自 测 题

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）.

1. 设 $\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\},\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$，则 $\angle BAC$ 的平分线上的单位向量是______.

【解析】本题思路不可直接用 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 作为角平分线向量，因为平行四边形对角线未必为角平分线，所以正确方法是将 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 单位化后构造平行四边形，即菱形，而菱形的对角线为角平分线.

① $\overrightarrow{AB}^o=\frac{1}{5}(-3,0,4)$，$\overrightarrow{AC}^o=\frac{1}{15}(5,-2,-14)$；

② $\vec{a}=\overrightarrow{AB}^o+\overrightarrow{AC}^o=\left(-\frac{4}{15},-\frac{2}{15},-\frac{2}{15}\right)$；

③ $\vec{a}^o=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{15}{\sqrt{24}}\left(-\frac{4}{15},-\frac{2}{15},-\frac{2}{15}\right)=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

2. 已知 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=5,\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\pi}{3},\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b},\vec{d}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}$，若 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 垂直，则 $\lambda=$___.

【解析】$\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 垂直，则 $\vec{c}\cdot\vec{d}=0$，即

$$0=\vec{c}\cdot\vec{d}=\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\lambda\vec{a}+17\vec{b}\right)=3\lambda\vec{a}\cdot\vec{a}+(51-\lambda)\vec{a}\cdot\vec{b}-17\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=3\lambda|\vec{a}|^2+(51-\lambda)|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{2\pi}{3}-17|\vec{b}|^2$$

$$=12\lambda-5(51-\lambda)-425=17\lambda-780\Rightarrow\lambda=40.$$

3. 直线 $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ 与平面 $2x+y-z-3=0$ 的夹角是______.

【解析】$\vec{s}=(-1,1,2)$，$\vec{n}=(2,1,-1)$，$\sin\theta=\left|\frac{-1\times2+1\times1+2\times(-1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}\right|=\frac{1}{2}$，得 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

4. 过直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$ 且平行于直线 $L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 的平面方程为______________.

【解析】$\vec{s}_1=(1,0,-1),\vec{s}_2=(2,1,1)$, $\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=(1,-3,1)$，所求平面方程为 $x-3y+z+2=0$.

5. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=0\end{cases}$ 在 xoy 坐标面上的投影曲线为___________.

【解析】方程组联立消 z，得 $\begin{cases}2x^2+2y^2+2xy=1\\z=0\end{cases}$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）.

6. 下列方程表示的直线中与直线 $L:\begin{cases}x+y+z=1\\x-y-2z=1\end{cases}$ 平行的是（　　）.

$(A)\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-2}$　　　$(B)\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{-2}$

$(C)\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{2}$　　　$(D)\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{2}$

【解析】$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}=(-1,3,-2),$

7. 两直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$ 的夹角为（　　）.

$(A)\dfrac{\pi}{6}$　　　　$(B)\dfrac{\pi}{4}$　　　　$(C)\dfrac{\pi}{3}$　　　　$(D)\dfrac{\pi}{2}$

【解析】L_1 的方向向量 $\overrightarrow{s_1}=(1,-2,1)$，$L_2$ 的方向向量 $\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1,-1,2)$，

夹角余弦 $\cos\theta=\dfrac{|1\times(-1)+(-2)\times(-1)+1\times 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$，则 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，所以答案选 C.

8. 设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 L（　　）.

(A)平行于π　　　　(B)在π上　　　　(C) 垂直于π　　　　(D)与π斜交

【解析】直线 L 的方向向量 $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -10\end{vmatrix}=-7(4,-2,1)$，平面法向量 $\vec{n}=(4,-2,1)$，所以答案选 C

9. 直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 与直线 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ 的位置关系是（　　）.

(A)平行　　　　(B)相交于一点　　　　(C)异面　　　　(D)重合

【解析】$P_1(1,3,0)$，$P_2(0,0,-2)$，$\overrightarrow{P_2P_1}=(1,3,2)$，$\overrightarrow{s_1}=(4,-2,1)$，$\overrightarrow{s_2}=(0,2,1)$，则 $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$，

由定理可知两直线相交，所以答案选 B.

10. xoz 坐标面上曲线 $z=e^x\ (x>0)$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程为（　　）.

$(A)\sqrt{y^2+z^2}=e^x$　　　　$(B)y^2+z^2=e^x$　　　　$(C)z=e^{x^2+y^2}$

$(D)z=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

【解析】由选择曲面方程构造公式，得答案选 D.

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）.

11. 设 $\vec{a}=\{3,0,4\},\vec{b}=\{-1,2,-2\}$，求与向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 均垂直的单位向量.

【解析】① $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直向量记为 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 0 & 4\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=(-8,2,6)=2(-4,1,3)$；

② $\vec{c}^{\,o}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{26}}(-4,1,3)$ 即为所求.

12. 设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

【解析】① $O(0,0,0),P(6,-3,2)$，则 $\overrightarrow{OP}=(6,-3,2)$，$\vec{n}_1=(4,-1,2)$；

② 所求平面法向量 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=(-4,-4,6)=-2(2,2,-3)$；

③ $2x+2y-3z=0$ 为所求平面方程.

13. 过平面 $\pi_1: x+28y-2z+17=0$ 和 $\pi_2: 5x+8y-z+1=0$ 的交线，作球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的切平面，求该切平面方程.

【解析】① 过平面 Π_1 与 Π_2 交线的平面束方程为 $(x+28y-2z+17)+\lambda(5x+8y-z+1)=0$，即

$$(1+5\lambda)x+(28+8\lambda)y-(2+\lambda)z+17+\lambda=0\text{；}$$

② 由题意，球面的球心到切平面距离为半径 1，即

$$\frac{|17+\lambda|}{\sqrt{(1+5\lambda)^2+(28+8\lambda)^2+[-(2+\lambda)]^2}}=1\text{，}$$

化简得 $89\lambda^2+428\lambda+500=0$，解得：$\lambda=-\dfrac{250}{89}$ 或 -2；

③ 切平面方程为：$387x-164y-24z-421=0$ 或 $3x-4-5=0$.

14. 求过点 $M_0(2,1,3)$ 且与直线 $l:\begin{cases}2x+y+2z=0\\ x+y-3=0\end{cases}$ 垂直相交的直线方程.

【解析】① 设所求直线方向向量 $\vec{s}=(a,b,c)$；

② l 的方向向量 $\vec{s_1}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(-2,2,1)$；

③ $\begin{cases}2x+y+2z=0\\ x+y-3=0\end{cases}\Rightarrow x+2z+3=0$，令 $z=1$，则 $x=-5, y=8$，交点记为 $M_1(-5,8,1)$；

④ 两直线垂直得：$-2a+2b+c=0$；

两直线相交得：$\left(\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s},\vec{s_1}\right)=\begin{vmatrix}-7 & 7 & -2\\ a & b & c\\ -2 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$，即 $a+b=0$；

两式整理得：$a=-b, c=-4b$；

⑤ 则 $a:b:c=-1:1:(-4)$；

⑥ 所求直线方程为：$\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$.

★★15. 设 l_1, l_2 为两条共面直线，l_1 的方程为 $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-5}{2}$；$l_2$ 通过点 $(2,-3,-1)$，且与 x 轴正向夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，与 z 轴正向夹角为锐角，求 l_2 的方程.

【解析】① 若 $l_1 // l_2$，则 l_1 的方向向量 $(1,2,2)$ 也为 l_2 的方向向量，则 l_2 与 x 轴夹角余弦为 $\dfrac{(1,2,2)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{1+2^2+2^2}}=\dfrac{1}{3}$，不可能为 $\dfrac{\pi}{3}$，所以 l_1 与 l_2 不平行；

② l_1 与 l_2 只能相交. 不妨令交点为 P，所以 P 在 l_1 上，由 l_1 的参数方程可设 P 的坐标为 $(t+7,2t+3,2t+5)$，又 l_2 过点 $Q(2,-3,-1)$，则 $\overrightarrow{QP}=(t+5,2t+6,2t+6)$ 平行于 l_2，取 $(\lambda c,c,c)$ 为 l_2 的方向向量，其中 $c=2t+6$，则 $\lambda=\dfrac{t+5}{2t+6}$；又 l_2 与 x 轴夹角为锐角，取 $c=1$，又夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，即 $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{(\lambda,1,1)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{\lambda^2+1+1}}=\dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+2}}\Rightarrow\lambda=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；

所以 l_2 的方向向量为 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},1,1\right)$，其对应的方程为 $\frac{x-2}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+1}{1}$，化简得 $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{\sqrt{6}}=\frac{z+1}{\sqrt{6}}$.

16. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $y+z=1$ 的交线在 xoy 坐标面上的投影方程，并确定交线类型.

【解析】① $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ y+z=1 \end{cases}$ 消 z 得 $1-y=x^2+y^2$，即 $x^2+y^2+y=1 \Rightarrow x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$；

②投影方程为 $\begin{cases} x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \\ z=0 \end{cases}$，为 xoy 面上的一个圆.