TTI109 – Estatística

Aula 09 – Distribuições Discretas de Probabilidade 01

Variáveis aleatórias

Definição

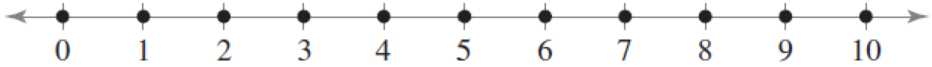
Uma **variável aleatória *x*** representa um valor numérico associado a cada resultado de um experimento probabilístico (ou aleatório).

é função de um objeto escolhido ao acaso

Uma variável aleatória é **discreta** quando tem um número finito ou contável de resultados possíveis que podem ser enumerados.

Número de ligações que um vendedor faz em um único dia

Número de ligações (discreta).



x só pode assumir valores inteiros: 0, 1, 2, 3, ...

Variáveis aleatórias

Definição

Uma **variável aleatória *x*** representa um valor numérico associado a cada resultado de um experimento probabilístico (ou aleatório).

Uma variável aleatória é **contínua** quando tem um número incontável de resultados possíveis, representados por um intervalo na reta numérica.

Tempo diário (h) que um vendedor passa em ligações

Horas gastas em ligações (contínua).

x pode assumir qualquer valor de 0 a 24.

Variáveis aleatórias

Variáveis discretas e variáveis contínuas

Determine se a variável aleatória x é discreta ou contínua. Explique seu raciocínio.

1. x representa o número de empresas, da lista das 500 maiores, que perderam dinheiro no ano passado.
2. x representa o volume de gasolina em um tanque de 21 galões.

Como decidir?

❶ O número de empresas que perderam dinheiro no ano passado pode ser contado, sendo o resultado um número pertencente ao conjunto . Logo, é uma variável aleatória discreta.

Variáveis aleatórias

Variáveis discretas e variáveis contínuas

Determine se a variável aleatória x é discreta ou contínua. Explique seu raciocínio.

1. x representa o número de empresas, da lista das 500 maiores, que perderam dinheiro no ano passado.
2. x representa o volume de gasolina em um tanque de 21 galões.

Como decidir?

❷ A volume de gasolina no tanque pode assumir qualquer valor entre e galões. Portanto, é uma variável aleatória contínua.

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

Distribuições discretas de probabilidade

Definição

Uma **distribuição discreta de probabilidade** lista cada valor possível que a variável aleatória pode assumir, com sua respectiva probabilidade. Uma distribuição de probabilidade discreta deve satisfazer às seguintes condições:

EM PALAVRAS

1. A probabilidade de cada valor da variável aleatória discreta está entre 0 e 1, inclusive.

2 A soma de todas as probabilidades é 1.

EM SÍMBOLOS

$0 \leq P(x) \leq 1$

$\Sigma P(x) = 1$

EXEMPLO

x	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{4}{90}$	$\frac{9}{90}$	$\frac{16}{90}$	$\frac{25}{90}$	$\frac{36}{90}$
$P(X \leq x)$	$\frac{4}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{29}{90}$	$\frac{54}{90}$	$\frac{90}{90}$

Distribuições discretas de probabilidade

Instruções

Construindo uma distribuição discreta de probabilidade

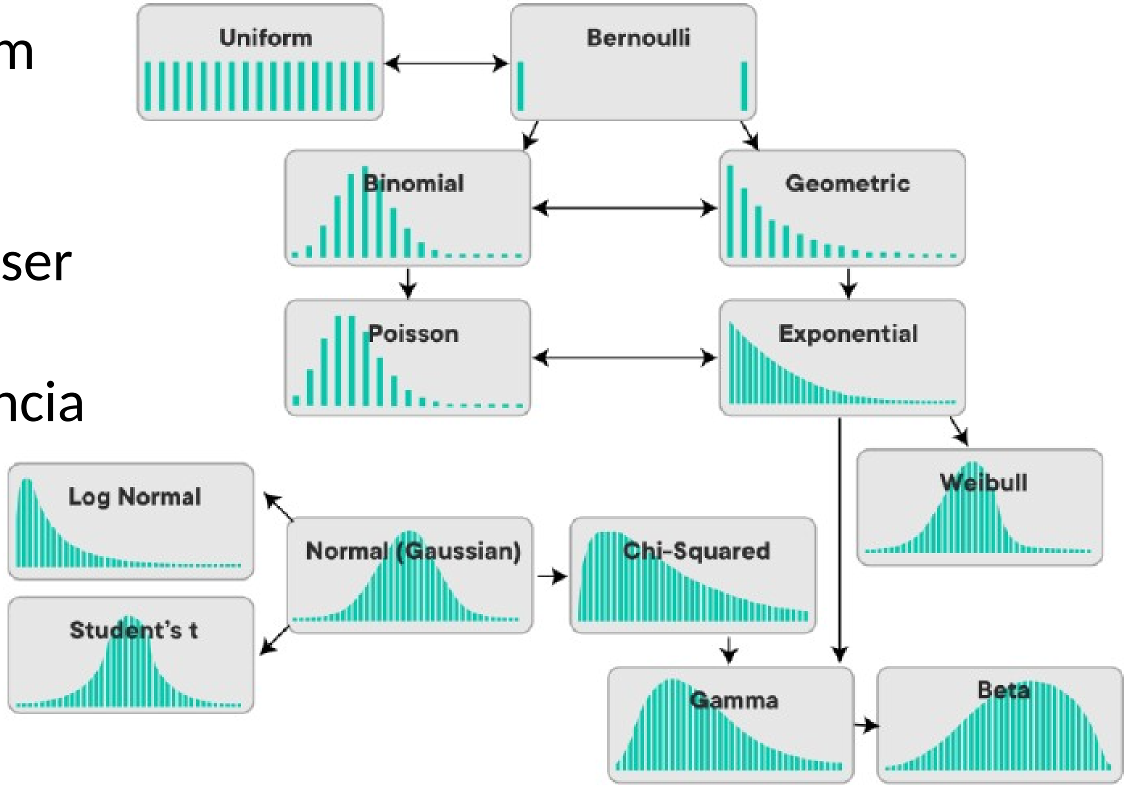
Seja x uma variável aleatória discreta com resultados possíveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. Construa uma distribuição de frequências para os resultados possíveis.
2. Calcule a soma das frequências.
3. Determine a estimativa da probabilidade de cada resultado possível dividindo sua frequência pela soma das frequências.
4. Verifique que cada probabilidade esteja entre 0 e 1, inclusive, e que a soma seja 1.

Frequência relativa, examinada em outro ponto de vista...

Distribuições discretas de probabilidade

- Como probabilidades podem ser indicadas por frequências relativas, uma distribuição de probabilidades discreta pode ser representada graficamente em um histograma de frequência relativa (o usual é um gráfico de barras ou segmentos verticais).



INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

Distribuições discretas de probabilidade

EXEMPLO Um psicólogo aplicou um teste de personalidade para identificar características passivo-agressivas em 150 colaboradores de uma indústria, com pontuações variando de 1 (extremamente passivo) a 5 (extremamente agressivo).

Pontuação, x	Frequência, f
1	24
2	33
3	42
4	30
5	21

Construa uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória e represente-a graficamente usando um histograma.

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

Distribuições discretas de probabilidade

Pontuação, x	Frequência, f
1	24
2	33
3	42
4	30
5	21

$$\boxed{\sum f = 150}$$

$$\underbrace{P(1)=\frac{24}{150}=0{,}16 \qquad P(2)=\frac{33}{150}=0{,}22 \qquad P(3)=\frac{42}{150}=0{,}28 \qquad P(4)=\frac{30}{150}=0{,}20 \qquad P(5)=\frac{21}{150}=0{,}14}$$

Distribuição discreta de probabilidades para as possíveis pontuações.

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

Note que $0 \leq P(x) \leq 1$

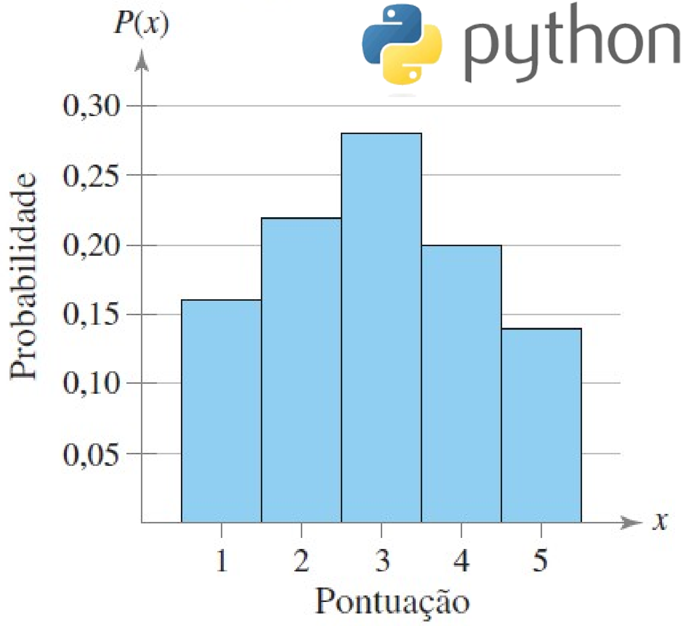
$\Sigma P(x) = 1$.

Distribuições discretas de probabilidade

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

- Nesse caso, a largura de cada barra é unitária. Logo, a área de cada barra é igual à probabilidade de um resultado particular.

- Além disso, a probabilidade de um evento corresponde à soma de áreas dos resultados incluídos no evento.



É como se desse um tratamento contínuo a uma variável discreta...

Média, Variância e Desvio Padrão

Média de uma variável aleatória discreta

A **média** de uma variável aleatória discreta é dada por:

$$\mu = \Sigma x P(x).$$

Cada valor de x é multiplicado por sua correspondente probabilidade e os produtos são adicionados.

● A média de uma variável aleatória representa a *média teórica* de um experimento probabilístico que, quando realizado, não apresenta necessariamente essa média.

¬⅄ Se o experimento fosse repetido milhares de vezes, a média de todos os resultados, provavelmente, seria próxima à média da variável aleatória.

Média, Variância e Desvio Padrão

EXEMPLO Voltando ao teste de personalidade...

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

Cálculo da média para o teste de personalidade.

x	$P(x)$	$xP(x)$
1	0,16	$1(0,16) = 0,16$
2	0,22	$2(0,22) = 0,44$
3	0,28	$3(0,28) = 0,84$
4	0,20	$4(0,20) = 0,80$
5	0,14	$5(0,14) = 0,70$
	$\Sigma P(x) = 1$	$\Sigma xP(x) = 2,94 \approx 2,9$ ← Média

Interpretação:

A característica de personalidade média não é nem extremamente passiva, nem extremamente agressiva, mas é levemente mais próxima à passividade

Média, Variância e Desvio Padrão

Variância e desvio padrão de uma variável aleatória discreta

A **variância** de uma variável aleatória discreta é:

$$\sigma^2 = \Sigma\,(x-\mu)^2\,P(x)$$

O **desvio padrão** é:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\Sigma\,(x-\mu)^2\,P(x)}$$

Uma fórmula abreviada para a variância de uma distribuição de probabilidade é:

$$\sigma^2 = [\Sigma x^2 P(x)] - \mu^2.$$

EXEMPLO Voltando ao teste de personalidade...

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

Qual a variância da distribuição?
E o desvio padrão?

Média, Variância e Desvio Padrão

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

x	$P(x)$	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2P(x)$
1	0,16	−1,94	3,7636	0,602176
2	0,22	−0,94	0,8836	0,194392
3	0,28	0,06	0,0036	0,001008
4	0,20	1,06	1,1236	0,224720
5	0,14	2,06	4,2436	0,594104
	$\Sigma P(x)=1$			$\Sigma(x-\mu)^2P(x)=1{,}6164$

Variância

Conclusão:

Variância

Desvio Padrão

Valor Esperado

Definição

O **valor esperado** de uma variável aleatória discreta é igual à média da variável aleatória.

Valor esperado $= E(x) = \mu = \Sigma x P(x)$.

Encontrando um valor esperado

Em um sorteio, 1.500 bilhetes são vendidos a $ 2 cada, para prêmios de $ 500, $ 250, $ 150 e $ 75. Você compra um bilhete. Qual é o valor esperado do seu ganho?

Ganho por prêmio = Prêmio - bilhete

Distribuição de probabilidade da variável Ganho.

–$ 2 representa uma perda de $ 2

Ganho, x	$ 498	$ 248	$ 148	$ 73	–$ 2
Probabilidade, $P(x)$	$\frac{1}{1.500}$	$\frac{1}{1.500}$	$\frac{1}{1.500}$	$\frac{1}{1.500}$	$\frac{1.496}{1.500}$

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA
MAUÁ

Valor Esperado

–$ 2 representa
uma perda de $ 2

Distribuição de probabilidade da variável Ganho.

Ganho, x	$ 498	$ 248	$ 148	$ 73	–$ 2
Probabilidade, $P(x)$	$\frac{1}{1.500}$	$\frac{1}{1.500}$	$\frac{1}{1.500}$	$\frac{1}{1.500}$	$\frac{1.496}{1.500}$

Negativo??

Interpretação:

Como o valor esperado é negativo, devemos esperar __*perder*__, em média, $ 1,35 para cada bilhete que comprarmos.

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

MAUÁ

TTI109 – Estatística

Aula 09 – Distribuições Discretas de Probabilidade 01