# Дискретная оптимизация

МФТИ, осень 2015

Александр Дайняк

www.dainiak.com

# Линейное программирование

+ задача ЦЛП

Общая форма задачи ЛП:

- $c_1x_1 + \dots + c_nx_n \to \min$ или $\to \max$
- $a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \quad \dots, \quad a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m$
- $a'_{1,1}x_1 + \dots + a'_{1,n}x_n \ge b'_1, \quad \dots, \quad a'_{m',1}x_1 + \dots + a'_{m',n}x_n \ge b'_{m'}$
- $a''_{1,1}x_1 + \dots + a''_{1,n}x_n \le b''_1, \quad \dots, \quad a''_{m'',1}x_1 + \dots + a''_{m'',n}x_n \le b''_{m''}$

Стандартная форма задачи ЛП:

- $c_1x_1 + \dots + c_nx_n \to \min$ или $\to \max$
- $a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \quad \dots, \quad a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m$
- $x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$

# Векторная форма записи задач ЛП

- $\boldsymbol{cx} \to \max$
- $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$ и т.д.
- $\boldsymbol{x} \geq 0$

# Переход от общей формы к стандартной

- От неравенств переходим к равенствам, вводя новые переменные: неравенство вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geq b$ заменяется парой неравенств

$$\begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - y = b \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Чтобы все переменные сделать неотрицательными, переменную вида $x$ заменяем везде на $(y - z)$, где $y \geq 0$ и $z \geq 0$.

# Формы задач ЛП

Общая форма задачи ЛП:

- Оптимизируется линейная форма
- Любые линейные ограничения на $x_i$

Стандартная форма задачи ЛП:

- Ограничения типа равенства
- Неотрицательность значений переменных

Каноническая форма задачи ЛП:

- Ограничения типа неравенства
- Неотрицательность значений переменных

# Что ещё можно задать линейными ограничениями

- Ограничения вида $\max\{x_1, \dots, x_k\} \leq x_l$ можно задать системой

$$\begin{cases} x_l - x_1 \geq 0 \\ \vdots \\ x_l - x_k \geq 0 \end{cases}$$

- Ограничения вида $x_l \geq |x_k|$ можно задать системой

$$\begin{cases} x_l \geq x_k \\ x_l \geq -x_k \end{cases}$$

- Равенство $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$ можно задать системой

$$\begin{cases} a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \geq b \\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq b \end{cases}$$

# Свойства решений задач ЛП

- Линейные ограничения на $x_1, \ldots, x_n$ задают в пространстве $\mathbb{R}^n$ либо пустое множество (если им нельзя удовлетворить), либо многогранник (возможно, неограниченный).
- Если оптимум в задаче ЛП существует, то он достигается на одной из вершин многогранника.
- Вершины многогранника определяются подмножествами из $n$ линейно независимых ограничений.

# Факты из линейной алгебры

- Гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ задаётся уравнением $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,
  где $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ — константный вектор-столбец, $b \in \boldsymbol{R}$,
  $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор координатных переменных.
- Неравенство $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ задаёт полупространство.
- Система линейных неравенств задаёт либо пустое множество, либо выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$.
  Этот многогранник может быть неограниченным.
- Если система неравенств $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$ задаёт многогранник в $\mathbb{R}^n$,
  то вершины многогранника — это те точки, для которых не менее $n$ из неравенств обращаются в равенство.

# Идея симплекс-метода

- Максимум целевой функции, если он существует, обязательно достигается на вершине многогранника (возможно, не только на вершине).
- Оптимальное решение ищем только среди вершин.
- Движемся от вершины к соседней вершине, пока можем улучшить значение целевой функции.
- Т.е. осуществляем локальный поиск на множестве вершин многогранника.

# Базисные допустимые решения

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор переменных, и $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица ранга $m$.

*Базисом* матрицы $A$ называется набор из $m$ лнз столбцов.
По-другому, базис — это невырожденная $m \times m$-подматрица в $A$.

*Базисным решением* называется вектор $(x_1, \dots, x_n)$, в котором
$x_i = 0$, если $i$-й столбец не входит в базис,
а остальные $x_j$ подобраны так, что $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Базисное решение *допустимо*, если в нём все $x_i \geq 0$.

# Пример особенности задачи ЦЛП

Решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

без требования целочисленности: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{9}{2}$.

Если добавить требование целочисленности переменных,
то решение такое: $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 5$.

Видно, что решение задачи ЦЛП — вовсе не «округлённое» решение задачи ЛП.

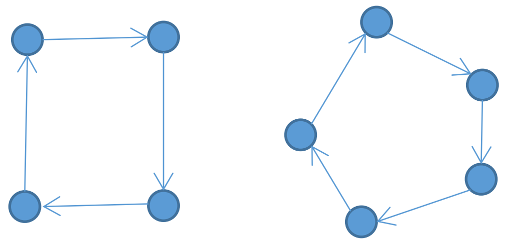
# Задача коммивояжёра

Попробуем сформулировать в терминах ЛП:

- $0, \dots, n$ — номера вершин в графе,
- $c_{ij}$ — стоимость пути из $i$-й вершины в $j$-ю
- $x_{ij} \in \{0,1\}$ — индикатор того, что есть дуга из $i$-й вершины в $j$-ю
- Минимизируем $\sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$ при ограничениях:
- $\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij} = 1$ — из каждой вершины выходит и в каждую вершину входит ровно одна дуга

# Задача коммивояжёра

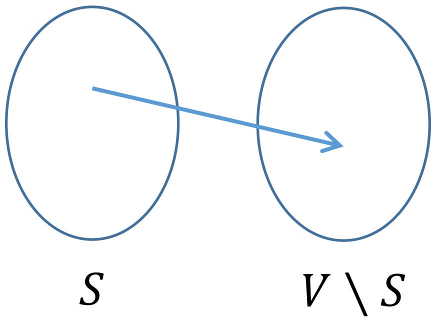
- Минимизируем $\sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$ при ограничениях $\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij} = 1$
- Проблема, как избежать такого:



- Формально условия регулярности соблюдены, но граф получился несвязным

# Задача коммивояжёра

- Минимизируем $\sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$ при ограничениях $\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij} = 1$
- Проблема: несвязность.
- Плохой выход из положения: $\forall S \subset \{0, \dots, n\} \quad \sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 1$




- Экспоненциально много неравенств!

# Задача коммивояжёра

- Минимизируем $\sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$ при ограничениях $\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij} = 1$
- Проблема: несвязность.
- Выход из положения: условия Миллера—Таккера—Землина (Miller, Tucker, Zemlin, 1960) [MTZ constraints]:
    - $\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\} \quad u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1$
    - (дополнительно $n$ новых переменных и $n(n-1)$ неравенств)

📖 C. E. Miller, A. W. Tucker, and R. A. Zemlin, Integer programming formulations and traveling salesman problems, J. ACM, 7 (1960), pp. 326–329.

# Задача коммивояжёра

- Минимизируем $\sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$ при ограничениях $\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij} = 1$
- $\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\} \quad u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1$
- Если $x_{ij}$ задают ГЦ, то условия Таккера выполнены:

  Считаем, что начало маршрута в вершине с номером $0$. Полагаем $u_i = p$, если вершина с номером $i$ посещалась на $p$-м шаге. Тогда если $x_{ij} = 1$, то $u_i - u_j = -1$.

# Задача коммивояжёра

- Минимизируем $\sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$ при ограничениях $\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij} = 1$
- $\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\} \quad u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1$

- Допустим теперь, что $x_{ij}$ задают объединение нескольких циклов. В нём есть цикл $(i_1, i_2, \dots, i_t, i_1)$, не проходящий через вершину 0. Возьмём неравенства:
  - $u_{i_1} - u_{i_2} + n x_{i_1 i_2} \leq n - 1$
  - $u_{i_2} - u_{i_3} + n x_{i_2 i_3} \leq n - 1$
  - …
  - $u_{i_t} - u_{i_1} + n x_{i_t i_1} \leq n - 1$

# Задача коммивояжёра

- Минимизируем $\sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$ при ограничениях $\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij} = 1$
- $\forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\} \quad u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1$
- Складываем неравенства:
    - $u_{i_1} - u_{i_2} + n x_{i_1 i_2} \leq n - 1$
    - $u_{i_2} - u_{i_3} + n x_{i_2 i_3} \leq n - 1$
    - …
    - $u_{i_t} - u_{i_1} + n x_{i_t i_1} \leq n - 1$
- Получаем: $tn \leq t(n-1)$ — противоречие!

# Транспортная задача

- Требуется перевезти $T$ единиц товара с $m$ складов в $n$ магазинов
- Количество товара на $i$-м складе равно $a_i$
- Количество, требующееся в $j$-м магазине, равно $b_j$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = T$$

- Стоимость перевозки с $i$-го склада в $j$-й магазин равна $c_{ij}$
- Задача: найти $x_{\mathrm{ij}}$ — количество, которое надо перевозить с $i$-го склада в $j$-й магазин, минимизировав при этом сумму

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

- Пришли к задаче линейного программирования!

# Транспортная задача

- $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = T$
- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$

- Если $a_i, b_j, c_{ij}$ целые, то оптимальное решение задачи тоже можно искать среди целочисленных, например, симплекс-методом. В данной задаче ограничение на целочисленность решения не создаёт дополнительных трудностей.

# Задача о назначениях

- В страховой компании работают $n$ агентов, продающих $n$ разных типов услуг. Эффективность $i$-го агента при продаже услуг $j$-го типа равна $c_{ij}$. Сил каждого агента хватает только на продажу одного типа услуг.
- Продажу какого типа $p_i$ нужно назначить $i$-му агенту, чтобы максимизировать суммарную эффективность $\sum_i c_{ip_i}$?

# Задача о назначениях

$$\sum_i c_{ip_i} \to max$$

- Можно переформулировать задачу в виде задачи ЛП:
  - $x_{ij}$ — кодировка того, что кому назначено: $x_{ij} = 1$, если продажа $j$-го типа услуг назначена $i$-му агенту. В противном случае $x_{ij} = 0$.
  - Тогда надо подобрать целые $x_{ij}$ так, чтобы

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \to max$$

при ограничении $\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij} = 1$

# Задача о назначениях

$$\sum_i c_{ip_i} \to max$$

- Можно переформулировать в терминах теории графов: это задача о построении совершенного паросочетания максимального веса