

自 测 题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）.

1. 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线，则

$$\int_L (x^2 + y - z) ds = \underline{\hspace{2cm}}.$$

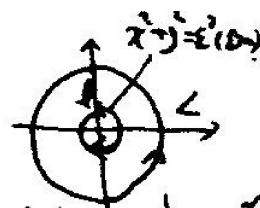
【解析】
$$\begin{aligned} \int_L (x^2 + y - z) ds &= \int_L x^2 ds + \int_L y ds - \int_L z ds \\ &= \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds + \frac{1}{3} \int_L (x + y + z) ds - \frac{1}{3} \int_L (x + y + z) ds \\ &= \frac{1}{3} \int_L a^2 ds = \frac{a^2}{3} \cdot 2\pi a = \frac{2\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

2. 设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 按逆时针方向绕行，则

$$\oint_L \frac{(2xy - 3y)dx + (x^2 - 5x)dy}{x^2 + y^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解析】 添加辅助曲线 $l: x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2 (\varepsilon > 0)$ ，方向逆时针方向；

$$\begin{aligned} \oint_L &= \oint_{L+l} - \oint_l = 0 - \oint_l = \oint_l \frac{(2xy - 3y)dx + (x^2 - 5x)dy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_l (2xy - 3y)dx + (x^2 - 5x)dy = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{D'} (-2) dxdy = -2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 2\pi\varepsilon^2 = -2\pi \end{aligned}$$



3. 设 S 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被平面 $z = 2$ 所割下的有限部分，则

$$\iint_S (xy + yz + z^2) dS = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解析】 由对称性可知

$$\iint_S (xy + yz + z^2) dS = \iint_S z^2 dS = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dxdy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \cdot r dr = 8\sqrt{2}\pi$$

4. 设 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧，则 $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解析】 利用高斯公式得 $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV = \frac{12}{5}\pi$ (球坐标)

5. 设 $\vec{F}(x, y, z) = \{e^x \sin y, 2xy^2 + z, xzy^2\}$ ，则 $\operatorname{div} \vec{F}|_{(1,0,1)} = \underline{\hspace{2cm}},$

$$\operatorname{rot} \vec{F}|_{(1,0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解析】 利用公式计算得 $\operatorname{div} \vec{F}|_{(1,0,1)} = 0$ ， $\operatorname{rot} \vec{F}|_{(1,0,1)} = (-1, 0, -e)$

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.



6. 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds = ()$.

- (A) 2 (B) 0 (C) $\frac{13}{6}$ (D) $\frac{5}{6}$

【解析】 $\int_L x ds = \int_0^{\sqrt{2}} x \cdot \sqrt{4x^2 + 1} dx = \frac{13}{6}$

7. 设 L 是柱面方程 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线

积分 $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz = ()$.

- (A) π (B) 2π (C) 0 (D) 1

【解析】 $\sum: z = x + y; D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$, 方向向上

$$\text{原式} = \iint_{\sum} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2} \end{vmatrix} dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\sum} (-y - x + 1) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{D_{xy}} (-y - x + 1) \cdot \sqrt{3} dx dy = \pi$$

8. 设曲线积分 $\oint_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且

$f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 等于 ().

- (A) $\frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$ (B) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (C) $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1$ (D) $1 - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

【解析】 $P = (f(x) - e^x) \sin y$, $Q = -f(x) \cos y$, 因为积分与路径无关, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow f'(x) + f(x) = e^x,$$

解一阶非齐次线性微分方程得: $f(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C \right)$; 又 $f(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$, 则选 B

9. 设 S 为曲面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, 在下面积分中, 积分值均为 0 的是 ().

- (A) $\iint_S z^2 dS$ 与 $\iint_S z^2 dx dy$ (B) $\iint_S z dS$ 与 $\iint_S z dx dy$
(C) $\iint_S z dS$ 与 $\iint_S z^2 dx dy$ (D) $\iint_S yz dS$ 与 $\iint_S x dy dz$

【解析】由对称性可知 $\iint_S z dS = \iint_S yz dS = 0$, $\iint_S z^2 dS \neq 0$, $\iint_S z dx dy \neq 0$, $\iint_S x dx dy \neq 0$, $\iint_S z^2 dx dy = 0$, 所以答案选 C

10. 设函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处沿单位向量 \vec{v} 的方向增加最快, 则 $\vec{v} =$ ().

(A) $\frac{1}{3}(2, 2, -1)$ (B) $\frac{1}{3}(-2, -2, 1)$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$

【解析】(1) 该方向为梯度方向, 梯度 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_P = (2, 2, -1)$;

(2) \vec{v} 为梯度的单位向量 $\frac{1}{3}(2, 2, -1)$

三、解答题 (每小题 10 分, 共 60 分).

11. 已知一非均匀金属丝 L 的方程为 $L: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, 它在点 (x, y) 处的线密度

为 $\rho(x, y) = |y|$, 求该金属丝的质量.

【解析】(1) $M = \int_L \rho(x, y) ds = \int_L |y| ds$;

(2) $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + [a \sin t]^2} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt$;

(3)

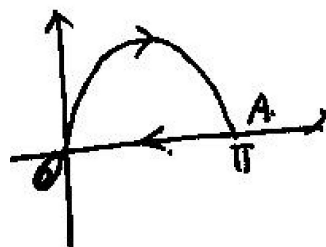
$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} |a(1 - \cos t)| \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - (1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}) \right] \cdot \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt \stackrel{\frac{t}{2}=u}{=} 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u du = 8a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 u) d(-\cos u) = \frac{32}{3} a^2 \end{aligned}$$

12. 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 从 $(0, 0)$ 到 $(\pi, 0)$ 的一段.

【解析】(1) 添加 $\overline{AO}: y = 0$, 从 $A \rightarrow O$;

(2) $\int_L = \oint_{L+\overline{AO}} - \int_{\overline{AO}}$;

(3) $\oint_{L+\overline{AO}} \stackrel{\text{格林公式}}{=} - \iint_D 4xy dx dy = -4 \int_0^{\pi} x dx \int_0^{\sin x} y dy$



$$= -4 \int_0^{\pi} x \cdot \frac{1}{2} \sin^2 x dx = -\frac{1}{2} \pi^2;$$

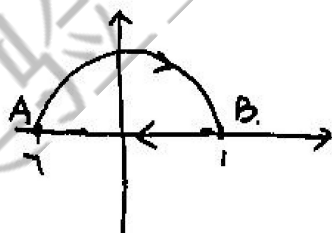
$$(4) \int_{AO} = \int_{\pi}^0 \sin 2x dx = 0;$$

$$(5) \int_L = \oint_{L+\overline{AO}} - \int_{\overline{AO}} = -\frac{1}{2} \pi^2$$

13. 计算曲线积分 $\int_L \frac{(xe^x + 5y^3x^2 + x - 4)dx - (3x^5 + \sin y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为从点 $A(-1,0)$ 沿

$$\text{曲线 } y = \sqrt{1-x^2}$$

到点 $B(1,0)$ 一段弧.



【解析】(1) 原式 $= \int_L (xe^x + 5y^3x^2 + x - 4)dx - (3x^5 + \sin y)dy$;

(2) 添加 $\overline{BA}: y=0, x:1 \rightarrow -1$;

$$(3) \int_L = \oint_{L+\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}};$$

$$(4) \oint_{L+\overline{BA}} = - \iint_D (-15x^4 - 15x^2y^2) dx dy = 15 \iint_D (x^4 + x^2y^2) dx dy$$

$$= 15 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 (r^4 \cos^4 \theta + r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \cdot r dr = 15 \int_0^{\pi} (\cos^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \cdot \frac{1}{6} d\theta$$

$$= \frac{5}{2} \int_0^{\pi} [\cos^4 \theta + \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)] d\theta = \frac{5}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{5\pi}{4};$$

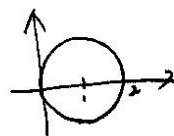
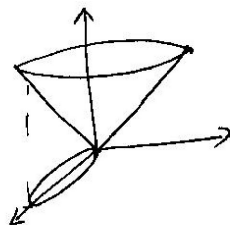
$$(5) \int_{\overline{BA}} = \int_1^{-1} (xe^2 + x - 4) dx = -2e^{-1} + 8;$$

$$(6) \text{原式} = \frac{5\pi}{4} - 8 + 2e^{-1}$$

14. 计算曲面积分 $\iint_S z dS$, 其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱面 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 内部分.

$$\text{【解析】(1) } \iint_S z dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r dr = \frac{8\sqrt{2}}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$



15. 计算曲面积分 $\iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy$, 其中 S 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截得的在第一卦限内的部分前侧.

【解析】(1) 由垂直线可知 $\iint_S zdx dy = 0$, 则原式 $= \iint_S xdydz + ydzdx$;

$$(2) \iint_S xdydz = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2} dydz = \int_0^1 dy \int_0^3 \sqrt{1-y^2} dz = 3 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = \frac{3\pi}{4} ;$$

$$(3) \iint_S ydzdx = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-x^2} dx dz = \int_0^1 dx \int_0^3 \sqrt{1-x^2} dz = 3 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{3\pi}{4} ;$$

$$(4) \text{原式} = \frac{3\pi}{2}$$

16. 计算曲面积分 $\iint_S (x^3 + az^2) dydz + (y^3 + ax^2) dzdx + (z^3 + ay^2) dxdy$, 其中 S 为上半球面

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

【解析】(1) 添加 $S_1: z = 0$, 方向向下;

$$(2) \iint_S = \oiint_{S+S_1} - \iint_{S_1} ;$$

$$(3) \oiint_{S+S_1} = \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dV = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV \\ = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{6\pi}{5} a^5 ;$$

$$(4) \iint_{S_1} \stackrel{\text{垂直性}}{=} \iint_{S_1} (z^3 + ay^2) dxdy = \iint_{S_1} ay^2 dxdy = - \iint_{D_{xy}} ay^2 dxdy \quad D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2 \\ = -a \iint_{D_{xy}} y^2 dxdy = -a \cdot \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dxdy = -\frac{a}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \cdot r^2 dr = -\frac{\pi}{4} a^5 ;$$

$$(5) \iint_S = \frac{6\pi}{5} a^5 + \frac{\pi}{4} a^5 = \frac{29}{20} \pi a^5$$

