Дискретная оптимизация

МФТИ, осень 2015

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Двойственность в линейном программировании

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \to \max \\ x_1 + 3x_2 & \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 1 \\ x_1 & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times 1,\ \times 2} \quad 5x_1 + 5x_2 \leq 3$$

Есть решение $(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$, при котором значение целевой функции равно $\frac{3}{5}$.

Как *доказать*, что лучше нельзя?

— Использовать неравенства из условия.

Двойственность в линейном программировании

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \to \max \\ x_1 + 3x_2 & \leq 1 \quad \times 1 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 1 \quad \times 2 \\ x_1 & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \end{cases} \qquad 5x_1 + 5x_2 \leq 3$$

«Сертификатом качества» решения может выступать вектор констант, домножив на которые неравенства из условия и затем сложив, мы получим такую оценку на целевую функцию, которая равна значению в проверяемой точке.

Двойственность в линейном программировании

$$
\begin{cases}
c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & \to \max \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
\vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq b_m \\
x_1, \dots, x_n & \geq 0
\end{cases}
$$

При любых константах $y_1, \dots, y_m \geq 0$ справедливо неравенство:

$$y_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + y_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) \leq y_1b_1 + \cdots + y_mb_m.$$

Перепишем по-другому:

$$(a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m)x_1 + \cdots + (a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m)x_n \leq y_1b_1 + \cdots y_mb_m$$

Двойственность в линейном программировании

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & \to \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq b_m \\ x_1, \ldots, x_n & \geq 0 \end{cases}$$

При любых константах $y_1, \ldots, y_m \geq 0$ имеем:

$$(a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m)x_1 + \cdots + (a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m)x_n \leq y_1b_1 + \cdots + y_mb_m$$

Если $(a_{1i}y_1 + \cdots + a_{mi}y_m) \geq c_i$ для каждого i, то

$$(a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m)x_1 + \cdots + (a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m)x_n \geq c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

Двойственность в линейном программировании

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & \to \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \le b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \le b_m \\ x_1, \dots, x_n & \ge 0 \end{cases}$$

Если величины $y_1, \dots, y_m$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m & \ge c_1 \\ \vdots & \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m & \ge c_n \\ y_1, \dots, y_n & \ge 0 \end{cases}$$

то при любых допустимых $x_1, \dots, x_n$ выполнено $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \le y_1b_1 + \cdots + y_mb_m$.

Слабая теорема двойственности

Утверждение (Weak duality theorem) — только что доказанное.

Если оптимальное значение целевой функции в задаче ЛП

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & \to \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq b_m \\ x_1, \dots, x_n & \geq 0 \end{cases}$$

Прямая задача

существует, то оно не превосходит оптимального значения целевой функции в задаче ЛП

$$\begin{cases} b_1y_1 + \cdots + b_my_m & \to \min \\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m & \geq c_1 \\ \vdots & \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m & \geq c_n \\ y_1, \dots, y_n & \geq 0 \end{cases}$$

Двойственная задача

Слабая теорема двойственности

Слабая теорема двойственности в векторной записи.

Если оптимальное значение целевой функции в задаче ЛП

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \to \max \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} & \geq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

существует, то оно не превосходит оптимального значения целевой функции в задаче ЛП

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} & \to \min \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} & \geq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} & \geq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Сильная теорема двойственности

Теорема (Strong duality theorem).

Если оптимальное значение целевой функции в прямой задаче ЛП

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \to \max \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} & \ge \boldsymbol{0} \end{cases}$$

существует, то оно **равно** оптимальному значению целевой функции в двойственной задаче ЛП

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} & \to \min \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} & \ge \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} & \ge \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Сильная теорема двойственности

Теорема двойственности — неформально.

Если задача ЛП имеет решение, то для такого решения всегда можно подобрать «сертификат качества» — л.к.н.к. (линейную комбинацию с неотрицательными коэффициентами) неравенств исходной задачи, гарантирующую оптимальность решения.

Исключение Фурье—Моцкина (Fourier—Motzkin elimination)

(Аналог метода исключения Гаусса.)

Пусть дана система

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}.$$

Умножением неравенств на положительные числа и перенумерацией можно привести систему к виду:

$$\begin{cases} x_1 + (\boldsymbol{a}_i')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' \le b_i & i \in \{1, \dots, m'\} \\ -x_1 + \left(\boldsymbol{a}_j'\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' \le b_j & j \in \{m' + 1, \dots, m''\} \\ (\boldsymbol{a}_k')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' \le b_k & k \in \{m'' + 1, \dots, m\} \end{cases}$$

где $\boldsymbol{a}_i'$ — строка матрицы $\boldsymbol{A}$ с удалённой первой координатой и т.д.

Исключение Фурье—Моцкина

$$\begin{cases} x_1 + (\boldsymbol{a}_i')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' \le b_i, & i \in \{1, \dots, m'\}, \\ -x_1 + \left(\boldsymbol{a}_j'\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' \le b_j, & j \in \{m'+1, \dots, m''\}, \\ (\boldsymbol{a}_k')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' \le b_k, & k \in \{m''+1, \dots, m\}. \end{cases}$$

У этой системы есть решение т. и т.т., когда имеет решение система

$$\begin{cases} \left(\boldsymbol{a}_j'\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' - b_j \le b_i - (\boldsymbol{a}_i')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}', & (i, j) \in \{1, \dots, m'\}\times\{m'+1, \dots, m''\}, \\ (\boldsymbol{a}_k')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' \le b_k, & k \in \{m''+1, \dots, m\}. \end{cases}$$

т.к. при известных $\boldsymbol{x}'$ можно подобрать x_1 из диапазона

$$\left[\max_j\left\{\left(\boldsymbol{a}_j'\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' - b_j\right\}, \min_i\{b_i - (\boldsymbol{a}_i')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}'\}\right]$$

Исключение Фурье—Моцкина

Система

$$\begin{cases} x_1 + (\boldsymbol{a}_i')^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}' \le b_i, & i \in \{1, \dots, m'\}, \\ -x_1 + \left(\boldsymbol{a}_j'\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}' \le b_j, & j \in \{m' + 1, \dots, m''\}, \\ (\boldsymbol{a}_k')^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}' \le b_k, & k \in \{m'' + 1, \dots, m\}. \end{cases}$$

имеет решение т. и т.т., когда имеет решение система

$$\begin{cases} \left(\boldsymbol{a}_i' + \boldsymbol{a}_j'\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}' \le b_i + b_j, & (i, j) \in \{1, \dots, m'\} \times \{m' + 1, \dots, m''\}, \\ (\boldsymbol{a}_k')^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}' \le b_k, & k \in \{m'' + 1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Исключение Фурье—Моцкина

По-русски:

По любой системе вида $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ можно построить такую систему $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$, такую, что

- каждое неравенство в $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$ есть л.к.н.к. неравенств $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$,
- в системе $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{b}'$ на одну переменную меньше, чем в $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$,
- есть решение у 1-й системы т. и т.т., когда есть решение у 2-й.

Лемма Фаркаша

Теорема (Gy. Farkas). Система $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$ имеет решение т. и т.т., когда не существует вектора $\boldsymbol{y}$, т.ч.

$$\begin{cases} \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} < 0. \end{cases}$$

По-русски:

Система неравенств типа «$\le$» имеет решение тогда и только тогда, когда нельзя подобрать такую линейную комбинацию (с неотрицательными коэффициентами) этих неравенств, чтобы

- в левой части получался тождественный нуль,
- а в правой части была отрицательная константа.

Лемма Фаркаша

Теорема (Gy. Farkas). Система $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ имеет решение т. и т.т., когда не существует вектора $\boldsymbol{y}$, т.ч.

$$\begin{cases} \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} < 0. \end{cases}$$

Доказательство $\Rightarrow$.

Очевидно.

Лемма Фаркаша

Теорема (Gy. Farkas). Система $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ имеет решение т. и т.т., когда не существует вектора $\boldsymbol{y}$, т.ч.

$$\begin{cases} \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} < 0. \end{cases}$$

Доказательство $\Leftarrow$.

Индукция по размерности $\boldsymbol{x}$.

База $\boldsymbol{x} = (x_1)$ — тривиальна.

Лемма Фаркаша

Теорема (Gy. Farkas). Система $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$ имеет решение т. и т.т., когда не существует вектора $\boldsymbol{y}$, т.ч.

$$\begin{cases} \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} < 0. \end{cases}$$

Пусть у системы $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$ нет решения. Тогда нет решения и у системы $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' \le \boldsymbol{b}'$, полученной из исходной системы исключением Фурье—Моцкина.

По п.и., существует л.к.н.к. неравенств системы $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' \le \boldsymbol{b}'$, в которой в левой части тождественный нуль, а в правой отрицательный скаляр.

Т.к. неравенства системы $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' \le \boldsymbol{b}'$ сами являются л.к.н.к. неравенств системы $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$, сразу получаем требуемое.

Лемма Фаркаша и её следствия

Следствие из леммы Фаркаша.
Система $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ имеет решение $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ т. и т.т., когда не существует вектора $\boldsymbol{y}$, такого, что $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} < 0$.

Доказательство. ⇒ *очевидно; докажем* ⇐.

Положим $\widehat{\boldsymbol{A}} \coloneqq \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ и $\widehat{\boldsymbol{b}} \coloneqq \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$.

Система $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ имеет решение $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ т. и т.т., когда имеет решение система $\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}} \leq \widehat{\boldsymbol{b}}$. Если система $\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}} \leq \widehat{\boldsymbol{b}}$ не имеет решения, то найдётся вектор $\widehat{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0}$, такой, что $\widehat{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{0}$ и $\widehat{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{b}} < 0$. Искомый вектор $\boldsymbol{y}$ легко получается из $\widehat{\boldsymbol{y}}$.

Лемма Фаркаша и её следствия

Следствие из леммы Фаркаша.
Система $\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}$ имеет решение $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ т. и т.т., когда не существует вектора $\boldsymbol{y}$, такого, что $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} \geq \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} < 0$.

Следствие следствия (по сути эквивалентное теореме двойственности).
Пусть система $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ имеет решение. Любое решение этой системы удовлетворяет неравенству $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \delta$, т. и т.т., когда существует вектор $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, такой, что $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \leq \delta$.

Доказательство. $\Leftarrow$ тривиально; остаётся обосновать $\Rightarrow$.

Пусть не существует $\boldsymbol{y}$, такого, что $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \leq \delta$.

Тогда не существует неотрицательного решения $(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}, \lambda) \geq \boldsymbol{0}$ у системы

$$(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}, \lambda)\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}, \delta).$$

По следствию из л.Ф., найдётся вектор $\begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \mu \end{pmatrix}$, такой, что $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \mu \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0}$ и $(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}, \delta)\begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \mu \end{pmatrix} < 0$.

Лемма Фаркаша и её следствия

Следствие следствия (по сути эквивалентное теореме двойственности).
Пусть система $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ имеет решение. Любое решение этой системы удовлетворяет неравенству $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \delta$, т. и т.т., когда существует вектор $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, такой, что $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \leq \delta$.

Доказательство $\Rightarrow$.

Пусть не существует $\boldsymbol{y}$, такого, что $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \leq \delta$.

Тогда найдётся вектор $\begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \mu \end{pmatrix}$, такой, что $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \mu \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0}$ и $\left(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}, \delta\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \mu \end{pmatrix} < 0$.

Рассмотрим два случая:

- Пусть $\mu = 0$. Тогда $\boldsymbol{Az} \geq \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} < 0$. Тогда $\boldsymbol{A}(-\tau\boldsymbol{z}) \leq \boldsymbol{0}$ для любого $\tau \geq 0$.
  Пусть $\boldsymbol{x}_0$ — произвольное фиксированное решение системы $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$.
  При достаточно больших τ получим $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0 - \tau\boldsymbol{z}) \leq \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0 - \tau\boldsymbol{z}) > \delta$ — противоречие.
- Пусть $\mu > 0$. Тогда $\boldsymbol{A}\left(-\frac{1}{\mu} \cdot \boldsymbol{z}\right) \leq \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\left(-\frac{1}{\mu} \cdot \boldsymbol{z}\right) > \delta$ — противоречие.

Сильная теорема двойственности

Следствие леммы Фаркаша.

Пусть система $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ имеет решение. Любое решение этой системы удовлетворяет неравенству $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \delta$, т. и т.т., когда существует вектор $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, такой, что $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \leq \delta$.

Теорема двойственности — неформально.

Если задача ЛП имеет решение, то для такого решения всегда можно подобрать «сертификат качества» — л.к.н.к. неравенств исходной задачи, гарантирующую оптимальность решения.

Дополняющая нежёсткость (complementary slackness)

Пусть $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальное решение в прямой задаче ЛП

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & \to \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \le b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \le b_m \\ x_1, \dots, x_n & \ge 0 \end{cases}$$

Обратное тоже верно!

а $\boldsymbol{y}^*$ — оптимальное решение в двойственной задаче ЛП

$$\begin{cases} b_1y_1 + \cdots + b_my_m & \to \min \\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m & \ge c_1 \\ \vdots & \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m & \ge c_n \\ y_1, \dots, y_n & \ge 0 \end{cases}$$

Тогда

$$a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \cdots + a_{mj}y_m^* > c_j \quad \Rightarrow \quad x_j^* = 0$$
$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \cdots + a_{in}x_n^* < b_i \quad \Rightarrow \quad y_i^* = 0$$