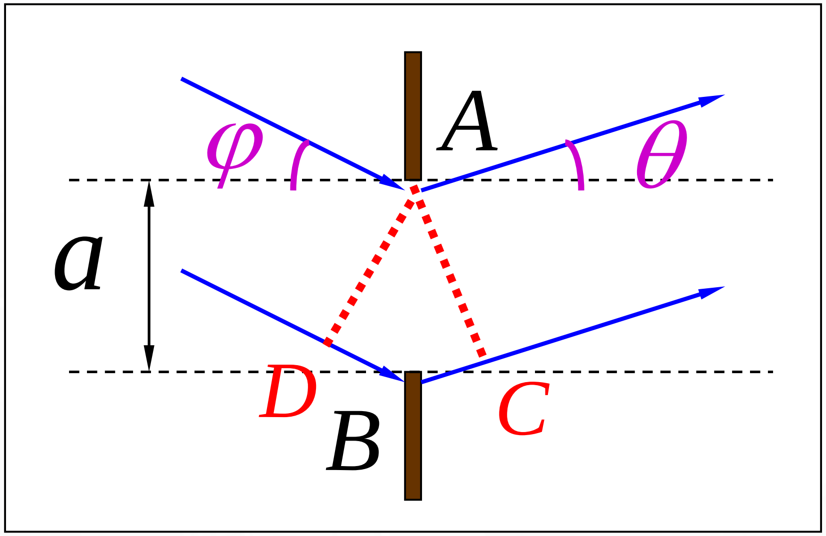
单缝上移，零级明纹仍在透镜光轴上.

入射光非垂直入射时光程差的计算

$$\varDelta = DB + BC$$

$$= a(\sin\theta + \sin\varphi)$$

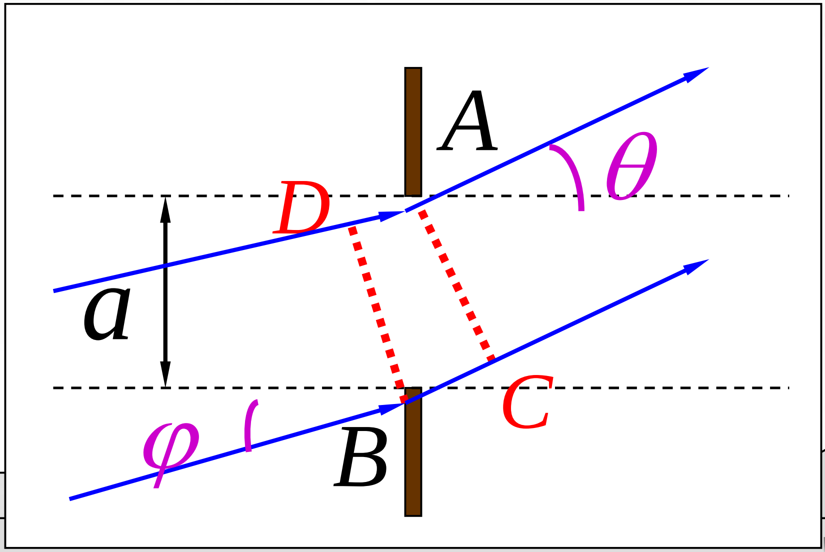
（中央明纹向下移动）



$$\varDelta = BC - DA$$

$$= a(\sin\theta - \sin\varphi)$$

（中央明纹向上移动）



例题：设波长 $\lambda = 500\mathrm{nm}$ 的绿色平行光，垂直入射于缝宽 a=0.5mm的单缝，缝后放一焦距为2.0m透镜，试求：（1）中央明条纹的半角宽度；（2）在透镜的焦平面上测得中央明条纹的线宽度。

解：（1）

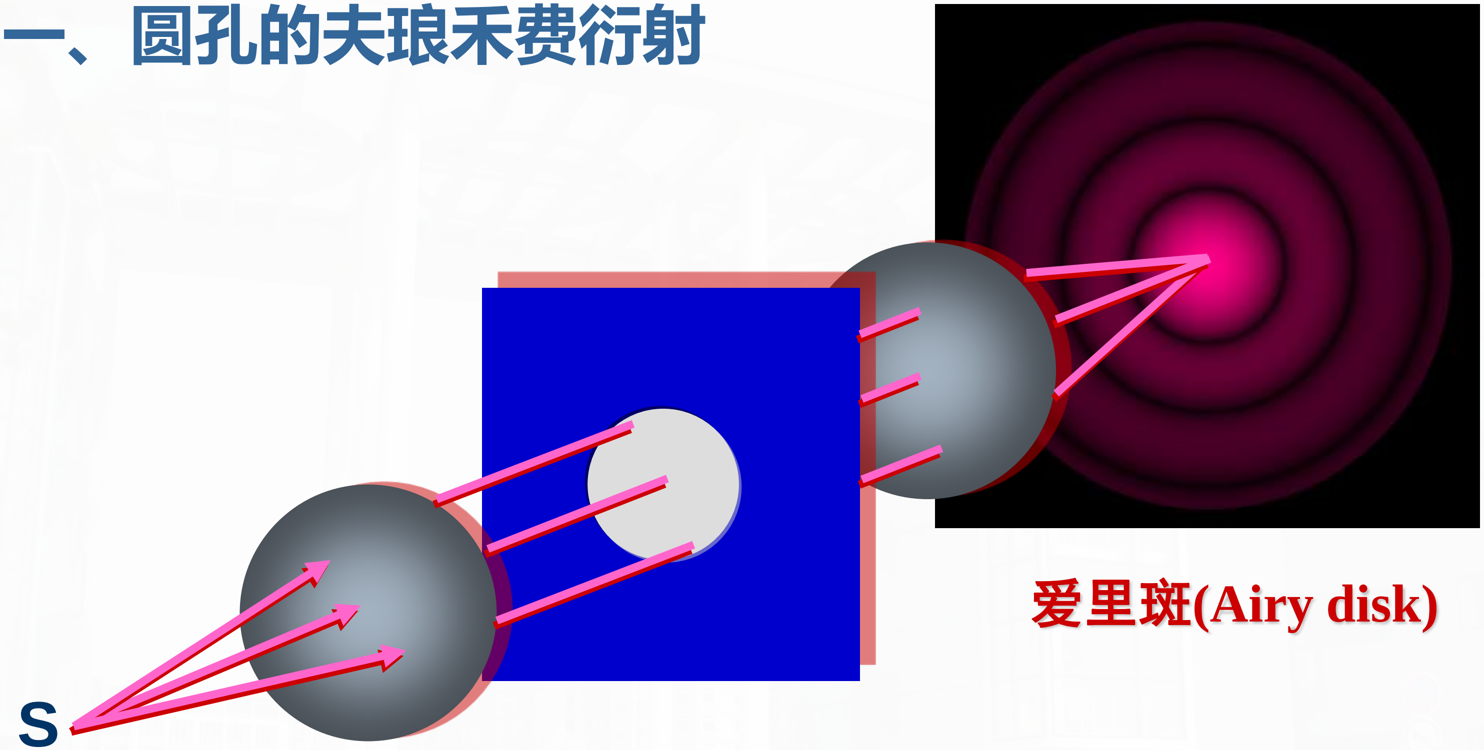
$$\theta_1 \approx \frac{\lambda}{a} = \frac{500\times10^{-9}}{5\times10^{-4}} = 1\times10^{-3}(\mathrm{rad})$$

（2）

$$\Delta x_0 = 2f\frac{\lambda}{a} = 2\times2\times10^{-3} = 4\times10^{-3}(\mathrm{m})$$

19—9 光学仪器的分辨本领

一、圆孔的夫琅禾费衍射



圆孔衍射的中央亮斑，集中衍射光强的80%以上.

第一级暗环的角半径：$\sin\theta_1 = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$　（D为圆孔直径）

角度很小的情况下：$\theta_1 \approx 1.22\dfrac{\lambda}{D}$

爱里斑角半径：第一级暗环所对应的衍射角　$\theta_1 = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$

爱里斑线半径：$R = 1.22\dfrac{\lambda}{D}f$

爱里斑直径：$d = 2\times f\times 1.22\dfrac{\lambda}{D} = 2.44\dfrac{\lambda}{D}f$

波长越大或圆孔直径越小，衍射现象越显著.

当 $\lambda \ll D$，衍射现象可忽略.

二、光学仪器的分辨本领

在光学成像问题中，有两种讨论方法：

几何光学 ：

$$\text{物点} \xRightarrow{\text{(经透镜)}} \text{像点}$$

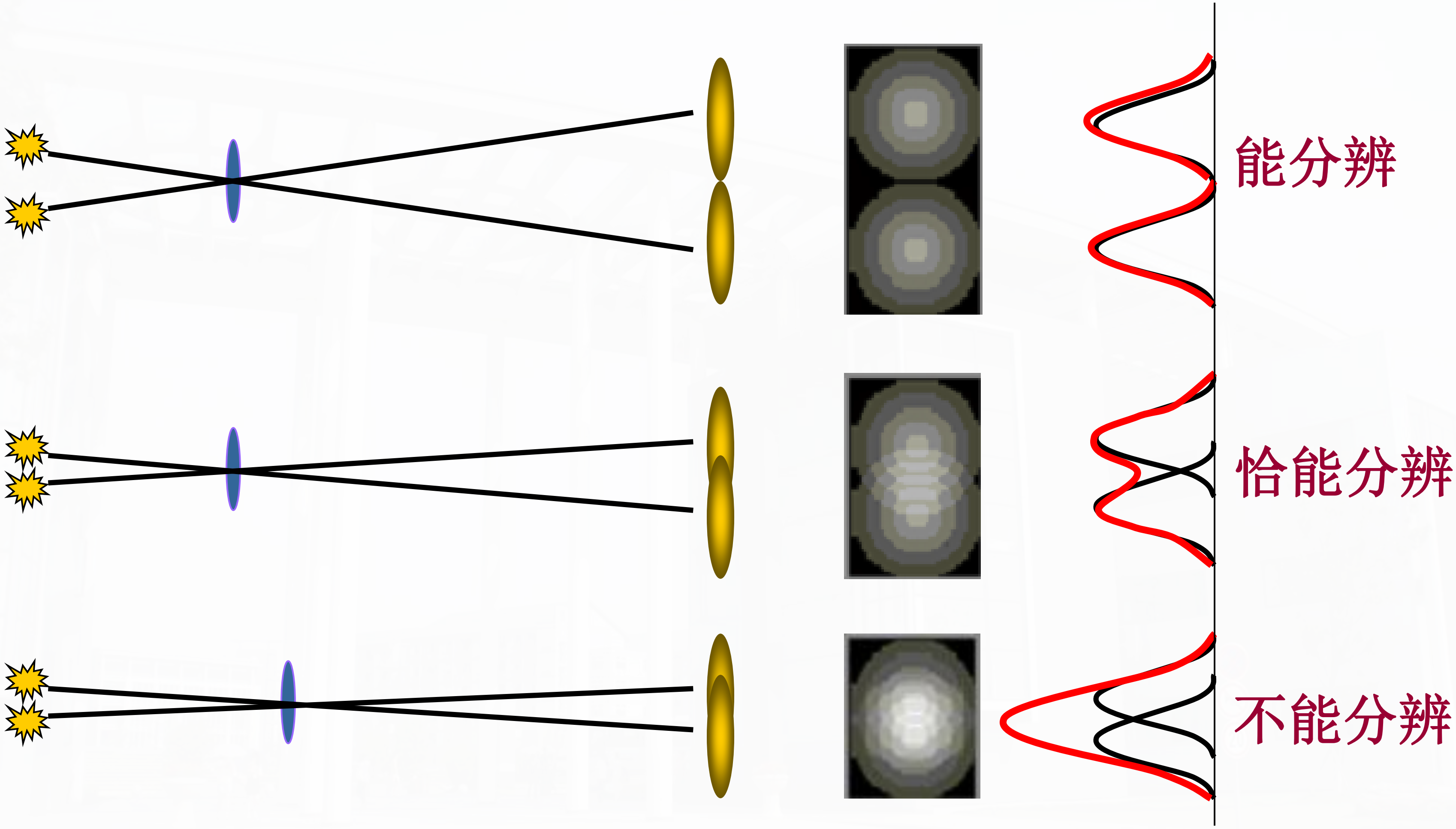
$$\text{物(物点集合)} \Rightarrow \text{像(像点集合)}$$

波动光学 ：

$$\text{物点} \xRightarrow{\text{(经透镜)}} \text{像斑}$$

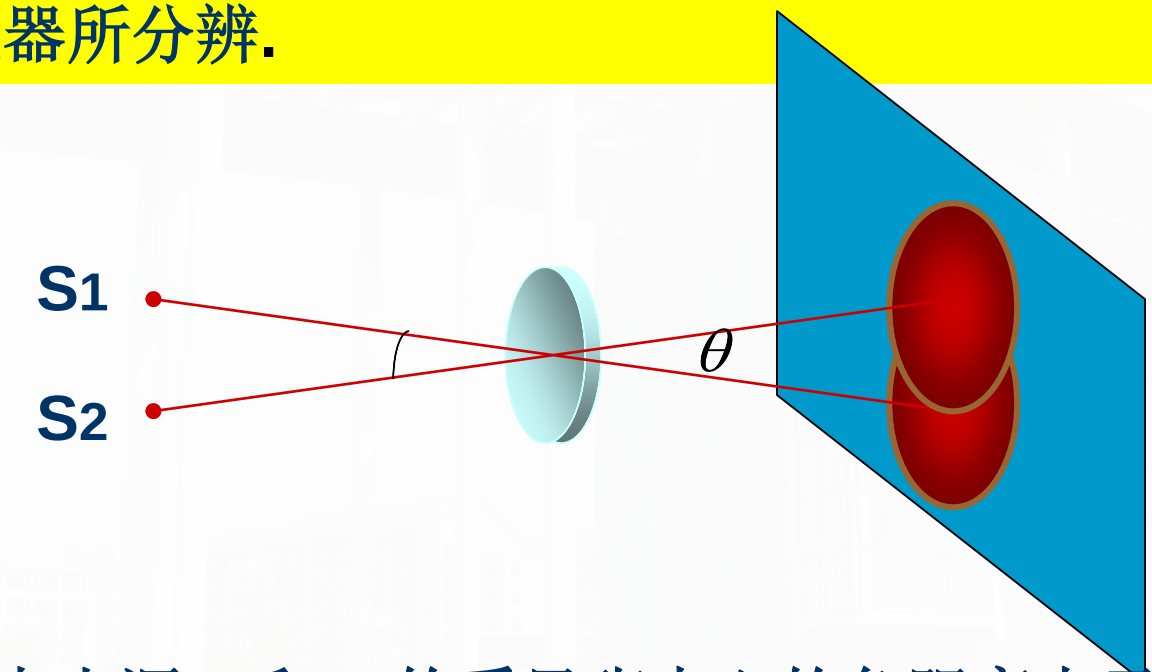
$$\text{物(物点集合)} \Rightarrow \text{像(像斑集合)}$$

距离很近的两个物点的像斑有可能重叠，从而分辨不清。


能分辨
恰能分辨
不能分辨

瑞利判据(Rayleigh criterion)

一物点的衍射图样的中央最亮处刚好与另一物点衍射图样的第一级暗环相重合，就认为这两个物点恰好能被这一光学仪器所分辨.



➢两个点光源S1和S2的爱里班中心的角距离大于爱里班角半径， S1和S2能被分辨，即

$$\theta > \theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

➢当 $\theta < \theta_0 = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$， **S1和S2不能被分辨**

➢当$\theta_{\min} = \theta_0 = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$， **S1和S2恰能被分辨**

（最小分辨角）

最小分辨角的倒数为分辨率

$$R = \frac{1}{\theta_0} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

分辨率与仪器的孔径和光波波长有关.

例 在通常照度下，人眼的瞳孔直径为3mm，而在可见光中，人眼最灵敏的波长为550nm. 求：（1）人眼最小分辨角为多大？（2）若物体放在距人眼25cm处，则两物点间距多大时才能被分辨.

解：

(1) $$\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\times\frac{550\times10^{-9}}{3\times10^{-3}}$$

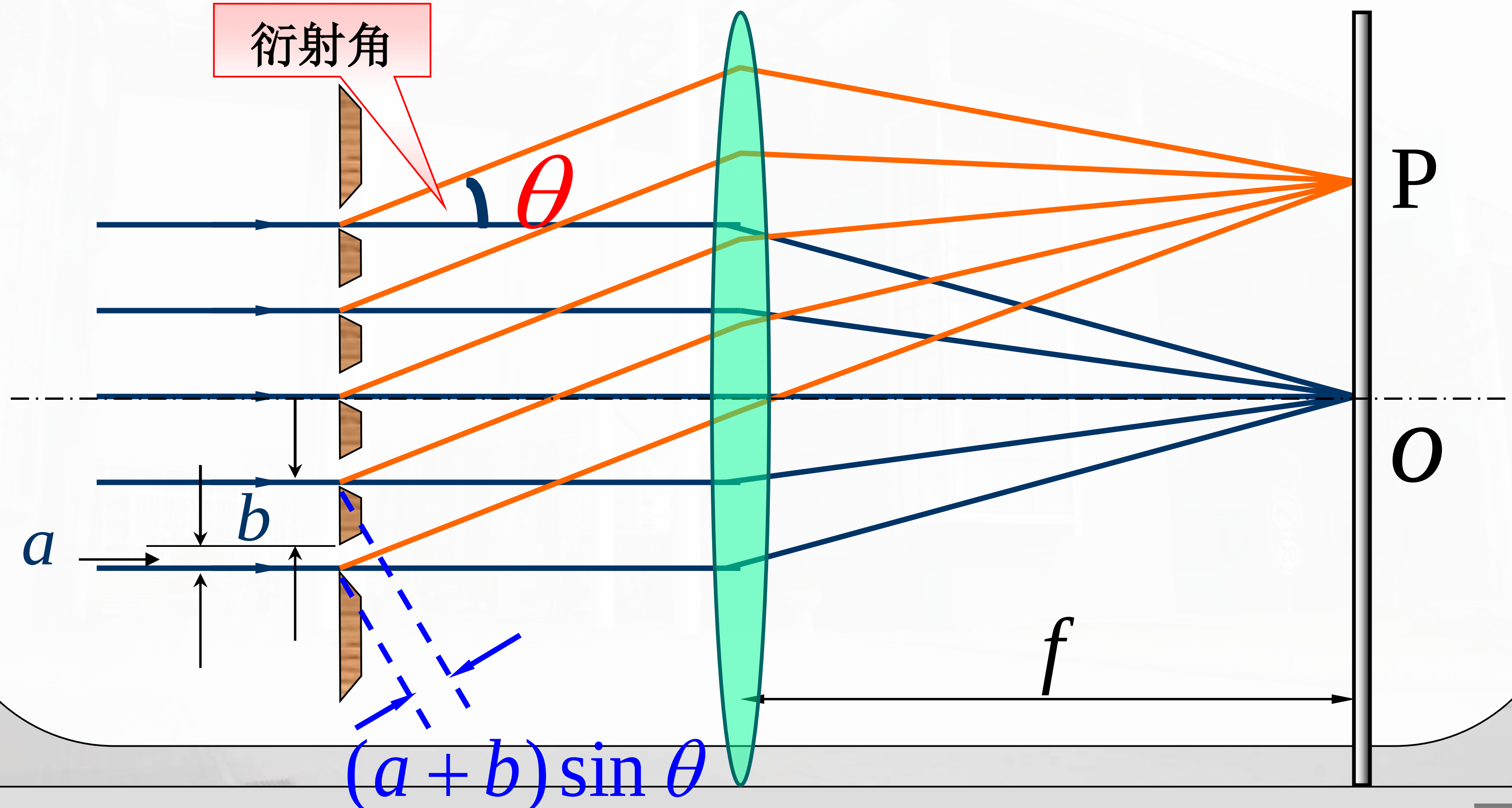
$$= 2.24\times10^{-4}\,\text{rad}$$

（2）$$d = L\theta_0 = 25\text{cm}\times2.24\times10^{-4} = 0.055\text{mm}$$

19－10 光栅衍射及光栅光谱

一、光栅衍射

光栅：许多等宽度、等距离的狭缝排列起来形成的光学元件.



1.光栅方程

光栅的衍射条纹是衍射和干涉的总效果

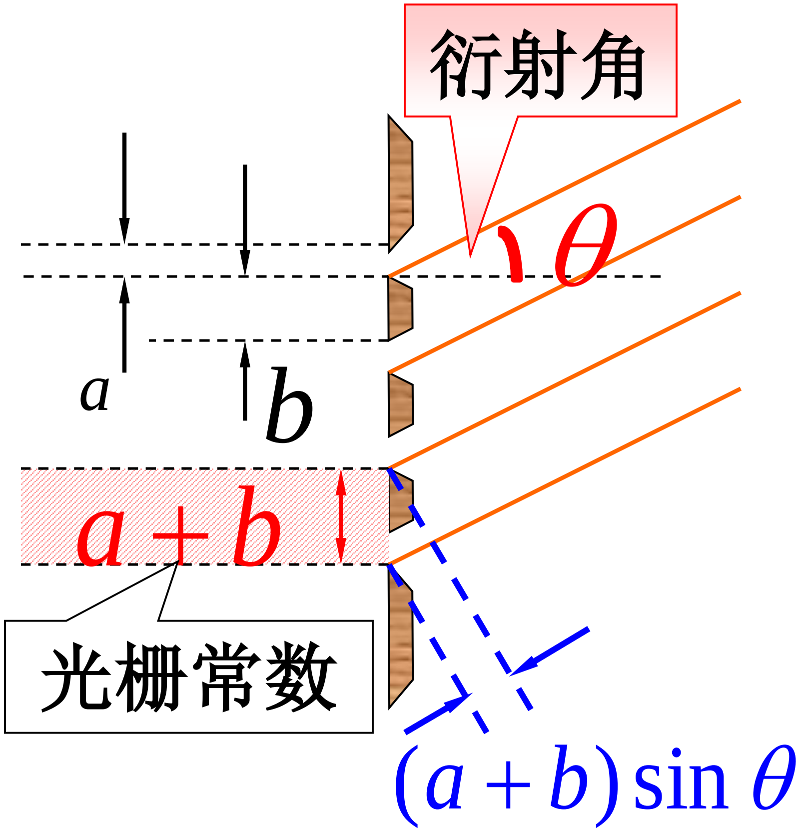
相邻两缝间的光程差：

$$\Delta = (a+b)\sin\theta$$

明纹位置

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda$$

$$(k = 0,1,2,\cdots)$$



a ：透光部分的宽度

b ：不透光部分的宽度

光栅常数：$10^{-5} \sim 10^{-6}\,\mathrm{m}$

2.主极大

满足光栅方程的明纹又称主明纹或主极大条纹，也称光谱线。

$k=0$ 时，$\theta=0$ 称中央明条纹；$k=\pm 1, \pm 2 \ldots$ 分别称为第一级、第二级主极大，正负号表示各级明纹对称地分布在中央明纹两侧。

说明：

主极大位置由缝间干涉决定；

主极大的最大级数为 $k<\dfrac{(a+b)}{\lambda}$ 因为 $|\sin\theta| \leq 1$

3.缺级

明纹极大由光栅各缝的干涉在屏上形成，但由于单缝衍射的影响，当暗纹衍射角对应干涉极大时，虽然满足光栅，但对应衍射角 θ 的主极大并不出现，这称为光谱线的缺级，缺级的级数 k 为

光栅方程 $(a+b)\sin\theta = k\lambda$

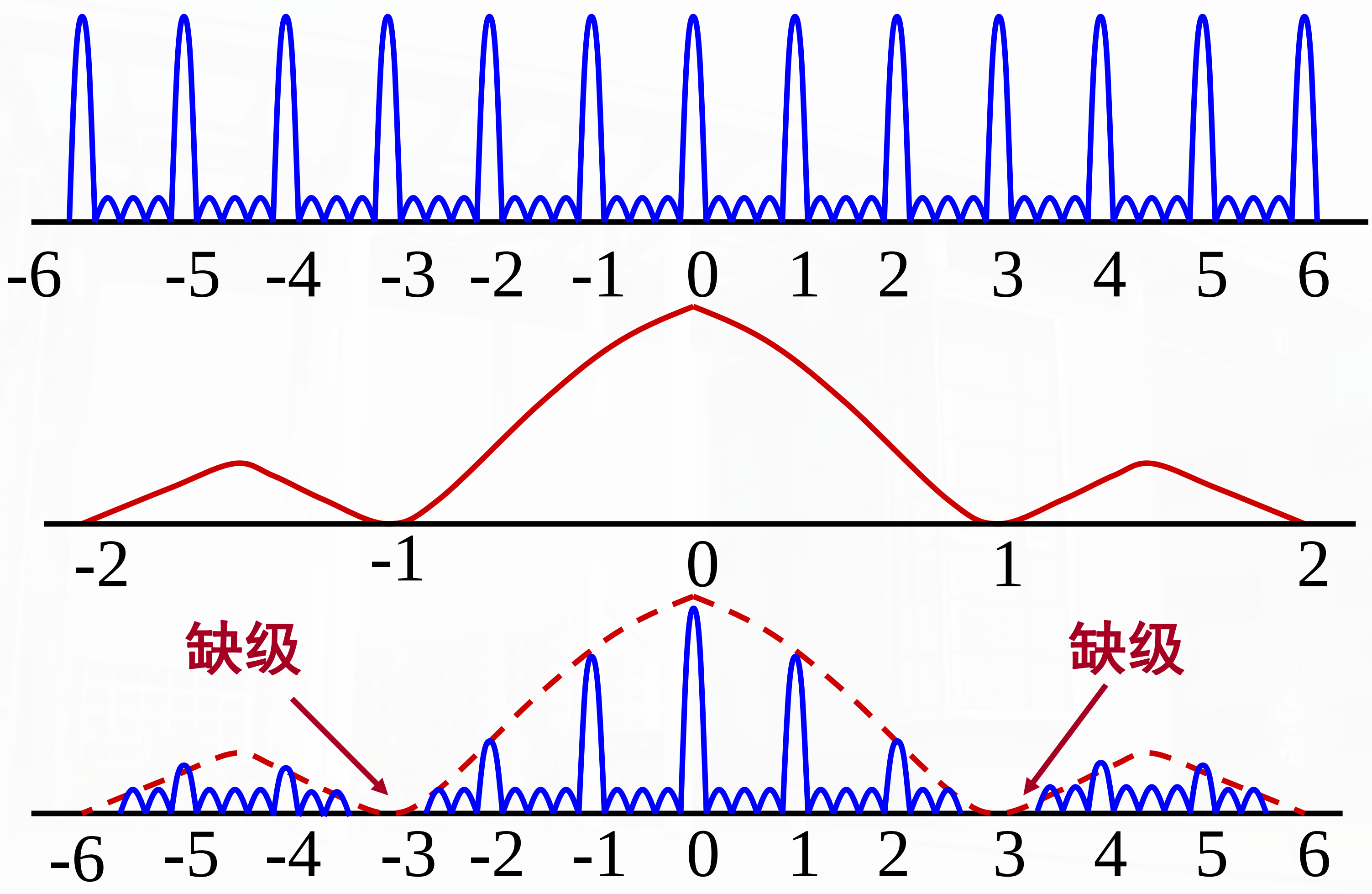
单缝衍射 $a\sin\theta = k'\lambda$

同时满足二式时，光谱线**k**级将不出现

$$k = \frac{a+b}{a}k'$$

衍射对多缝干涉的影响（缺级现象）

$a+b=3a$



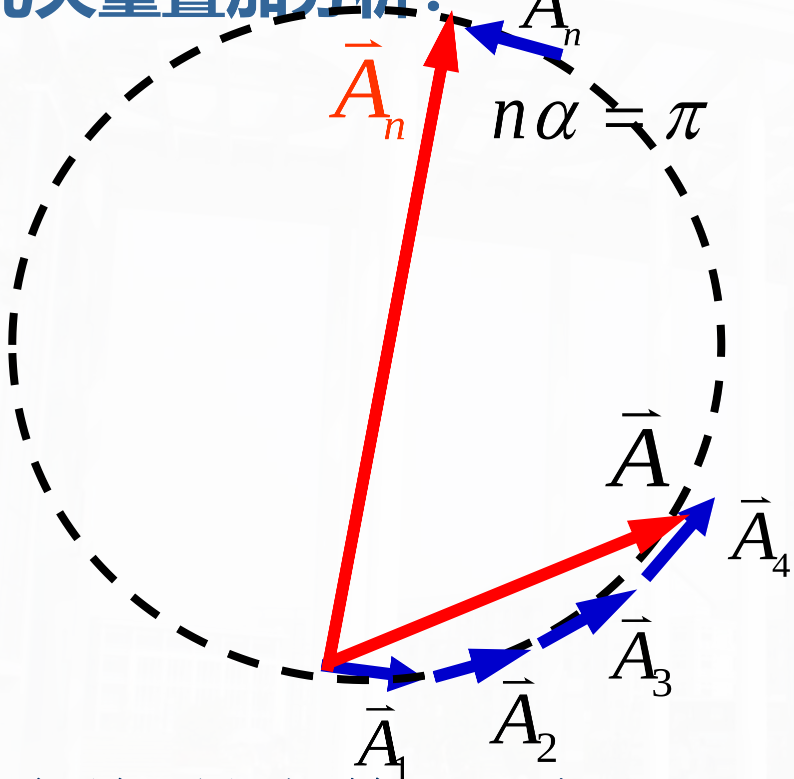
多缝干涉

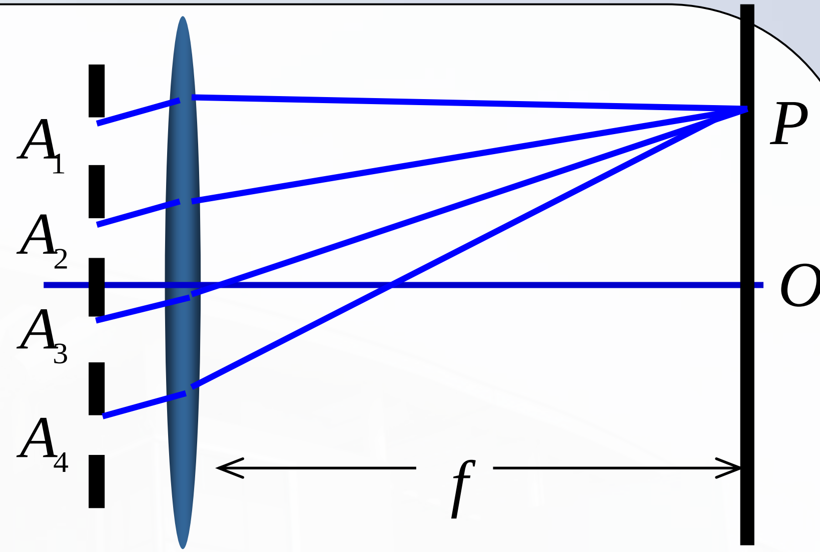
单缝衍射

光栅衍射

4.暗纹

光矢量叠加分析：





相邻 A_i 的夹角为相位差 $\alpha=\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta$

$$N\alpha=m\cdot 2\pi$$

$$N\Delta=\pm m\lambda\ (m=1,2,\cdots)$$

各缝面积相等，对应于同一衍射角，因此 A_i 大小相等。

干涉相消→暗纹

$$N\Delta = N(a+b)\sin\phi = \pm m\lambda$$

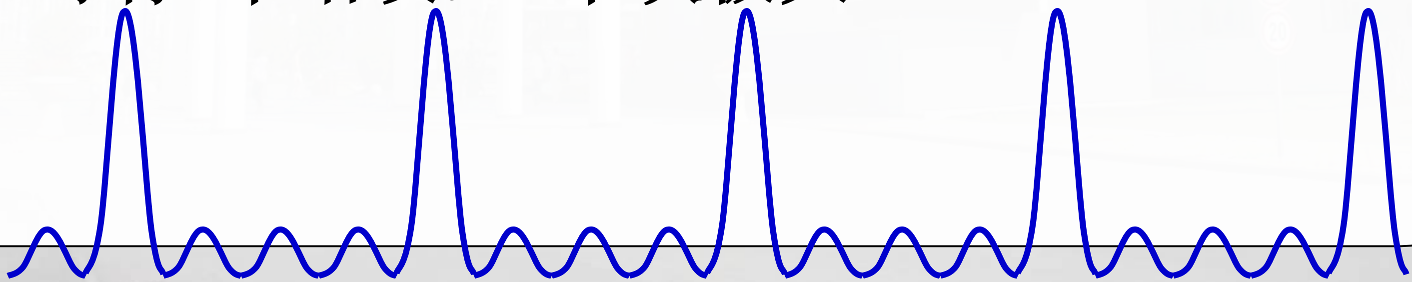
光栅暗纹 $$(a+b)\sin\varphi = \pm\frac{m}{N}\lambda$$

$$m = 1,2,\cdots,N-1,N+1,N+2,\cdots,2N-1,2N+1,\cdots$$

当 $m = N, 2N, 3N, \cdots \Rightarrow k = \frac{m}{N} = 1, 2, \cdots$

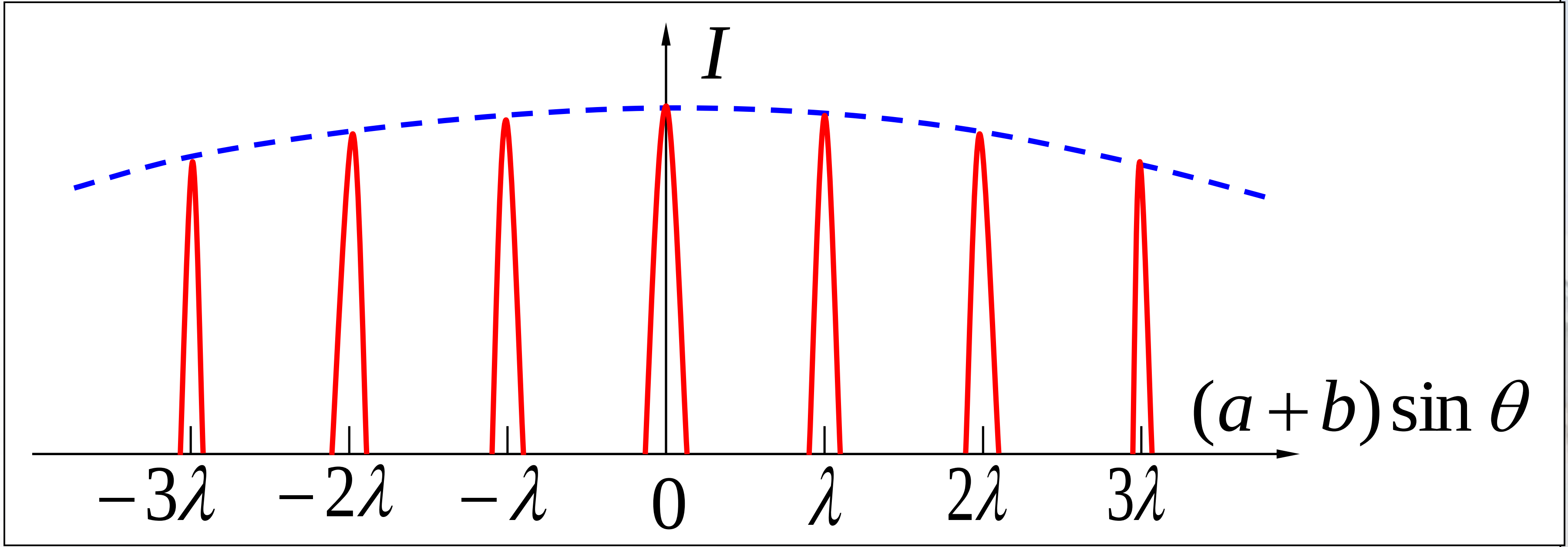
$$(a+b)\sin\varphi = \pm k\lambda$$ ⟹ 主极大

例: *N*=5时有4个暗纹，3个次极大



讨 论 $$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

- 光强分布



- 条纹最高级数

$$\sin\theta_k = \pm\frac{k\lambda}{a+b} \qquad \theta = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad k = k_{\max} = \frac{a+b}{\lambda}$$

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

$$\Delta k = 1, \quad \sin\theta_{k+1} - \sin\theta_k = \frac{\lambda}{a+b}$$

- **光栅常数越小，明纹越窄，明纹间相隔越远**

λ 一定，$a+b$ 减少，$\theta_{k+1}-\theta_k$ 增大.

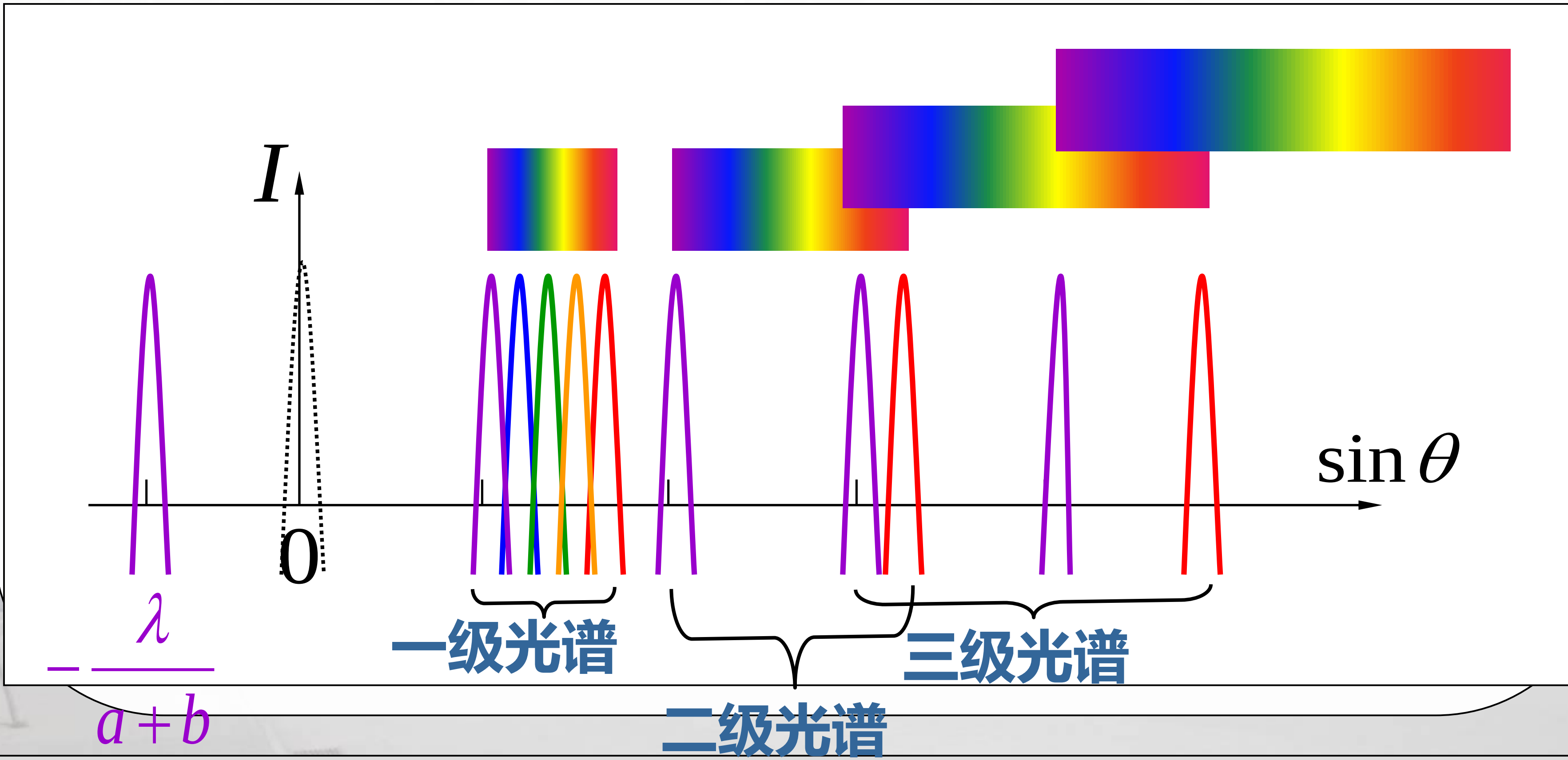
- **入射光波长越大，明纹间相隔越远**

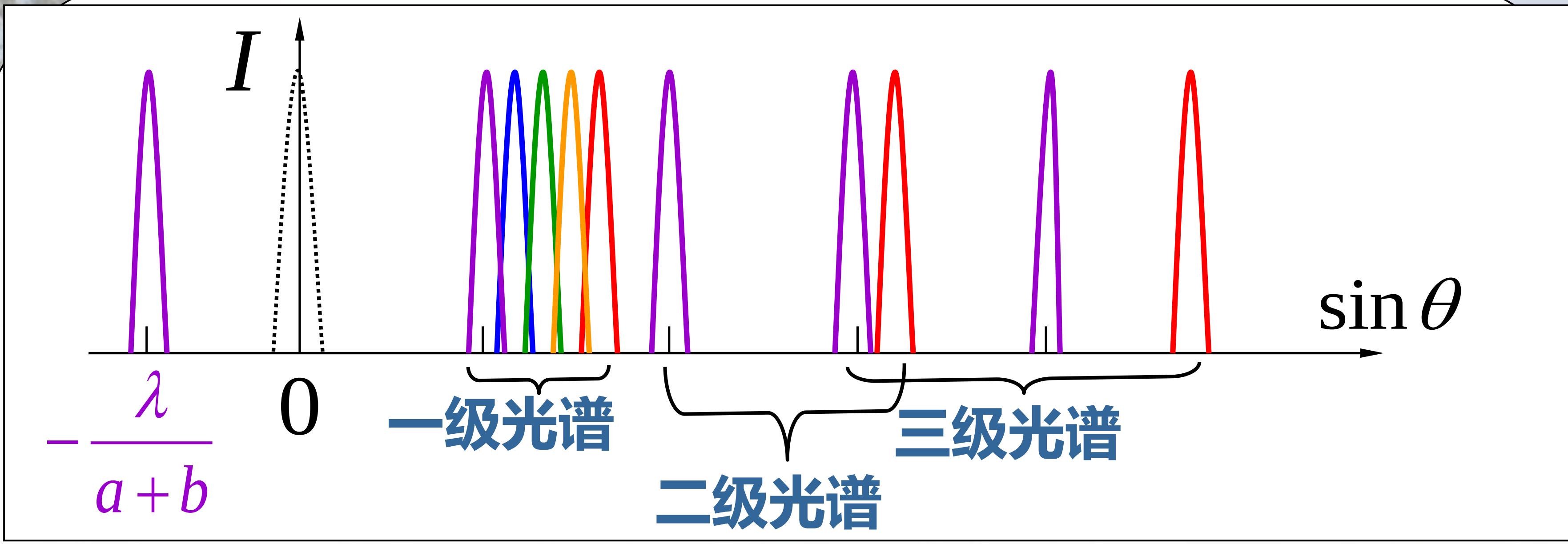
$a+b$ 一定，λ 增大，$\theta_{k+1}-\theta_k$ 增大.

二、衍射光谱

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

入射光为白光时，λ 不同，θ_k 不同，按波长分开形成光谱.





例如 二级光谱重叠部分光谱范围

$$\begin{cases}(a+b)\sin\theta = 3\lambda_{紫} \\ (a+b)\sin\theta = 2\lambda\end{cases}$$

$$\lambda = \frac{3}{2}\lambda_{紫} = 600\mathrm{nm}$$

$$\lambda = 400 \sim 760\mathrm{nm}$$

二级光谱重叠部分:

$$600 \sim 760\mathrm{nm}$$

◆ 衍射光谱分类

连续光谱：炽热物体光谱

线状光谱：钠盐、分立明线

带状光谱：分子光谱

◆ 光谱分析

由于不同元素（或化合物）各有自己特定的光谱，所以由谱线的成分，可分析出发光物质所含的元素或化合物；还可从谱线的强度定量分析出元素的含量.

例题：波长为600nm的单色光垂直入射到一光栅上，相邻的两条明纹分别出现在 $\sin\theta = 0.20$ 和 $\sin\theta = 0.30$ 处，第四级缺级。试问（1）光栅常数多大？（2）狭缝的最小宽度多大?

解：由光栅方程和单缝衍射极小所满足的条件有

$$(a+b)\sin\theta = k\lambda, \qquad a+b = 4a$$

由此，得 $$\sin\theta = \frac{k\lambda}{4a}$$

按题意，有 $$\sin\theta_k = \frac{k\lambda}{4a} = 0.20, \sin\theta_{k+1} = \frac{(k+1)\lambda}{4a} = 0.30,$$

联立后，得 $$\frac{(k+1)\lambda}{4a} = \frac{k\lambda}{4a} + \frac{\lambda}{4a} = 0.20 + \frac{\lambda}{4a} = 0.30$$

解得 $a = 1.5\times10^{-6}\,\mathrm{m},\ a+b = 6\times10^{-6}\,\mathrm{m}$

例题：设计一平面光栅，要求当用白光垂直入射时，能在30°的衍射方向看到600nm波长的第二级主极大，但在该方向上400nm波长的第三级主极大不出现。

解：由光栅方程 $(a+b)\sin\theta = k\lambda$，因为在30°的方向能看到600nm波长的第二级主极大，所以有

$$(a+b) = \frac{2\times 600\times 10^{-9}}{\sin 30^\circ} = 24\times 10^{-4}\,\mathrm{mm}$$

因在该方向上400nm波长的第三级主极大不出现，因此得到

$$k = \frac{24\times 10^{-4}\sin 30^\circ}{4\times 10^{-4}} = 3$$

可见在30°方向应能看到400nm波长的第三级主极大，为使其不出现，必须是在该位置上存在缺级现象，即在30°方向上

$$\left.\begin{aligned}(a+b)\sin\theta &= k\lambda \\ a\sin\theta &= k'\lambda\end{aligned}\right\} \quad k=\frac{a+b}{a}k'=3$$

以 $a+b=24\times10^{-4}\,\mathrm{mm}$ 代入得

$$a=\frac{24\times10^{-4}}{3}k'=8\times10^{-4}k'$$

当 $k'=1$ 时，$a=8\times10^{-4}\,\mathrm{mm},\ b=16\times10^{-4}\,\mathrm{mm}$

当 $k'=2$ 时，$a=16\times10^{-4}\,\mathrm{mm},\ b=8\times10^{-4}\,\mathrm{mm}$

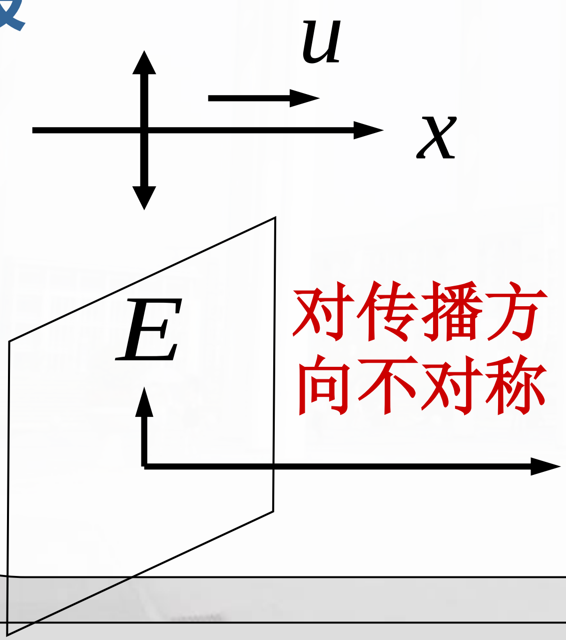
19－13 光的偏振性 马吕斯定律

光波：特定频率范围内的电磁波。

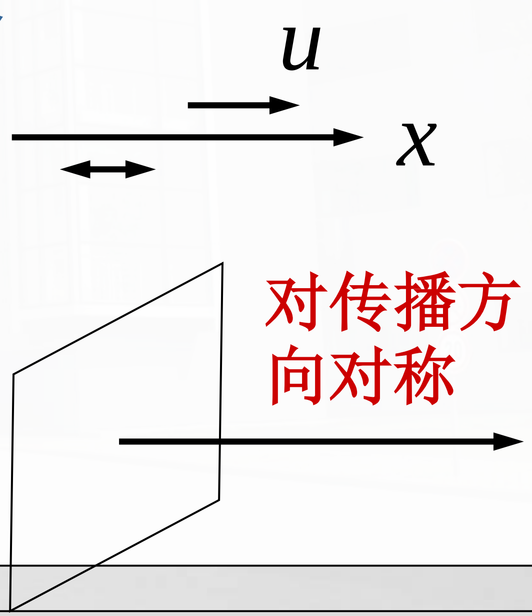
光矢量(light vector)：电磁波的电场强度 $\vec{E}$ 矢量。

电磁波是横波，光矢量振动方向与光传播方向垂直。

横波

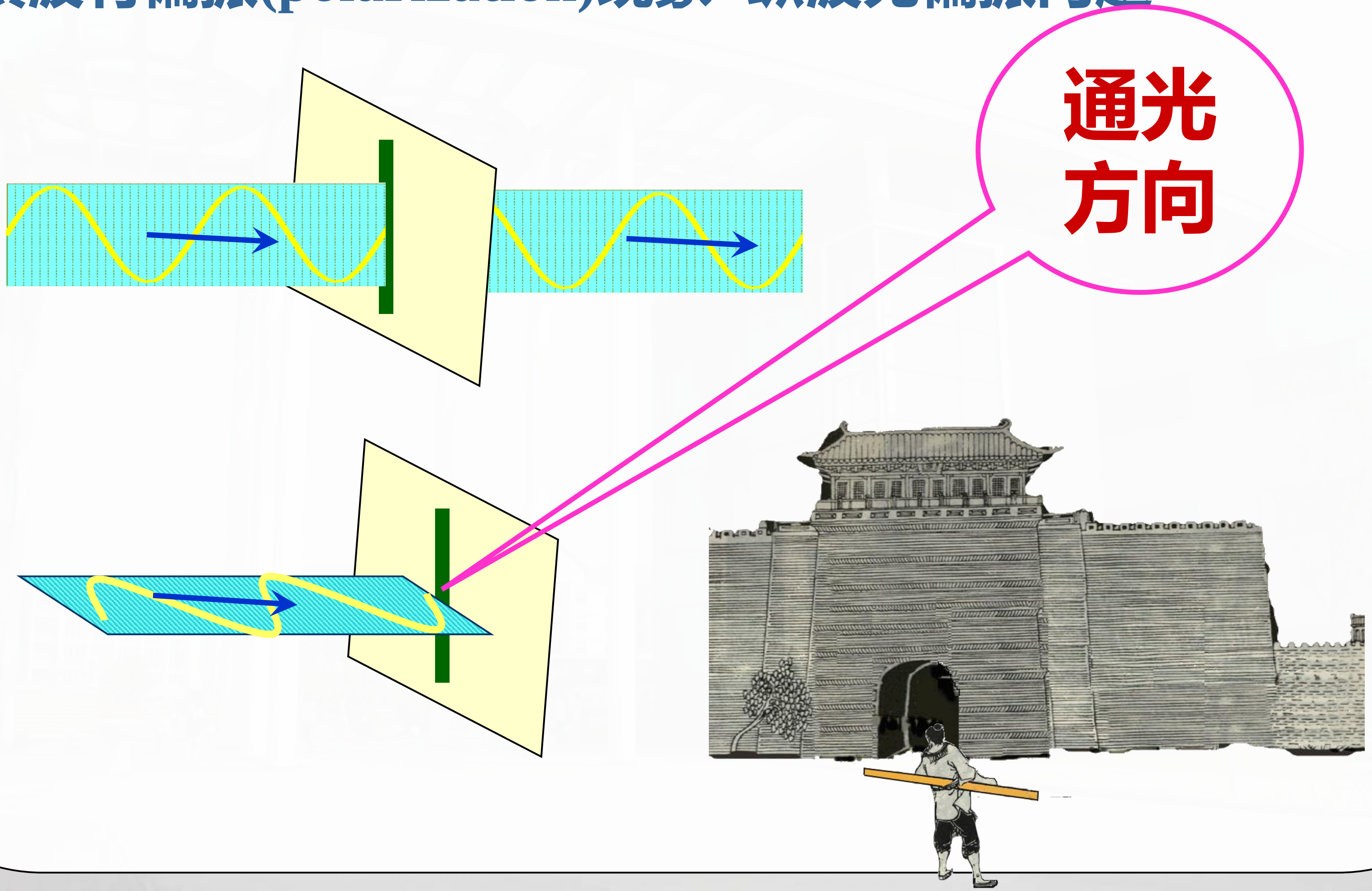


纵波



偏振：光的振动方向相对于传播方向不具有对称性

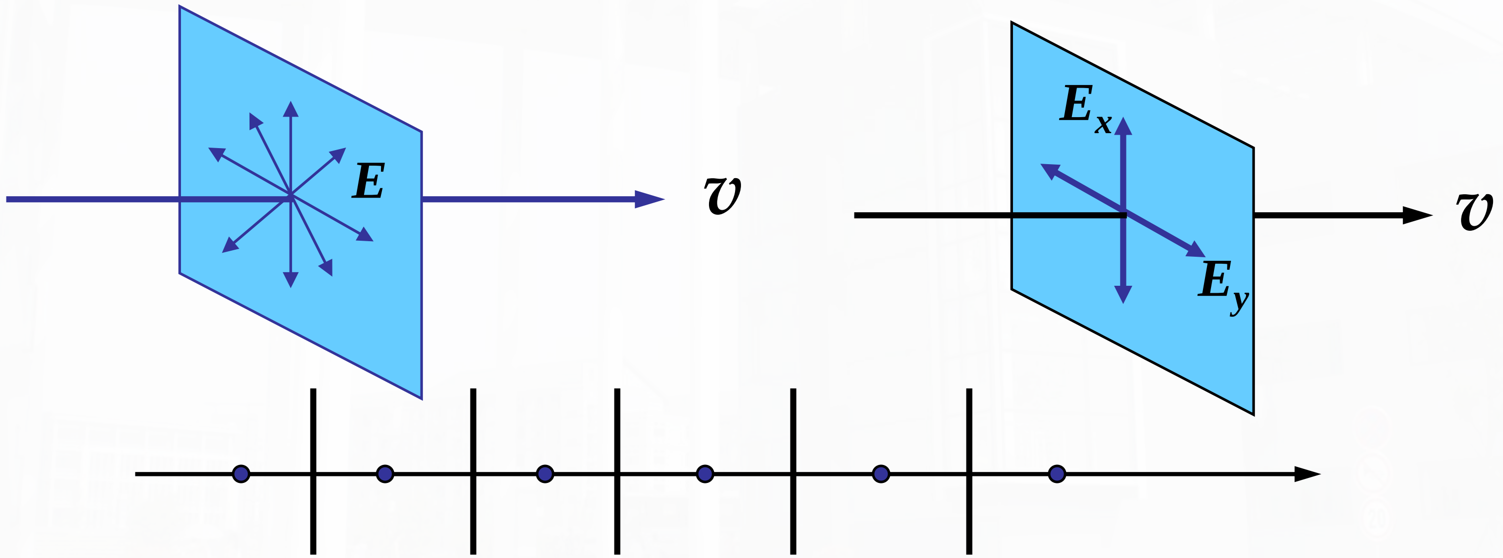
横波有偏振(polarization)现象 纵波无偏振问题



腰横扁担进不了城门

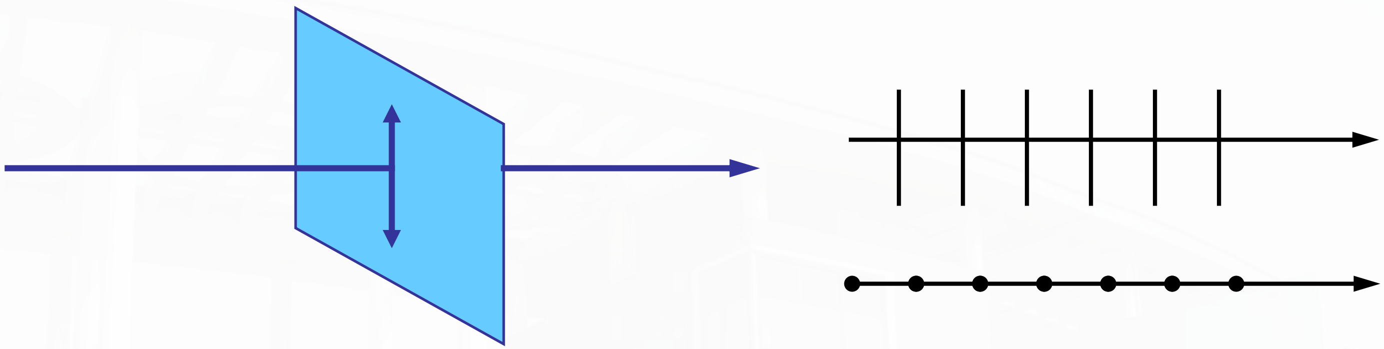
一、自然光 偏振光

因原子发光的“随机性”，光矢量各向随机均匀分布，振幅相等，称为自然光(natural light)。



各向光振动无固定相位关系。

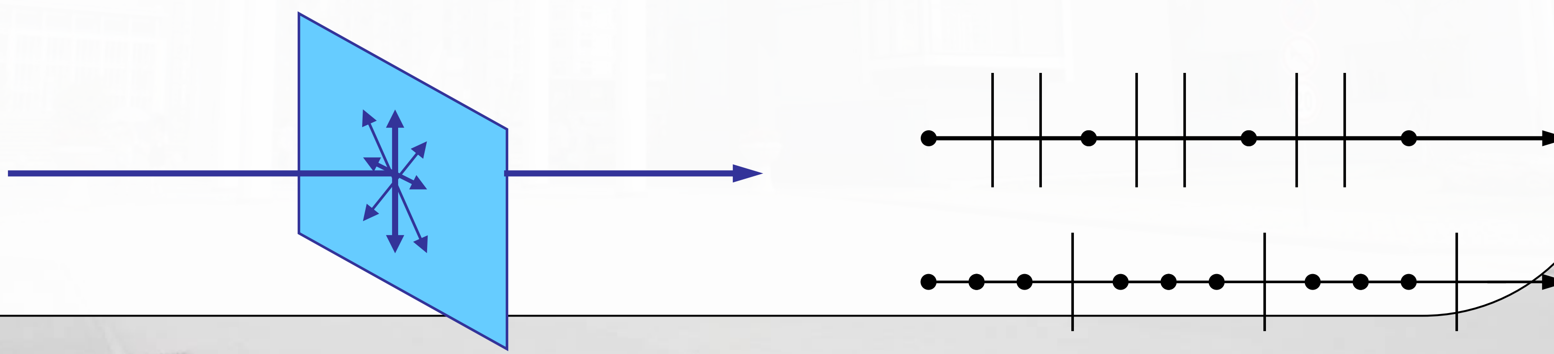
线偏振光(linearly polarized light)：光矢量只沿一个固定方向振动



振动面：光振动方向与传播方向构成的平面

部分偏振光(partial polarized light)：

一方向光振动较另其他方向占优势。线偏振光与自然光的混合。

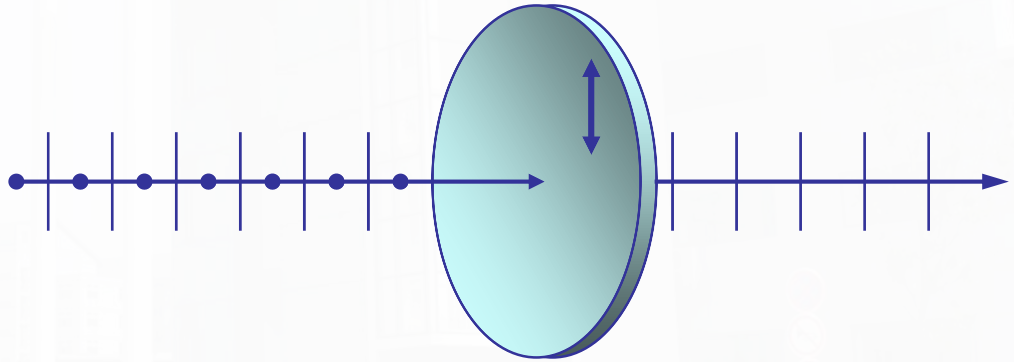


二、起偏与检偏

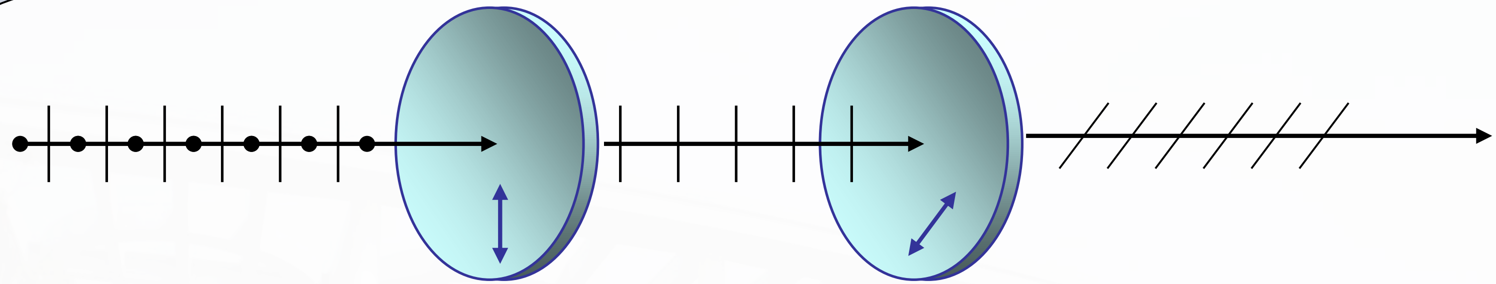
偏振片(polaroid)：能吸收某一方向的光振动，而只让与之垂直方向上的光振动通过的一种透明薄片。

偏振化方向(polarizing direction)：

允许通过的光振动方向



偏振片的用途：“起偏”和“检偏”



自然光 I_0　起偏　线偏振光I_1　检偏　线偏振光I_2

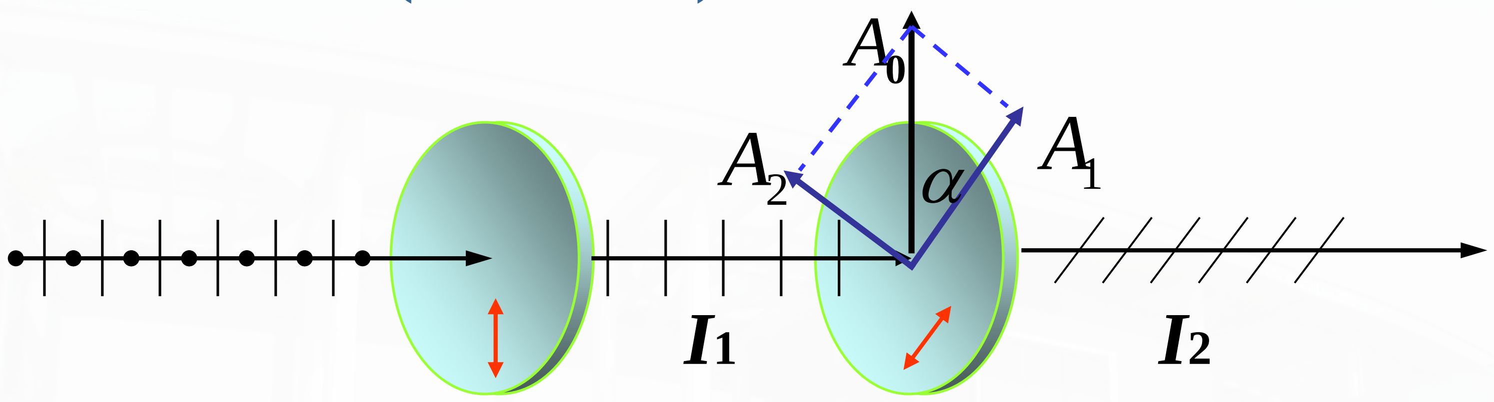
(1)起偏：自然光强 I_0→线偏振光强 $I_1=\frac{I_0}{2}$

起偏器绕以光的传播方向为轴旋转一周，光强不变无消光！

(2)检偏：线偏振光光强 I_1→线偏振光光强I_2　$I_2=I_1\cos^2\alpha$

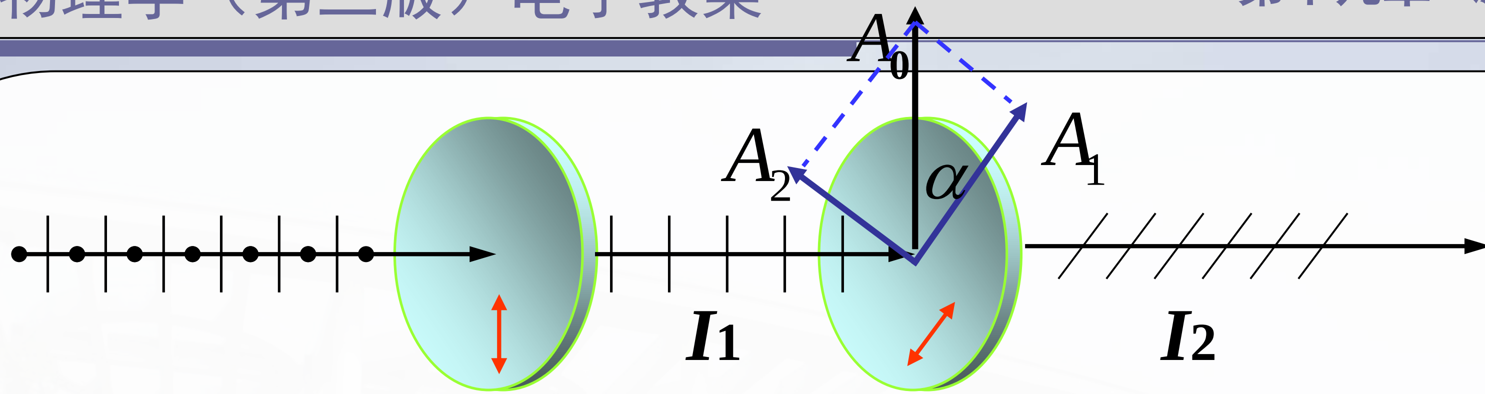
检偏器绕以光的传播方向为轴旋转一周，透射光强由亮逐渐变弱，再由暗逐渐变亮，即出现两次最亮和两次最暗（消光）

三、马吕斯定律(Malus law)



光强为I_1的线偏振光，透过偏振片后，透射强度为：

$$\boxed{I_2 = I_1 \cos^2 \alpha}$$



证明: $A_1 = A_0 \cos\alpha$

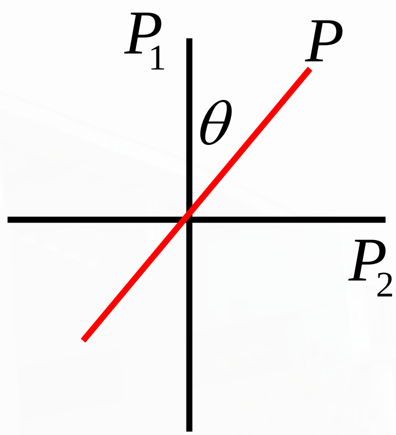
$\because \quad I_1 \propto A_0^2 \quad , \quad I_2 \propto A_1^2$

$\therefore \quad \dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{A_1^2}{A_0^2} = \cos^2\alpha \qquad I_2 = I_1 \cos^2\alpha$

当: $\alpha = 0, \pi \quad \rightarrow I_2 = I_1$

当: $\alpha = \pi/2, 3\pi/2 \quad \rightarrow I_2 = 0$

例题：将一偏振片沿45°角插入一对正交偏振器之间，自然光经过它们时，强度减为原来的百分之几？



解：设偏振片*P*1,*P*2正交，则最终通过*P*2的光强为

$$I_2 = 0(\text{消光})$$

若在偏振片*P*1,*P*2之间插入另一块偏振片P,与*P*1夹角为 θ ,则最终通过*P*2的光强为

$$I_2' = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{8}I_0(\sin 2\theta)^2$$

式中I0为入射光强，当 $\theta = 45^\circ$ 时，则

$$\frac{I_2'}{I_0} = \frac{1}{8} = 12.5\%$$

例题：用两偏振片平行放置作为起偏器和检偏器，在它们的偏振化方向成30°角时，观测一光源，又在成60°角时，观测同一位置处的另一光源，两次所得的强度相等，求两光源照到起偏器上的光强之比。

解：令I_{10}和I_{20}分别为两光源照到起偏器上的光强，透过起偏器后，光的强度分别为$I_{10}/2$和$I_{20}/2$，透过检偏器的光强分别为I'_1和I'_2, 则

$$I_1' = \frac{1}{2} I_{10} \cos^2 30^\circ$$

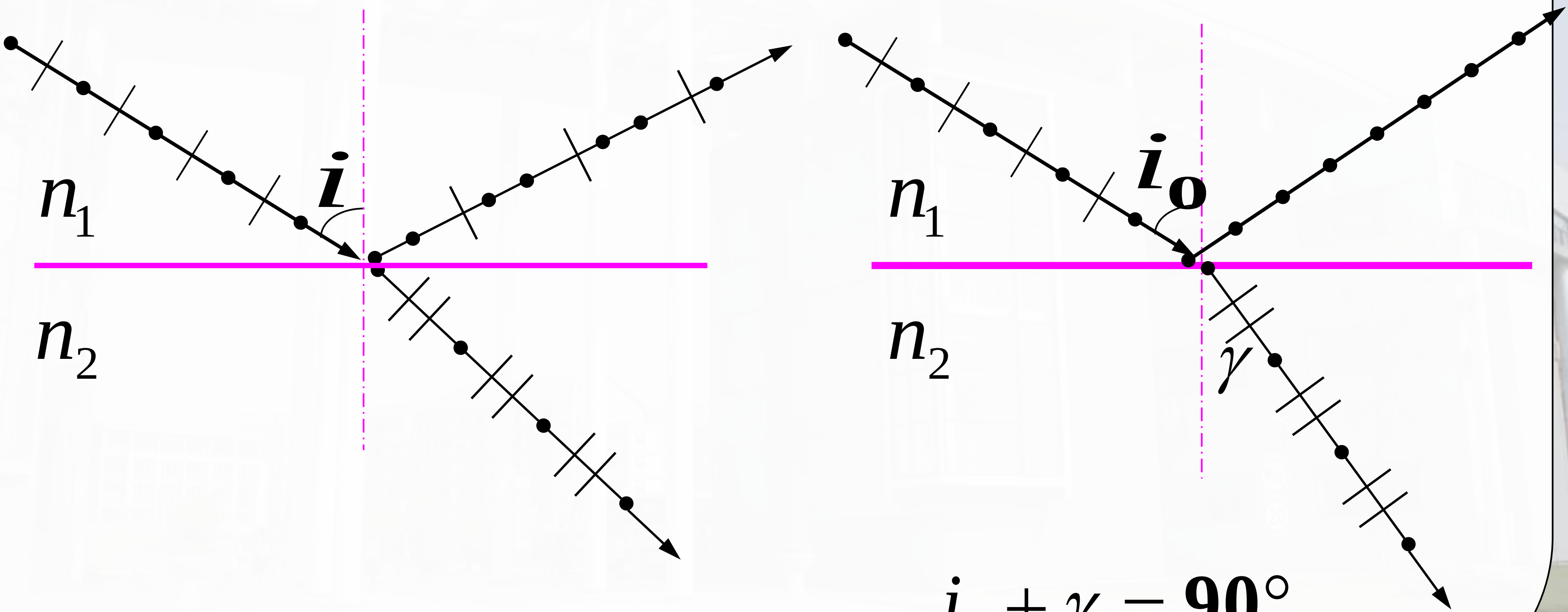
$$I_2' = \frac{1}{2} I_{20} \cos^2 60^\circ$$

根据题意 $I_1' = I_2'$

即 $$I_{10} \cos^2 30^\circ = I_{20} \cos^2 60^\circ \Rightarrow \frac{I_{10}}{I_{20}} = \frac{\cos^2 60^\circ}{\cos^2 30^\circ} = \frac{1}{3}$$

19－14 布儒斯特定律

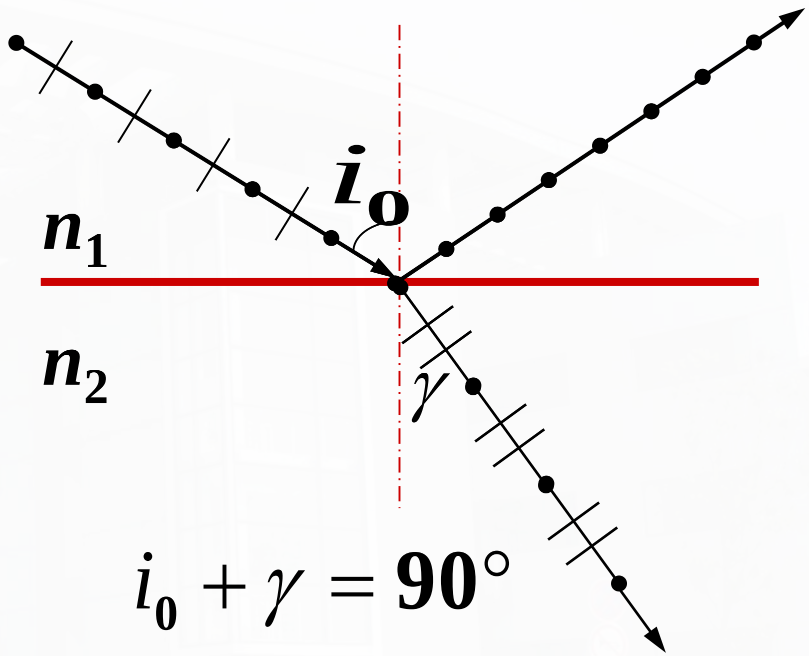
反射和折射的起偏



$$i_0 + \gamma = 90°$$

$$\tan i_0 = \frac{\sin i_0}{\cos i_0} = \frac{\sin i_0}{\cos(90^\circ - \gamma)} = \frac{\sin i_0}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}$$

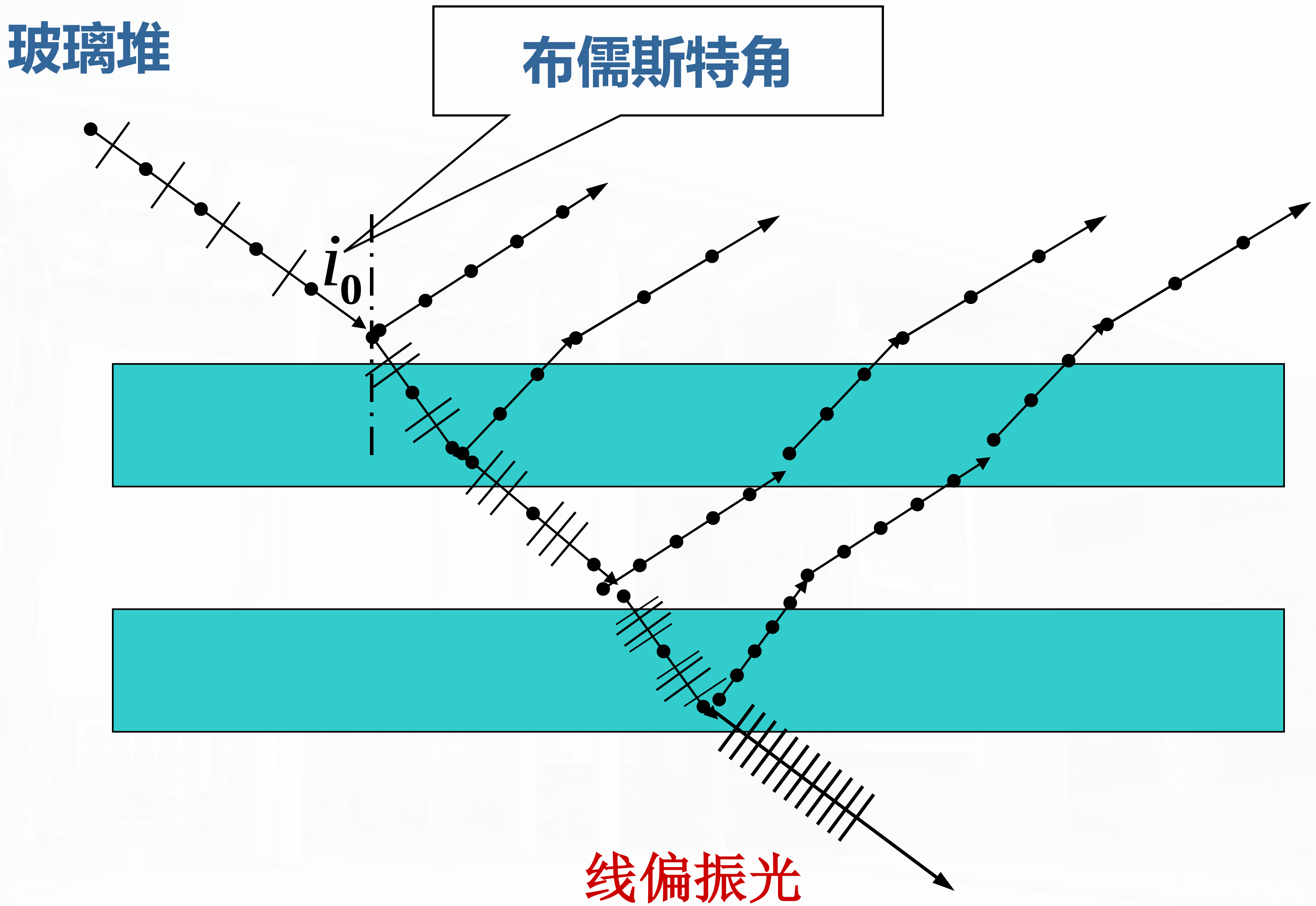
布儒斯特定律: (Brewster law) 自然光以布儒斯特角入射到两不同介质表面，其反射光为线偏振光，光振动垂直于入射面。



$$i_0 + \gamma = 90^\circ$$

布儒斯特角(polariztng angle):

$$\boxed{\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}}$$


玻璃堆
布儒斯特角
i_0
线偏振光

例题：水的折射率为1.33，玻璃的折射率为1.50。当光从水中射向玻璃而反射时，起偏角为多少？当光从玻璃射向水面而反射时，起偏角又为多少？

解：由布儒斯特定律 $\tan i_0 = \dfrac{n_2}{n_1}$

当光从水中射向玻璃时

$$i_{01} = \arctan\frac{n_2}{n_1} = 48^{\circ}26'$$

当光光从玻璃射向水中时

$$i_{02} = \arctan\frac{n_1}{n_2} = 41^{\circ}34'$$