Дискретная оптимизация

МФТИ, осень 2015

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Задача о покрытии

- Задана $0{,}1$-матрица без нулевых столбцов.
- Строка матрицы *покрывает* столбец, если на их пересечении стоит «1».
- *Покрытие* матрицы — это подмножество строк, покрывающее все столбцы.
- Задача о покрытии — это задача отыскания покрытия, имеющего минимально возможную мощность.
- Задача о взвешенном покрытии — когда строкам матрицы приписаны веса и нужно найти покрытие минимального веса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{0} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Примеры задач о покрытии

- Выбрать минимальное число вопросов на экзамене, охватывающее все нужные темы.
- Показать рекламный ролик в социальной сети минимально возможному числу участников группы, но так, чтобы слухи о нём распространились во всей группе.
- Набрать команду специалистов для решения задачи, требующей знания нескольких областей, так, чтобы расходы на зарплату были минимальны.

Жадный алгоритм построения покрытия матрицы

Для матрицы M рассмотрим алгоритм:

1. $R \coloneqq \emptyset$
2. $C \coloneqq \text{столбцы, не покрытые строками из } R$
3. if $|C| > 0$:
4. $\quad r^* \coloneqq \underset{r\text{ — строка } M}{\operatorname{argmax}} \#\{\text{столбцы из } C, \text{покрываемые } r\}$
5. $\quad R \coloneqq R \cup \{r^*\}$
6. $\quad$ goto 2.
7. R — искомое покрытие матрицы

То есть на каждом шаге добавляем в R любую из строк, покрывающих наибольшее число из ещё не покрытых столбцов.

Соотношение мощностей жадного и оптимального покрытий

Рассмотрим задачу о покрытии без весов.

Мощность оптимального покрытия матрицы M обозначим $\tau(M)$.

Теорема. (Johnson’1974, Lovász’1975, Stein’1974)
Пусть M — произвольная матрица, в каждой строке которой не более k единиц.

Тогда покрытие M, которое строит жадный алгоритм, имеет мощность не более

$$(1 + \ln k) \cdot \tau(M)$$

Доказательство теоремы Джонсона

Пусть на матрице M был запущен ж.а., и он построил покрытие мощности t.

Припишем вес каждому *столбцу* матрицы M:

- пусть на некотором шаге алгоритма выбрана строка, покрывающая z не покрытых ранее столбцов, — тогда каждому из этих столбцов припишем вес $\frac{1}{z}$.

Заметим, что

$$\sum_{s \text{ — столбец } M} \text{вес}(s) = t$$

Доказательство теоремы Джонсона

Пусть T — оптимальное покрытие матрицы M.

Пусть r — произвольная строка из T.

Пусть $\{s_l, s_{l-1}, \dots, s_1\}$ — все столбцы, покрываемые r.

Каждый из этих столбцов, рано или поздно, покрывается жадным алгоритмом.
Будем считать, что они покрываются ж.а. *именно в таком порядке*:

$$s_l, s_{l-1} \dots, s_1$$

Перед итерацией ж.а., на которой покрывается столбец s_i,
в матрице M остаются непокрытыми по крайней мере i столбцов:

$$s_i, \dots, s_1$$

Доказательство теоремы Джонсона

Пусть r — строка из оптимального покрытия.

Пусть $\{s_l, s_{l-1}, \dots, s_1\}$ — все столбцы, покрываемые r.

Перед итерацией ж.а., на которой покрывается столбец s_i, в матрице M остаются непокрытыми по крайней мере i столбцов.

Ж.а. выберет на этой итерации строку, покрывающую по крайней мере i не покрытых ранее столбцов (не хуже чем r).

Значит, вес, приписанный нами столбцу s_i, не превосходит $1/i$.

Доказательство теоремы Джонсона

Пусть r — произвольная строка из оптимального покрытия T.

Пусть $\{s_1, s_2, \ldots, s_l\}$ — все столбцы, покрываемые r.

Имеем

$$\sum_{i=1}^{l} \text{вес}(s_i) \leq \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{i} \leq 1 + \ln l \leq 1 + \ln k\,,$$

где k — максимальное число единиц в строках матрицы M.

Доказательство теоремы Джонсона

Для произвольной строки r из оптимального покрытия T имеем

$$\sum_{s \text{ покрывается } r} \text{вес}(s) \leq 1 + \ln k$$

Т.к. каждый столбец покрывается хотя бы одной строкой из T, то

$$t = \sum_{s \text{ — столбец } M} \text{вес}(s) \leq \sum_{r \in T} \sum_{s \text{ покр. } r} \text{вес}(s) \leq \tau(M) \cdot (1 + \ln k)$$

Соотношение мощностей жадного и оптимального покрытий

Теорема.
Пусть M — произвольная матрица, в каждой строке которой не более k единиц. Тогда покрытие, построенное ж.а., имеет размер не более $(1 + \ln k) \cdot \tau(M)$.

Теорема.
Для любого $k \geq 2$ существует матрица M, в каждой строке которой не более k единиц, а покрытие, построенное для M с помощью ж.а., имеет размер не менее

$$\frac{(\log_2 k) - 1}{2} \cdot \tau(M)$$

Соотношение мощностей жадного и оптимального покрытий

Доказательство:

Для $a \in \mathbb{N}$ рассмотрим матрицу M размера $(a+2)\times(2^{a+1}-2)$, у которой

- для $i = 1, \ldots, a$ каждая из строк r_i содержит ровно 2^i единиц,
- ни у какой пары строк из $\{r_1, \ldots, r_a\}$ нет общих единичных позиций,
- строка r_{a+1} содержит $(2^a - 1)$ единиц, и для каждого $i = 1, \ldots, a$ у r_{a+1} и r_i ровно 2^{i-1} общих единичных позиций,
- строка r_{a+2} — побитовое отрицание r_{a+1}.

Пример матрицы M для $a = 4$

```
100000000000000100000000000000
011000000000000011000000000000
000111100000000000111100000000
000000011111111000000011111111
111111111111111000000000000000
000000000000000111111111111111
```

Соотношение мощностей жадного и оптимального покрытий

На матрице M ж.а. будет работать так:

- Сначала ж.а. выберет строку r_a, покрыв 2^a столбцов.
- Строки r_{a+1} и r_{a+2} могут покрыть по
$$(2^a - 1) - 2^{a-1} = 2^{a-1} - 1$$
новых столбцов, поэтому r_{a-1} у них «выиграет»: ж.а. выберет r_{a-1}.
- На следующем шаге ж.а. выберет r_{a-2} и т.д.

В итоге ж.а. выберет строки
$$r_a, r_{a-1}, \dots, r_1$$

Соотношение мощностей жадного и оптимального покрытий

В матрице M ж.а. выберет строки $r_a, r_{a-1}, \dots, r_1$.

При этом $\tau(M) = 2,$ и оптимальное покрытие такое: $\{r_{a+1}, r_{a+2}\}$.

Положим $a \coloneqq \lfloor \log_2 k \rfloor$. Для такого a

- в каждой строке M не более $2^a \leq k$ единиц,
- жадное покрытие хуже оптимального в $\frac{a}{2} \geq \frac{(\log_2 k) - 1}{2}$ раз.

Жадный алгоритм во взвешенной задаче о покрытии

1. $R \coloneqq \emptyset$
2. $C \coloneqq \text{столбцы, не покрытые строками из } R$
3. if $|C| > 0$:
4. $\quad r^* \coloneqq \underset{r\text{ — строка } M}{\operatorname{argmin}} \dfrac{\text{вес строки } r}{\#\{\text{столбцы из } C, \text{покрываемые } r\}}$
5. $\quad R \coloneqq R \cup \{r^*\}$
6. goto 2.
7. R — искомое покрытие матрицы

То есть на каждом шаге добавляем в R любую из строк, минимизирующих «стоимость покрытия в расчёте на один столбец».

Соотношение мощностей жадного и оптимального покрытий

Вес оптимального покрытия матрицы M обозначим $\tau(M)$.

Теорема-упражнение. (Chvátal ’1979)
Пусть M — произвольная матрица, в каждой строке которой не более k единиц.

Тогда *вес* покрытия M, которое строит жадный алгоритм, не превосходит

$$(1 + \ln k) \cdot \tau(M)$$

Соотношение мощностей жадного и оптимального покрытий

Теорема.

Пусть M — произвольная матрица с n столбцами, каждой строке которой приписан вес из интервала $(0{,}1]$.

Тогда вес покрытия M, которое строит жадный алгоритм, не превосходит

$$\left(1 + \ln \frac{n}{\tau(M)}\right) \cdot \tau(M) + 1$$

Соотношение мощностей жадного и оптимального покрытий

Пусть $s_n, s_{n-1} \dots, s_1$ — столбцы, в порядке, в котором они покрываются жадным алгоритмом.

Перед итерацией ж.а., на которой покрывается столбец x_l, в матрице остаются непокрытыми l столбцов. Их все можно покрыть множеством строк с суммарным весом не более чем $\tau(M)$.

Значит, ж.а. на этой итерации выберет строку, вес которой в расчёте на один покрываемый столбец не больше $\frac{\tau(M)}{l}$.

Значит, для каждого l общая стоимость покрытия столбцов $x_n, \dots, x_l$ не превосходит

$$\sum_{i=l}^{n} \frac{\tau(M)}{i} = \tau(M) \cdot \sum_{i=l}^{n} i^{-1} \leq \tau(M) \ln(n/l) \, .$$

А стоимость покрытия столбцов $s_{l-1}, \dots, s_1$ не превосходит $(l-1)$.

Соотношение мощностей жадного и оптимального покрытий

Значит, для каждого l общая стоимость покрытия столбцов $x_n, \dots, x_l$ не превосходит $\tau(M)\ln(n/l)$.

Стоимость покрытия столбцов $s_{l-1}, \dots, s_1$ не превосходит $(l-1)$.

Значит, общая стоимость жадного покрытия не больше

$$\tau(M)\ln(n/l) + (l-1)$$

Взяв $l \coloneqq 1 + \lceil \tau(M) \rceil$, получаем, что вес жадного покрытия не больше

$$\left(1 + \ln\frac{n}{\tau(M)}\right) \cdot \tau(M) + 1$$

Задача о вершинном покрытии

Дано:

- Граф $G = (V, E)$

Найти:

- $V' \subseteq V$, такое, что

$$\forall e \in E \quad \exists v \in V' \quad v \in e$$
$$|V'| \to \min$$

Задача о вершинном покрытии

Алгоритм, строящий 2-приближение:

$V' := \emptyset$

while $\exists uv \in E$ **s.t.** $u \notin V'$ **and** $v \notin V'$:

$V' := V' \cup \{u, v\}$

return V'

Задача о взвешенном вершинном покрытии (weighted vertex cover)

Дано:

- Граф $G = (V, E)$
- Веса $w: V \to \mathbb{R}^+$

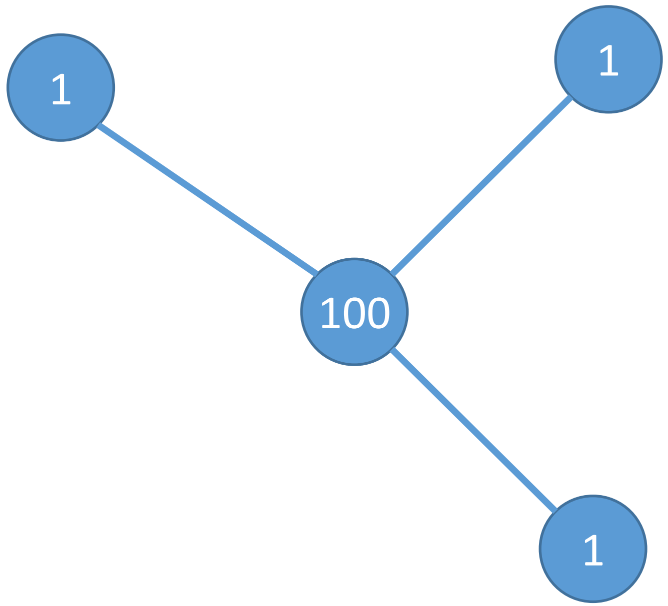
Найти:

- $V' \subseteq V$, такое, что

$$\forall e \in E \quad \exists v \in V' \quad v \in e$$
$$w(V') \to \min$$

Задача о взвешенном вершинном покрытии (weighted vertex cover)

Старый алгоритм работает плохо:



Формулировка в терминах ЛП

Дано: граф $G = (V, E)$, веса $w\colon E \to \mathbb{R}^+$.

Найти: вершинное покрытие V', такое, что $w(V') \to \min$

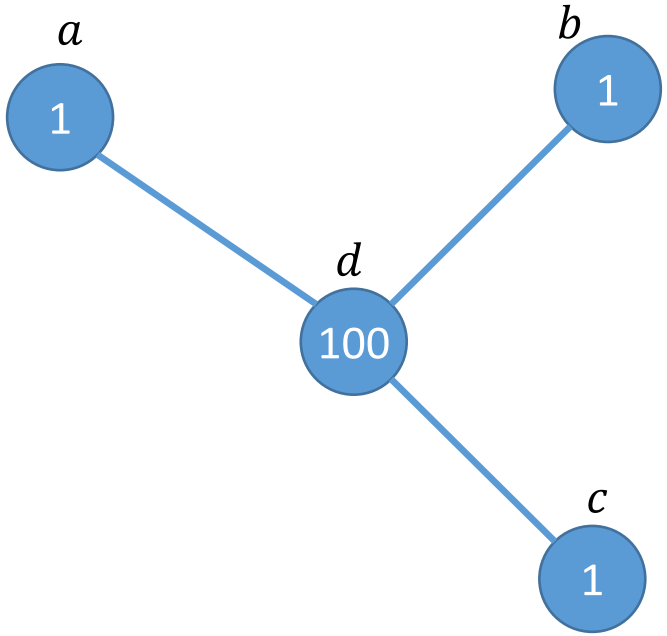
Сформулируем в терминах ЛП:

- Для каждой вершины $v \in V$ введём свою переменную x_v
$$0 \le x_v \le 1$$
- Условие покрытия каждого ребра:
$$\forall uv \in E \quad x_u + x_v \ge 1$$
- Минимизация:
$$\sum w(v) \cdot x_v \to \min$$

Задача о взвешенном вершинном покрытии (weighted vertex cover)

Составляем систему:

$$\begin{cases} 0 \leq x_a, x_b, x_c, x_d \leq 1 \\ x_a + x_d \geq 1 \\ x_b + x_d \geq 1 \\ x_c + x_d \geq 1 \\ x_a + x_b + x_c + 100x_d \to \min \end{cases}$$



Получаем решение:

$x_a^* = x_b^* = x_c^* = 1$

$x_d^* = 0$

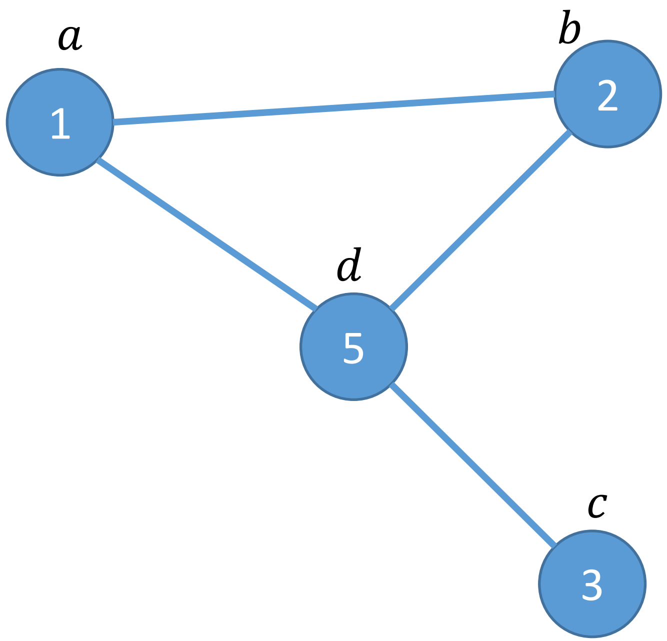
Задача о взвешенном вершинном покрытии (weighted vertex cover)

Составляем систему:

$$\begin{cases} 0 \le x_a, x_b, x_c, x_d \le 1 \\ x_a + x_d \ge 1 \\ x_b + x_d \ge 1 \\ x_c + x_d \ge 1 \\ x_a + x_b \ge 1 \\ x_a + 2x_b + 3x_c + 5x_d \to \min \end{cases}$$

Получаем решение:

$$x_a^* = x_b^* = x_c^* = x_d^* = \frac{1}{2}$$



Задача о взвешенном вершинном покрытии (weighted vertex cover)

Простое решение — округлить:

- берём вершину v в покрытие $\Leftrightarrow x_v^* \geq \frac{1}{2}$.

Тогда вес полученного покрытия не более чем вдвое больше оптимального.

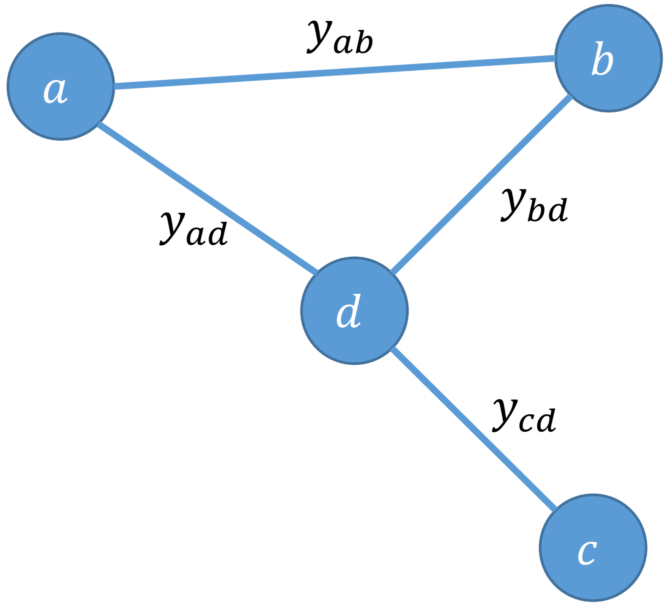
Почему?

Исходная задача:

$$\begin{cases} 0 \leq x_v \leq 1 & (v \in V) \\ x_u + x_v \geq 1 & (uv \in E) \\ \sum\limits_{v \in V} w_v x_v \to \min & \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} y_{uv} \geq 0 & (uv \in E) \\ \sum\limits_{v:\, uv \in E} y_{uv} \leq w_u & (u \in V) \\ \sum\limits_{uv \in E} y_{uv} \to \max & \end{cases}$$



Идея: будем искать допустимые наборы $(x_v)_{v \in V}$ и $(y_e)_{e \in E}$, такие, что

$$\sum_{v \in V} w_v x_v \leq 2 \cdot \sum_{uv \in E} y_{uv}$$

Взвешенное вершинное покрытие: алгоритм без использования ЛП

Алгоритм:

1. $\forall v \in V \quad x_v \coloneqq 0, \qquad \forall e \in E \quad y_e \coloneqq 0$
2. `while` $\exists uv \in E\ (x_u < w_u \land x_v < w_v)$:
3. $\qquad y_{uv} \coloneqq \min\{(w_u - x_u), (w_v - x_v)\}$
4. $\qquad x_u \mathrel{+}= y_{uv}$
5. $\qquad x_v \mathrel{+}= y_{uv}$
6. `return` $V_{\text{output}} \coloneqq \{v \in V \mid x_v = w_v\}$

Корректность очевидна, а 2-приближение следует из того, что

$$\sum_{v \in V_{\text{output}}} w_v \le \sum_{v \in V} x_v \le 2 \sum_{e \in E} y_e \le 2 w_{\text{optimal}}$$