Дискретная оптимизация

МФТИ, весна 2016

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Задача оптимизации аддитивной функции на семействе подмножеств конечного множества
(DLS problem, Discrete Linear Subset problem)

- E — конечное множество
- Каждому $e \in E$ приписан вес $w(e) \geq 0$
- $\mathcal{F} \subset 2^E$ — «допустимые» подмножества
- Для каждого $A \subseteq E$ полагаем

$$w(A) \coloneqq \sum_{e \in A} w(e)$$

- Требуется найти $A \in \mathcal{F}$, такое, что

$$w(A) \to \max/\min$$

Задача DLS

Частные случаи задачи DLS:

- TSP (DLS-задача минимизации)
- MST (DLS-задача минимизации)
- 0,1-рюкзак (DLS-задача максимизации)

TSP и MST как DLS-задачи *максимизации*

$$E \coloneqq \text{все рёбра графа } G$$

- В задаче TSP
  - $w(e) \coloneqq (\text{bigconst} - \text{исходный вес ребра } e \text{ в графе})$
  - $\mathcal{F} \coloneqq \{E' \subseteq E \mid E' \text{образует г. ц. в } G\}$
- В задаче об остовном дереве:
  - $\mathcal{F} \coloneqq \{E' \subseteq E \mid E' \text{образует о. д. в } G\}$
  - $w(e) \coloneqq (\text{bigconst} - \text{исходный вес ребра } e \text{ в графе})$

Трюк с изменением весов работает только потому, что количество рёбер во всех г.ц./о.д. одинаковое!

Наследственные системы

Наследственная система (система независимости, independence system) — это пара $(E, \mathcal{F})$, где $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq 2^E$, для которой

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \forall A' \subset A \quad A' \in \mathcal{F}$$

Множества $I \in \mathcal{F}$ называются *независимыми*.

Базой множества $X \subseteq E$ называется любое такое $X' \in 2^X \cap \mathcal{F}$, что

$$\forall x \in X \setminus X' \quad X' \cup \{x\} \notin \mathcal{F}$$

Базы множества E называются просто *базами* или *базами системы* $(E, \mathcal{F})$.

Циклы — это множества $C \notin \mathcal{F}$, такие, что $C' \in \mathcal{F}$ для любого $C' \subset C$.

Ранг

Пусть $(E, \mathcal{F})$ — наследственная система.

Для множества $X \subset E$ определим

- ранг X

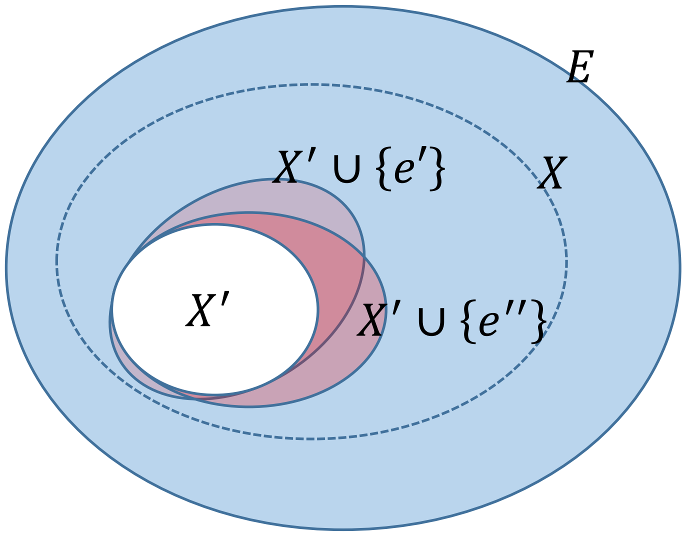
$$\operatorname{rk} X \coloneqq \max_{X' \text{ — база } X} |X'|,$$

- нижний ранг X

$$\widetilde{\operatorname{rk}}\, X \coloneqq \min_{X' \text{ — база } X} |X'|.$$

Ранговый разброс (rank quotient):

$$q(E, \mathcal{F}) \coloneqq \min_{X \subseteq E} \frac{\widetilde{\operatorname{rk}}\, X}{\operatorname{rk} X}.$$



Матроиды

Наследственная система $(E, \mathcal{F})$ называется *матроидом*, если

$$\forall X, Y \in \mathcal{F} \quad (|X| > |Y| \quad \Rightarrow \quad \exists x \in X \setminus Y \ \text{ т. ч. } \ Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}).$$

Утверждение.
Наследственная система $(E, \mathcal{F})$ — матроид т. и т.т., когда выполнено любое из условий:

1. $\forall X, Y \in \mathcal{F} \quad (|X| > |Y| \quad \Rightarrow \quad \exists x \in X \setminus Y \ \text{ т. ч. } \ Y \cup \{x\} \in \mathcal{F})$
2. $\forall X, Y \in \mathcal{F} \quad (|X| = |Y| + 1 \quad \Rightarrow \quad \exists x \in X \setminus Y \ \text{ т. ч. } \ Y \cup \{x\} \in \mathcal{F})$
3. Для любого $X \subseteq E$ все базы X равномощны.
4. $q(E, \mathcal{F}) = 1$

Эквивалентность определений матроида

1. $\forall X, Y \in \mathcal{F} \quad (|X| > |Y| \quad \Rightarrow \quad \exists x \in X \setminus Y \ \text{ т. ч. } \ Y \cup \{x\} \in \mathcal{F})$
2. $\forall X, Y \in \mathcal{F} \quad (|X| = |Y| + 1 \quad \Rightarrow \quad \exists x \in X \setminus Y \ \text{ т. ч. } \ Y \cup \{x\} \in \mathcal{F})$
3. Для любого $X \subseteq E$ все базы X равномощны.
4. $q(E, \mathcal{F}) \coloneqq \min\limits_{X \subseteq E} \dfrac{\min\{|X'| \mid X' \text{ — база } X\}}{\max\{|X'| \mid X' \text{ — база } X\}} = 1$

Импликации $(1) \Leftrightarrow (2)$, $(1) \Rightarrow (3)$, $(3) \Leftrightarrow (4)$ очевидны.

Остаётся доказать, например, импликацию $(3) \Rightarrow (1)$.

Пусть система $(E, \mathcal{F})$ удовлетворяет (3) и пусть $|X| > |Y|$.

Тогда Y не может быть базисом $X \cup Y$.

Тогда найдётся $x \in (X \cup Y) \setminus Y = X \setminus Y$, такой, что $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$.

Примеры матроидов

1. $\forall X, Y \in \mathcal{F} \quad (|X| > |Y| \quad \Rightarrow \quad \exists x \in X \setminus Y \ \text{ т. ч. } \ Y \cup \{x\} \in \mathcal{F})$
2. $\forall X, Y \in \mathcal{F} \quad (|X| = |Y| + 1 \quad \Rightarrow \quad \exists x \in X \setminus Y \ \text{ т. ч. } \ Y \cup \{x\} \in \mathcal{F})$
3. Для любого $X \subseteq E$ все базы X равномощны.
4. $q(E, \mathcal{F}) \coloneqq \min\limits_{X \subseteq E} \dfrac{\min\{|X'| \mid X' \text{ — база } X\}}{\max\{|X'| \mid X' \text{ — база } X\}} = 1$

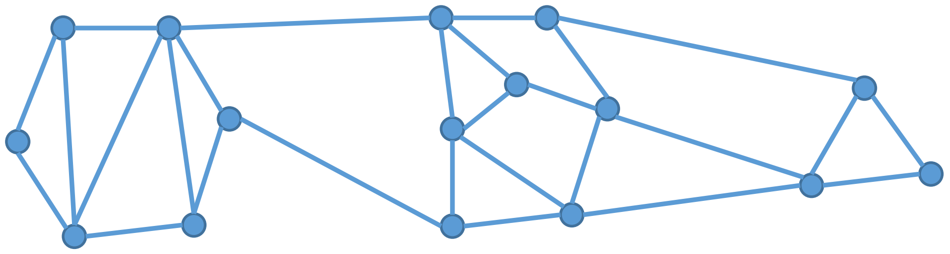
- E — строки матрицы, $\mathcal{F}$ — всевозможные л.н.з. наборы строк (*матричный* матроид)

- E — конечное множество, $\mathcal{F} \coloneqq \{E' \subseteq E \mid |E'| \leq k\}$ (*однородный* матроид)

Примеры матроидов

1. $\forall X, Y \in \mathcal{F} \quad (|X| > |Y| \quad \Rightarrow \quad \exists x \in X \setminus Y \text{ т.ч. } Y \cup \{x\} \in \mathcal{F})$
2. $\forall X, Y \in \mathcal{F} \quad (|X| = |Y| + 1 \quad \Rightarrow \quad \exists x \in X \setminus Y \text{ т.ч. } Y \cup \{x\} \in \mathcal{F})$
3. Для любого $X \subseteq E$ все базы X равномощны.
4. $q(E, \mathcal{F}) \coloneqq \min_{X \subseteq E} \frac{\min\{|X'| \mid X' - \text{база } X\}}{\max\{|X'| \mid X' - \text{база } X\}} = 1$

- E — рёбра графа, $\mathcal{F}$ — наборы рёбер, образующие леса



Жадный алгоритм для задачи DLS

Жадный алгоритм решения DLS-задачи максимизации для наследственной системы $(E, \mathcal{F})$ с неотрицательными весами:

1. $A \coloneqq \emptyset$
2. if $\exists s \in E \colon A \cup \{s\} \in \mathcal{F}$ then

   $A := A \cup \{\operatorname{argmax} w(s)\}$

   goto 2

   else:

   return A

Жадный алгоритм для задачи DLS

Какие требования наложить на структуру $(E, \mathcal{F})$, чтобы жадный алгоритм давал оптимальное решение задачи оптимизации?

Ответ: пара $(E, \mathcal{F})$ должна быть *матроидом*.

Теорема о качестве жадного решения

Теорема. (T.A. Jenkyns ’1976, B. Korte и D. Hausmann ’1978)
(Обобщение теоремы R. Rado ’1957 и J. Edmonds ’1971)

Пусть в задаче максимизации на наследственной системе $(E, \mathcal{F})$

- w^* — оптимальное значение,
- $w_{\text{жад}}$ — значение, полученное жадным алгоритмом.

Тогда

$$q(E, \mathcal{F}) \leq \frac{w_{\text{жад}}}{w^*} \leq 1,$$

причём для любой системы $(E, \mathcal{F})$ можно указать веса, на которых нижняя граница достигается.

Теорема о качестве жадного решения

Пусть $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, причём б.о.о. $w(e_1) \geq \cdots \geq w(e_n)$.

Обозначим $\Delta_k \coloneqq w(e_k) - w(e_{k+1})$. $(\Delta_n \coloneqq w(e_n))$

Обозначим $E_k \coloneqq \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, и, по определению, $E_0 \coloneqq \emptyset$.

Пусть G — допустимое множество, выданное ж.а., и пусть $G_k \coloneqq G \cap E_k$.

Пусть O — оптимальное допустимое множество, и пусть $O_k \coloneqq O \cap E_k$.

Имеем

$$w(G) = \sum_{k=1}^{n} (|G_k| - |G_{k-1}|) \cdot w(e_k) = \sum_{k=1}^{n} |G_k| \cdot \Delta_k \,.$$

Теорема о качестве жадного решения

- $w(e_1) \geq \cdots \geq w(e_n)$, $\qquad \Delta_k \coloneqq w(e_k) - w(e_{k+1})$,
- $E_k \coloneqq \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, $G_k \coloneqq G \cap E_k$, $\qquad O_k \coloneqq O \cap E_k$.
- $\widetilde{\mathrm{rk}}\, X \coloneqq \min\{|X'| \mid X' \text{ — база } X\}$
- $\mathrm{rk}\, X \coloneqq \max\{|X'| \mid X' \text{ — база } X\}$
- $q(E, \mathcal{F}) \coloneqq \min\limits_{X \subseteq E} \dfrac{\widetilde{\mathrm{rk}}\, X}{\mathrm{rk}\, X}$

$$w(G) = \sum_{k=1}^{n} |G_k| \cdot \Delta_k \geq \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\mathrm{rk}}\, E_k \cdot \Delta_k \geq \sum_{k=1}^{n} q(E, \mathcal{F}) \cdot \mathrm{rk}\, E_k \cdot \Delta_k =$$

$$= q(E, \mathcal{F}) \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{rk}\, E_k \cdot \Delta_k \geq q(E, \mathcal{F}) \cdot \sum_{k=1}^{n} |O_k| \cdot \Delta_k = q(E, \mathcal{F}) \cdot w(O).$$

Теорема о качестве жадного решения

Осталось привести пример, когда оценка достигается.

Пусть $X \subseteq E$, и пусть $\tilde{B}$ и B — такие базы X, для которых

$$\frac{|\tilde{B}|}{|B|} = q(E, \mathcal{F}).$$

Положим

$$\mathcal{w}(e) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{при } e \in X \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Если ж.а. не повезёт, и он выберет вначале все элементы $\tilde{B}$, то не сможет к ним ничего положительного добавить.

Жадность vs. локальность

Утверждение (упражнение).
На матроиде корректно будет работать такой алгоритм локального поиска:

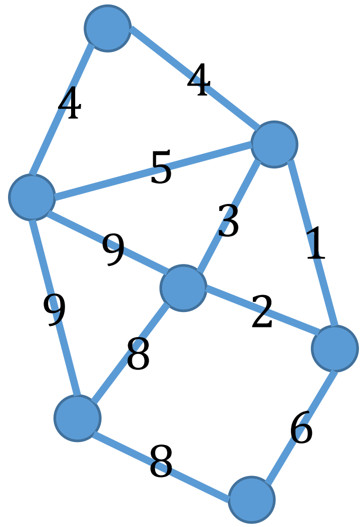
1. $A \coloneqq \forall$база
2. $\mathcal{N}(A) \coloneqq \{A' \in \mathcal{F} \mid A' = (A \setminus \{s\}) \cup \{s'\},\ s' \notin A\}$
3. if $\exists A' \in \mathcal{N}(A)$: $w(A') > w(A)$ then
   $A \coloneqq A'$
   goto 2

Жадный алгоритм в задаче MST

- Дан граф с весами на рёбрах.
- Требуется выбрать дерево, покрывающее все вершины и имеющее как можно меньший вес
- Формальная постановка:
  - $E \coloneqq E(G)$
  - $w(s) \coloneqq (\text{bigconst} - \text{вес ребра } s \text{ в исходном графе})$
  - $\mathcal{F} = \{E' \subseteq E \mid E' \text{образует остовное дерево в } G\}$
  - Трюк с изменением весов работает потому, что количество рёбер во всех остовных деревьях одинаковое!

Жадный алгоритм для MST

- Дан граф с весами на рёбрах
- Требуется выбрать дерево, покрывающее все вершины и имеющее как можно меньший вес



- Матроидная постановка:
  - S — множество всех рёбер графа
  - $\mathcal{F}$ содержит все ациклические подмножества рёбер

Оценка рангового разброса

Теорема (D. Hausmann, T.A. Jenkyns, B. Korte ’1980).

Пусть $(E, \mathcal{F})$ — наследственная система.

Если для любого $A \in \mathcal{F}$ и любого $e \in E$ во множестве $A \cup \{e\}$ не более t циклов, то $q(E, \mathcal{F}) \geq \frac{1}{t}$.

Оценка рангового разброса

Пусть $X \subseteq E$ и пусть $\tilde{B}$ и B — наименьшая и наибольшая по мощности базы X.

Докажем, что $|B| \leq t \cdot |\tilde{B}|$.

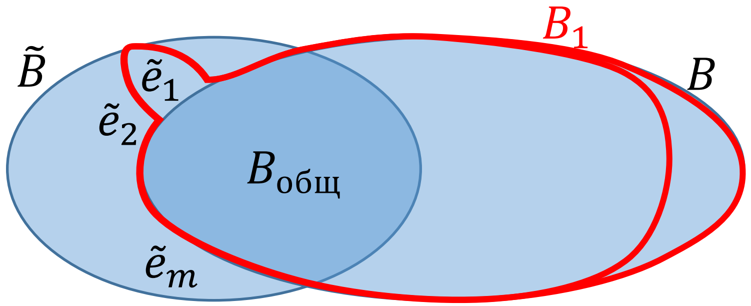
Пусть $B_{\text{общ}} \coloneqq B \cap \tilde{B}$.

Пусть $\tilde{B} \setminus B_{\text{общ}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m\}$.

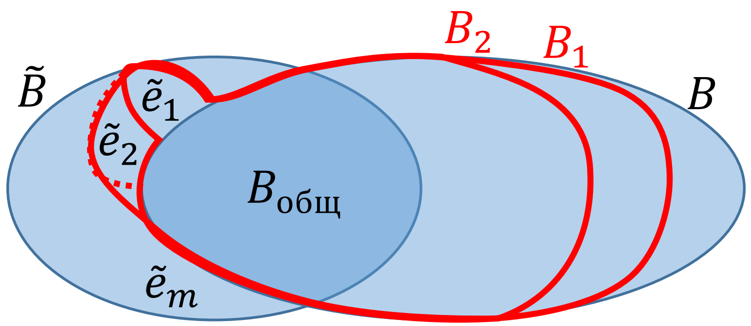
Положим $B_0 \coloneqq B$.

По условию, в $B_0 \cup \{\tilde{e}_1\}$ не более t циклов. У каждого из них найдётся общий элемент с $B_0 \setminus \left(B_{\text{общ}} \cup \{\tilde{e}_1\}\right)$. Удалив не более t таких элементов, получим множество B_1, такое, что

- B_1 независимо,
- $B_{\text{общ}} \cup \{\tilde{e}_1\} \subseteq B_1 \subseteq X$,
- $\left|B_1 \setminus \left(B_{\text{общ}} \cup \{\tilde{e}_1\}\right)\right| \geq |B \setminus B_{\text{общ}}| - t$.



Оценка рангового разброса



- B_1 независимо,
- $B_1 \supseteq B_{\text{общ}} \cup \{\tilde{e}_1\}$,
- $\left|B_1 \setminus B_{\text{общ}}\right| \geq \left|B_0 \setminus B_{\text{общ}}\right| - t$.

В $B_1 \cup \{\tilde{e}_2\}$ не более t циклов. У каждого из них найдётся общий элемент с $B_1 \setminus \left(B_{\text{общ}} \cup \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}\right)$. Удалив не более t таких элементов, получим множество B_2, такое, что

- B_2 независимо,
- $B_{\text{общ}} \cup \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\} \subseteq B_2 \subseteq X$,
- $\left|B_2 \setminus \left(B_{\text{общ}} \cup \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}\right)\right| \geq \left|B_1 \setminus \left(B_{\text{общ}} \cup \{\tilde{e}_1\}\right)\right| - t \geq \left|B \setminus B_{\text{общ}}\right| - 2t$.

Оценка рангового разброса

Получим в итоге независимое множество B_m, такое, что

- B_m независимо,
- $\tilde{B} \subseteq B_m \subseteq X$,
- $\left|B_m \setminus \tilde{B}\right| \geq \left|B \setminus B_{\text{общ}}\right| - t \cdot m$.

Так как по условию, $\tilde{B}$ — база X, то $B_m = \tilde{B}$, следовательно

$$\left|B \setminus B_{\text{общ}}\right| \leq t \cdot m = t \cdot \left|\tilde{B} \setminus B_{\text{общ}}\right|.$$

Следовательно,

$$|B| - \left|B_{\text{общ}}\right| \leq t \cdot \left(\left|\tilde{B}\right| - \left|B_{\text{общ}}\right|\right)$$

и

$$|B| \leq t \cdot \left|\tilde{B}\right| + (1 - t) \cdot \left|B_{\text{общ}}\right| \leq t \cdot \left|\tilde{B}\right|.$$

Субмодулярность ранговой функции

Утверждение.

Если $(E, \mathcal{F})$ — матроид, то для любых $X, Y \subseteq E$ выполнено
$$\operatorname{rk} X + \operatorname{rk} Y \geq \operatorname{rk}(X \cup Y) + \operatorname{rk}(X \cap Y)\,.$$

Доказательство:

Пусть A — база $X \cap Y$.

По свойству матроида, можно расширить A до базы $(A \sqcup B)$ множества X, а затем до базы $(A \sqcup B \sqcup C)$ множества $X \cup Y$.

Тогда $A \sqcup C$ — независимое подмножество в Y, поэтому
$$\operatorname{rk} X + \operatorname{rk} Y \geq |A \sqcup B| + |A \sqcup C| = |A \sqcup B \sqcup C| + |A| = \operatorname{rk}(X \cup Y) + \operatorname{rk}(X \cap Y)\,.$$

Свойство циклов матроида

Утверждение.

Пусть C', C'' — два различных цикла матроида.

Для любого $x \in C' \cap C''$ и любого $y \in C' \setminus C''$ найдётся цикл C, такой, что

$$y \in C \subseteq (C' \cup C'') \setminus \{x\}.$$

Доказательство.

По субмодулярности получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rk} C' + \operatorname{rk}\big((C' \cup C'') \setminus \{x, y\}\big) + \operatorname{rk} C'' \geq \\
&\geq \operatorname{rk} C' + \operatorname{rk}\big((C' \cup C'') \setminus \{y\}\big) + \operatorname{rk}(C'' \setminus \{x\}) \\
&\geq \operatorname{rk}(C' \cup C'') + \operatorname{rk}(C' \setminus \{y\}) + \operatorname{rk}(C'' \setminus \{x\})
\end{aligned}$$

Свойство циклов матроида

Для любого $x \in C' \cap C''$ и любого $y \in C' \setminus C''$ найдётся цикл C, такой, что $y \in C \subseteq (C' \cup C'') \setminus \{x\}$.

- $\operatorname{rk} C' + \operatorname{rk}\big((C' \cup C'') \setminus \{x, y\}\big) + \operatorname{rk} C'' \geq \operatorname{rk}(C' \cup C'') + \operatorname{rk}(C' \setminus \{y\}) + \operatorname{rk}(C'' \setminus \{x\})$

Из соотношений $\operatorname{rk} C' = \operatorname{rk}(C' \setminus \{y\})$ и $\operatorname{rk} C'' = \operatorname{rk}(C'' \setminus \{x\})$ следует

$$\operatorname{rk}\big((C' \cup C'') \setminus \{x, y\}\big) = \operatorname{rk}(C' \cup C'').$$

Пусть B — база множества $(C' \cup C'') \setminus \{x, y\}$.

Тогда $B \cup \{y\}$ содержит искомый цикл.

Ещё одно эквивалетное определение матроида

Теорема (D. Hausmann, T.A. Jenkyns, B. Korte ’1980).
Пусть $(E, \mathcal{F})$ — наследственная система.
Если для любого $A \in \mathcal{F}$ и любого $e \in E$ во множестве $A \cup \{e\}$ не более t циклов, то $q(E, \mathcal{F}) \geq \frac{1}{t}$.

Утверждение.
Наследственная система $(E, \mathcal{F})$ является матроидом т. и т.т., когда для любого $A \in \mathcal{F}$ и любого $e \in E$ множество $A \cup \{e\}$ содержит не более одного цикла.

Доказательство. В одну сторону — прямое следствие теоремы.
Нужно доказать в другую сторону.

Ещё одно эквивалетное определение матроида

Утверждение.
Наследственная система $(E, \mathcal{F})$ является матроидом т. и т.т., когда для любого $A \in \mathcal{F}$ и любого $e \in E$ множество $A \cup \{e\}$ содержит не более одного цикла.

Пусть $(E, \mathcal{F})$ — матроид, и пусть $A \in \mathcal{F}$.

Допустим, в $A \cup \{e\} \in \mathcal{F}$ есть пара различных циклов: C', C''.

Тогда во множестве $(C' \cup C'') \setminus \{e\}$ есть цикл — но это противоречит тому, что $(C' \cup C'') \setminus \{e\} \subseteq A \in \mathcal{F}$.

Пересечение наследственных систем

Пересечение наследственных систем $(E, \mathcal{F}')$ и $(E, \mathcal{F}'')$ — это наследственная система $(E, \mathcal{F})$, в которой

$$\mathcal{F} \coloneqq \mathcal{F}' \cap \mathcal{F}''$$

Утверждение.
Любая наследственная система $(E, \mathcal{F})$ может быть представлена как пересечение нескольких матроидов.

Доказательство:

Пусть C — произвольный цикл в $(E, \mathcal{F})$. Определим $\mathcal{F}_C \coloneqq \{A \subseteq E \mid C \setminus A \neq \emptyset\}$.

Легко проверить, что $(E, \mathcal{F}_C)$ — матроид.

Поэтому $(E, \mathcal{F}) = \bigcap_C (E, \mathcal{F}_C)$ — искомое представление.

Оценка рангового разброса

Утверждение.
Если наследственная система $(E, \mathcal{F})$ может быть представлена как пересечение t матроидов, то $q(E, \mathcal{F}) \geq \frac{1}{t}$.

Доказательство:

Пусть $(E, \mathcal{F}_i)$ — матроиды, пересечение которых даёт $(E, \mathcal{F})$.

Пусть $X \in \mathcal{F}$ и пусть $e \in E \setminus X$.

- Чтобы подмножество $C \subseteq X \cup \{e\}$ было циклом в $(E, \mathcal{F})$, оно должно быть циклом хотя бы в одном $(E, \mathcal{F}_i)$.
- Каждое $(E, \mathcal{F}_i)$ матроид, и в нём не более одного цикла в $X \cup \{e\}$.

Единственность решения DLS

- Решаем задачу:
  - E — конечное множество, для $X \subseteq E$ полагаем $w(X) \coloneqq \sum_{x \in X} w(x)$
  - $\mathcal{F}$ — семейство «допустимых» подмножеств E
    (Пара $E, \mathcal{F}$ не обязана быть наследственной системой!)
  - Требуется найти $X^* \in \mathcal{F}$, такое, что $w(X^*) \to \max$
- Вопросы:
  - Когда решение такой задачи единственное?
  - Что будет, если $w(x)$ выбирать для каждого $x \in E$ случайным образом, например, из множества $\{1,2,\dots,M\}$?

Лемма об изолировании (isolation lemma)

Теорема. (K. Mulmuley, U. Vazirani, V. Vazirani ’1987)

При случайном равномерном независимом выборе весов элементов E из M-элементного множества вероятность единственности решения оптимизационной задачи не меньше

$$1 - \frac{|E|}{M}.$$

Происхождение названия леммы: набор весов называется *изолирующим* для семейства $\mathcal{F}$, если решение оптимизационной задачи на данном наборе весов единственное.

Доказательство леммы об изолировании

Для $s \in E$ рассмотрим величину

$$\alpha(s) := \max_{X \in \mathcal{F} \colon X \not\ni s} w(X) - \max_{Y \in \mathcal{F} \colon Y \ni s} w(Y \setminus \{s\})$$

Допустим, есть два различных множества $X', Y' \in \mathcal{F}$, на которых достигается максимум веса.

Тогда рассмотрим произвольный $s \in Y' \setminus X'$. Для такого s выполнено

$$\alpha(s) = \max_{X \in \mathcal{F} \colon X \not\ni s} w(X) - \max_{Y \in \mathcal{F} \colon Y \ni s} w(Y \setminus \{s\}) = w(X') - w(Y' \setminus \{s\}) =$$

$$= w(X') - \big(w(Y') - w(s)\big) = w(s)$$

Следовательно, **если** $\forall s \in E \quad w(s) \neq \alpha(s)$, **то решение оптимизационной задачи единственное.**

Доказательство леммы об изолировании

- Если $\forall s \in E \quad w(s) \neq \alpha(s)$, то решение задачи единственное.
- $\alpha(s) := \max\limits_{X \in \mathcal{F}:\, X \not\ni s} w(X) - \max\limits_{Y \in \mathcal{F}:\, Y \ni s} w(Y \setminus \{s\})$

Заметим, что $\alpha(s)$ не зависит от $w(s)$, поэтому

$$\Pr\{w(s) = \alpha(s)\} \leq \frac{1}{M}$$

Теперь можно оценить вероятность единственности решения:

$$\Pr\{\forall s \in E \quad w(s) \neq \alpha(s)\} =$$

$$= 1 - \Pr\{\exists s \in E: \quad w(s) = \alpha(s)\} \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{s \in E} \Pr\{w(s) = \alpha(s)\} \geq 1 - \frac{|E|}{M}$$

Резюме

- Жадность — простой подход, эффективный в некоторых случаях (например, в оптимизационных задачах на матроидах), но, конечно, далеко не во всех
- Во многих оптимизационных задачах при случайном выборе весов решение с большой вероятностью единственное